

# BULLETIN FRANÇAIS D'ACTUARIAT

*Édité par l'Institut des Actuaire*s

## ARTICLES

<b>G. LEROY</b>	
<i>Tables de mortalité : vers un rôle et des responsabilités accrues pour l'Institut des Actuaire</i> s et les actuaires .....	1
<b>T. POINCELIN</b>	
<i>Commission d'agrément des actuaire</i> s .....	7
<b>C. MAGIS, M. DENUIT, J.F. WALHIN</b>	
<i>La TPRV française : dépassée ?</i> .....	11
<b>C. MAGIS, M. DENUIT, J.F. WALHIN</b>	
<i>La mortalité, un phénomène en pleine mutation : quelle solution pour le marché des rentes ?</i> .....	43
<b>A. DELWARDE, D. KACHACHIDZE, L. OLIE, M. DENUIT</b>	
<i>Modèles linéaires et additifs généralisés, maximum de vraisemblance local et méthodes relationnelles en assurance sur la vie</i> .....	77
<b>C. DOUVILLE</b>	
<i>Tarifification des risques industriels par le modèle de crédibilité : prise en compte de la taille des risques, extension à l'assurance des pertes d'exploitation</i> .....	103
<b>I. HADJI, A. MONTFORT</b>	
<i>Approche semi-paramétrique du calcul des provisions techniques : ajustement de surfaces</i> .....	137
<b>O. ROUSTANT, J.-P. LAURENT, X. BAY, L. CARRARO</b>	
<i>A bootstrap approach to the price uncertainty of weather derivatives</i> .....	153
<b>D. CADOUX, J.-M. LOIZEAU</b>	
<i>Copules et dépendances : application pratique à la détermination du besoin en fonds propres d'un assureur non vie</i> .....	173
<b>J. WETZEL</b>	
<i>Comment déterminer le rendement d'un régime de retraite par répartition qui accepte de constituer des réserves</i> .....	209

## MÉMOIRES

Mémoires d'actuaire .....	215
---------------------------	-----

## DIVERS

28 <sup>ème</sup> Congrès International des Actuaires, Paris.....	229
Evènement .....	231
In memoriam, A. TOSETTI .....	232
Ouvrages parus .....	235



## INSTITUT DES ACTUAIRES

Jean-Marie NESSI, Président

### Editeur :

Christian PARTRAT

### Comité d'édition :

J. BERTHON	P. DEHEUVELS
J.L. BESSON	J. KIMMEL
J. CHEVALIER	P. ROGER
A. CHEVREAU	D. SERANT
A. CLEMENT-GRANDCOURT	

### CONSEIL D'ADMINISTRATION

<b>Jean-Marie NESSI</b> Président				
<b>Michel PIERMAY</b> Vice-président				
<b>Thomas BEHAR</b> Trésorier	<b>Franck PINETTE</b> Secrétaire général	<b>Véronique LAMBLÉ</b> Président sortant	<b>Sophie MICHON</b> Secrétaire général adjoint	<b>Charles DESCURE</b> Trésorier adjoint
<b>Jean BERTHON</b> Vice Président Délégué			<b>Renaud DUMORA</b> Vice Président Délégué	
<b>Jean-Luc BESSON</b> Administrateur	<b>Daniel BLANCHARD</b> Administrateur	<b>Emmanuel DUBREUIL</b> Administrateur	<b>Christophe EBERLÉ</b> Administrateur	
<b>Norbert GAUTRON</b> Administrateur	<b>Marie-Thérèse LANCE</b> Administrateur	<b>Anne-Marie LOUVEL</b> Administrateur	<b>Amélie MOURENS</b> Administrateur	
<b>Hélène N'DIAYE</b> Administrateur	<b>Alkis TSIMARATOS</b> Administrateur	<b>Charles VINCENSINI</b> Administrateur		

### DEPARTEMENTS

<b>Accréditation</b> Thomas BEHAR	<b>Carrières</b> Marie-Christine CHEYMOL	<b>Communication</b> Sophie MICHON	<b>Doctrine Actuarielle</b> Thierry POINCELIN
<b>Formation</b> Jean-Luc BESSON	<b>International</b> Jean BERTHON Renaud DUMORA	<b>Recherche &amp; Développement</b> Charles DESCURE	

### Siège social :

**Maison des Actuaire**

**4 Rue Chauveau Lagarde – 75008 PARIS**

*Mise en page assurée par l'I.S.F.A. (Université Claude Bernard – Lyon 1)*

# **TABLES DE MORTALITE : VERS UN ROLE ET DES RESPONSABILITES ACCRUS POUR L'INSTITUT DES ACTUAIRES ET LES ACTUAIRES**

Guillaume LEROY

*WINTER & Associés*

*Président de la Commission Tables de  
mortalité de l'Institut des Actuaires*

Les tables de mortalité constituent depuis l'origine un facteur essentiel intervenant dans l'établissement des tarifs des compagnies d'assurance sur la vie.

A ce titre, les actuaires qui ont joué un rôle depuis toujours dans l'établissement des tarifs des contrats ont contribué largement à l'élaboration des tables de mortalité servant à la définition de ces tarifs.

Ceci étant, et au cours des dernières années, l'accélération des phénomènes d'évolution de la mortalité de la population d'une part, l'amélioration des systèmes d'information des organismes assureurs d'autre part ont donné une impulsion nouvelle à la réflexion sur les tables d'expérience auxquelles l'Institut des Actuaires s'est pleinement associé en intervenant de manière croissante dans la prise en compte des phénomènes de mortalité dans l'assurance en général et dans l'évolution de la réglementation technique applicable aux opérations d'assurance vie en matière de table de mortalité en particulier.

De fait, l'Institut des Actuaires s'est fortement impliqué dans l'élaboration et la mise en œuvre de réglementation applicable aux tables de mortalité depuis 1993.

Il collabore avec les pouvoirs publics et les autres organismes professionnels pour faire évoluer les règles et les pratiques en la matière, dans l'intérêt de la sécurité des assurés et avec l'objectif de faire profiter l'ensemble des professions concernées de l'apport des actuaires en la matière.

## **1. L'INSTITUT DES ACTUAIRES A JOUE UN ROLE CROISSANT DANS LE FONCTIONNEMENT DE L'ELABORATION ET DE L'UTILISATION DES TABLES DE MORTALITE DEPUIS 1993**

### **1.1. La réforme des textes applicables aux entreprises d'assurance en matière de tables de mortalité en 1993 a placé la réflexion sur les tables au centre des préoccupations de la communauté actuarielle**

La réforme technique des tables de mortalité utilisables par les compagnies d'assurances - décidée en 1993 par les autorités réglementaires françaises dans le cadre de l'article A 335-1 du Code des Assurances a fait évoluer significativement les modalités d'utilisation des tables de mortalité aux opérations des entreprises d'assurance sur la vie puis aux institutions de prévoyance (article A 931-10-10 du Code de la Sécurité Sociale) et aux mutuelles du Code de la Mutualité (article A 212-10 du Code de la Mutualité).

Utilisatrices de tables réglementaires générales sans marge de manœuvre jusque là, les entreprises d'assurance se sont vues autorisées par l'autorité réglementaire à prendre en charge l'analyse de leurs propres risques de mortalité au travers de l'utilisation de tables d'expérience établies par leurs soins, certifiées par des actuaires indépendants de l'entreprise agréés à cette fin par la Commission d'Agrément, sous le contrôle de la Commission de Contrôle des Assurances.

Au même moment, le choix de tables prospectives visant à apprécier le risque de mortalité des rentiers de manière dynamique a été retenu : cette solution était envisageable du fait de l'amélioration des moyens de traitement informatique et découlait de l'observation d'une dérive rapide et différenciée selon les générations de la mortalité des rentiers depuis quelques années, ce qui en l'absence de normes d'ajustement pouvait s'avérer préoccupant pour les entreprises et les assurés.

Cette double modification des règles applicables aux tables de mortalité utilisées par les entreprises d'assurance a fait fortement évoluer les pratiques en la matière en créant la possibilité d'une concurrence par les tarifs (dans les contrats de risques Décès essentiellement) et en modifiant l'appréhension du risque de Survie au travers de la prise en compte de tables prospectives dont les articles du présent numéro font apparaître le rôle essentiel et pertinent dans l'appréciation du risque viager.

Simultanément, l'introduction pour la première fois de l'actuaire dans la réglementation prudentielle donnait à notre profession une légitimité qu'elle n'avait pas eue auparavant.

Depuis cette date, et dans le strict respect des pratiques déontologiques qui doivent être celles de la profession actuarielle en France à l'instar des pays étrangers, l'Institut a permis l'apparition d'une activité raisonnable et prudente d'élaboration de tables de mortalité d'expérience par les actuaires des entreprises et de certification de ces tables par

des actuaires indépendants. Cette certification permet de traiter distinctement des populations aux caractéristiques viagères différentes et ce sans problème pratique.

L'ensemble de ces éléments s'est avéré efficace mais a aussi rencontré ses limites du fait des évolutions biologiques comme de l'évolution des nécessités réglementaires.

### **1.2. Les limites du modèle de tables de mortalité retenu jusqu'ici**

Ainsi que le soulignent les auteurs des articles suivants, les tables de mortalité prospectives et plus généralement les tables de mortalité utilisées par les entreprises d'assurance ne sont valides que sur une période de temps limitée ; au-delà la dynamique de la mortalité périclète les tables précédemment en vigueur. Il apparaît donc nécessaire de les revoir périodiquement.

Or, alors que cette évolution apparaissait dans les travaux menés par les membres de l'Institut dans le cadre de l'établissement de tables de mortalité d'expérience depuis plusieurs années, les autorités réglementaires n'avaient pas eu la possibilité d'effectuer un tel ajustement depuis 1993.

De ce fait, les tables utilisées apparaissaient non plus prudentes mais tout juste suffisantes pour nombre de populations féminines en matière de rente viagère. Les écarts entre les taux de mortalité pris en compte dans les tarifs et la table réglementaire en matière de risque Décès apparaissaient de plus en plus extravagants.

De surcroît, les différences de traitement entre les sexes qui apparaissent systématiquement dans les études sur la mortalité n'étaient pas prises en compte de manière directe par la réglementation, ce qui pouvait apparaître à de nombreux égards d'autant plus discutable dans une période où la différence de traitement entre les sexes et la prise en compte de leurs identités respectives est de plus en plus recherchée.

Ainsi, l'innovation que constitue la réforme de 1993 a progressivement produit son plein effet mais une remise à jour de ses bases de référence et de certains de ses principes apparaissait indispensable tant scientifiquement que pratiquement.

## **2. LA REFORME DES TABLES DE MORTALITE REGLEMENTAIRES LANCEE PAR LES POUVOIRS PUBLICS FAIT EVOLUER DE NOUVEAU LE ROLE DES ACTUAIRES ET DE L'INSTITUT DES ACTUAIRES.**

Conscient des problèmes précédemment évoqués, les pouvoirs publics ont décidé de mettre en œuvre une nouvelle réforme des tables de mortalité dans l'objectif d'une appréciation pertinente des risques auxquels sont confrontées les entreprises d'assurance.

A cette fin des travaux ont été initiés, qui débouchent sur une réforme des tables de référence pour les différents risques auxquels sont soumises les entreprises d'assurance et leurs assurés. C'est l'objet de l'arrêté du 20 décembre 2005 que de traduire cette réalité nouvelle.

Dans un premier temps, les risques Décès et Vie hors rentes viagères sont concernés par la mise à jour des tables réglementaires, les tables TD 88/90 pour tous les risques Décès et TV 88-90 pour tous les risques Vie pourront être respectivement remplacées par les tables TF 00-02 pour les femmes et TH 00-02 pour les hommes quel que soit le risque (avec prise en compte d'un décalage d'âge pour les contrats en cas de vie hors rentes viagères).

A cette occasion, les pouvoirs publics, conscients des nécessités de prendre en compte les différences de comportement entre sexe, soulignent les différences en la matière et le nécessaire ajustement des tables de référence qui pourront par ailleurs faire l'objet de prise en compte des situations spécifiques au travers de lois d'expérience établies par l'entreprise à partir de références pertinentes (internes ou externes sur la base de « données d'expérience démographiquement équivalentes ») et certifiées par des actuaires indépendants agréés par la Commission d'Agrément.

De même, pour les contrats comportant les plus forts risques d'antisélection - en cas de choix de la rente ou du capital au gré de l'assuré -, la prise en compte « appropriée » de coefficients d'antisélection via l'usage de « tables appropriées » est prévue par la nouvelle rédaction de l'article A 335-1 du Code des Assurances.

Dans un même souci de réalisme et au-delà de ce texte applicable au 1<sup>er</sup> janvier 2006<sup>1</sup>, les pouvoirs publics ont souhaité impliquer l'ensemble des acteurs de la place (Fédérations Professionnelles d'Organismes Assureurs et Institut des Actuaires) dans une réflexion sur les tables de mortalité de rentes viagères de manière à disposer d'informations aussi pertinentes et aussi récentes que possible pour les différentes populations concernées.

En la matière, les travaux envisagés passent par le remplacement de la table TPRV et des tables TPG 93 dont il est question dans les articles suivants par les tables de place à jour établies « sur la base de populations d'assurés » qui seraient utilisées par sexe ou de manière indifférenciée.

Enfin, et dans le cadre des contrats d'assurance en cas de vie souscrits auprès d'institutions de retraite professionnelles qui vont être prochainement créées en droit

---

<sup>1</sup> Toutefois, et pour les contrats faisant l'objet de risques d'antisélection spécifiques, la prise en compte de coefficients d'antisélection « appropriés » sera retenue à compter du 1<sup>er</sup> juillet 2006.

français, les tarifs applicables aux opérations d'assurance sur la vie seront totalement libres à l'instar de ce qui est prévu par l'autorité réglementaire pour les entreprises d'assurance en matière de risque Décès et dans le droit fil de l'ouverture de la plus grande concurrence voulue par les autorités communautaires.

Dans le cadre de cette réforme qui approfondit les options retenues en 1993, l'Institut des Actuares a souhaité au travers de sa Commission Réforme des tables de mortalité participer aux travaux de place et imprimer une réflexion aussi pratique et opérationnelle que possible à ceux-ci afin de respecter les légitimes attentes des assurés des compagnies d'assurances, des entreprises d'assurance et des actuares membres de l'Institut.

Ces travaux s'inscrivent donc dans la prise en compte des orientations techniques évoquées dans les articles suivants ainsi que dans le souci de faire progresser la réflexion sur les tables de mortalité d'une part et la réflexion actuarielle en la matière d'autre part.

### **3. CONCLUSION**

La réflexion sur les tables de mortalité est un sujet de préoccupation classique des actuares.

L'amélioration des moyens d'information d'une part, la volonté des pouvoirs publics et des opérateurs d'assurance qu'il faut saluer en la matière ainsi que les travaux des membres de l'Institut des Actuares d'autre part, ont contribué à faire évoluer la réflexion en la matière significativement depuis une dizaine d'années.

La nouvelle réforme qui se prépare devrait renforcer encore la dynamique marquée en la matière par le souci du réalisme de l'analyse du risque et la volonté d'adapter l'appréciation des risques aux situations individuelles en respectant la démarche scientifique de l'actuaire.

Notre profession est donc face à des enjeux significatifs de crédibilité en la matière. La même préoccupation pourrait en effet être élargie à d'autres risques longs pour lesquels les actuares peuvent contribuer efficacement à faire évoluer la réflexion : l'invalidité et, peut-être, demain, la dépendance.





**COMMISSION D'AGREMENT DES ACTUAIRES HABILITES A CERTIFIER  
LES TABLES DE MORTALITE ET LES LOIS DE MAINTIEN  
EN INCAPACITE DE TRAVAIL ET EN INVALIDITE**

Thierry POINCELIN

*AGIRC – ARRCO*

*Président de la Commission d'agrément*

**Certification des tables d'expérience**

La commission d'agrément a été créée à la suite de l'arrêté du 19 mars 1993 permettant aux compagnies d'assurances d'utiliser une table de mortalité établie sur les données de leurs portefeuilles et certifiée par un actuair e indépendant de l'entreprise appartenant à une association d'actuai res reconnue par la Commission de contrôle des assurances.

Par la suite, cette possibilité a été offerte aux mutuelles et aux institutions de prévoyance.

Puis la même réglementation a été étendue aux lois de maintien en incapacité de travail et en invalidité. Une commission spécifique à l'incap-inval a été mise en place. En toute logique compte tenu des mêmes missions et des mêmes modalités d'habilitation les deux commissions ont fusionné. Nous avons donc deux fois trois arrêtés qui concernent la certification.

La création de la commission d'agrément a suscité immédiatement un vif intérêt de la part des actuai res, salariés ou indépendants.

Les exigences en matière d'expérience et d'indépendance ont tempéré certaines ardeurs, car si près de cent vingt dossiers « mortalité » ont été déposés à l'origine seuls quelques uns ont franchi cette première étape.

Depuis l'origine, cent quarante dossiers ont été déposés, vingt cinq candidatures fermes ont été examinées et vingt trois actuai res sont agréés.

Les chiffres pour l'incapacité et l'invalidité sont respectivement de trente six dépôts de dossiers, dix sept candidatures retenues et quatorze agréments.

L'activité des actuai res agréés a donné lieu à la certification de moins de soixante tables de mortalité d'expérience et de quinze lois de maintien. Concernant les tables de mortalité d'expérience, la grande masse concerne essentiellement des contrats en cas de décès, parfois des contrats de capitaux différés. Alors que chacun connaît le problème de sous provisionnement des rentes viagères, seules trois tables de mortalité prospectives concernant les rentes viagères ont été certifiées, la dernière en 1996. Les explications

peuvent être de plusieurs natures. La première d'ordre technique, les systèmes de gestion et la taille des portefeuilles ne permettant pas toujours d'obtenir des données historiques fiables et en effectifs suffisants. La seconde est probablement un refus d'augmenter les provisions techniques ... et de diminuer les résultats.

La certification nous semble pour les tables en cas de décès à la limite de l'esprit des textes, ces tables certifiées semblant justifier plus un tarif qu'un provisionnement.

En revanche en matière d'incap-ival, nous n'avons pas ces étonnements.

En douze années d'existence, la commission a évolué.

Elle s'est d'abord élargie. Chaque mandat est rempli par un membre titulaire et un membre suppléant. La composition de la commission reflète les différentes origines de ses membres pour ceux qui sont mandatés par l'Institut des actuaires, et comporte des représentants des organismes institutionnels concernés (FFSA, GEMA, FNMF, CTIP) sachant que les mandats de ces derniers sont au nombre de six sur les quinze mandats totaux de la commission.

Elle s'est dotée de textes précisant ses règles de fonctionnement et les devoirs des actuaires certificateurs. C'est ainsi qu'un code de déontologie des règles spécifiques à l'activité de certification a été rédigé et qui lui-même a évolué en fonction de l'expérience acquise par la commission dans son rôle de contrôle de l'activité de certification et de compte rendu aux autorités de tutelle et aux organismes mandants. Ces règles déontologiques, bien évidemment, complètent celles de l'Institut des Actuaires et du SACEI.

La forme du rapport annuel d'activité des actuaires certificateurs a été définie puis modifiée à plusieurs reprises pour apporter plus de précision à ce compte rendu d'activité. Les mandats doivent comporter des clauses type acceptées par l'organisme qui demande la certification.

La commission a vu la qualité des rapports annuels croître à quelques rares exceptions près. Elle a été parfois amenée à demander une nouvelle rédaction du rapport annuel d'activité.

Parallèlement, le président a constaté une amélioration constante dans l'implication de ses membres.

Si la commission habilite, en contrepartie, elle a la possibilité de prendre des sanctions envers un actuair qui ne respecterait pas les règles (déontologiques ou techniques), soit de sa propre initiative au vu du contenu du rapport d'activité, soit à la demande de la Commission de contrôle. Ces sanctions peuvent, après avoir entendu

l'actuaire mis en cause, aller de l'avertissement jusqu'au retrait d'agrément en passant par la suspension temporaire de l'agrément. Jusqu'à maintenant la commission a eu deux fois le devoir de rappeler aimablement les règles d'indépendance entre le certificateur et le constructeur de la table. Seul un cas de non respect des règles a justifié l'avertissement formel.

Sur le plan technique, la commission a rédigé un guide line de la certification des tables de mortalité instantanées à l'intention des actuaires certificateurs qui devrait intégrer les règles professionnelles de l'Institut. La même démarche est entreprise pour l'Incap-  
invalid et deux étudiants du CEA ont été mis sur le sujet. La prochaine étape en cette matière sera d'étendre le guide line de la mortalité à la construction des tables prospectives.

L'avenir immédiat est la création du processus d'agrément des actuaires habilités à rédiger le rapport actuariel destiné au conseil de surveillance des PERP et du contenu du rapport lui-même.

Les travaux des deux groupes de travail constitués à cet effet sont terminés, validés par le conseil d'administration de l'Institut des actuaires. Le processus de reconnaissance de l'Institut par la CCAMIP est en cours. Une fois cette étape légale franchie, la commission évoluera en deux sections, l'une consacrée comme par le passé à la mortalité et à l'incapacité, l'autre au PERP. Enfin ceci fait, il restera à faire un travail de synthèse sur l'ensemble des textes des deux sections de la commission d'agrément.



## LA TPRV FRANÇAISE : DÉPASSÉE ?

Corinne MAGIS<sup>\$</sup>

Michel DENUIT<sup>\*\*</sup>

Jean-François WALHIN<sup>\*\*</sup>

\* *Secura*

• *Institut des Sciences Actuarielles, Université Catholique de Louvain*

\* *Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain*

\$ *Fortis*

### RESUME

Les progrès de la médecine ainsi que l'amélioration du niveau de vie dans nos pays industrialisés provoquent une diminution de la mortalité. Dans un tel contexte, il est nécessaire de développer des tables de mortalité prospectives, prenant en compte cette constante évolution. Celles-ci deviennent rapidement lourdes à utiliser. En effet, les assureurs sont alors contraints de travailler avec des tables comportant deux entrées: l'âge  $x$  de l'assuré et sa génération  $g$ , ce qui implique une gestion assez fastidieuse. Les assureurs préfèrent dès lors disposer d'une base de calcul moins volumineuse que la collection de tables prospectives (une par génération et sexe). C'est pourquoi nous nous intéressons dans cet article au développement d'une table du type de la *TPRV* (Table Pour Rentes Viagères) qui est d'application actuellement en France.

### 1. INTRODUCTION

La nécessité d'utiliser des tables prospectives telles que celles développées dans notre précédent article (voir MAGIS, DENUIT & WALHIN (2004)) n'est plus à démontrer. En effet, on assiste ces derniers temps à une diminution de la mortalité, surtout aux grands âges. L'assureur doit par conséquent utiliser les bases techniques les plus proches de la réalité. Sans quoi, de graves problèmes budgétaires risquent de survenir dans les prochaines années en ce qui concerne le paiement de rentes viagères : pensions, assurance vie,...

Le législateur français a bien assimilé cette nécessité puisque le 28 juillet 1993, des tables de générations ont été homologuées par arrêté. Celles-ci ont été obtenues sur base de la mortalité de la population féminine observée sur la période 1961-1987. Ces tables

servent depuis le 1<sup>er</sup> juillet 1993 à la tarification et au provisionnement des contrats de rentes viagères immédiates ou différées. Elles imposent un tarif minimal<sup>1</sup>. Malheureusement, cet ensemble de tables devient rapidement complexe à utiliser. Les assureurs aimeraient dès lors disposer d'une base de calcul moins volumineuse que la collection de tables prospectives. Pour cette raison, les entreprises d'assurance françaises ont la faculté d'utiliser une table de mortalité unique, appelée table prospective des rentes viagères *TPRV*<sup>2</sup>. La table *TPRV* est en réalité la table de la génération des femmes de 1950<sup>3</sup>, disponible en annexe à la table 10, à laquelle on applique des décalages d'âge visant à déterminer l'âge technique de l'assuré. Les générations antérieures à celle de 1950 seront vieilles et les générations postérieures seront rajeunies, vu qu'elles auront pu bénéficier des progrès scientifiques et par conséquent, vivront en moyenne plus longtemps. Ces décalages sont identiques pour les hommes et les femmes. Ils varient en fonction de la valeur du taux technique auquel le prix de la rente est calculé. Ces décalages doivent permettre d'obtenir des tarifications proches de celles résultant de l'application directe des tables de générations. Les décalages pour un taux de 0% par exemple sont les suivants :

<i>génération</i>	$d^{h,f}$	<i>génération</i>	$d^{h,f}$
1901 → 1910	5	1954 → 1960	-1
1911 → 1920	4	1961 → 1967	-2
1921 → 1929	3	1968 → 1975	-3
1930 → 1937	2	1976 → 1984	-4
1938 → 1946	1	>1984	-5
1947 → 1953	0		

**Table 1.** Décalages réglementaires, pour un taux technique de 0%.

Considérons un rentier né en 1955. Si nous voulons calculer son espérance de vie à 60 ans, en adoptant le principe de la *TPRV*, ce sera simplement l'espérance de vie à  $60-1=59$  ans, obtenue sur base de la table de génération des femmes de 1950.

Aujourd'hui, comme annoncé dans MAGIS et al. (2004), la *TPRV* française semble dépassée. Il est dès lors opportun d'actualiser celle-ci en fonction des données supplémentaires disponibles et également d'étudier des décalages par sexe ainsi que des

<sup>1</sup> Tarif minimal prévu à l'article A.335-1 du Code des Assurances, l'Argus éd.

<sup>2</sup> Celle-ci ainsi que les tableaux de décalages sont disponibles dans le Code des Assurances, l'Argus éd.

<sup>3</sup> Table obtenue sur base des données féminines françaises pour les années d'observation de 1961 à 1987.

tables de référence distinctes vu la disparité existant entre la mortalité masculine et féminine. C'est ce à quoi nous nous intéressons dans le présent article.

## 2. PRINCIPE

En toute généralité, le principe de la table *TPRV* est donc de sélectionner une table de génération de référence, notée  $G$ , à laquelle on va appliquer des décalages d'âge  $d$  visant à déterminer l'âge technique  $x' = x + d$  de l'assuré. Les générations antérieures à celle de référence seront vieilles et les générations postérieures seront rajeunies. Si nous notons  $e_{x,g}$ , l'espérance de vie à l'âge  $x$  pour un individu de la génération  $g = G + j$ , on a donc :

$$e_{x,g} \approx e_{x',G}, \quad (1)$$

où

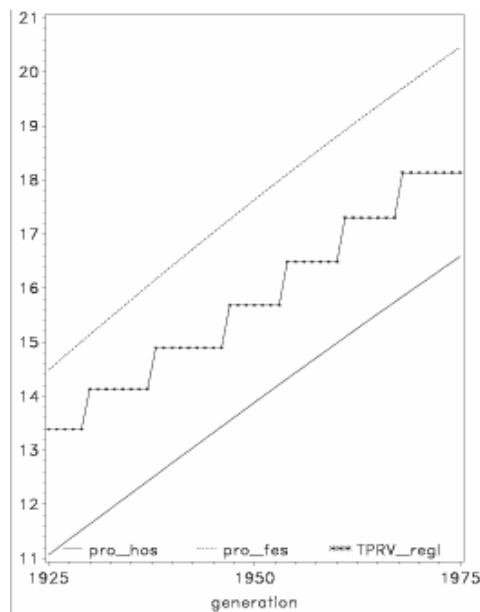
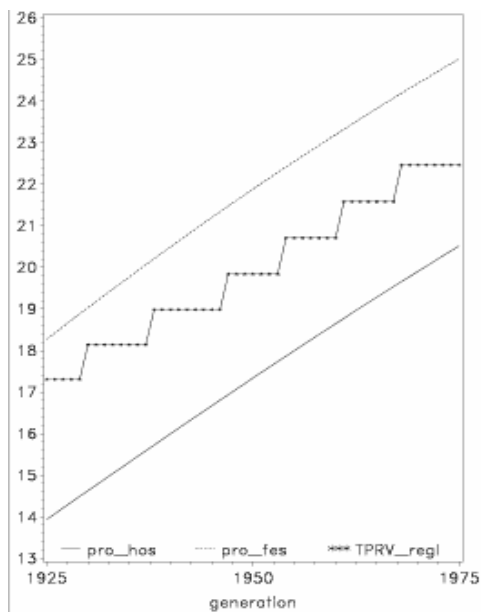
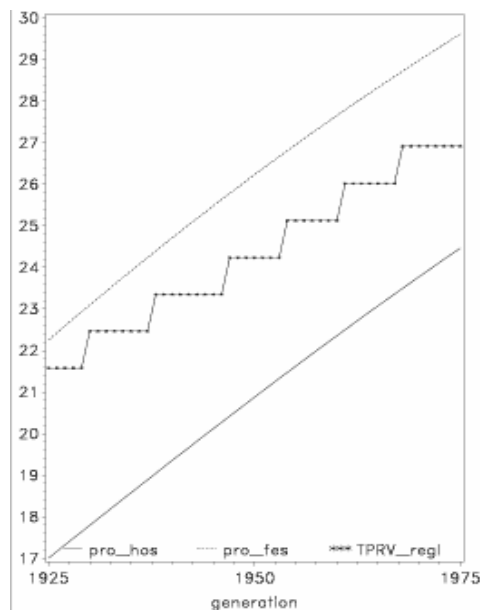
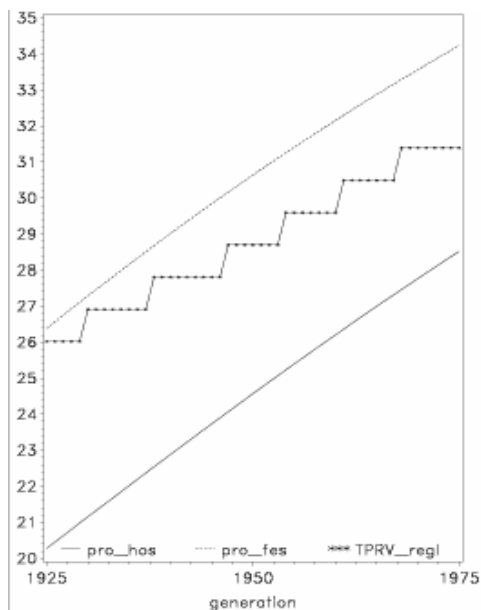
- $x'_j = x + d(j)$  est l'âge technique d'un individu d'âge  $x$  issu de la génération  $(G + j)$ ;
- $d(j)$  représente le décalage à appliquer. Celui-ci dépend bien sûr de la génération à laquelle l'assuré appartient. On a  $d(j) \geq 0$  pour  $j \leq 0$  et  $d(j) \leq 0$  pour  $j \geq 0$ .

Remarquons qu'un principe similaire est aussi d'application dans les pays germaniques. Le modèle appliqué en Suisse, en Autriche et en Allemagne se base sur les quotients de mortalité de la façon suivante :

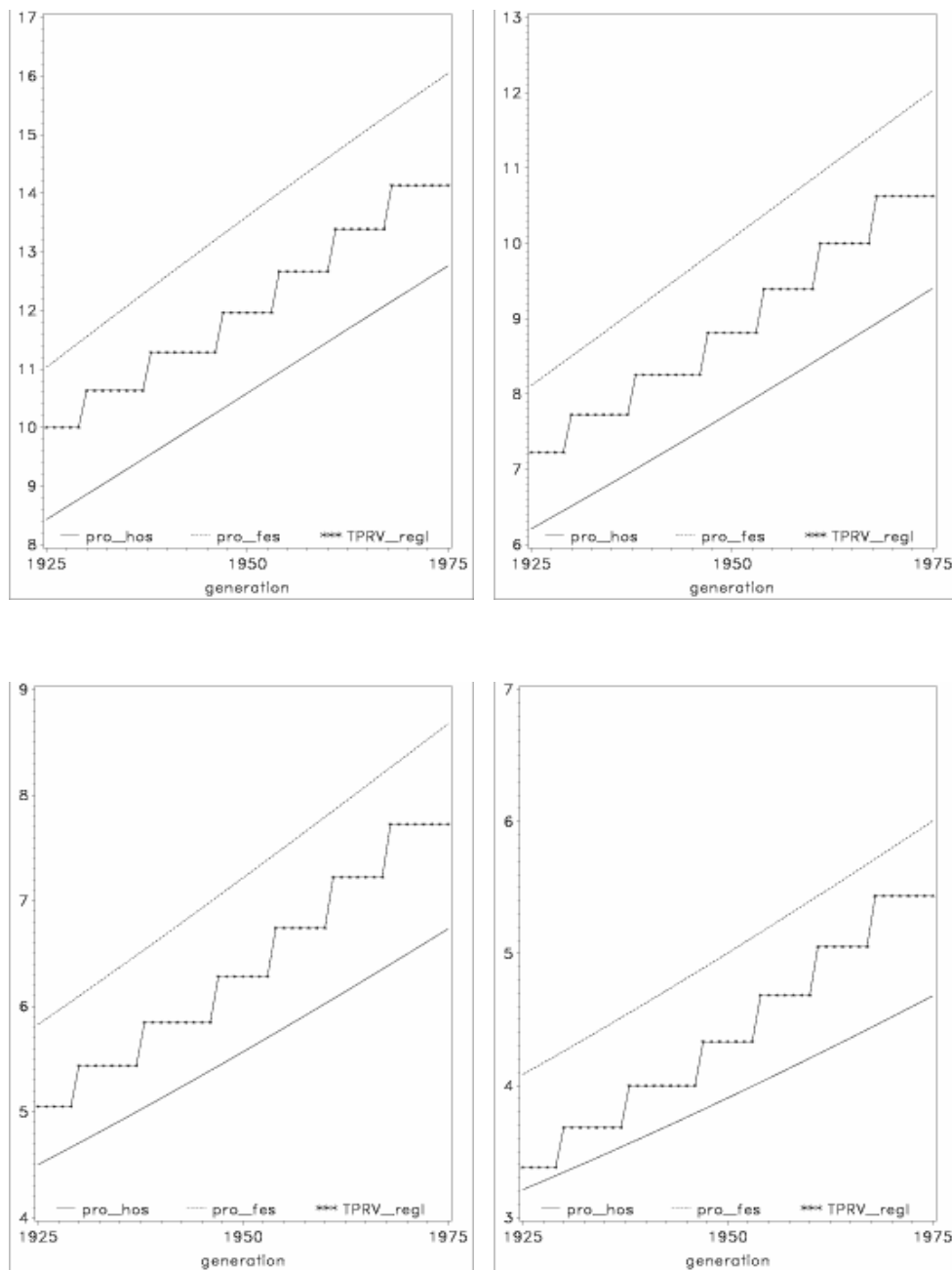
$$q_{x,g} \approx q_{x,G} \exp(-\lambda_x(j)).$$

Le quotient de mortalité à l'âge  $x$  pour la génération  $g = G + j$  est donc réduit ou augmenté selon que la génération est postérieure ou antérieure à la génération de référence  $G$  :  $\lambda_x(j) \leq 0$  si  $j \leq 0$  et  $\lambda_x(j) \geq 0$  si  $j \geq 0$ . Le principe est donc quelque peu semblable à celui de la *TPRV*. Le facteur  $\lambda$  peut en outre dépendre de l'âge  $x$ .

Observons à la figure 1 quelques résultats obtenus d'une part, sur base des tables prospectives développées par MAGIS, DENUIT & WALHIN (2004) et d'autre part, sur base réglementaire. Nous constatons que la table *TPRV* ne semble plus contenir de chargement de sécurité pour les femmes.







**Figure 1.** Espérances de vie par génération pour les âges de 60 à 95 ans, de 5 ans en 5 ans, sur base des tables prospectives et de la *TPRV* réglementaire.

Tout d'abord, la génération de référence est celle des femmes nées en 1950. La table de génération correspondante a été élaborée sur base des statistiques des années de 1961 à 1987. Depuis, plus de dix années d'observation supplémentaires se sont écoulées. Or, des tables prospectives doivent être revues constamment à la lumière des nouvelles données disponibles. Il serait donc judicieux d'adapter les tables de génération sur lesquelles se base la *TPRV*.

Ensuite, la table de génération de référence est identique pour les deux sexes de même que les décalages proposés. Nous pourrions nous poser des questions quant à la perspicacité de ce choix. En effet, il existe une grande disparité entre la mortalité des femmes et celle des hommes : les femmes vivent en moyenne plus longtemps. Un portefeuille bien équilibré peut donc permettre une bonne mutualisation du risque en le répartissant sur les hommes et les femmes mais qu'en est-il des portefeuilles non mixtes ? Un portefeuille entièrement féminin serait sous-tarifé alors que l'inverse mènerait à une surtarification grossière, totalement arbitraire. Par conséquent, il est peut-être opportun de se pencher sur différents choix de génération de référence et de décalages pour les deux sexes. C'est ce que nous ferons dans la suite de ce travail.

Enfin, rappelons que l'antisélection n'est pas prise en compte et qu'il y a donc de fortes chances pour que la *TPRV* soit insuffisante. En effet, il ne faut pas oublier que la mortalité des rentiers est différente de celle de la population générale: on constate une sous-mortalité des rentiers, surtout lorsque la rente est souscrite de manière volontaire. Il faut donc tenir compte de cette antisélection et garder à l'esprit que la *TPRV* construite sur base des données population sous-estimera toujours la durée de vie des rentiers.

Les observations faites ci-dessus motivent le développement d'une nouvelle *TPRV*, la plus proche possible des tables de mortalité prospectives.

### 3. LA NOUVELLE *TPRV*

Appliquons un principe similaire à celui de l'actuelle *TPRV* française. Nous devons dans un premier temps sélectionner une génération de référence, soit la génération  $G$ , c'est-à-dire celle âgée de  $(t - G)$  ans en l'année  $t$ . Pour la *TPRV*, celle-ci est identique pour les deux sexes, en l'occurrence la génération des femmes de 1950. Comme nous l'avons dit plus haut, nous préférons pour notre part opter pour des choix distincts selon le sexe. Nous retiendrons par conséquent les tables de génération de 1950 masculine et féminine développées dans notre précédent article (voir MAGIS, DENUIT & WALHIN (2004)). L'une ou l'autre est utilisée selon le sexe de l'assuré auquel on s'intéresse. L'année de naissance

1950 nous paraît raisonnable comme référence étant donné qu'un portefeuille de rentiers est généralement constitué en grande partie de personnes âgées de plus de 50 ans.

Le critère adopté pour déterminer les décalages à appliquer afin d'obtenir l'âge technique de l'assuré se base sur un critère de moindres carrés, portant sur l'espérance de vie ou encore sur le prix des rentes viagères. Ainsi, on va chercher à minimiser les écarts entre les espérances de vie ou les prix de rentes viagères à l'âge  $x$  d'un individu en vie durant l'année  $t$ , c'est-à-dire appartenant à la génération  $(t - x)$  et ceux à l'âge technique,  $x'$ , d'un individu de la génération de référence  $G$ .

Notons, comme précédemment,  $e_{x,g}$ , l'espérance de vie à l'âge  $x$  pour un individu de la génération née en  $g$ .

La fonction objectif, pour chacune des générations, s'écrit :

$$\Delta_e^2(j) = \min_{d(j)} \sum_{x=x_s}^{x_S} (e_{x',j,G} - e_{x,G+j})^2, \quad (2)$$

où

- $x_s$  et  $x_S$  sont les âges minimum et maximum retenus pour le critère de minimisation ;
- $x'_j = x + d(j)$  est l'âge technique d'un individu d'âge  $x$  issu de la génération  $(G + j)$  ;
- $d(j)$  représente le décalage à appliquer pour la génération  $(G + j)$  qui minimisera la fonction objectif (2). Il dépend bien sûr de la génération à laquelle l'assuré appartient.

Par analogie, il serait intéressant d'étudier également ce même critère de minimisation mais portant cette fois sur le prix des rentes viagères et non plus sur l'espérance de vie. En notant  $a_{x,g}$ , le prix de la rente viagère à l'âge  $x$  pour un individu de la génération née en  $g = G + j$ , notre fonction (2) devient :

$$\Delta_a^2(j) = \min_{d(j)} \sum_{x=x_s}^{x_S} (a_{x',j,G} - a_{x,G+j})^2. \quad (3)$$

Les résultats numériques pour la population française sont exposés aux tables 2 et 3. Pour plus de clarté, nous donnerons les valeurs cumulées des  $\Delta_f^2(j)$  pour les différentes générations.  $f$  peut représenter soit  $e$ , soit  $a$ . On a :

$$\Delta_f^2 = \sum_{j=k_n}^{k_p} \Delta_f^2(j),$$

où  $k_n$  et  $k_p$  sont les nombres de générations antérieures et postérieures à celle de référence considérées.

Pour nos calculs, nous avons pris:

- i. comme indices pour la somme,
  - les âges, de 60 à 100 ans ( $x_s = 60$  et  $x_S = 100$ ) ;
  - les générations, de 1925 à 1975 ( $k_n = 25$  et  $k_p = 25$ ) ;
- ii. comme taux technique pour le prix de la rente viagère, 3%.

Si nous adoptons comme critère la minimisation de notre fonction objectif (2) ou encore (3) avec les indicateurs actuariels calculés sur base de nos tables prospectives et comme table de référence, la table de la génération de 1950 des hommes, notée *TPHG1950* et publiée en annexe à la table 10, nous obtenons les décalages respectivement notés  $d_e^h$  et  $d_a^h$ , de la table 2. L'exposant  $^h$  permet de se référer au sexe concerné. Ici, il s'agit des hommes.

génération $G + j$	$d_e^h(j)$	génération $G + j$	$d_a^h(j)$
1925	5	1925	5
1926 → 1930	4	1926 → 1930	4
1931 → 1936	3	1931 → 1935	3
1937 → 1941	2	1936 → 1941	2
1942 → 1947	1	1942 → 1947	1
1948 → 1952	0	1948 → 1953	0
1953 → 1958	-1	1954 → 1959	-1
1959 → 1965	-2	1960 → 1965	-2
1966 → 1971	-3	1966 → 1972	-3
1972 → 1975	-4	1973 → 1975	-4
$\Delta_e^2$	241	$\Delta_a^2$	121

**Table 2.** Décalages optimaux pour les hommes, avec comme table de référence, la *TPHG1950*.

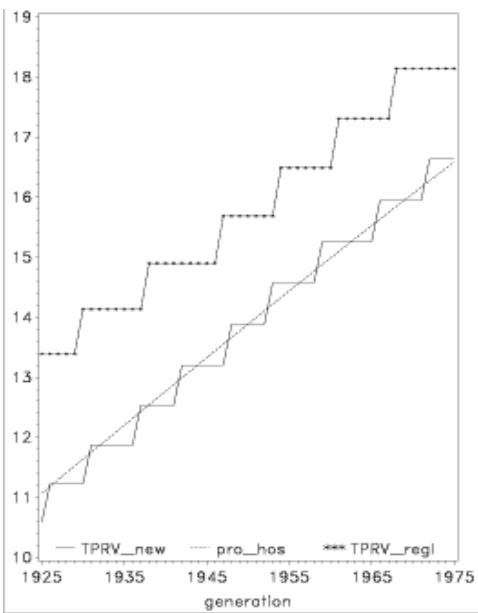
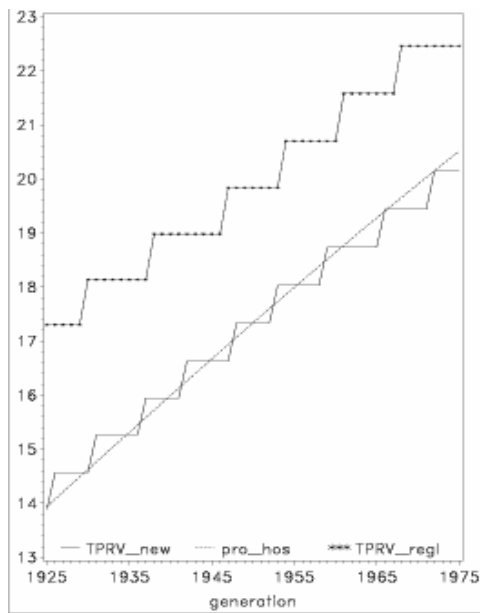
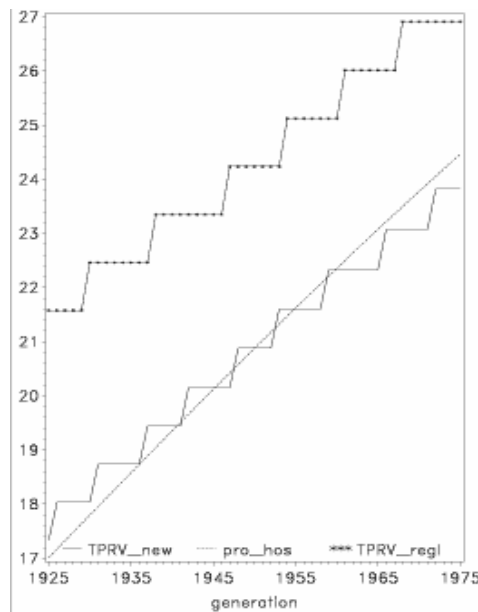
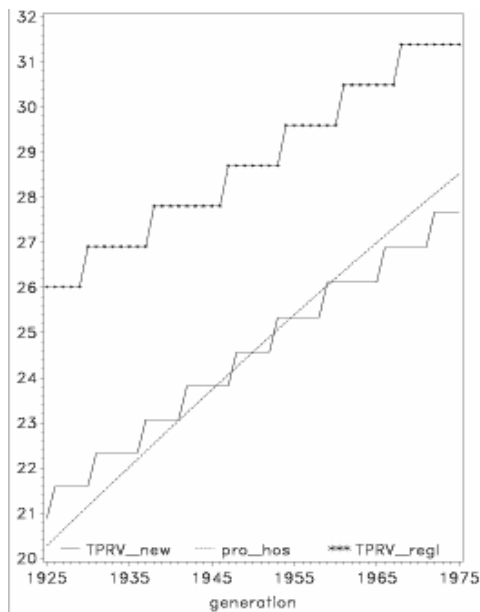
Pour les femmes, si nous prenons comme table de référence, la table de la génération de 1950 des femmes, notée *TPFG1950* et publiée en annexe à la table 10, nous avons les résultats de la table 3.

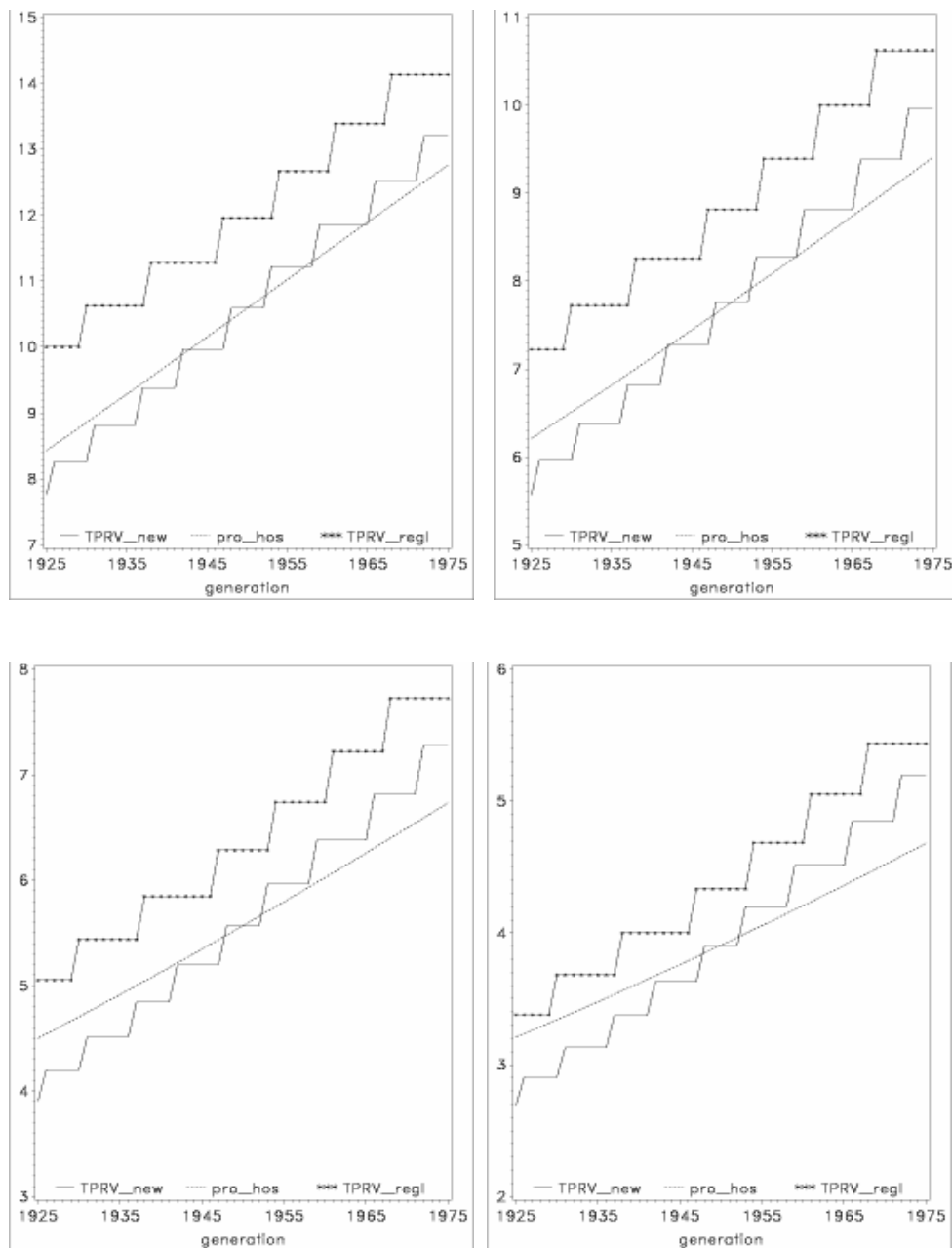
<i>génération G + j</i>	$d_e^f(j)$	<i>génération G + j</i>	$d_a^f(j)$
1925 → 1928	4	1925 → 1927	4
1929 → 1933	3	1928 → 1933	3
1934 → 1940	2	1934 → 1939	2
1941 → 1946	1	1940 → 1946	1
1947 → 1953	0	1947 → 1953	0
1954 → 1960	-1	1954 → 1960	-1
1961 → 1968	-2	1961 → 1968	-2
1969 → 1975	-3	1969 → 1975	-3
$\Delta_e^2$	187	$\Delta_a^2$	81

**Table 3.** Décalages optimaux pour les femmes, avec comme table de référence, la *TPFG1950*.

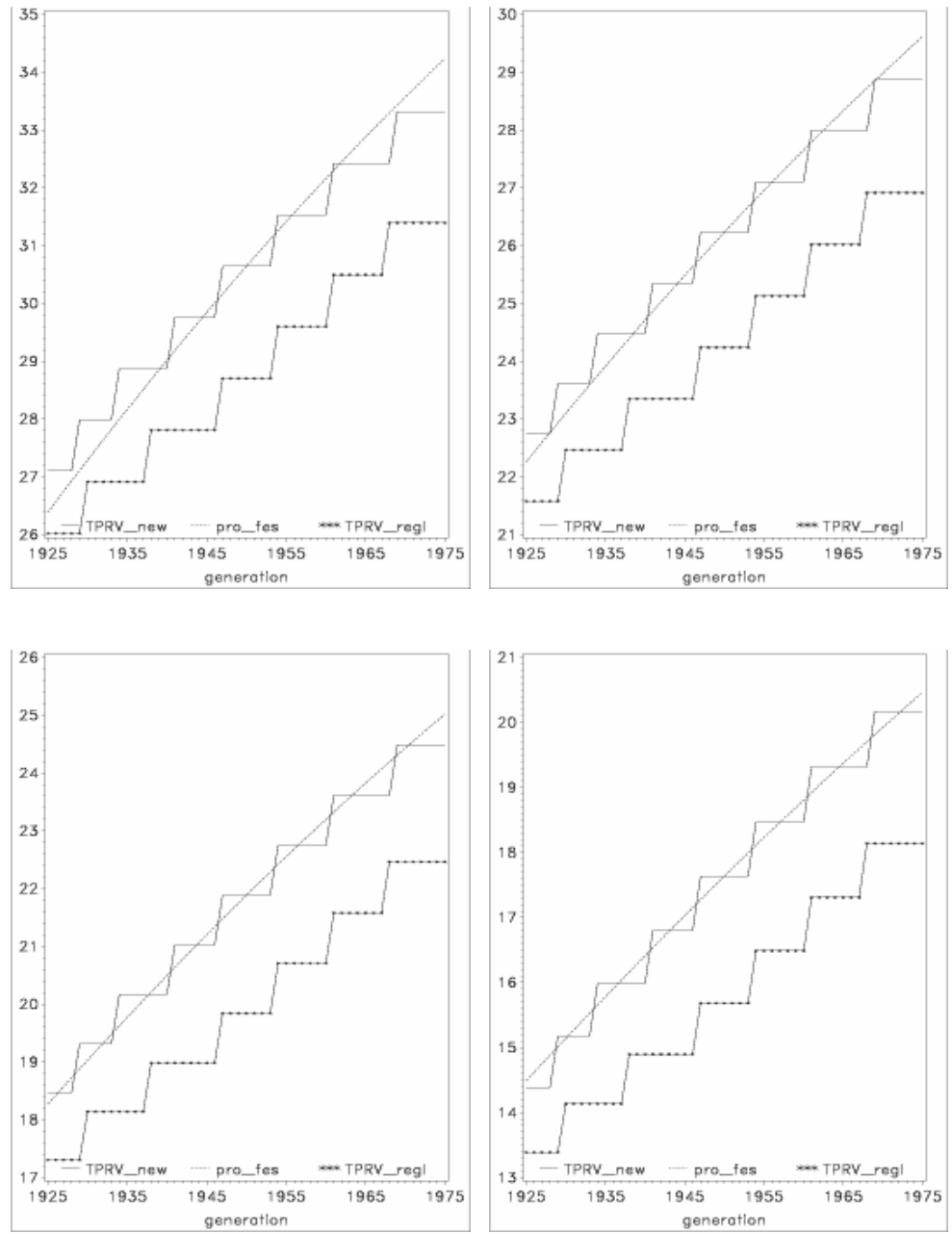
Les espérances de vie obtenues sur base de la minimisation de (2) sont disponibles à la figure 2 (voir annexe) pour les hommes et à la figure 3 (voir annexe) pour les femmes. De même, les prix de la rente viagère calculés à un taux technique de 3% et sur base de notre critère (3) se trouvent aux figures 4 et 5 (voir annexe), pour les hommes et les femmes respectivement. Comme nous pouvons le voir, nos tables *TPRV* sont toujours plus proches de nos tables prospectives que la *TPRV* réglementaire. Pour les femmes, nous remarquons que notre "escalier" est toujours supérieur à la *TPRV* française actuelle, ce qui nous prouve l'insuffisance de cette dernière pour la tarification des rentes viagères féminines.

Notons au passage que les décalages à appliquer ne varient pas sensiblement suivant qu'on se penche sur les espérances de vie ou encore sur le prix de la rente viagère. Ils diffèrent tout au plus de une ou deux générations. Etant donné que le procédé est de toute façon une approximation, il est certainement préférable d'opter pour un seul choix de décalages et non, comme le propose la *TPRV* française, pour des décalages variant en fonction du taux technique à appliquer (voir par exemple, les tables 1 et 11 (voir annexe)). Cela vient en effet entacher le charme de celle-ci étant donné qu'on se retrouve avec une dizaine de tableaux de décalages différents. De surcroît, les différences obtenues avec l'un ou l'autre tableau de décalages sont minimales. Dans notre cas, cette remarque est appuyée par les valeurs suivantes des  $\Delta_a^2$ , obtenues en conservant les décalages  $d_e$  puisqu'on a 124 pour les hommes et 83 pour les femmes, à comparer avec 121 et 81 obtenus en considérant les décalages  $d_a$ .

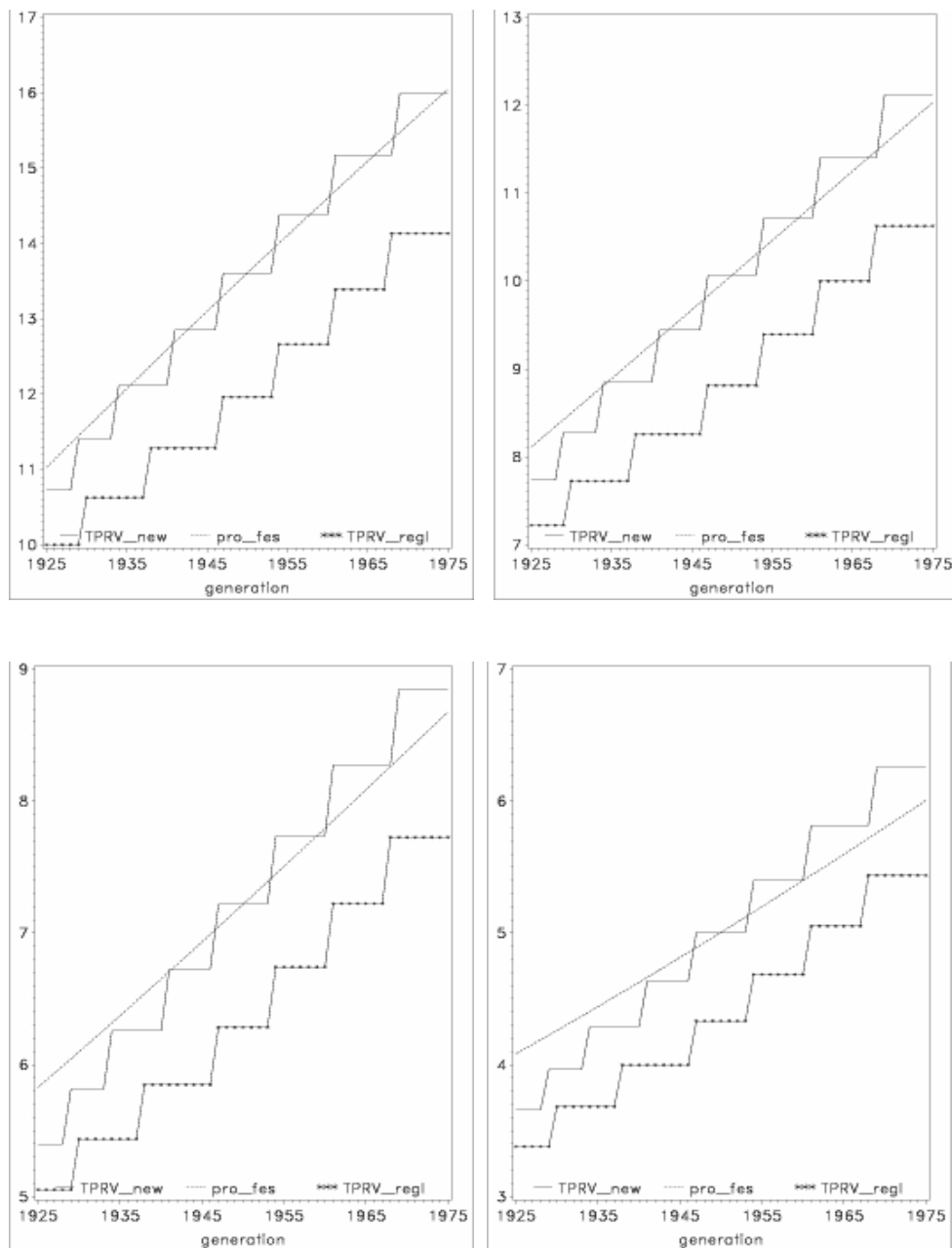




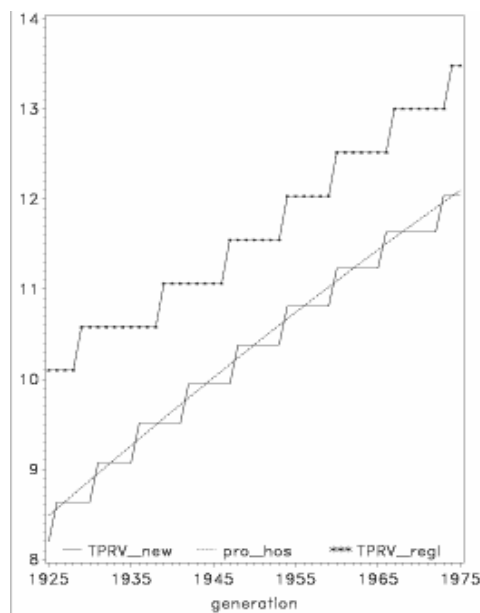
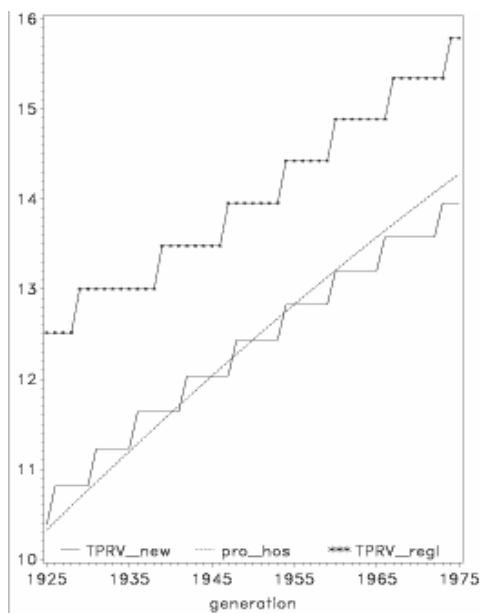
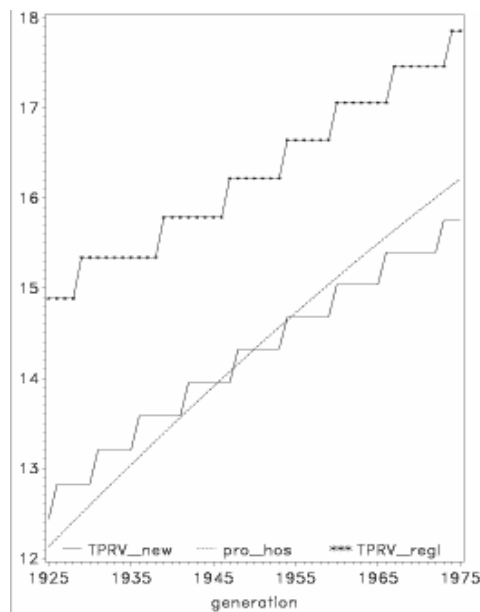
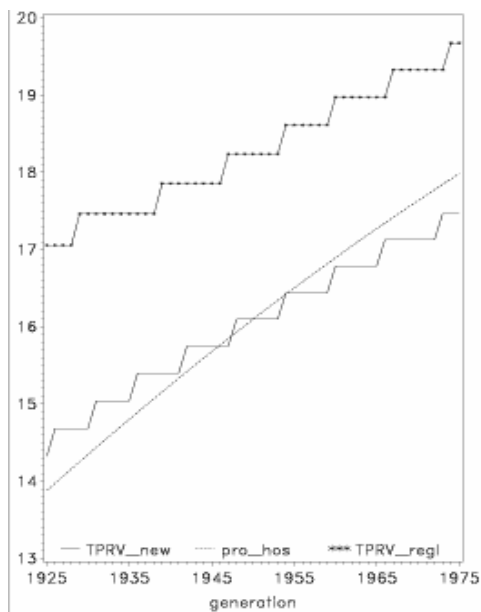
**Figure 2.** Espérances de vie par génération pour les âges de 60 à 95 ans, de 5 ans en 5 ans, hommes, obtenues sur base de la minimisation de (2).

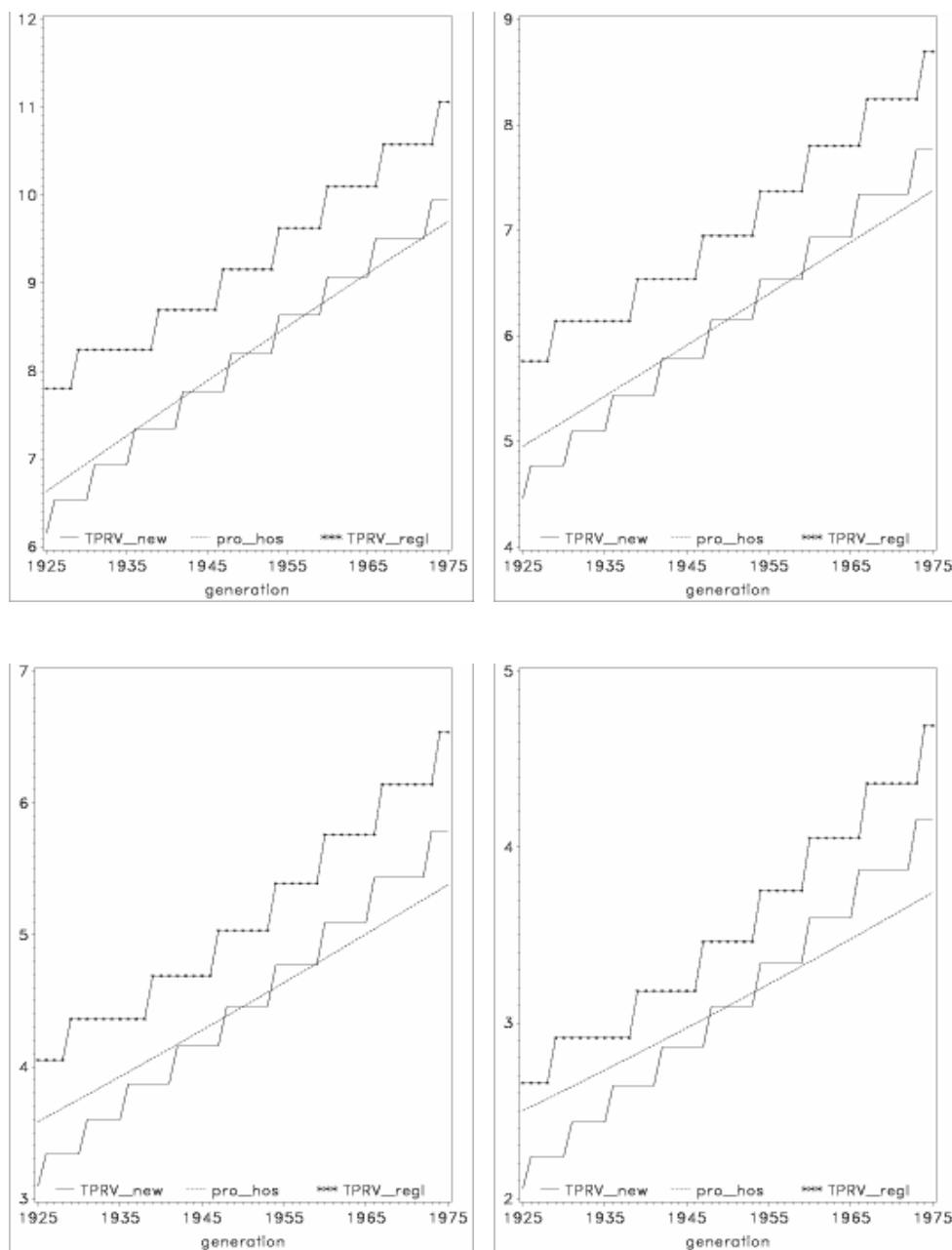




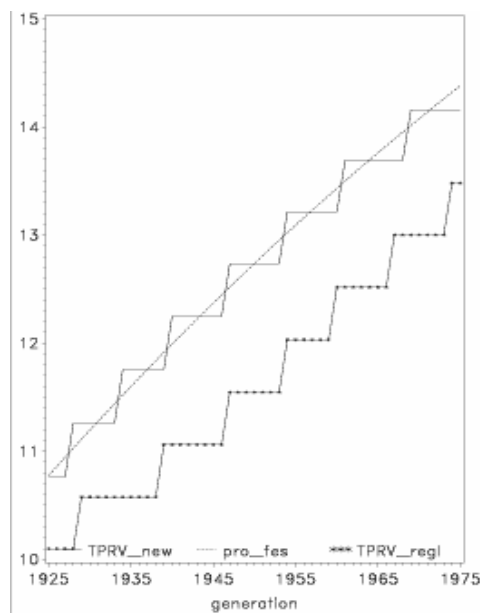
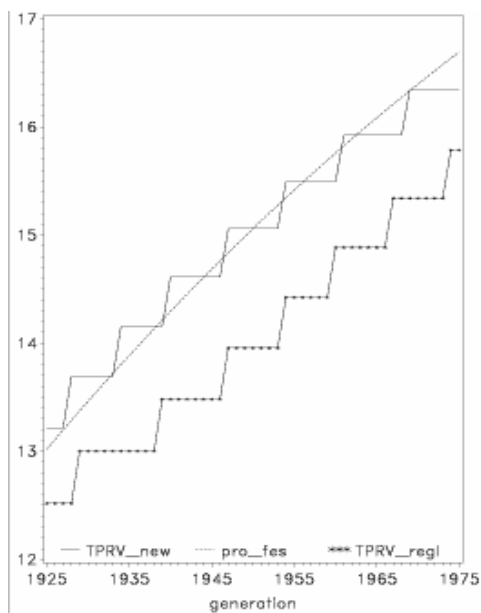
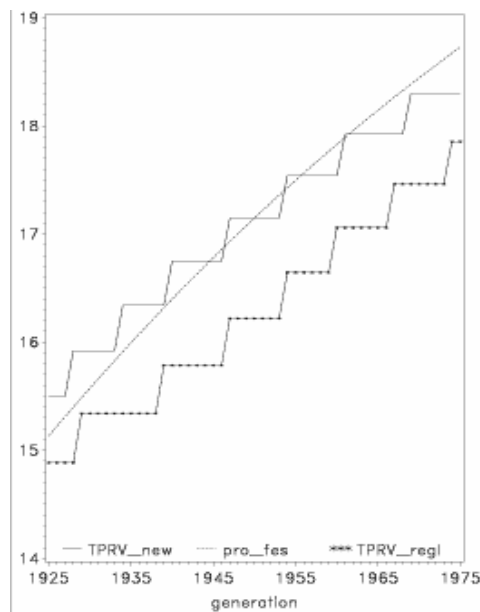
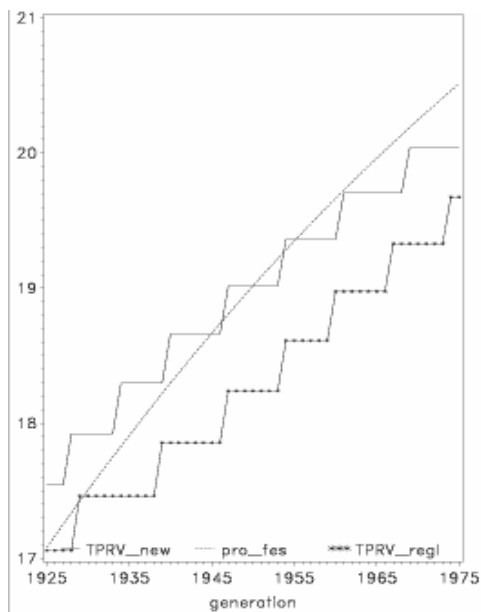


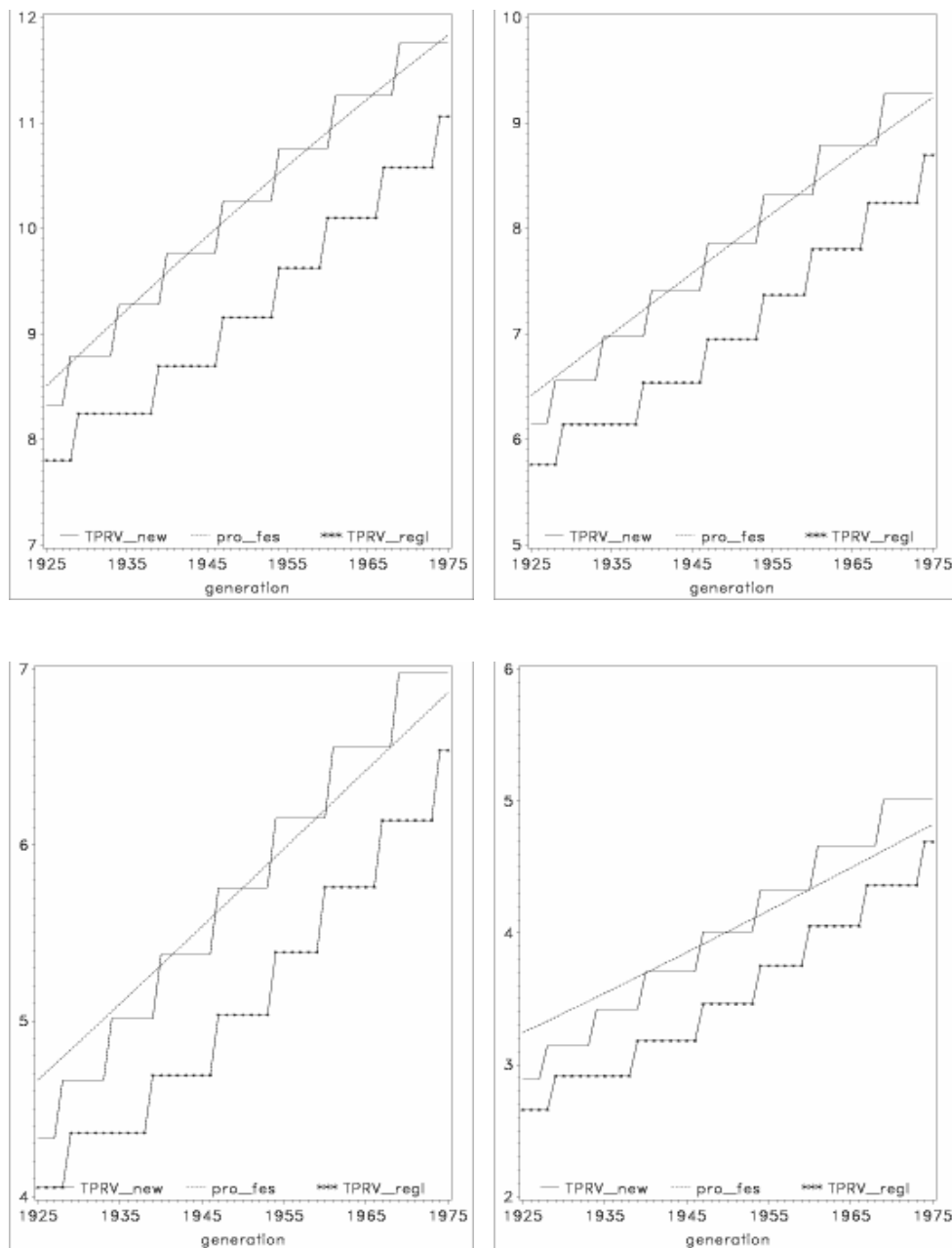
**Figure 3.** Espérances de vie par génération pour les âges de 60 à 95 ans, de 5 ans en 5 ans, femmes, obtenues sur base de la minimisation de (2).





**Figure 4.** Prix de rente viagère unitaire par génération pour les âges de 60 à 95 ans, de 5 ans en 5 ans, hommes, obtenues sur base de la minimisation de (3).





**Figure 5.** Prix de rente viagère unitaire par génération pour les âges de 60 à 95 ans, de 5 ans en 5 ans, femmes, obtenues sur base de la minimisation de (3).

Nous nous sommes intéressés à un autre critère de minimisation, semblable au précédent mais pour lequel on a pondéré en fonction des effectifs de population aux différents âges et des différentes générations sur base de nos tables prospectives. Cette pondération permet en fait de donner plus de poids aux rentiers les plus jeunes et inversement pour les plus âgés. Cela est en concordance avec un portefeuille habituel : il comprendra généralement plus de cinquantenaires que de centenaires.

Le critère devient alors :

$$\Delta_f^2(j) = \min_{d(j)} \sum_{x=x_0}^{x_5} l_{x,G+j} (f_{x',j,G} - f_{x,G+j})^2, \quad (4)$$

où

- $f$  représente soit l'espérance de vie  $e$ , soit le prix de la rente viagère  $a$  ;
- $l_{x,g}$  est le nombre de personnes de la génération  $g$  survivant à l'âge  $x$  sur base de nos tables prospectives, sachant qu'à l'âge  $x^0$ , l'effectif était de  $l_{x^0,g}$ . Dans notre cas, nous avons fixé cet effectif initial à 100.000 personnes et  $x^0 = 50$  ans.  $l_{x,g}$  se calcule comme suit

$$l_{x,g} = {}_{(x-x^0)}p_{x^0,g} l_{x^0,g},$$

où  ${}_{(x-x^0)}p_{x^0,g}$  est la probabilité de vivre jusqu'à l'âge  $x$  pour un individu né en l'année  $g$ , sachant qu'il est en vie à l'âge  $x_0$ .

Ici encore, nous sommerons les valeurs de  $\Delta_f^2(j)$  pour les différentes générations :

$$\Delta_f^2 = \sum_{j=-k_n}^{k_p} \Delta_f^2(j).$$

Les décalages obtenus sur base de ce critère sont disponibles aux tables 4 et 5 pour les hommes et les femmes respectivement.

génération $G + j$	$d_e^h(j)$	génération $G + j$	$d_a^h(j)$
1925 → 1927	5	1925 → 1927	5
1928 → 1931	4	1928 → 1931	4
1932 → 1936	3	1932 → 1936	3
1937 → 1941	2	1937 → 1941	2
1942 → 1947	1	1942 → 1947	1
1948 → 1952	0	1948 → 1952	0
1953 → 1958	-1	1953 → 1958	-1
1959 → 1964	-2	1959 → 1964	-2
1965 → 1970	-3	1965 → 1971	-3
1971 → 1975	-4	1972 → 1975	-4
$\Delta_e^2$	14.256.681	$\Delta_a^2$	6.889.414

**Table 4.** Décalages optimaux avec pondération pour les hommes, avec comme table de référence, la *TPHG1950*.

<i>génération G + j</i>	$d_e^f(j)$	<i>génération G + j</i>	$d_a^f(j)$
1925 → 1928	4	1925 → 1928	4
1929 → 1934	3	1929 → 1934	3
1935 → 1940	2	1935 → 1940	2
1941 → 1946	1	1941 → 1946	1
1947 → 1953	0	1947 → 1953	0
1954 → 1960	-1	1954 → 1960	-1
1961 → 1967	-2	1961 → 1968	-2
1968 → 1975	-3	1969 → 1975	-3
$\Delta_e^2$	14.014.598	$\Delta_a^2$	5.709.118

**Table 5.** Décalages optimaux avec pondération pour les femmes, avec comme table de référence, la *TPFG1950*.

Si nous comparons les décalages des tables 2 et 3 obtenus sans pondération et ceux des tables 4 et 5 calculés avec pondération, nous remarquons que les différences sont encore une fois très petites.

Nous pourrions, pour simplifier encore davantage, supposer un écart de générations constant pour lequel une année de rajeunissement ou de vieillissement supplémentaire est nécessaire. Le principe serait alors de travailler avec une correction de une année toutes les  $h$  générations. Nous devons donc trouver quel est cet écart.

Le problème est symétrique par rapport aux générations antérieures et postérieures à celle de référence. En effet, supposons que cet écart  $h$  soit de 6 et notre génération de référence, celle de 1950. Les 3 générations précédant 1950 et les 3 suivantes se verront attribuer un décalage nul, c'est-à-dire  $d(j)=0$  pour  $j=-3, \dots, +3$  ou de façon équivalente  $g=1947, \dots, 1953$ . Ensuite, les générations antérieures vont être vieilles d'un an toutes les 6 générations, c'est-à-dire qu'on aura  $d(j)=+1$  pour  $j=-9, \dots, -4$  ou encore  $g=1941, \dots, 1946$ . Inversement, on rajeunira les générations plus jeunes d'un an toutes les 6 générations :  $d(j)=-1$  pour  $j=4, \dots, 9$  et ainsi de suite.

Formalisons la règle précédente. Pour plus de simplicité, notons :

- de façon générale,  $k$ , notre indice pour les générations. Dans le cas des générations plus jeunes, il sera égal à  $k_p$  et pour les plus anciennes, à  $k_n$  ;
- $h_2$  représentera la partie entière de  $h/2$  et  $k_h$ , la partie entière de  $k/h$ .

Le décalage correspondant à la génération  $(G + j)$  peut alors s'écrire comme

$$d(j) = \begin{cases} 0 & , \text{ pour } 0 \leq |j| \leq h_2, \\ -\text{sign}(j)(m-1)I_{((m-1)h-h_2) < |j| \leq (mh-h_2)} & , \text{ pour } 2 \leq m \leq (k_h + 1), \\ -\text{sign}(j)(k_h + 1) & , \text{ pour } |j| > ((k_{h+1})h - h_2). \end{cases}$$

Dans le cas d'un  $h$  impair, deux solutions s'offrent à nous :

- Soit on décide d'appliquer un décalage nul aux  $h_2$  générations précédant la génération  $G$  et aux  $h - h_2$  générations postérieures à la génération  $G$ .
- Soit un décalage nul est appliqué aux  $h_2$  générations postérieures à la génération  $G$  et aux  $h - h_2$  générations antérieures à la génération  $G$ .

Nous avons effectué les calculs dans les deux cas pour les  $h$  impairs et avons opté pour la solution qui minimisait notre fonction objectif (2), (3) ou encore (4). Pour tous ces critères, l'écart de générations pour lequel une année de rajeunissement ou de vieillissement supplémentaire est nécessaire est de 7 pour les femmes. Comme nous l'avons expliqué plus haut, il faut envisager deux situations dans ce dernier cas vu qu'il s'agit d'un nombre impair. Nous trouvons qu'appliquer un décalage nul aux 3 générations précédant la génération de 1950 et aux 4 générations postérieures à la génération de 1950 est optimal. Pour les hommes, pour les critères sans pondération, nous trouvons qu'un écart de générations de 6 ans est optimal, tandis qu'avec pondération, on trouve un écart de 5 ans, avec un décalage nul appliqué aux 2 générations précédant celle de référence et aux 3 suivantes.

Les décalages à appliquer sont donc ceux de la table 6 pour les critères sans pondération et ceux de la table 7 pour les critères avec pondération.

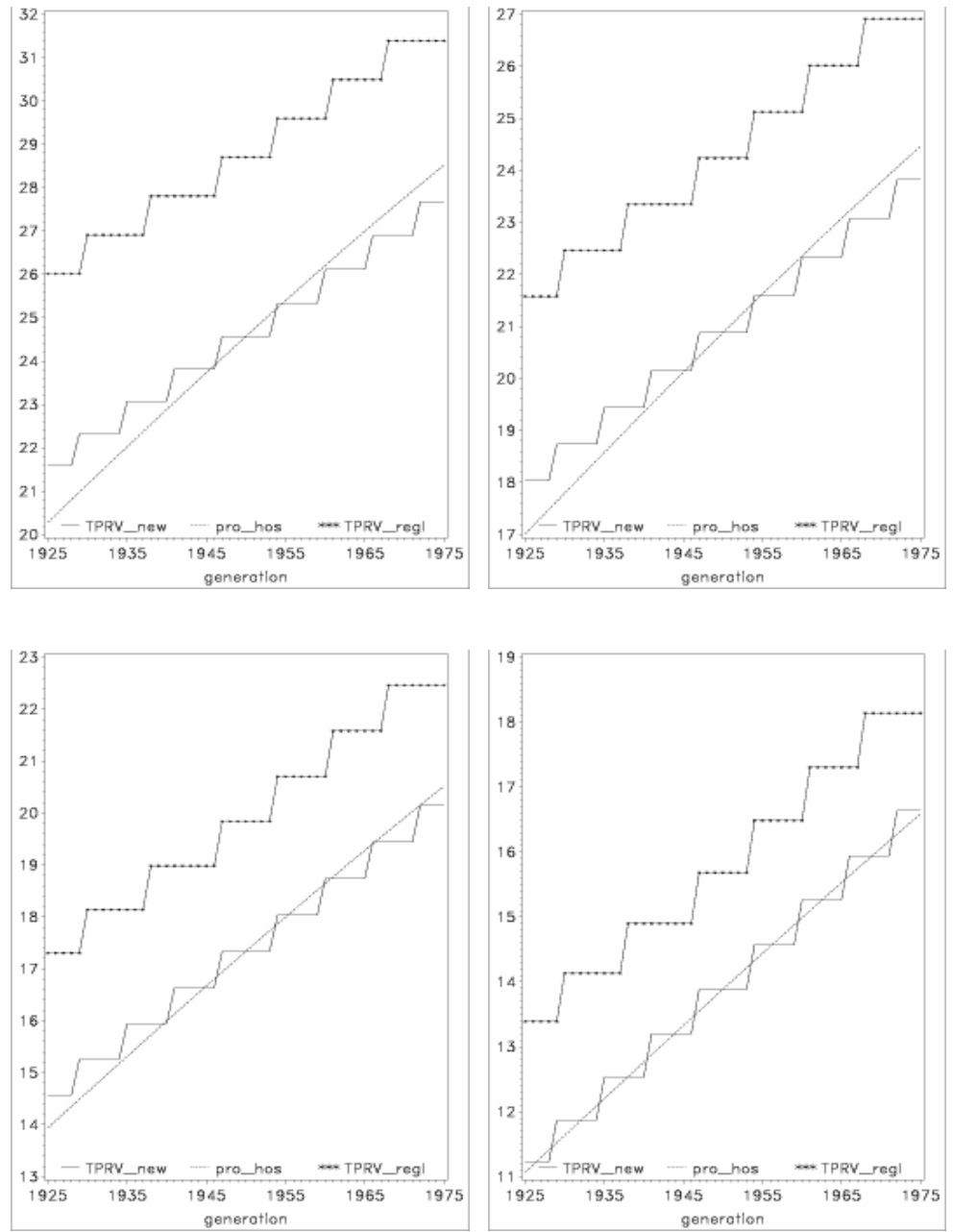


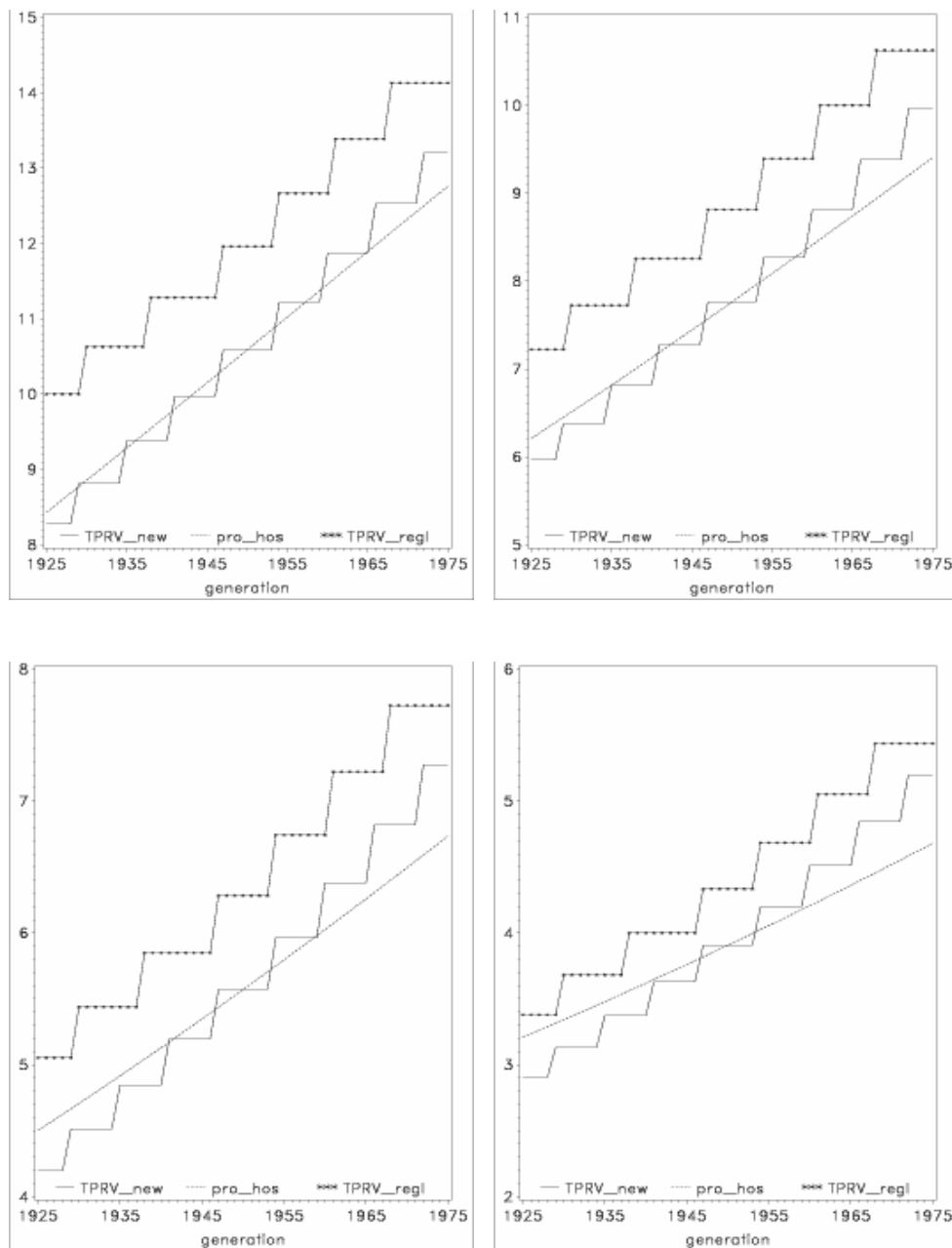
<i>génération G + j</i>	$d_{regul}^h(j)$	<i>génération G + j</i>	$d_{regul}^f(j)$
1925 → 1928	4	1925	4
1929 → 1934	3	1926 → 1932	3
1935 → 1940	2	1933 → 1939	2
1941 → 1946	1	1940 → 1946	1
1947 → 1953	0	1947 → 1954	0
1954 → 1959	-1	1955 → 1961	-1
1960 → 1965	-2	1962 → 1968	-2
1966 → 1971	-3	1969 → 1975	-3
1972 → 1975	-4		
$\Delta_e^2$	265	$\Delta_e^2$	219
$\Delta_a^2$	127	$\Delta_a^2$	88

**Table 6.** Décalages réguliers sans pondération pour les hommes et les femmes, avec comme table de référence, la *TPHG1950* et la *TPFG1950* respectivement.

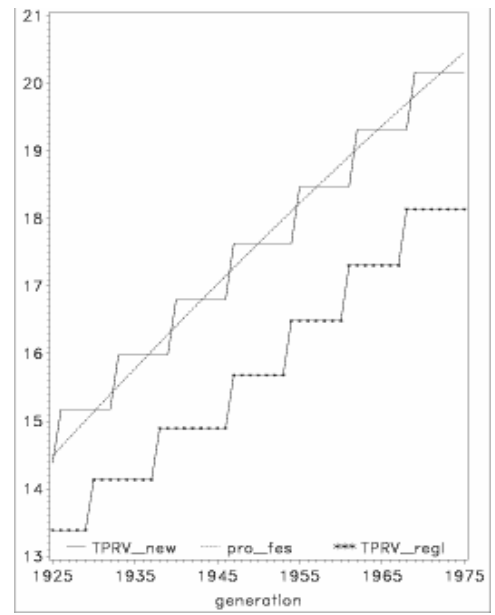
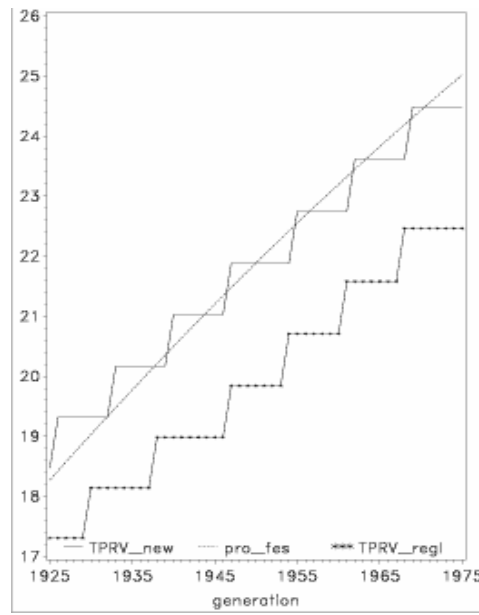
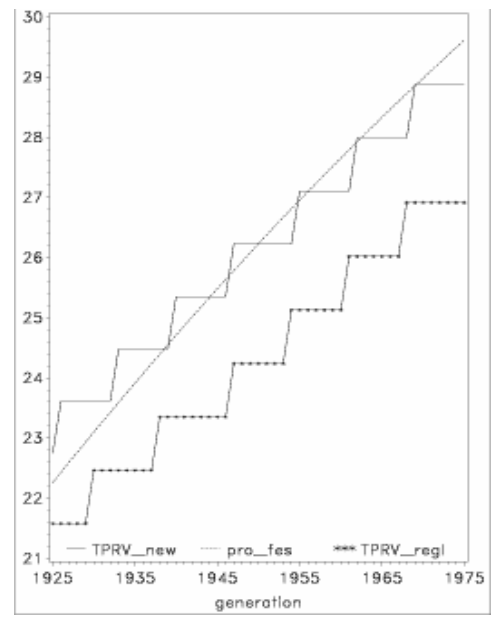
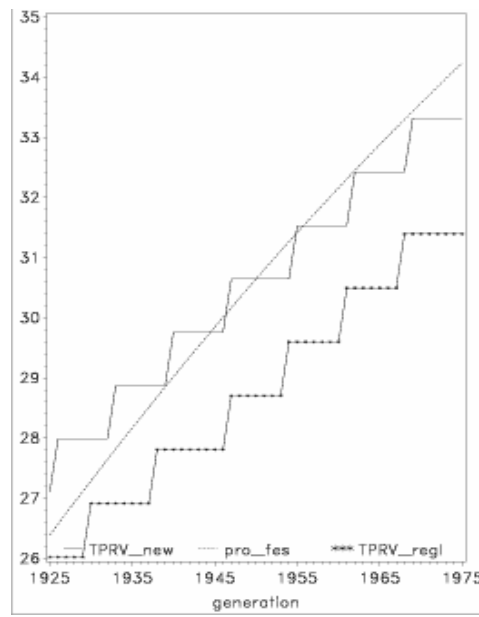
<i>génération G + j</i>	$d_{regul}^h(j)$	<i>génération G + j</i>	$d_{regul}^f(j)$
1925 → 1927	5		
1928 → 1932	4	1925	4
1933 → 1937	3	1926 → 1932	3
1938 → 1942	2	1933 → 1939	2
1943 → 1947	1	1940 → 1946	1
1948 → 1953	0	1947 → 1954	0
1954 → 1958	-1	1955 → 1961	-1
1959 → 1963	-2	1962 → 1968	-2
1964 → 1968	-3	1969 → 1975	-3
1969 → 1973	-4		
1974 → 1975	-5		
$\Delta_e^2(pond)$	17.783.484	$\Delta_e^2(pond)$	18.382.904
$\Delta_a^2(pond)$	8.256.316	$\Delta_a^2(pond)$	6.982.061

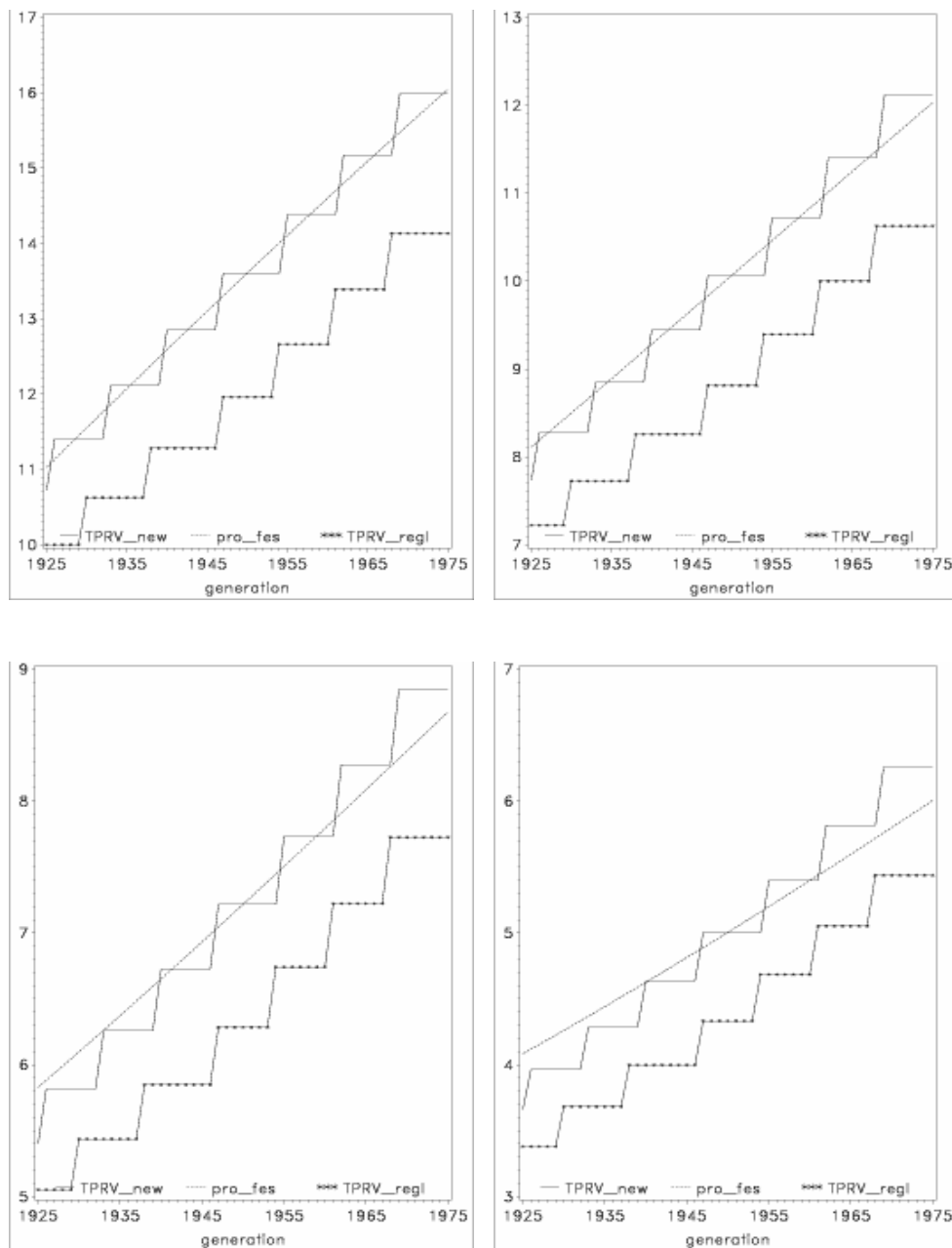
**Table 7.** Décalages réguliers avec pondération pour les hommes et les femmes, avec comme table de référence, la *TPHG1950* et la *TPFG1950* respectivement.





**Figure 6.** Espérances de vie par génération pour les âges de 60 à 95 ans, de 5 ans en 5 ans, hommes, obtenues sur base de décalages réguliers.





**Figure 7.** Espérances de vie par génération pour les âges de 60 à 95 ans, de 5 ans en 5 ans, femmes, obtenues sur base de décalages réguliers, sans pondération.

Imposer des écarts réguliers est certainement la façon la plus simple de procéder :

- la règle impose un certain systématisme. En effet, l'"escalier" obtenu est régulier ;
- que l'on opte pour le critère portant sur l'espérance de vie ou sur le prix de la rente viagère, nous obtenons les mêmes résultats ;
- la perte d'ajustement n'est que minimale. Pour nous en convaincre, il suffit de comparer les  $\Delta$  des tables précédentes à ceux des tables 6 et 7.

A titre indicatif, nous avons calculé les valeurs des  $\Delta_f^2$  sur base de nos tables prospectives et de la table réglementaire. Ceux-ci sont assez élevés, comme nous pouvons le voir à la table 8.

$\Delta$	<i>Hommes</i>	$\Delta$	<i>Femmes</i>
$\Delta_e^2$	9.937	$\Delta_e^2$	4.482
$\Delta_a^2$	3.691	$\Delta_a^2$	1.428
$\Delta_e^2(pond)$	806.579.819	$\Delta_e^2(pond)$	389.480.460
$\Delta_a^2(pond)$	286.121.171	$\Delta_a^2(pond)$	116.033.570

**Table 8.** Somme des écarts au carré calculée sur base de nos tables prospectives et de la table réglementaire.

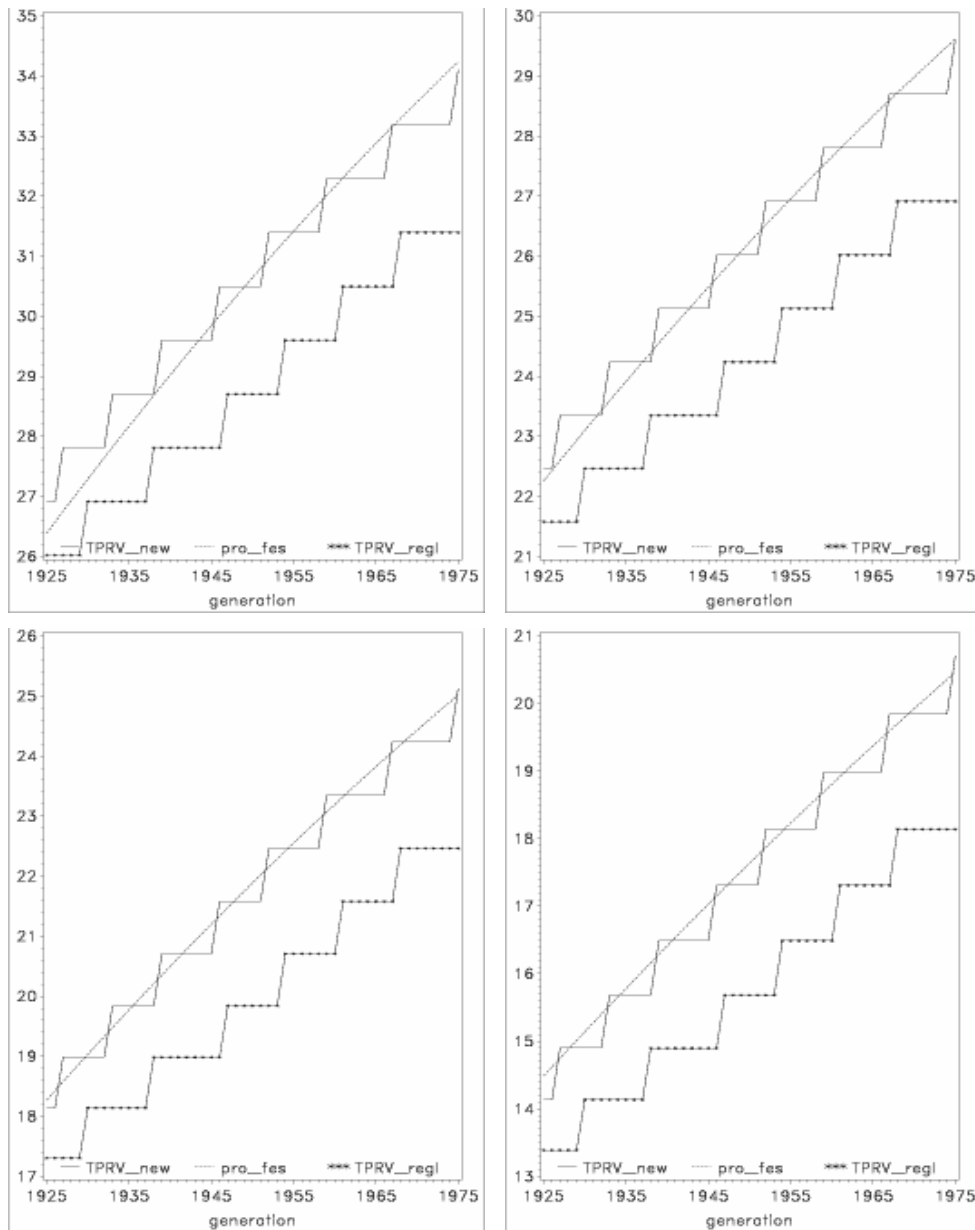
De plus, nous avons calculé quels décalages seraient optimaux pour la minimisation de notre fonction objectif (2), en prenant cette fois comme table de référence celle de la *TPRV*. Les décalages obtenus pour les femmes sont ceux de la table 9 :

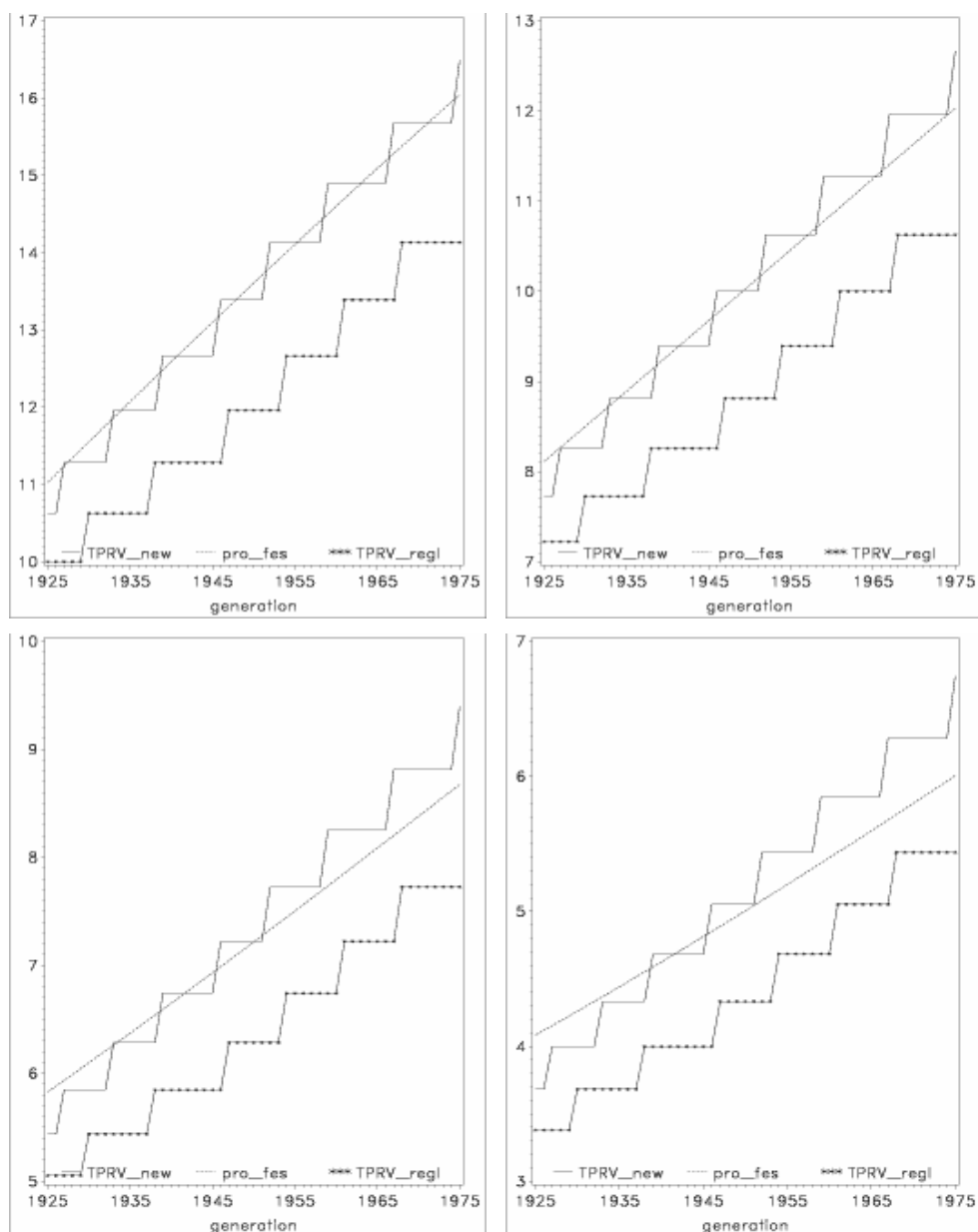
génération $G + j$	$d_e^f(j)$
1925 → 1926	2
1927 → 1932	1
1933 → 1938	0
1939 → 1945	-1
1946 → 1951	-2
1952 → 1958	-3
1959 → 1966	-4
1967 → 1974	-5
1975	-6
$\Delta_e^2$	198

**Table 9.** Décalages optimaux sans pondération pour les femmes, avec comme table de référence, la *TPRV*.

Comme nous le voyons, les décalages sont très différents des décalages préconisés par la table réglementaire actuelle. Ils montrent clairement que la *TPRV* est insuffisante pour la population féminine.

Les espérances de vie obtenues sont celles de la figure 8.





**Figure 8.** Espérances de vie par génération pour les âges de 60 à 95 ans, de 5 ans en 5 ans, femmes, obtenues sur base de la minimisation de (2) et en prenant comme table de référence la *TPRV*.

Ces résultats confirment une fois de plus notre intuition et justifient l'abandon de l'actuelle *TPRV* au profit d'une nouvelle table.



#### 4. CONCLUSION

Le chargement de sécurité implicite contenu dans la *TPRV* est désormais inexistant pour certaines catégories de risques : les femmes. Il serait donc préférable de s'intéresser, comme nous venons de le faire, à une table ajustée de la meilleure façon possible aux tables prospectives récemment développées et d'ensuite appliquer un chargement explicite pour la tarification des rentes. Dans ce cas, peu importe la composition du portefeuille auquel on s'intéresse : même pour un portefeuille non mixte, exclusivement féminin, nous aurions un chargement de sécurité adéquat. De même, les hommes pourraient bénéficier d'une tarification plus juste, sur base de leur propre mortalité, sans devoir combler le déficit dû à l'insuffisance de la *TPRV* pour les femmes.

Cette méthode reste une approximation. Il faut donc rester prudent lors de la tarification des rentes viagères. Il ne faut pas oublier non plus que les tables prospectives résultent de projections dans le futur et ne sont donc pas certaines. C'est pourquoi une actualisation régulière des décalages et de la table de référence pour la *TPRV* est nécessaire.

De surcroît, la *TPRV* réglementaire développée sur base des données population s'applique pour la tarification des rentes viagères. Par conséquent, la population concernée est celle des assurés qui ont généralement une mortalité différente de celle de la population générale, à savoir une sous-mortalité. Il faut donc tenir compte de cette antisélection pour le calcul du chargement à appliquer. Une méthode élégante consiste à adapter les décalages d'âge en fonction de l'antisélection estimée sur le portefeuille. Cette méthodologie fera l'objet d'un travail à venir, basé sur les données belges, pour lesquelles des statistiques marché sont disponibles et permettent donc d'évaluer l'antisélection des rentiers.

#### REFERENCES

- [1] HIDALGO M. (1992). *Création et utilisation simplifiée des tables de mortalité de génération prospectives femmes applicables aux assurances de rentes*. Formation d'actuaire de l'université Louis Pasteur, Strasbourg.
- [2] MAGIS C., DENUIT M. & WALHIN J.F. (2004). *La mortalité, un phénomène en pleine mutation: quelle solution pour le marché des rentes?*, Bulletin Français d'Actuariat, Vol. 6, n° 12.

## ANNEXE

<i>age</i>	$l_x^h (TPHG1950)$	$l_x^f (TPFG1950)$	$l_x^{h,f} (TPRV)$
50	100.000	100.000	100.000
51	99.444	99.769	99.775
52	98.865	99.525	99.537
53	98.253	99.262	99.281
54	97.613	98.994	99.013
55	96.942	98.716	98.731
56	96.230	98.421	98.436
57	95.489	98.119	98.125
58	94.706	97.801	97.800
59	93.895	97.474	97.463
60	93.007	97.128	97.114
61	92.060	96.756	96.754
62	91.075	96.382	96.383
63	90.046	95.984	96.003
64	88.951	95.572	95.599
65	87.793	95.138	95.173
66	86.607	94.682	94.724
67	85.366	94.194	94.249
68	84.069	93.681	93.750
69	82.711	93.139	93.196
70	81.312	92.571	92.580
71	79.885	91.968	91.894
72	78.392	91.332	91.131
73	76.818	90.641	90.281
74	75.238	89.902	89.319
75	73.601	89.092	88.230
76	71.895	88.214	86.999
77	70.082	87.252	85.605
78	68.171	86.188	84.031
79	66.099	84.991	82.271

<i>age</i>	$l_x^h (TPHG1950)$	$l_x^f (TPFG1950)$	$l_x^{h,f} (TPRV)$
80	63.934	83.641	80.308
81	61.576	82.116	78.123
82	59.038	80.388	75.697
83	56.295	78.434	73.013
84	53.346	76.222	70.101
85	50.190	73.725	66.953
86	46.868	70.944	63.565
87	43.418	67.883	59.941
88	39.873	64.547	56.084
89	36.276	60.971	52.069
90	32.663	57.168	47.918
91	29.079	53.161	43.661
92	25.559	48.968	39.336
93	22.159	44.645	34.988
94	18.927	40.240	30.732
95	15.903	35.812	26.616
96	13.126	31.426	22.687
97	10.624	27.151	18.998
98	8.418	23.057	15.592
99	6.516	19.212	12.508
100	4.919	15.676	9.778

<i>age</i>	$l_x^h$ (TPHG1950)	$l_x^f$ (TPFG1950)	$l_x^{h,f}$ (TPRV)
101	3.612	12.499	7.423
102	2.574	9.716	5.449
103	1.775	7.344	3.848
104	1.182	5.383	2.598
105	757	3.815	1.665
106	465	2.606	1.005
107	273	1.709	563
108	153	1.072	290
109	81	641	133
110	40	363	54
111	19	194	18
112	8	97	5
113	3	45	1
114	1	20	–
115	0	8	–
116	0	3	–
117	0	1	–
118	0	0	–
119	0	0	–
120	0	0	–
121	0	0	–
122	0	0	–
123	0	0	–
124	0	0	–
125	0	0	–

**Table 10.** *TPHG1950*, *TPFG1950* et *TPRV* .

<i>génération</i>	$d^{h,f}$	<i>génération</i>	$d^{h,f}$
1901→1911	5	1954 → 1959	–1
1912 → 1919	4	1960 → 1966	–2
1920 → 1928	3	1967 → 1973	–3
1929 → 1938	2	1974 → 1980	–4
1939 → 1946	1	> 1980	–5
1947 → 1953	0		

**Table 11.** Décalages réglementaires, pour un taux de 3% .

# LA MORTALITÉ, UN PHÉNOMÈNE EN PLEINE MUTATION : QUELLE SOLUTION POUR LE MARCHÉ DES RENTES ?

Corinne MAGIS<sup>+</sup>

Michel DENUIT<sup>•#</sup>

Jean-François WALHIN<sup>\*•</sup>

\* *Secura*

• *Institut des Sciences Actuarielles, Université Catholique de Louvain*

# *Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain*

<sup>+</sup> *Fortis*

## RESUME

Les progrès de la médecine ainsi que l'amélioration du niveau de vie dans nos pays industrialisés provoquent une diminution de la mortalité. Dans un tel contexte, il est nécessaire de développer des tables de mortalité prospectives, prenant en compte cette constante évolution. Sans quoi, dans les prochaines années, de graves déficits budgétaires surviendront dans la plupart des compagnies d'assurance vie offrant des rentes viagères. Dans cet article, nous analysons l'établissement de telles tables.

## 1. INTRODUCTION

Les progrès réalisés en sciences médicales, l'amélioration des conditions de travail et du niveau de vie ont contribué ces dernières décennies à l'allongement de la vie humaine. La mortalité infantile et aux grands âges s'en trouve diminuée. La problématique de la mesure du risque de longévité, qui résulte de l'incertitude sur l'évolution de la mortalité dans le futur, revêt toute son importance lorsqu'on sait que cet accroissement de la vie humaine aura sans nul doute une conséquence sur les systèmes de retraite fonctionnant en répartition et représente également un risque pour les assureurs vie servant des rentes viagères. Dans le premier cas, outre le problème démographique résultant du faible nombre de naissances observé dans nos pays, la durée moyenne de la retraite s'accroîtra de façon telle qu'un déséquilibre entre cotisants et bénéficiaires apparaîtra. En ce qui concerne l'assurance vie, le marché des rentes viagères présente cette caractéristique particulière que l'assureur s'engage sur une période potentiellement très longue. Mesurer et prévoir le risque, c'est arriver à déterminer le plus finement possible la mortalité des individus. Sinon, l'assureur s'expose à subir des pertes importantes et ce, au bénéfice des assurés ou au détriment de la collectivité des rentiers les plus jeunes pour le cas où

l'assureur viendrait à tomber en faillite. Une telle situation est évidemment inacceptable puisqu'elle conduirait à une rentabilité systématiquement négative des rentes viagères. Une branche d'assurance ne peut être subsidiée par une autre (les rentes viagères par les produits d'assurance décès par exemple) et il convient donc pour l'assureur de travailler avec les bases techniques les plus proches de la réalité.

Vu que la mortalité n'est pas stable dans le temps, les tables du moment, appelées tables transversales, ne sont pas d'une grande utilité pour le problème qui nous occupe. Ces tables sont dressées à partir d'observations relatives à une seule année. Cette façon de faire ne permet pas de tenir compte de l'évolution de la mortalité dans le temps. En fait, l'approche transversale ne décrit la mortalité d'aucun assuré du portefeuille puisque chacun des quotients de mortalité a été obtenu à l'aide d'une génération différente d'assurés.

Pour parer à ce problème, il convient d'établir des tables prospectives, qui elles, permettent de tenir compte de l'allongement de la vie humaine. Ces tables donnent pour chaque âge la probabilité de décéder au cours d'une certaine année. Elles sont dressées à partir de modèles statistiques estimant les tendances de la mortalité et les extrapolant dans le futur. Il va sans dire que les tables prospectives doivent être fréquemment revues à la lumière des nouvelles statistiques de mortalité. L'objet de cet article est de présenter une méthode envisageable pour la construction de telles tables.

La manipulation de ces tables devient rapidement complexe. Afin de simplifier quelque peu leur utilisation, nous nous intéresserons dans un prochain article, à l'élaboration d'une nouvelle table du type de la TPRV (Table Prospective pour Rentes Viagères) qui est d'application actuellement en France. Le principe en est simple : à partir d'une table de mortalité unique, celle d'une génération de référence, on propose des décalages d'âge par rapport à la génération dont l'individu est issu. Ainsi, les générations précédant celle de référence seront vieilles tandis que les générations ultérieures seront rajeunies.

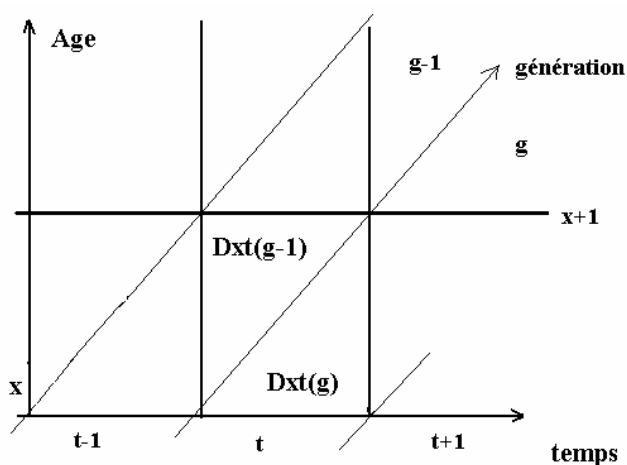
Notons que l'assureur qui dispose d'une table prospective calculée sur des bases scientifiques reste exposé au risque de longévité qui est essentiellement non diversifiable. Une solution pour lui serait alors de transférer une partie du risque au réassureur, voire de titriser le risque de longévité. Nous laisserons ces approches pour des travaux à venir.

## 2. NOTATIONS

Les tables de mortalité longitudinales permettent de déterminer le temps restant à vivre pour un individu compte tenu, non pas des conditions du moment mais de l'évolution future présumée des conditions de vie. Le temps intervient sous trois formes différentes dans l'étude de la mortalité :

- l'âge des individus, que nous noterons  $x$  ;
- la génération dont les individus font partie,  $g$ . La mortalité des individus peut aussi se modifier selon leur passé. Prenons le cas d'une génération qui aurait subi une grave épidémie chez les nourrissons. Les survivants seront certainement plus résistants que les individus d'une autre génération qui n'auraient pas eu à subir de telles conditions exceptionnelles;
- l'instant d'observation, noté  $t$ . Le risque de mourir à un âge donné varie d'une année à l'autre, au gré des circonstances telles qu'une épidémie, une guerre ou encore une canicule comme celle de l'été 2003.

On dispose ainsi de trois coordonnées pour repérer un événement tel que le décès d'un individu, à savoir l'âge auquel l'individu meurt, le moment de sa naissance et la date à laquelle le décès se produit. Elles peuvent s'illustrer à l'aide du diagramme de Lexis.



**Figure 1. Diagramme de Lexis.**

Celui-ci est un système d'axes rectangulaires permettant de préciser comment se combinent les mesures de temps. En abscisse, se trouve le temps calendrier  $t$  et en ordonnée, l'âge  $x$ . Outre le quadrillage rectangulaire, les diagonales limitent les lignes de vie des personnes nées au cours d'une même année, c'est-à-dire une génération. Le déroulement de l'existence d'un individu est donc figuré par une ligne de vie, parallèle à la première bissectrice: l'âge de l'individu augmente d'une année pour chaque année. Celle-ci est interrompue par le point mortuaire. Les décès relevés à l'âge  $x$  durant l'année  $t$  sont donc à localiser dans le carré résultant de l'intersection entre le couloir vertical de l'année  $t$  et le couloir horizontal correspondant à l'âge  $x$ . Ces personnes décédées appartenaient à deux générations différentes, à savoir celles nées en  $t - x$  et en  $t - x - 1$ . Les décès de

chaque génération se trouvent alors dans un triangle, formé des deux couloirs précédents ainsi que du couloir oblique représentant la génération.

Les indicateurs démographiques dont nous aurons besoin seront donc doublement indicés par l'âge  $x$  et le temps calendaire  $t$ . Les quantités d'intérêt sont ici les quotients de mortalité  $q_{xt}$  et les taux instantanés de mortalité  $\mu_{xt}$ . Le premier représente la probabilité de décéder à l'âge  $x$  durant l'année  $t$ . Le taux de mortalité diffère du quotient de mortalité puisque le nombre de décès  $y$  est ramené à un effectif moyen, au lieu de l'effectif initial. Le taux de mortalité  ${}_{uz}m_{xt}$  permet d'analyser ce qui se passe dans  $\{(t, t+z), (x, x+u)\}$  et est donné par

$${}_{uz}m_{xt} = \frac{{}_{uz}D_{xt}}{{}_{uz}L_{xt}},$$

où

- ${}_{uz}D_{xt}$  représente le nombre d'individus décédant entre l'âge  $x$  et  $x+u$  sur la période  $(t, t+z)$  ;
- ${}_{uz}L_{xt}$  représente le nombre d'années vécues par les individus entre l'âge  $x$  et  $x+u$  sur la période  $(t, t+z)$ .

Alors que les quotients de mortalité sont des probabilités, nombres adimensionnels toujours compris entre 0 et 1, les taux sont quant à eux mesurés dans l'unité inverse du temps et comptabilisent des décès par personne exposée au risque et par unité de temps.

Le taux instantané de mortalité à l'âge  $x$  en  $t$ , noté  $\mu_{xt}$  est défini à partir de la limite suivante:

$$\mu_{xt} = \lim_{u \rightarrow 0, z \rightarrow 0} {}_{uz}m_{xt}.$$

Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à BROUHNS & DENUIT (2001a).

Ici, nous adoptons l'hypothèse de constance des taux instantanés de mortalité dans chaque carré du diagramme de Lexis :

$$\mu_{x+\psi, t+\tau} = \mu_{x,t}, \quad 0 \leq \tau, \psi < 1 \text{ et } x, t \in N. \quad (1)$$

Cette hypothèse entraîne notamment que

$$q_{xt} = 1 - \exp(-\mu_{xt}). \quad (2)$$

### 3. STATISTIQUES DE MORTALITE POUR LA FRANCE

Le point de départ de toute analyse de l'évolution de la mortalité consiste à récolter un ensemble de données fiables pour la population étudiée. A cette fin, nous disposons d'un jeu de données fourni conjointement par l'INSEE (Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques) et l'INED (Institut National d'Etudes Démographiques).



Jusqu'en 1997, nous nous sommes basés sur les données de VALLIN-MESLE (2001), disponibles sur le site de l'INED<sup>1</sup>. Les informations dont nous avons besoin étaient le nombre de décès ventilés par sexe, âge et année de naissance ainsi que les quotients de mortalité partiels. Ici, il s'agit de l'âge en années révolues qui correspond à l'âge exact. Ainsi, si l'événement considéré a eu lieu à la date  $j$ , l'individu fêtant son anniversaire après cette date  $j$  aura comme âge en années révolues  $x - 1$  où  $x$  vaut la différence entre l'année de l'événement et l'année de naissance de l'individu considéré. Pareillement, l'individu ayant son anniversaire à la date  $j$  ou avant aura comme âge en années révolues  $x$  ans.

Ces données sont disponibles respectivement:

- dans les données de base, qui nous fournissent les décès par année de naissance, sexe et âge de 0 à 122 ans, pour les années d'observation de 1899 à 1997,  $D_{xt}(g)$ ;
- dans les fonctions de mortalité, où l'on trouve les quotients partiels calculés de façon classique, de 0 à 99 ans, pour les années de 1899 à 1997 également,  $q_{x^1t}$  et  $q_{x^2t}$ .

Le calcul des quotients partiels,  $q_{x^i}$ ,  $i = 1, 2$ , s'effectue comme suit,

$$q_{x^1t} = \frac{D_{xt}(g)}{l_{x,t+1} + D_{xt}(g)},$$

$$q_{x^2t} = \frac{D_{xt}(g-1)}{l_{xt}},$$

où

- $l_{xt}$  représente le nombre d'individus d'âge  $x$  au premier janvier de l'année  $t$ ;
- $D_{xt}(g)$  est le nombre de décès à l'âge  $x$  durant l'année  $t$  pour la génération  $g$ , née en  $t - x$ .

Pour les années postérieures à 1997, les données proviennent des publications de l'INSEE<sup>2</sup>, dont l'acquisition peut s'effectuer sur leur site<sup>3</sup>. Pour le calcul des quotients partiels, nous avons donc besoin des décès par sexe, âge et année de naissance, fournis jusqu'en l'année 2000 (ceux de l'année 2001 étant provisoires, nous avons préféré nous limiter à l'an 2000) ainsi que des effectifs de population au premier janvier de 1998 à 2001 par sexe et âge.

Notons que nous retrouvons nos trois indices temporels à savoir  $x$ ,  $t$  et  $g$ .

<sup>1</sup> [http://www.ined.fr/publications/cdrom\\_vallin\\_mesle/](http://www.ined.fr/publications/cdrom_vallin_mesle/)

<sup>2</sup> La situation démographique en 1998, 1999, 2000 et 2001. Collection INSEE Résultats.

<sup>3</sup> <https://www.webcommerce.insee.fr/>

$q_{x,t}$  représente une estimation de la probabilité pour la génération  $g$  de décéder à l'âge  $x$  durant l'année  $t$ . En effet, le numérateur est le nombre de décès de la génération  $g$ , à l'âge  $x$  et en l'année  $t$  tandis que le dénominateur est le nombre d'individus de la génération née en  $t-x$  qui ont atteint l'âge  $x$ .

$q_{x,t}$  représente quant à lui la probabilité pour la génération née en  $t-x-1$  de décéder à l'âge  $x$  durant l'année  $t$ . Le recours au dénominateur de  $q_{x,t}$  s'explique par le fait qu'on n'a généralement pas la possibilité d'estimer le nombre de personnes ayant fêté leur  $x^{\text{ème}}$  anniversaire durant l'année  $t-1$ , qui devrait jouer le rôle de l'effectif soumis au risque.

La probabilité  $p_{xt}$  de survivre de son  $x^{\text{ème}}$  à son  $(x+1)^{\text{ème}}$  anniversaire est le produit des probabilités de survivre de son  $x^{\text{ème}}$  anniversaire à la fin de l'année civile et du début de l'année civile jusqu'à son  $(x+1)^{\text{ème}}$  anniversaire, c'est-à-dire,

$$p_{xt} = (1 - q_{x,t})(1 - q_{x,t}). \quad (3)$$

Rappelons que ces quotients partiels sont fournis directement sur le site de l'INED jusqu'en 1997. Pour les années suivantes, nous avons dû les calculer sur base des décès et effectifs de population, comme expliqué plus haut. Ensuite, il a simplement fallu les recombinaison selon l'équation (3) pour obtenir le quotient du moment prenant en compte les deux triangles d'un même carré de Lexis:

$$q_{xt} = 1 - (1 - q_{x,t})(1 - q_{x,t}), \quad (4)$$

ce qui permet de calculer une table du moment portant strictement sur les données de l'année.

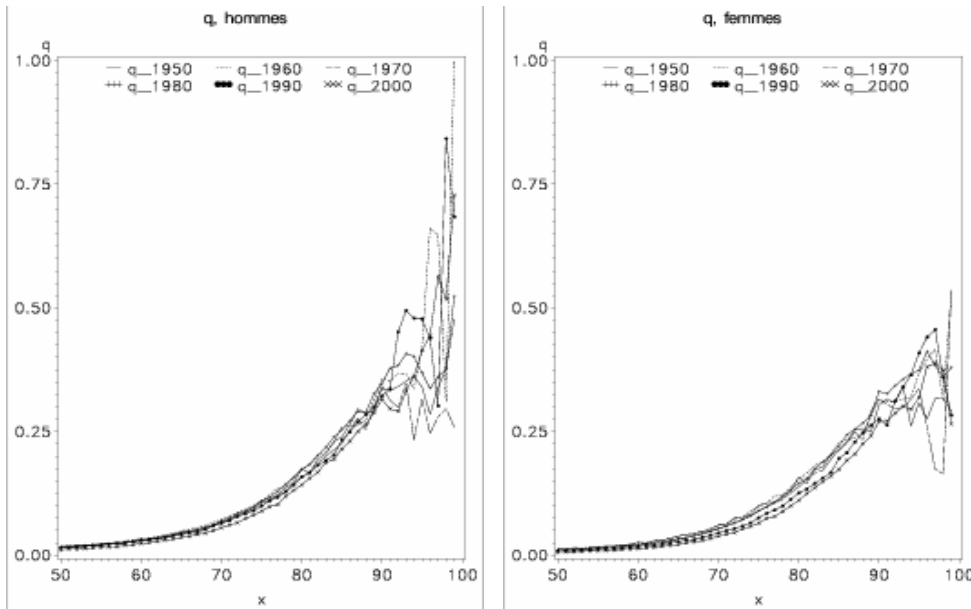
Il a fallu faire un choix quant aux périodes et tranches d'âges que nous allions retenir pour nos applications. Celui-ci s'est porté sur la population âgée de plus de 50 ans et pour une période s'étalant de 1950 à 2000. Ce choix fut motivé:

- pour les âges, par le fait que nous nous intéressons dans ce travail principalement à la problématique des rentes viagères et que celles-ci sont versées généralement après la retraite du rentier: l'âge de 50 ans nous paraît donc raisonnable. Prendre en compte la mortalité des moins de 50 ans reviendrait à inclure dans le modèle la mortalité infantile et la bosse accident, ce qui n'est pas souhaitable ici. De plus, la description de la mortalité des jeunes adultes est un phénomène particulièrement complexe à appréhender et en tant qu'actuaire, nous n'avons pas la prétention d'expliquer le pourquoi des phénomènes observés;
- pour la période, par la fin de la Seconde guerre mondiale. En effet, avant celle-ci, le territoire couvert par les statistiques a sensiblement varié au fil du temps. Etant donné que nous ne disposons de statistiques fiables que jusqu'en 2000,

nous avons été contraints de nous limiter à cette année.

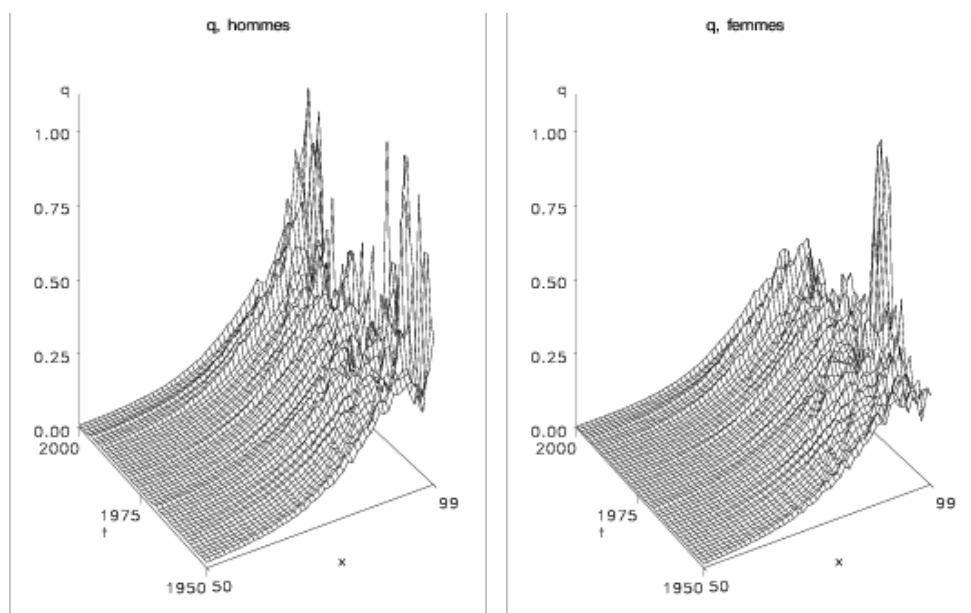
Le lecteur intéressé trouvera une étude approfondie à propos de l'importance de ce choix dans DELWARDE & DENUIT (2003).

Les quotients obtenus pour ces tranches d'âges et périodes sont donnés aux figures 2 et 3.



**Figure 2. Quotients de mortalité obtenus sur base des quotients partiels.**

La figure précédente nous montre clairement l'évolution favorable de la mortalité au cours du temps. Force est donc de constater que la mortalité est en perpétuelle évolution et que l'actuaire qui baserait ses calculs sur une table de mortalité du moment aussi récente soit-elle ne pourrait que commettre une erreur anticonservative d'évaluation, comme nous le montrons d'ailleurs à la fin de ce travail en calculant les espérances de vie à certains âges sur base des tables transversales d'une part et des tables longitudinales d'autre part (cfr table 1).



**Figure 3. Quotients de mortalité obtenus sur base des quotients partiels.**

Comme nous le remarquons aux figures 2 et 3, les quotients de mortalité calculés de manière classique souffrent d'instabilité aux grands âges du fait du manque de données. Le problème est d'autant plus marqué pour des données plus anciennes. Il est donc intéressant de les lisser quelque peu, comme nous le verrons.

Disposer de tables de mortalité projetées, incorporant l'évolution présumée de la durée de la vie humaine est donc une nécessité. Ce sera précisément l'objet de la suite de notre travail.

#### **4. ETUDE DE LA COMPOSANTE TEMPORELLE**

La première étape de toute projection de la mortalité consiste à réduire la dimension des données. Il est en effet impossible de traiter simultanément autant de séries chronologiques décrivant l'évolution au cours du temps des quotients de mortalité ou des taux de mortalité aux différents âges.

Différentes méthodes sont proposées dans la littérature. Une première approche, très appréciée par les actuaires consiste à ajuster les observations de chaque année à l'aide d'un modèle paramétrique tel que celui de MAKEHAM, voyez par exemple BENJAMIN & POLLARD (1993) et BENJAMIN & SOLIMAN (1993). Ceci permet de condenser l'information annuelle dans un petit nombre de paramètres. Ensuite, l'évolution au cours du temps de ces derniers est à son tour modélisée, afin de fournir des projections de mortalité dans le futur.

Il ne faut néanmoins pas perdre de vue que, chaque année, ces paramètres sont vraisemblablement fort corrélés puisqu'ils ont été estimés sur base des mêmes données. On ne peut donc pas se contenter d'une modélisation univariée mais on doit recourir à un modèle de série temporelle multivariée.

Dans ce travail, nous envisagerons la méthode de LEE & CARTER (1992). Celle-ci a déjà prouvé son efficacité à maintes reprises et sur diverses populations: Belgique (voir BROUHNS & DENUIT (2001b)), USA (voir LEE & CARTER (1992)), Canada (voir LEE & NAULT (1993)), Chili (voir LEE & ROFMAN (1994)), Japon (voir WILMOTH (1996)). Nous utiliserons en fait une variante de cette méthode, développée par DENUIT (2003).

L'idée de la méthode originale de LEE & CARTER (1992) est de passer par une décomposition en valeurs singulières de la matrice des taux instantanés de mortalité, doublement indexés par l'âge et le temps calendaire. La matrice initiale sera ainsi approximée au premier rang par un produit de deux vecteurs propres: l'un d'entre eux traduira l'effet de l'âge et l'autre, l'effet du temps calendaire. Il suffira alors d'extrapoler dans le futur le vecteur décrivant l'évolution temporelle pour en déduire des tables de mortalité prospectives. Notons que cette méthode est purement objective, elle se contente d'extrapoler dans le futur les tendances constatées dans le passé. Elle ne permet donc pas de tenir compte de l'avis d'experts quant à l'évolution présumée de la mortalité ou encore de l'évolution de la médecine.

LEE & CARTER (1992) proposent la forme suivante pour les taux instantanés de mortalité:

$$\ln \hat{\mu}_{xt} = \ln \mu_{xt} + \varepsilon_{xt}, \quad \varepsilon_{xt} \sim N(0, \sigma^2), \text{ iid} \quad (5)$$

avec

$$\mu_{xt} = \exp(\alpha_x + \beta_x \kappa_t). \quad (6)$$

Sur l'échelle logarithmique, le taux de mortalité est ainsi décomposé, à un terme d'erreur près, en la somme de deux composantes: l'une spécifique à l'âge et l'autre, composée du produit d'un paramètre temporel décrivant l'évolution générale de la mortalité et d'un paramètre propre à l'âge, expliquant l'évolution du taux par rapport aux autres âges. Remarquons que l'on espère que la variance des  $\varepsilon_{xt}$  sera aussi petite que possible de sorte que la majeure partie de la variance à chaque âge sera expliquée par les  $\kappa_t$ .

Les paramètres satisfont les contraintes suivantes, qui assurent l'identifiabilité du modèle:

$$\text{LC1: } \sum_t \kappa_t = 0, \quad (7)$$

$$\text{LC2: } \sum_x \beta_x = 1. \quad (8)$$

Ne pas imposer ces contraintes conduirait à un modèle non identifiable étant donné que tout remplacement des paramètres  $\beta_x$  et  $\kappa_t$  par  $r\beta_x$  et  $\kappa_t/r$ ,  $r \in R_0$  conduirait au même résultat.

Le modèle (5) ne peut être ajusté par régression linéaire puisque nous ne disposons pas de variables observables pour le membre de droite. C'est pourquoi il faut adopter une approche se basant sur une minimisation aux moindres carrés. Une solution optimale en ce sens, c'est-à-dire minimisant l'expression (9), peut être fournie par la méthode de décomposition en valeurs singulières, comme nous allons le voir dans la suite.

$$(\hat{\alpha}_x, \hat{\beta}_x, \hat{\kappa}_t) = \arg \min_{\alpha_x, \beta_x, \kappa_t} \sum_x \sum_t (\ln \mu_{xt} - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2. \quad (9)$$

La solution obtenue sera unique, étant donné les contraintes (7) et (8).

La méthode se décompose en plusieurs étapes bien distinctes, que nous détaillons dans les sous-sections suivantes. Notons que la méthode de LEE & CARTER (1992) est ici utilisée dans un but purement descriptif: l'objectif étant de déceler une tendance linéaire pour les  $\kappa_t$  afin de justifier une simplification du modèle, telle qu'expliquée par la suite.

#### 4.1. Estimation des taux instantanés de mortalité

Dans un premier temps, sous notre hypothèse de constance des taux instantanés de mortalité dans chaque carré du diagramme de Lexis pour la répartition des décès sur l'année (équation (1)), vu la relation (2), nous approchons les taux instantanés de mortalité  $\mu_{xt}$  par:

$$\mu_{xt}^* = -\log(1 - q_{xt}), \quad x=50, \dots, 99, t=1950, \dots, 2000. \quad (10)$$

#### 4.2. Estimation des paramètres

Ensuite, la différenciation de notre fonction objectif (9) par rapport aux  $\alpha_x$  nous donne

$$\sum_{t=t_m}^{t_M} \ln \mu_{xt}^* = (t_M - t_m + 1) \hat{\alpha}_x + \beta_x \sum_{t=t_m}^{t_M} \kappa_t, \quad x=50, \dots, 99, \quad (11)$$

c'est-à-dire, vu la contrainte (7),

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \ln \mu_{xt}^*, \quad x=50, \dots, 99. \quad (12)$$

Ici,  $t_m$  et  $t_M$  sont respectivement les années 1950 et 2000. Ces paramètres représentent donc la moyenne temporelle des taux de mortalité.

Nous allons maintenant définir une matrice  $\mathbf{Z}$ , dont les différents éléments sont les suivants:

$$z_{xt} = \ln \mu_{xt}^* - \hat{\alpha}_x, \quad x=50, \dots, 99, t=1950, \dots, 2000, \quad (13)$$

ce qui est en fait un centrage des  $\ln(\mu_{xt}^*)$  par rapport à leur moyenne temporelle.

Si nous voulons approcher cette matrice  $\mathbf{Z}$  par le produit de deux matrices colonne et ligne respectivement,

$$\mathbf{Z} \approx \hat{\boldsymbol{\beta}} \hat{\boldsymbol{\kappa}}', \quad (14)$$

avec  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ , le vecteur des  $\hat{\beta}_x$  et  $\hat{\boldsymbol{\kappa}}$ , le vecteur des  $\hat{\kappa}_t$ , de manière optimale aux sens des moindres carrés ordinaires, c'est-à-dire en minimisant  $\sum_{x,t} (z_{xt} - \beta_x \kappa_t)^2$ , nous devons décomposer cette matrice en valeurs singulières, de sorte que l'on obtienne:

$$\mathbf{Z} = \sum_{i \geq 1} \sqrt{\lambda_i} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i', \quad (15)$$

avec

- $\mathbf{u}_i$ , le  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre normé de la matrice carrée  $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$ , correspondant à la valeur propre  $\lambda_i$ , c'est-à-dire, tel que  $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$  et  $\mathbf{u}_i' \mathbf{u}_i = 1$ ;
- $\mathbf{v}_i$ , le  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre normé de la matrice carrée  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}'$ , correspondant à la valeur propre  $\lambda_i$ .

Le lecteur intéressé trouvera plus de détails sur la décomposition en valeurs singulières dans le livre de LEBART, MORINEAU & PIRON (2000). Nous rappelons toutefois le principe de cette dernière.

Etant donné que  $\mathbf{u}_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre normé de la matrice carrée  $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$ , correspondant à la valeur propre  $\lambda_i$ , on a que  $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$ . Si on prémultiplie les deux membres de cette égalité par  $\mathbf{Z}$ , on obtient

$$(\mathbf{Z}\mathbf{Z}')\mathbf{Z}\mathbf{u}_i = \lambda_i (\mathbf{Z}\mathbf{u}_i), \quad (16)$$

c'est-à-dire, à tout vecteur propre  $\mathbf{u}_i$  de  $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$ , relatif à  $\lambda_i \neq 0$ , correspond le vecteur propre  $\mathbf{Z}\mathbf{u}_i$  de  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}'$ , relatif à la même valeur propre  $\lambda_i$ .  $\mathbf{Z}\mathbf{Z}'$  et  $\mathbf{Z}'\mathbf{Z}$  ont donc mêmes valeurs propres, avec le même ordre de multiplicité, le cas échéant. On a donc, en gardant les mêmes notations que précédemment,

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \mathbf{Z}\mathbf{u}_i.$$

Par conséquent, on a que:

$$\mathbf{Z}\mathbf{u}_i = \sqrt{\lambda_i} \mathbf{v}_i, \quad (17)$$

$$\mathbf{Z}(\sum_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i') = \sum_i \sqrt{\lambda_i} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i'. \quad (18)$$

Et donc, par orthonormalité de  $\mathbf{u}_i$ , on retrouve (15). Cette formule est appelée décomposition aux valeurs singulières. Elle garantit que, sous des conditions assez générales, une matrice rectangulaire, peut être écrite de façon unique comme une somme optimale de matrices de rang 1, c'est-à-dire de produits d'une matrice ligne par une matrice

colonne. L'optimalité dont il est question signifie que la première matrice de rang 1 constitue la meilleure approximation de rang 1 de la matrice initiale au sens des moindres carrés. Si les plus petites valeurs propres sont très faibles et jugées négligeables, on peut limiter la somme au premier terme correspondant à la seule valeur propre  $\lambda_1$ . Par conséquent, nous avons comme approximation:

$$\mathbf{Z} \approx \sqrt{\lambda_1} \mathbf{v}_1 \mathbf{u}_1^t. \quad (19)$$

La qualité de cette approximation est décrite par le taux d'inertie qui représente le pourcentage de variance expliqué défini comme  $\tau_1 = \lambda_1 / \sum_i \lambda_i$ . Dans notre cas, nous avons:  $\tau_1 = 85\%$  pour les hommes et  $\tau_1 = 95\%$  pour les femmes.

Si nous comparons les équations (14) et (19), nous pouvons obtenir  $\hat{\beta}$  et  $\hat{\kappa}$  par

$$\hat{\beta} = \frac{\mathbf{v}_1}{\sum_j v_{1j}}, \quad (20)$$

$$\hat{\kappa} = \sqrt{\lambda_1} \left( \sum_j v_{1j} \right) \mathbf{u}_1. \quad (21)$$

L'interprétation de ces paramètres est la suivante:

- les paramètres  $\beta_x$  décrivent l'écart des taux instantanés de mortalité  $\mu_{xt}$  par rapport au comportement moyen  $\alpha_x$ , sur l'échelle logarithmique. Ils représentent l'évolution de la mortalité à chaque âge et quantifient l'influence de l'indice temporel  $\kappa_t$  sur le logarithme des taux de mortalité à l'âge  $x$ . Les âges pour lesquels  $\beta_x$  a une grande valeur seront donc très sensibles à l'évolution temporelle;
- les  $\kappa_t$  décrivent l'évolution de la mortalité au cours du temps: ils caractérisent la tendance temporelle.

### 4.3. Egalisation des décès observés et estimés

Plutôt que d'analyser la série chronologique des  $\{\hat{\kappa}_t, t=1950, \dots, 2000\}$ , nous procédons à un ajustement des  $\hat{\kappa}_t$  afin que le nombre de décès recensés chaque année corresponde à son approximation, c'est-à-dire,

$$\sum_{x=50}^{99} D_{xt} = \sum_{x=50}^{99} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t) L_{xt}, \quad t=1950, \dots, 2000, \quad (22)$$

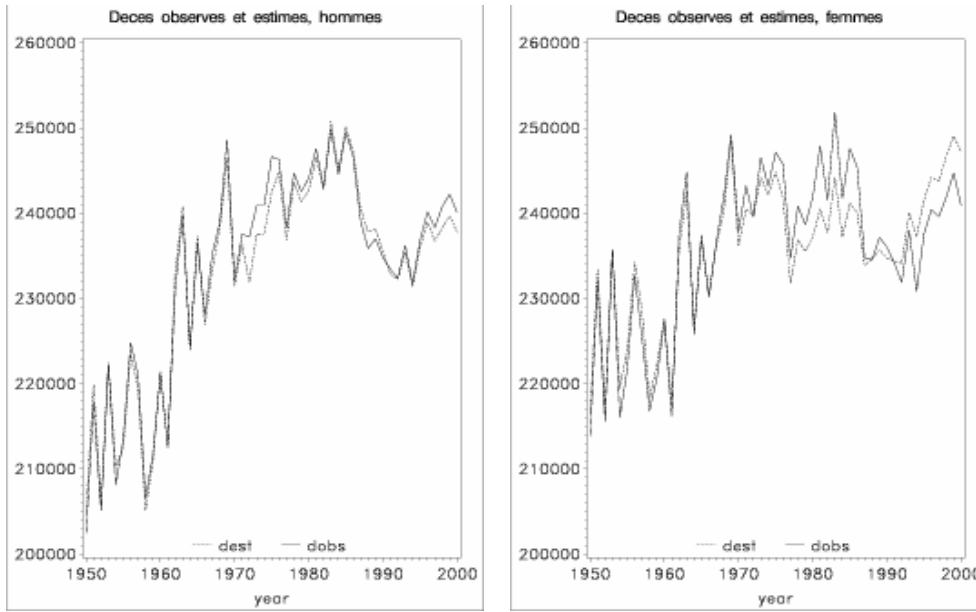
où

- $D_{xt}$  représente le nombre de décès relevés à l'âge  $x$  durant l'année  $t$  :  $D_x(t, g-1) + D_x(t, g)$  ;



- $L_{xt}$  est l'exposition au risque, c'est-à-dire le nombre d'années vécues par les individus d'âge  $x$  en  $t$ . Elle se calcule comme  $\frac{D_{xt}}{\mu_{xt}^*}$ .

Afin de se donner une idée de l'importance de ce réajustement, nous avons réalisé un graphe reprenant les valeurs observées des décès et celles prédites avec la première estimation des  $\kappa_t$  (cfr fig 4). Nous constatons qu'un réajustement s'impose. Comme auparavant, les hommes sont à gauche et les femmes à droite.



**Figure 4. Décès estimés et ceux observés.**

Les  $\hat{\kappa}_t$  réajustés sont solution de l'équation (22), qui peut se réécrire comme:

$$\sum_x [\exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t) L_{xt} - D_{xt}] = 0,$$

$$\sum_x [K_{x,t} \exp(\hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t)] - K'_t = 0,$$

où les  $K_{x,t}$  et  $K'_t$  sont des constantes:  $K_{x,t} = \exp(\hat{\alpha}_x) L_{xt}$  et  $K'_t = \sum_x D_{xt}$ .

Etant en présence de sommes d'exponentielles, donc de fonctions strictement croissantes, l'unicité de la racine de chaque fonction est évidente. Dès lors, une méthode itérative telle que celle de Newton-Raphson peut être utilisée pour obtenir de bons résultats en peu d'itérations. Pour rappel, cette technique se base sur l'itération suivante:

$$\widehat{\kappa}_t^{i+1} = \widehat{\kappa}_t^i - \frac{F(\widehat{\kappa}_t^i)}{F'(\widehat{\kappa}_t^i)},$$

où  $F$  représente la fonction à annuler. Ici,  $F(\widehat{\kappa}_t) = \sum_x [K_{x,t} \exp(\widehat{\beta}_x \widehat{\kappa}_t)] - K'_t$ .

Comme initialisation, nous prendrons bien sûr  $x_t^0 = \widehat{\kappa}_t$  et comme critère d'arrêt:

$$\frac{\widehat{\kappa}_t^{i+1} - \widehat{\kappa}_t^i}{\widehat{\kappa}_t^i} \leq 10^{-7}.$$

Enfin, afin de vérifier la contrainte (7) sur les  $\kappa_t$ , nous devons opérer un second ajustement:  $\widehat{\kappa}$

$$\kappa_t^* = \widehat{\kappa}_t - \tilde{\kappa}, \quad t=1950, \dots, 2000, \quad (23)$$

où

$\tilde{\kappa}$  est la moyenne arithmétique des  $\widehat{\kappa}_t$ .

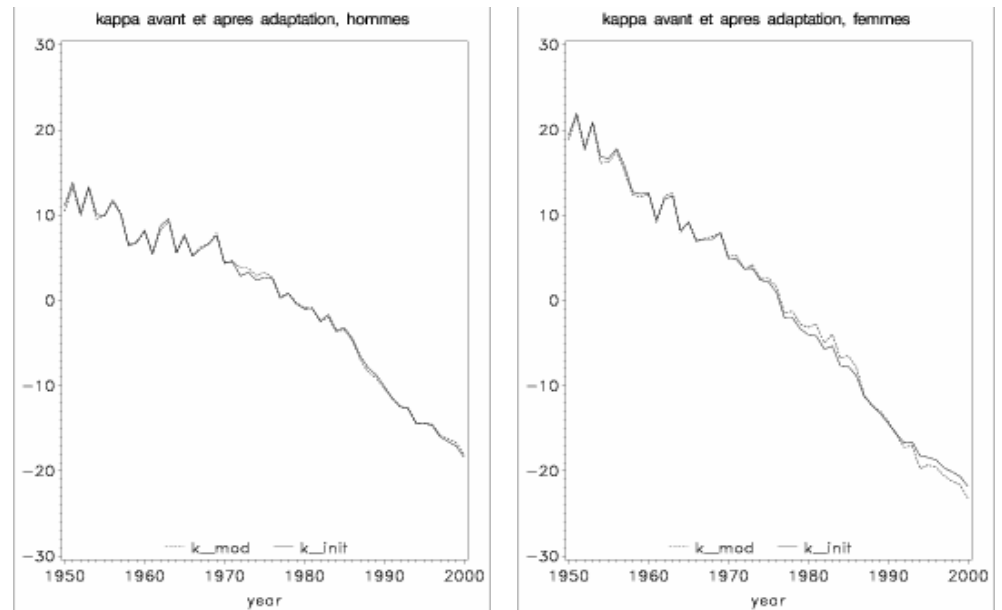
Maintenant, nous devons encore déterminer les  $\alpha_x^*$  tels que,

$$\alpha_x^* + \widehat{\beta}_x \kappa_t^* = \widehat{\alpha}_x + \widehat{\beta}_x \widehat{\kappa}_t, \quad x=50, \dots, 99, t=1950, \dots, 2000, \quad (24)$$

c'est-à-dire tels que

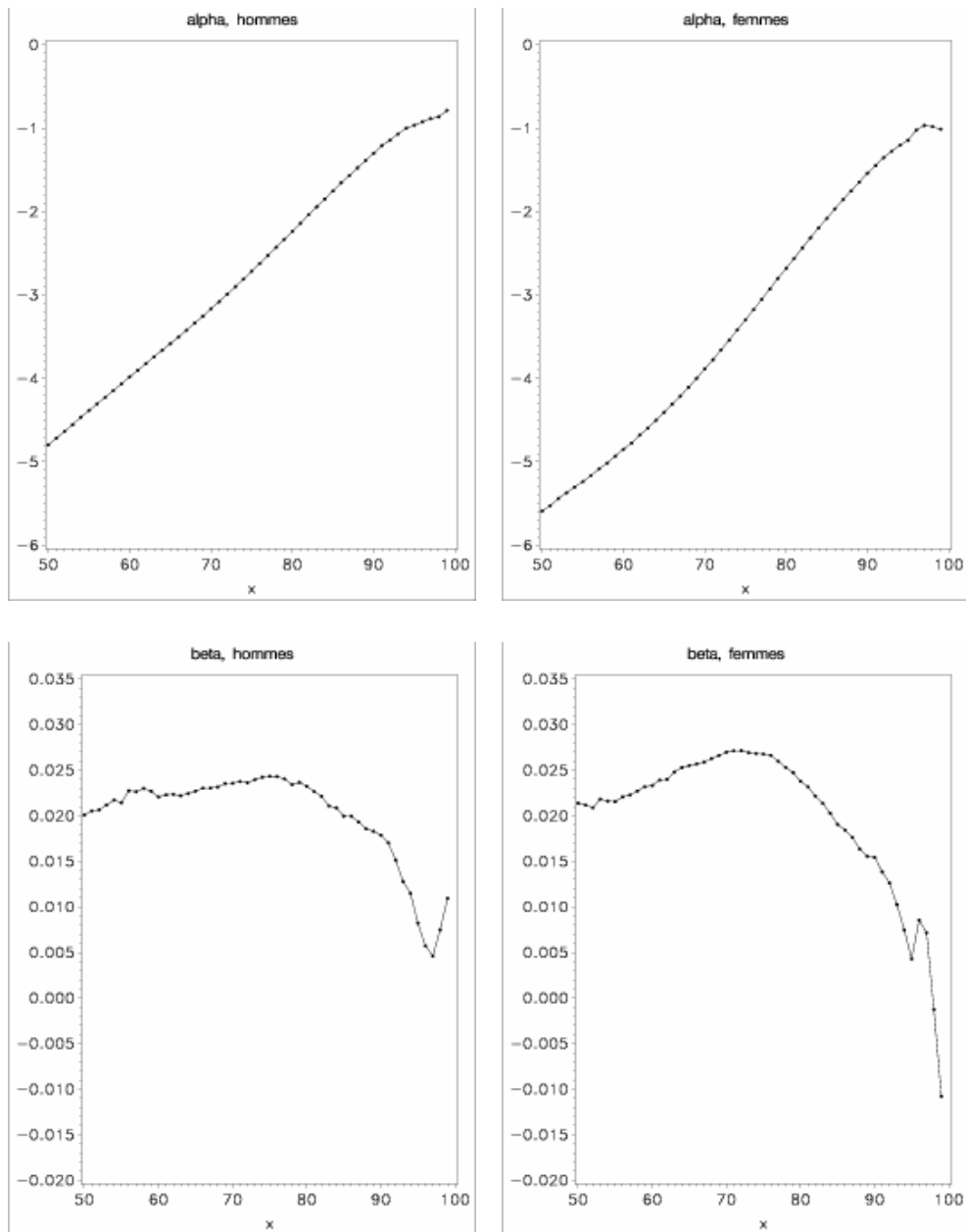
$$\alpha_x^* = \widehat{\alpha}_x + \widehat{\beta}_x \tilde{\kappa}, \quad x=50, \dots, 99. \quad (25)$$

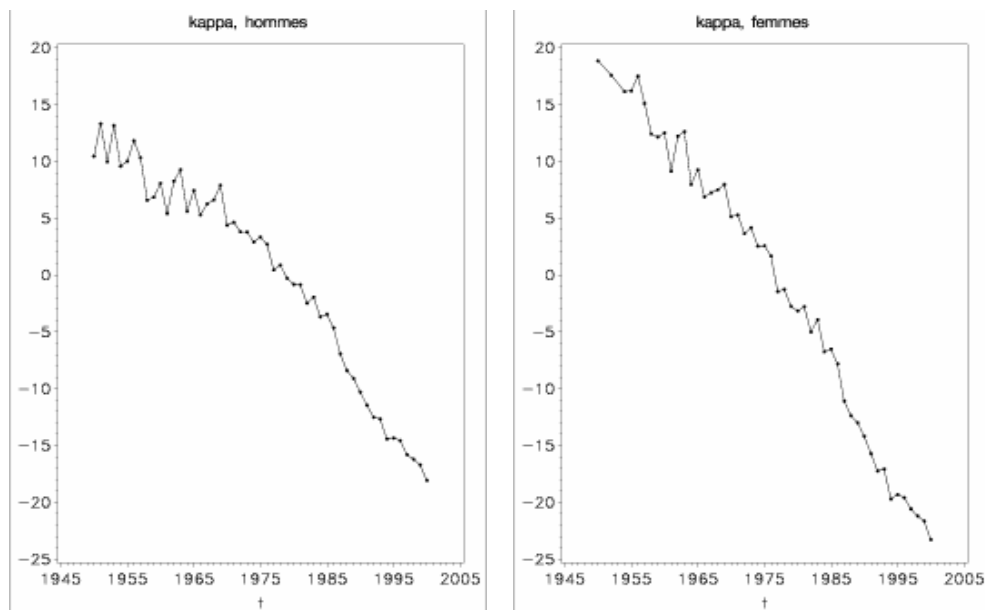
A la figure 5, le lecteur pourra voir le graphe des  $\widehat{\kappa}_t$  déduits de la décomposition en valeurs singulières et celui des  $\kappa_t^*$  ajustés de façon à satisfaire (22) et la contrainte (7).



**Figure 5. Effet sur les  $\kappa_t$  de l'adaptation pour égaliser les décès estimés à ceux observés.**

Finalement, les paramètres de la méthode de LEE & CARTER (1992) sont ceux de la figure 6.





**Figure 6. Paramètres de la méthode de LEE & CARTER (1992).**

#### 4.4. Extrapolation de la tendance temporelle

Dans la méthode de LEE & CARTER (1992), toute l'information relative à l'évolution de la mortalité dans le temps est comprise dans la série des  $\kappa_t$ . On veut pouvoir effectuer des prévisions sur les indices de mortalité des années futures: il faut donc modéliser cette série temporelle. Cette manière de procéder possède les avantages et les inconvénients de l'objectivité: on se contente juste d'extrapoler dans le futur les tendances observées dans le passé. Par conséquent, s'il existe des variations importantes telles que des progrès dans la médecine, l'apparition de nouvelles maladies ou encore l'évolution du style de vie, celles-ci ne seront pas représentées.

Néanmoins, la mortalité étant influencée par l'interaction complexe de facteurs sociaux et biologiques difficiles à modéliser, la prédiction par extrapolation est en fait la technique par défaut.

Etant donné que les  $\kappa_t^*$  ont une tendance linéaire assez prononcée, surtout pour les dernières années, comme nous pouvons le voir à la figure 6, nous avons opté pour une régression linéaire de ces paramètres. Ainsi, on a:

$$\kappa_t^* = at + b + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \theta^2), \text{ iid.} \quad (26)$$

Afin de vérifier la pertinence de ce choix, nous nous sommes penchés sur un critère bien connu, celui du  $R^2$  ou plus précisément, le  $R^2$  ajusté pour le nombre de degrés de liberté du modèle.

Sa racine carrée,  $R$  représente la corrélation entre la variable réponse et les valeurs prédites par le modèle. Le  $R^2$  est donc compris entre 0 et 1. Plus il sera proche de 1, meilleur sera le modèle.

Le  $R^2$  se définit de la façon suivante:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{CSS}, \quad (27)$$

où

-  $CSS = \sum_{t=1}^n (\kappa_t^* - \tilde{\kappa})^2$ , représente la somme corrigée des carrés des erreurs,  $n$  est le nombre d'années retenues pour la régression et  $\tilde{\kappa}$ , la moyenne des  $\kappa_t^*$  ;

-  $SSE = \sum_{t=1}^n (\kappa_t^* - \hat{\kappa}_t^*)^2$  avec  $\hat{\kappa}_t^*$ , la prédiction de  $\kappa_t^*$ , représente la somme des carrés des erreurs.

Le  $R^2$  ajusté tient compte du nombre de degrés de liberté du modèle :

$$AdjR^2 = 1 - \left[ \frac{SSE/(n-p)}{CSS/(n-1)} \right], \quad (28)$$

$$= 1 - \frac{n-1}{n-p} (1 - R^2), \quad (29)$$

où  $p$  est le nombre de paramètres (ici,  $p = 2$ ) et  $n$ , le nombre d'observations retenues pour estimer le modèle.

Afin de déterminer à partir de quelle année il est optimal de commencer la régression, nous analysons à la figure 7 la valeur de  $AdjR^2$  pour différents choix entre 1950 et 1990. Nous pouvons y voir que l'année 1975 semble être la meilleure pour les hommes tandis que 1968 semble mieux convenir pour les femmes puisque ce sont elles qui donnent les valeurs maximales du  $AdjR^2$ . C'est donc celles-là que nous retiendrons pour nos applications. Pour plus de simplicité, nous les noterons indifféremment  $t_r$  dans la suite.

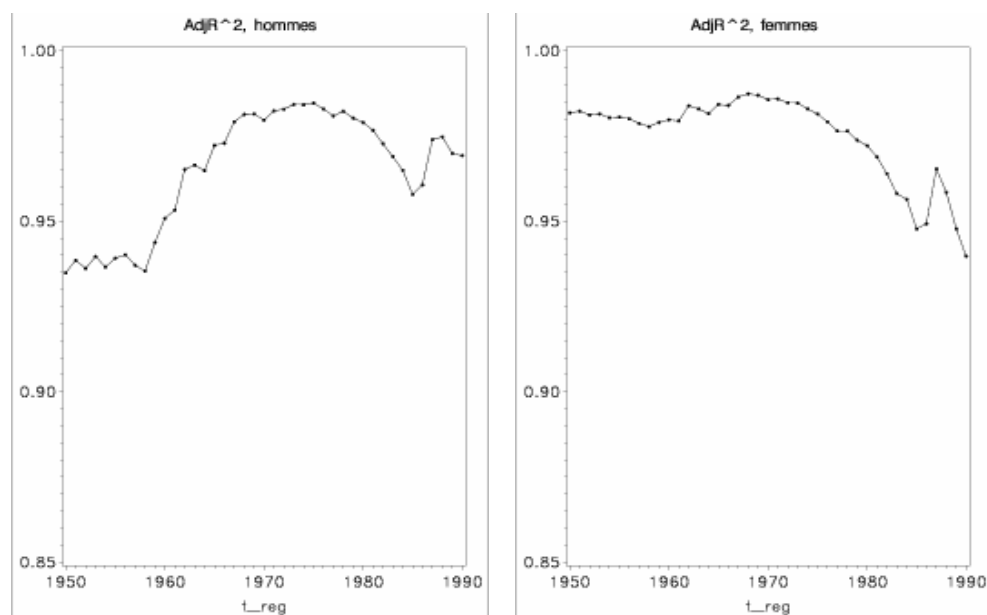


Figure 7. Valeurs du  $AdjR^2$  de la régression linéaire des  $\kappa_i^*$  (26).

A la figure 8, nous voyons les  $\kappa_i^*$  originaux et régressés à partir des années 1975 et 1968.

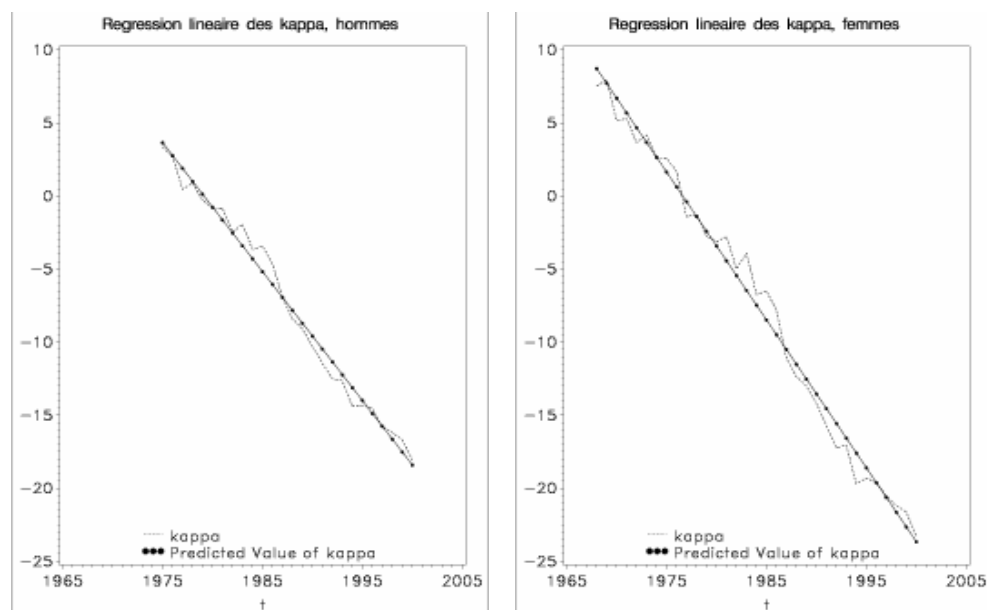


Figure 8. Régression des  $\kappa_i^*$  (26).

## 5. FERMETURE DES TABLES AUX ÂGES ÉLEVÉS

Les quotients de mortalité calculés de manière classique souffrent d'instabilité aux grands âges du fait du manque de données, comme nous pouvons d'ailleurs le constater à la figure 3. Le problème est d'autant plus marqué pour des données plus anciennes. Il est donc intéressant de les lisser quelque peu. De plus, l'âge maximal pour lequel nous détenons des observations est souvent insuffisant pour permettre de modéliser l'extinction totale d'une population. Dans notre cas, 99 ans est certainement insuffisant étant donné que Jeanne Calment a vécu jusqu'à 122 ans. Or, nous assistons ces derniers temps non seulement à un repli de la mortalité aux grands âges mais également à une augmentation des proportions de gens plus âgés. Il est donc important de s'y intéresser de plus près.

L'objectif de la présente section est donc de lisser les estimations brutes des quotients de mortalité aux grands âges et de les extrapoler jusqu'à un certain âge ultime, que nous prendrons ici égal à 125 ans. La polémique concernant le choix d'un âge ultime est toujours d'actualité: pouvons-nous dire aujourd'hui que de tout temps l'homme mourra avant 125 ans? La plupart des actuaires, s'appuyant sur des avis de médecins ou d'éminents biologistes croient à la réalité d'une borne supérieure à la durée de vie humaine, qui serait inscrite dans nos gènes. Notre âge de 125 ans pourrait paraître assez élevé étant donné le faible nombre de centenaires actuellement. Cependant, il faut garder à l'esprit que nos tables sont développées pour des générations plus jeunes également. Dans les années futures, il est possible que l'âge ultime de 125 ans soit considéré comme banal. Notre choix est donc conservatif. De plus, une étude relativement récente (cfr VAUPEL(1997)), construite sur une importante base de données, à savoir 70 millions d'êtres humains de 14 pays ayant atteint l'âge de 80 ans dont 200.000 centenaires, a fait apparaître les caractéristiques suivantes:

- les probabilités annuelles de décès augmentent à un taux décroissant au-delà de 80 ans;
- la mortalité décroît au cours du temps dans cette tranche d'âge.

Il n'existe donc aucune certitude à ce sujet. Il faut par conséquent rester prudent dans la détermination d'un éventuel âge ultime. Nous sommes malheureusement bien en peine de devoir trancher cette épineuse question. Nous considérerons donc cet âge ultime plutôt comme une limite au-delà de laquelle les éventuels survivants seraient négligés dans le calcul des indicateurs démographiques.

Une méthode simple de fermeture des tables consiste à modéliser les courbes de mortalité existantes et de les extrapoler aux âges auxquels les résultats empiriques deviennent déficients. Plusieurs modèles sont proposés dans la littérature. Citons par exemple la méthode de COALE & KISKER (1990) qui utilise les taux instantanés de mortalité, se basant sur la célèbre formule de GOMPertz ou encore celle de RENSHAW & HABERMAN (2003).

Dans cet article, nous envisagerons une méthode de fermeture des tables travaillant sur les quotients de mortalité. La technique consiste à ajuster un modèle linéaire en  $x$  et  $x^2$  aux logarithmes des quotients de mortalité pour les grands âges (cfr JAUMAIN (2001)). Celle-ci consiste en fait à régresser de façon quadratique les estimations brutes du logarithme des quotients de mortalité aux âges élevés et ensuite, de les extrapoler jusqu'à un certain âge ultime, que nous prendrons ici égal à 125 ans.

Dans un premier temps, nous utilisons les taux de mortalité observés de 75 ans à 95 ans pour déterminer les paramètres de la régression quadratique (30).

$$\ln(q_x) = a + bx + cx^2 + \varepsilon_x, \quad 75 \leq x \leq 95, \quad (30)$$

avec  $\varepsilon_x$  les erreurs supposées centrées et homoscédastiques.

En toute rigueur, nous devrions commencer la régression à l'âge pour lequel la valeur du  $AdjR^2$  défini précédemment est la plus élevée. Les valeurs de celui-ci, en commençant la régression à différents âges compris entre 65 et 85 ans étant très proches et toujours supérieures à 0.99, pour plus de simplicité, nous n'avons retenu qu'un seul âge, identique pour toutes les années: 75 ans. Nous avons préféré négliger les données pour les âges plus élevés que 95 ans vu leur instabilité (cfr fig. 2 et 3). Etant donné que chaque année calendaire est traitée séparément, par souci de clarté du texte, nous avons omis l'indice temporel. En réalité, les paramètres seront différents pour chaque année. La période étudiée est celle s'étendant de  $t_r$  à  $t_M$ . Dans notre cas, c'est donc de 1975 à 2000 pour les hommes et de 1968 à 2000 pour les femmes.

Il faut imposer une valeur limite. Cette régression se fait sous les contraintes suivantes:

$$\begin{aligned} q_{130} &= 1, \\ \dot{q}_{130} &= 0. \end{aligned}$$

Notons que le quotient de mortalité a été supposé égal à 1 à un âge ultérieur à notre âge ultime de 125 ans en vue d'éviter des valeurs infinies pour les taux instantanés de mortalité (voir équation (2)). Ces deux contraintes nous permettent de réécrire le modèle en fonction d'un seul paramètre:

$$\ln(q_x) = (16900 - 260x + x^2)c + \varepsilon_x. \quad (31)$$



La seconde contrainte revient en fait, pour nos données, à imposer une dérivée positive pour tous les âges. En effet, nous avons que,

$$q'_x = \exp([16900 - 260x + x^2]c)(-260 + 2x)c,$$

étant donné que le paramètre  $c$  est strictement négatif pour chaque année, la condition  $q'_x > 0$  est respectée si  $x < 130$ . En effet, on a

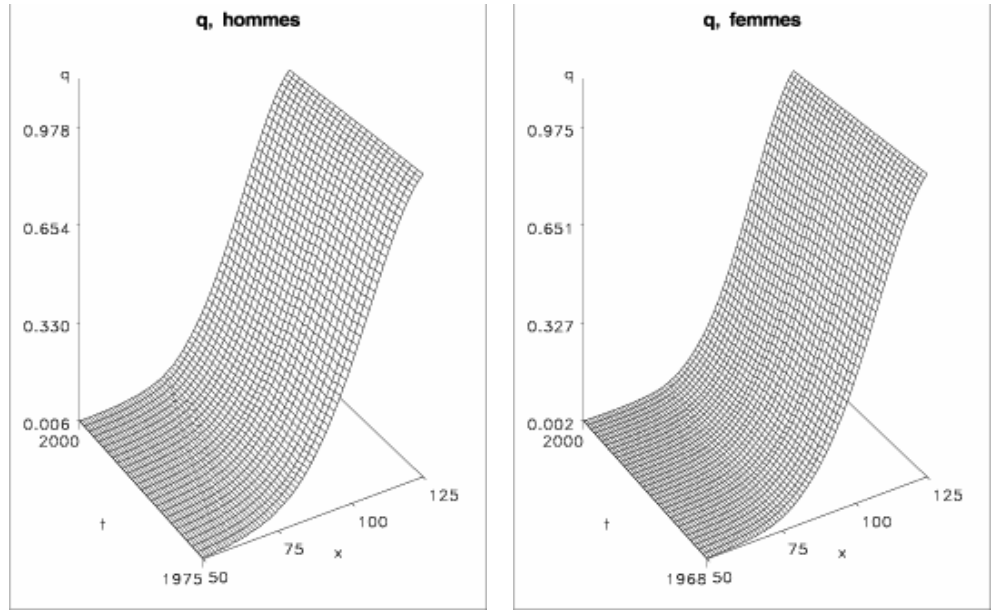
$$\begin{aligned} \exp([16900 - 260x + x^2]c)(-260 + 2x)c > 0 &\Leftrightarrow \\ (-260 + 2x)c < 0 &\Leftrightarrow \\ x < 130. \end{aligned}$$

Nous avons appliqué cette régression quadratique aux données françaises. Nous pouvons facilement obtenir les quotients de mortalité correspondants par passage à l'exponentielle. Ensuite, nous avons remplacé les taux de mortalité observés par ceux régressés à partir de l'âge de 85 ans. Nous obtenons donc un nouvel ensemble de quotients de mortalité,  $\{\hat{q}_{xt}, x=50, \dots, 125, t=t_r, \dots, 2000\}$ , constitués des quotients bruts pour  $x=50, \dots, 84$  ans et des quotients régressés pour  $x=85, \dots, 125$  ans. La dernière étape permet de lisser la table, en effectuant des moyennes géométriques. Afin d'éviter une cassure au niveau du raccord à 85 ans, nous avons recalculé les quotients de mortalité pour les âges de 80 à 90 ans en utilisant des moyennes géométriques mobiles sur 5 ans. Ces quotients lissés ont donc été obtenus de la façon suivante:

$$\hat{q}_x^* = (\hat{q}_{x-2} \cdot \hat{q}_{x-1} \cdot \hat{q}_x \cdot \hat{q}_{x+1} \cdot \hat{q}_{x+2})^{\frac{1}{5}}, \text{ pour } x=80, \dots, 90.$$

Nous disposons maintenant d'un ensemble de taux de mortalité  $\{\tilde{q}_{xt}, x=50, \dots, 125, t=t_r, \dots, 2000\}$  où  $\tilde{q}_{xt} = \hat{q}_{xt}^*$  pour  $x=80, \dots, 90$  ans et  $\tilde{q}_{xt} = \hat{q}_{xt}$  pour les autres âges, à partir desquels nous allons pouvoir effectuer différentes projections afin d'obtenir l'espérance de vie ou encore le prix de la rente viagère sur des horizons de temps relativement longs.

Les quotients de mortalité obtenus pour différentes années sont ceux de la figure 9.



**Figure 9. Quotients de mortalité complétés.**

Remarquons qu'adopter un tel modèle donne des taux de mortalité à 110 ans pour les générations du siècle dernier, proches de ceux proposés par COALE & KISKER (1990), à savoir  $\mu_{110,2000} = 1.061$  pour les hommes et  $\mu_{110,2000} = 0.915$  pour les femmes.

## 6. MODELE LOG-LINEAIRE

L'idée est ici de simplifier le modèle de LEE & CARTER (1992) en ce qui concerne la structure de la composante temporelle. En effet, nous avons pu remarquer que celle-ci suivait une tendance linéaire prononcée après l'année  $t_r$ . Considérons le modèle:

$$\ln(\mu_{x,t}) = \alpha_x^t + \beta_x^t t_c + \varepsilon_{x,t}, \quad t \geq t_r, \quad (32)$$

où

- $\varepsilon_{x,t}$  sont iid  $\sim N(0, \theta^2)$  ;
- le temps calendaire  $t$ , pour les années postérieures à  $t_r$ , a été centré :  $t_c = \tilde{t} - t$ .  
 $\tilde{t}$  est la moyenne des  $t$ ,  $t_r \leq t \leq t_M$ .

Imposer  $\kappa_t = t_c$  est en fait équivalent à adopter les  $\kappa_t$  régressés linéairement en raison de la structure de l'équation (32). En effet, dans ce cas, on aurait

$$\ln(\mu_{x,t}) \approx \alpha_x + \beta_x(at + b), \quad (33)$$

$$= (\alpha_x + b\beta_x) + (a\beta_x)t, \quad (34)$$

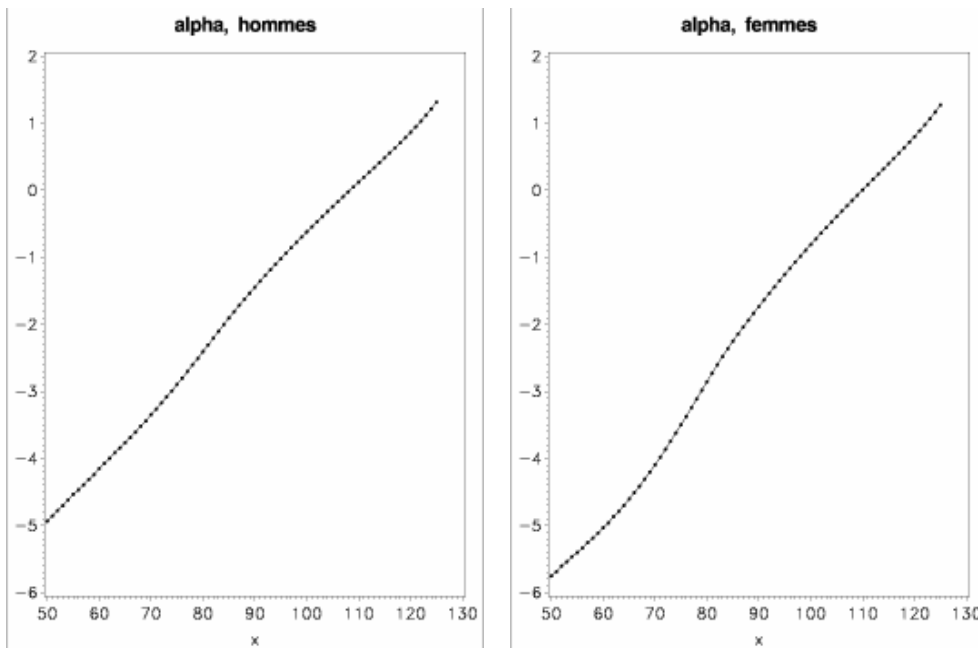
$$= (\alpha_x + b\beta_x + a\beta_x\tilde{t}) - (a\beta_x)(\tilde{t} - t), \quad (35)$$

$$= \alpha_x^l + \beta_x^l(\tilde{t} - t). \quad (36)$$

Nous voyons donc que les deux modèles sont équivalents, moyennant une adaptation des paramètres.

Comme nous l'avons dit, il faut réestimer les autres paramètres du modèle. Les valeurs des  $t_c$  étant connues, elles sont utilisées comme variables explicatives tandis que l'âge est considéré en tant que variable catégorielle. Il suffit donc de déterminer les paramètres de la régression (32) ayant pour variables explicatives l'âge  $x$  et les  $t_c$ . Ceux-ci peuvent aisément être calculés avec un logiciel statistique approprié, tel que SAS.

Les paramètres obtenus sont ceux de la figure 10.



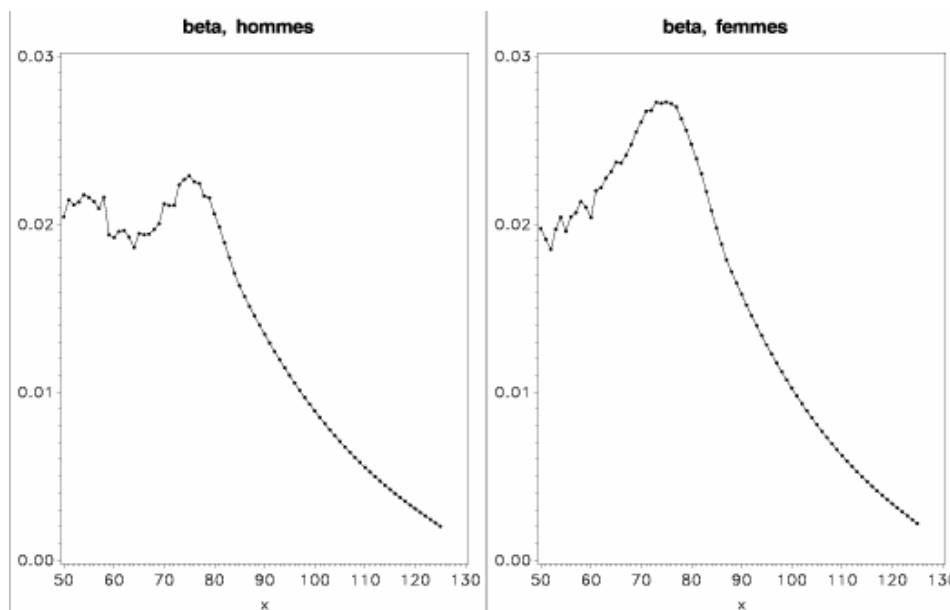


Figure 10. Paramètres adaptés pour  $\kappa_i = t_c$ .

A partir de ce modèle, nous pourrions effectuer des projections de la série des  $\mu_{x,t}$  à long terme puisque  $t_c = \tilde{t} - t$  pour tout  $t \geq t_r$ , nous permettant ainsi des applications actuarielles variées.

## 7. ESPERANCE DE VIE ET PRIX DE RENTE VIAGERE

Les tables de mortalité prospectives permettent, contrairement aux tables transversales, de tenir compte de l'évolution future présumée des conditions de vie. Ainsi,  $e_{xt}$  représentera l'espérance réelle du nombre d'années restant à vivre pour une personne d'âge  $x$ , en l'année  $t$ . Elle se calcule à partir de la matrice totale des taux instantanés de mortalité, obtenue sur base des paramètres calculés à la section précédente. L'espérance de vie est donnée par:

$$e_{xt} = \frac{1 - \exp(-\mu_{xt})}{\mu_{xt}} + \sum_{k \geq 1} \left\{ \prod_{j=0}^{k-1} \exp(-\mu_{x+j,t+j}) \right\} \frac{1 - \exp(-\mu_{x+k,t+k})}{\mu_{x+k,t+k}}. \quad (37)$$

Pour les tables transversales, cette valeur n'avait aucun sens concret puisqu'elle était basée sur une génération fictive qui aurait subi tout au long de sa vie les conditions de mortalité par âge de la période considérée. Dans une phase d'allongement de la durée de la vie humaine telle qu'observée actuellement, les espérances de vie calculées sur base des tables transversales sous-estiment donc systématiquement la durée de vie moyenne de la génération née une année donnée. Une génération de naissance n'est en effet pas soumise,

durant l'ensemble de son vécu, à la mortalité mesurée à la date de naissance mais profite des progrès accomplis au cours de sa vie.

Le prix d'une rente viagère au taux technique  $i$  vendue en l'année  $t$  à un individu d'âge  $x$  vaut:

$$a_{xt} = \sum_{k \geq 0} \left\{ \prod_{j=0}^k p_{x+j,t+j} \right\} \left( \frac{1}{1+i} \right)^{k+1} \quad (38)$$

où  $p_{xt} = \exp(-\mu_{xt})$ .

## 7.1. Cadre législatif français

### LES TABLES REGLEMENTAIRES

Les tables réglementaires françaises comportent deux volets : la table TD88-90 pour les assurances en cas de décès et la table TV88-90 pour les assurances en cas de vie. Homologuée par l'arrêté du 27 avril 1993, la table TV88-90 a été établie à partir des données de l'INSEE issues d'observations réalisées entre 1988 et 1990 et est applicable aux contrats d'assurance vie souscrits depuis le 1<sup>er</sup> juillet 1993. Elle décrit la mortalité féminine. Les femmes vivant sensiblement plus longtemps que les hommes, il en résulte une différence non négligeable entre les deux tables: la table TV88-90 enregistre une mortalité inférieure. En pratique, cette table est assez peu utilisée par les assureurs qui se réfèrent davantage à la table plancher prévu par l'article A.335-1 du Code des Assurances : la table TPRV1993.

### LES TABLES PROSPECTIVES

La nécessité d'utiliser des tables de mortalité prospectives a bien été assimilée par le législateur français puisque des tables de générations ont été homologuées par arrêté. Celles-ci ont été obtenues sur base de la mortalité de la population féminine observée sur la période 1961-1987. Ces tables servent depuis le 1<sup>er</sup> juillet 1993 à la tarification et au provisionnement des contrats de rentes viagères immédiates ou différées. Elles imposent un tarif minimal<sup>4</sup>.

### LA TABLE TPRV1993

Cet ensemble de tables devient rapidement lourd à utiliser. Les assureurs veulent dès lors disposer d'une base de calcul moins volumineuse que la collection de tables prospectives. Les entreprises ont la faculté d'utiliser une table de mortalité unique, appelée table prospective des rentes viagères TPRV<sup>5</sup>. La table TPRV93 est en réalité la table de la génération des femmes de 1950 à laquelle on applique des décalages d'âge visant à

<sup>4</sup> Tarif minimal prévu à l'article A.335-1 du Code des Assurances, l'Argus éd.

<sup>5</sup> Celle-ci ainsi que les tableaux de décalages sont disponibles dans le Code des Assurances, l'Argus éd.

déterminer l'âge technique de l'assuré. Les générations antérieures à celle de 1950 seront donc vieilles et les générations postérieures seront rajeunies, vu qu'elles auront pu bénéficier des progrès scientifiques et par conséquent, vivront en moyenne plus longtemps. Ces décalages sont identiques pour les hommes et les femmes. Ils varient en fonction de la valeur du taux technique auquel le prix de la rente est calculé. Ces décalages doivent permettre d'obtenir des tarifications proches de celles résultant de l'application directe des tables de générations. Actuellement, ceux-ci sont unisexes. Comme nous le verrons, il serait peut-être opportun d'étudier des décalages par sexe vu la disparité existant entre la mortalité masculine et féminine ainsi que d'actualiser la TPRV en fonction des données supplémentaires disponibles.

#### TABLE D'EXPÉRIENCE

Aux termes de l'Article A 335-1 du Code des Assurances, les tarifs peuvent être calculés d'après des *tables établies par l'entreprise d'assurance et certifiées par un actuair indépendant de cette entreprise, agréé à cet effet par l'une des associations d'actuaire reconnues par la commission de contrôle des assurances*. Ces dispositions sont applicables depuis le 1<sup>er</sup> juillet 1993. Elles se sont imposées en raison de l'écart constaté entre la mortalité de la population générale sur laquelle sont basées les tables réglementaires et la mortalité de la population assurée. Toutefois, si les contrats visent à garantir le versement de rentes viagères, les tarifs ne peuvent en aucun cas être inférieurs à ceux qui résulteraient de l'application de la table plancher (la TPRV 93).

#### 7.2. Et finalement, combien de temps nous reste-t-il à vivre?

Les résultats de la table 1 visent à montrer les différences existant entre les visions transversale et longitudinale. Comme nous l'avons dit précédemment, calculer l'espérance de vie sur base des tables du moment n'est pas du tout représentatif de la mortalité des individus. En effet, les observations faites pour différents âges durant une année donnée résultent d'un mélange de générations. Une personne atteignant la cinquantaine en 2000 par exemple est née en 1950 tandis que quelqu'un fêtant son 65<sup>ème</sup> anniversaire en l'an 2000 a vu le jour en 1935, ...

Par contre, l'espérance calculée à l'aide des tables prospectives, reflète quant à elle la mortalité des différentes générations d'individus. Ainsi,  $e_{50,2000}$  représente la durée de vie restante d'une personne âgée de 50 ans en l'an 2000,  $e_{65,2000}$ , celle de quelqu'un âgé de 65 ans en l'an 2000.

Les espérances de vie  $e_x$  pour l'année 2000 calculées sur base de ces deux types de tables sont exposées à la table 1. Comme nous le voyons, les différences sont plus grandes pour les générations les plus jeunes, du fait des progrès à venir dont elles pourront bénéficier et qui ne sont pas pris en compte dans la vision transversale.

Age $x$	Expérience de vie $e_{x,2000}$			
	Tables du moment		Tables prospectives	
	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
50	28.509	34.780	32.535	39.628
65	16.735	21.433	18.578	23.914
80	7.590	9.870	8.010	10.508

**Table 1. Comparaison des espérances de vie obtenues sur base des tables du moment et prospectives.**

Comparons maintenant quelques valeurs prospectives avec les valeurs réglementaires qui sont utilisées actuellement en France pour tarifier les contrats de rentes viagères. Intéressons-nous aux espérances de vie,  $e_{xt}$ . Les résultats sont ceux de la table 2. Les valeurs TPRV, dont les décalages sont donnés par génération, ont été obtenues en prenant comme hypothèse que les rentiers ayant l'espérance de vie  $e_{xt}$ , étaient tous issus de la génération  $g = t - x$ . Remarquons que cette hypothèse est conservatrice puisqu'en réalité, ils proviennent des générations  $g$  et  $g - 1$ . Nous avons donc retenu la plus jeune, avec l'espérance de vie la plus élevée. Cette hypothèse a été adoptée également pour les valeurs prospectives, au graphe 11. Nous préférons travailler avec l'espérance de vie plutôt qu'avec le prix de la rente viagère car les décalages d'âge varient en fonction du taux technique appliqué pour son calcul. Notons d'ailleurs que ces légères modifications viennent un peu entacher le charme de la simplification puisqu'on se retrouve avec plusieurs tables suivant les taux à appliquer et ce, pour des différences finalement négligeables.

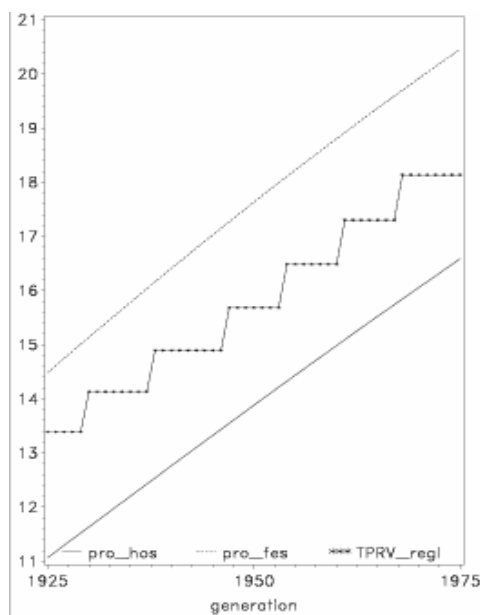
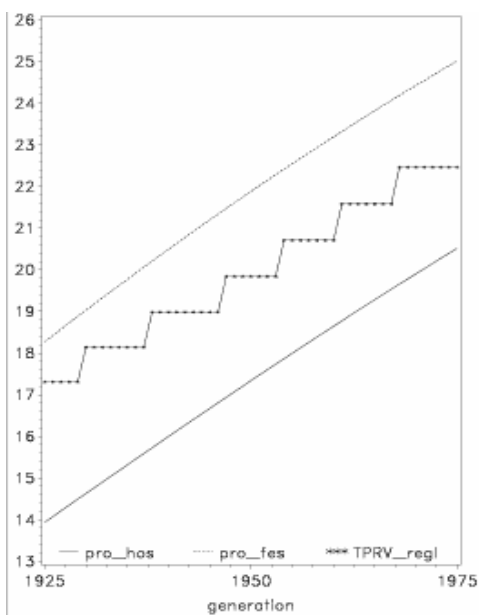
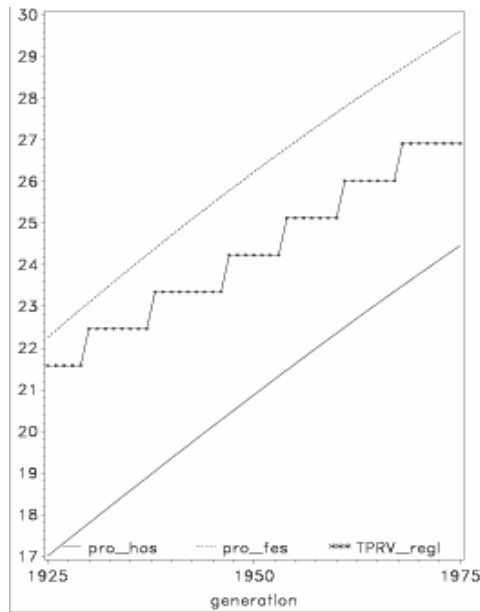
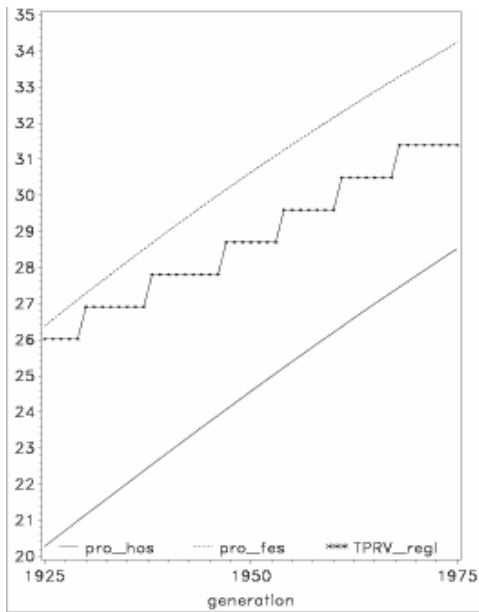
Age $x$	Expérience de vie $e_{xt}$		
	Tables prospectives		TPRV
	Hommes	Femmes	Unisexe
		<b>1985</b>	
50	29.501	36.898	35.913
65	16.225	21.399	20.706
80	6.785	8.944	8.814
		<b>1990</b>	
50	30.531	37.829	36.826
65	17.011	22.258	21.580
80	7.186	9.463	8.814
		<b>1995</b>	
50	31.543	38.750	36.826
65	17.796	23.097	22.463
80	7.595	9.984	9.395
		<b>2000</b>	
50	32.535	39.628	37.742
65	18.578	23.914	22.463
80	8.010	10.508	9.395
		<b>2005</b>	
50	33.505	40.475	38.661
65	19.353	24.709	23.348
80	8.431	11.031	10.000
		<b>TV88-90</b>	
50	32.914	32.914	32.914
65	19.751	19.751	19.751
80	8.610	8.610	8.610

**Table 2. Comparaison des espérances de vie obtenues sur base des tables prospectives et de la TPRV réglementaire.**

Nous voyons à la table 2 que la table TPRV semble dépassée, en tout cas pour les femmes. Comme nous l'avons dit, les tables prospectives doivent être constamment remises à jour en fonction des données statistiques nouvelles. La TPRV se base sur des tables prospectives construites en 1993, sur des données portant sur la période s'étalant de 1961 à 1987.



Plus de dix années d'observation supplémentaires sont aujourd'hui disponibles. Il serait donc judicieux d'actualiser les tables pour tenir compte de ces dernières.



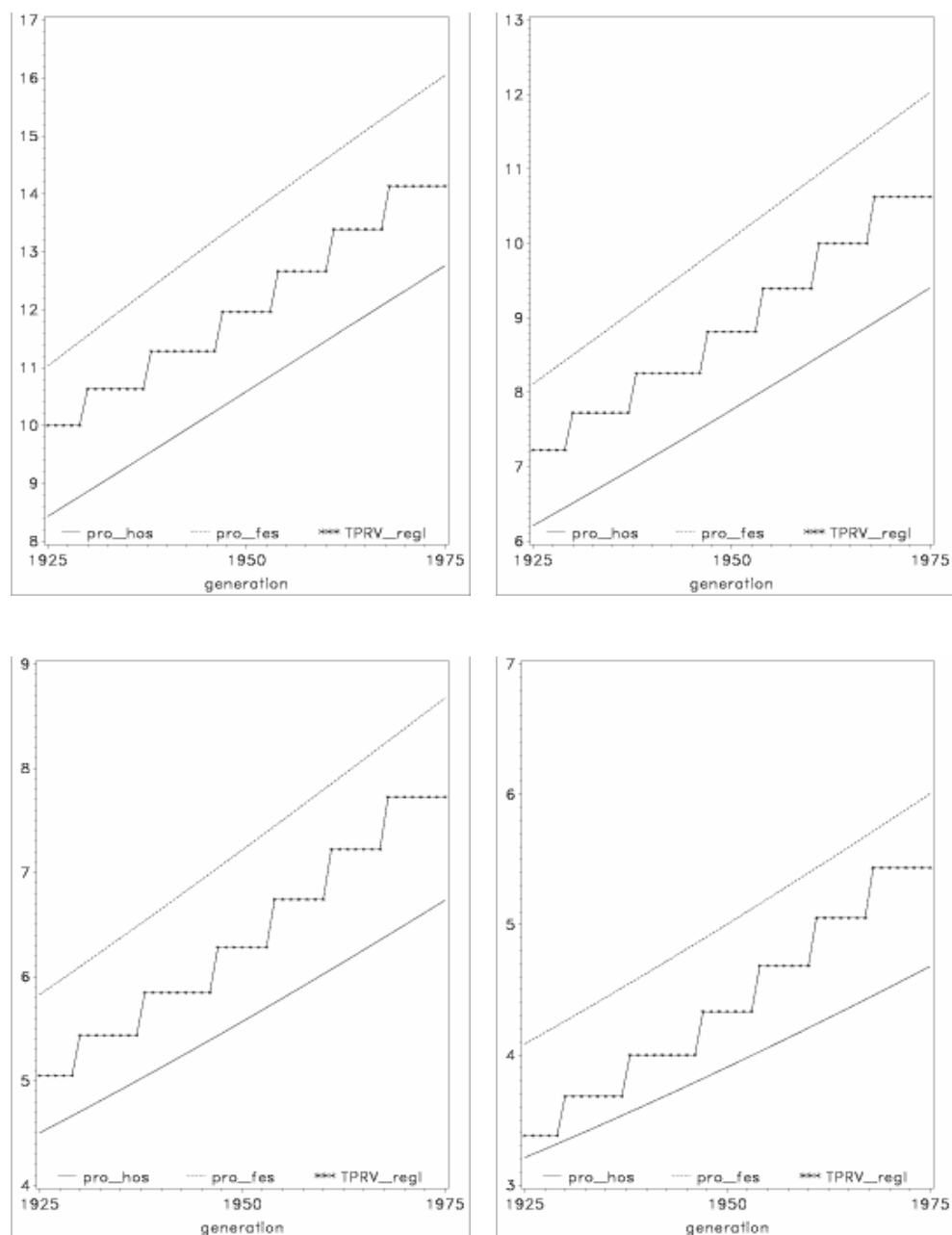


Figure 11. Espérances de vie par génération pour les âges de 60 à 95 ans, de 5 ans en 5 ans.

Nous pouvons au vu de ces résultats tirer quelques conclusions:

- Nous constatons qu'il existe une disparité entre hommes et femmes: les femmes vivent plus longtemps en moyenne que les hommes. Nous pourrions nous demander si cette tendance est de nature à perdurer étant donné que le style de vie devient de plus en plus similaire pour les deux sexes. Malheureusement, seul l'avenir nous le dira: notre modèle ne tient pas compte de ces facteurs socio-culturels.
- Un deuxième facteur discriminant pour les durées de vie est l'année de naissance ou de manière équivalente, la génération à laquelle l'individu appartient. En effet, vu les progrès constants de la médecine et autres, plus les personnes naissent tard, plus elles pourront en bénéficier et de ce fait, accroître leur durée de vie.

## 8. CONCLUSION

Un grand nombre de paramètres interviennent lors de la création de tables de mortalité prospectives et les choix quant aux modèles ou hypothèses retenus sont souvent difficiles car ils comprennent une grande part de subjectivité.

Tout d'abord, les projections sont faites sur de longues périodes pour nous permettre de calculer les indicateurs actuariels de générations récentes. Nous avons retenu ici une structure linéaire pour les  $\kappa$ , étant donné l'allure générale de ces paramètres. D'autres modèles auraient pu être envisagés tels que des modèles ARIMA, ... De plus, le nombre d'années d'observation est bien souvent insuffisant pour nous fournir des projections fiables à 100% .

Ensuite, la fermeture des tables pose également quelques problèmes, notamment pour le choix d'un âge ultime. Nous l'avons fixé ici à 125 ans mais cela est bien sûr subjectif et ne résulte d'aucune certitude démographique.

Enfin, étant donné que notre modèle se contente de reproduire une évolution similaire à celle observée dans le passé, il est primordial d'adapter régulièrement les tables prospectives, en fonction des données supplémentaires dont on dispose. A ce propos, nous pourrions d'ailleurs déplorer l'absence de données fiables postérieures à l'année 2000 pour la population française. Nos tables prospectives sont donc déjà dépassées et pourraient être améliorées en incluant les données de 2001 à nos jours. Notons que malgré cela, nos calculs tendent à montrer que la TPRV réglementaire ne contient plus de chargement de sécurité pour les femmes. Cet aspect est d'autant plus inquiétant que nous n'avons pas modélisé l'antisélection qui caractérise les rentiers.

Les tables prospectives restent donc précaires et nécessitent une actualisation régulière. Cependant, elles surpassent de loin les tables transversales, qui elles, ne sont d'aucune utilité lorsque nous nous intéressons à l'espérance de vie des assurés ou encore à la tarification de rentes viagères.

La gestion des tables de mortalité prospectives telles que décrites dans cet article peut s'avérer fastidieuse du point de vue administratif pour les assureurs. C'est la raison pour laquelle il est judicieux d'en déduire une formulation simplifiée telle que la TPRV, qui soit aisée à utiliser par les assureurs. Cet aspect sera abordé dans un prochain article.

## REFERENCES

- [1] BENJAMIN B. & POLLARD J.H. (1993). *The analysis of mortality and other actuarial statistics (3<sup>d</sup> Edition)*. Heinemann, London.
- [2] BENJAMIN B. & SOLIMAN A.S. (1993). *Mortality on the move*. Institute of actuaries, Oxford.
- [3] BROUHNS N., DENUIT M. (2002a) *Risque de longévité et rentes viagères I. Evolution de la mortalité en Belgique de 1880 à nos jours*. Belgian Actuarial Bulletin, 2, 26-48.
- [4] BROUHNS N., DENUIT M. (2002b) *Risque de longévité et rentes viagères II. Tables de mortalité prospectives pour la population belge*. Belgian Actuarial Bulletin, 2, 49-63.
- [5] COALE A. & KISKER E.E. (1990) *Defects in data on old age mortality in the United States. New procedures for calculating approximately accurate mortality schedules and life tables at the highest ages*. Asian and pacific population forum 4, 1-31.
- [6] DELWARDE A. & DENUIT M. (2003) *Importance de la période d'observation et des âges considérés dans la projection de mortalité selon la méthode de Lee & Carter*. Belgian Actuarial Bulletin, 3, 1-21.
- [7] DENUIT M. (2003) *Mortality projection for belgian population*. Travaux effectués dans le cadre du groupe de travail ARAB-BfP-INS-OCA-UCL sur la mortalité de la population belge.
- [8] JAUMAIN C. (2001) *Tables de mortalité en Belgique: questions d'actualité*. ACTU-L 1, 67-108.
- [9] LEBART L., MOLINEAU A. & PIRON M. (2000) *Statistique exploratoire multidimensionnelle*. Dunod, Paris.
- [10] LEE R.D. (2000) *The Lee & Carter method of forecasting mortality, with various extensions and applications*. North american actuarial journal 4, 80-91.
- [11] LEE R.D. & CARTER L. (1992) *Modeling and forecasting the time series of US mortality*. Journal of american statistical association 87, 659-671.

- [12] LEE R.D. & NAULT F. (1993) *Modeling and forecasting provincial mortality in Canada*. Paper presented at the world congress of international union for the scientific study of population, Montreal.
- [13] LEE R.D. & ROFMAN R. (1994) *Modelacion y proyeccion de la mortalidad in Chile* . Natas 22 (59), 182-313.
- [14] RENSCHAW A. & HABERMAN S. (2003) *Lee & Carter mortality forecasting: a parallel generalized linear modelling approach*. Applied statistics 52, pp 119-137.
- [15] RENSCHAW A. & HABERMAN S. (2001) *On the forecasting of mortality reduction factors*. Actuarial research paper 135, department of actuarial science and statistics, city university, London.
- [16] VALLIN J., MESLE F. (2001) *Tables de mortalité françaises pour le XIX<sup>e</sup> et XX<sup>e</sup> siècles et projections pour le XXI<sup>e</sup> siècle*. Editions de l'INED, Institut national d'études démographiques, 4.
- [17] VAUPEL J.W. (1997) *Trajectory of mortality at advanced ages* . In Between Zeus and the salmon: the biodemography of longevity, pp 17-37, national academy of science.
- [18] WILMOTH J.R. (1996) *Mortality projections for Japan. A comparison of four methods*. In Health and mortality among elderly populations, Caselli and Lopez editors, pp 266-287. Oxford University press, New York.



# MODELES LINEAIRES ET ADDITIFS GENERALISES, MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE LOCAL ET METHODES RELATIONNELLES EN ASSURANCE SUR LA VIE

Antoine DELWARDE  
*Institut des Sciences Actuarielles UCL\**

Daria KACHAKHIDZE  
*Scor Vie* •

Laure OLIE  
*Scor Vie* •

Michel DENUIT  
*Institut de Statistique & Institut des Sciences Actuarielles UCL\*#*

## RESUME

Cet article est consacré aux modèles relationnels de prévision de la mortalité. Différentes alternatives sont envisagées: le modèle logit de Brass, le modèle à risques proportionnels de Cox, le modèle de Ewbank, Gomez De Leon et Stoto, et celui de Hannerz. Ces approches paramétriques sont unifiées dans le cadre des modèles linéaires et additifs généralisés, qui fournissent dès lors à l'actuaire un cadre de travail adéquat pour aborder les méthodes relationnelles. La mise en pratique de ces techniques est illustrée sur base de différents jeux de données. Les modèles proviennent de DELWARDE & DENUIT (2005) et sont adaptés aux méthodes relationnelles.

## 1. INTRODUCTION

### 1.1. Modèles semi-paramétriques en mortalité

Une partie importante de la littérature actuarielle est consacrée à la construction de tables de mortalité et, partant, à l'estimation des probabilités annuelles de décès  $q_x$  aux âges  $x \in \{\alpha, \dots, \omega\}$ , aussi appelées quotients de mortalité en démographie. Partant d'une estimation brute des  $q_x$ , souvent obtenue en rapportant un nombre de décès à un nombre d'individus soumis au risque, notée  $\hat{Q} = \{\hat{q}_x, x = \alpha, \dots, \omega\}$ , l'actuaire désire la plupart du temps ajuster ces quantités pour mieux faire ressortir les caractéristiques de la mortalité du groupe d'individus considéré, qu'il pressent assez régulière.

---

\* Louvain-la-Neuve, Belgique

• Département Technique et Développement – Centre R&D sur l'Assurance de la Longévité et la Mortalité - CERDALM - La Défense, Paris

# Institut de Statistique UCL, Louvain-la-Neuve, Belgique

Depuis De Moivre en 1725, de nombreux modèles paramétriques ont été proposés pour rendre compte de l'évolution de la mortalité en fonction de l'âge. Le principe est relativement simple: les quotients (ou les taux) de mortalité sont exprimés sous la forme d'une fonction de l'âge, fonction dépendant d'un ou de plusieurs paramètres (qu'il s'agira d'estimer sur base de statistiques de mortalité). Plus précisément, les méthodes d'ajustement analytique consistent à exprimer  $q_x$  sous la forme d'une fonction  $q_x = f(x; \theta)$  dont la forme analytique est connue mais faisant intervenir  $p$  paramètres inconnus  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$ . Les valeurs de ces paramètres sont estimées à partir des  $\hat{q}_x$  (ou d'autres statistiques de mortalité appropriées). Notant  $\hat{\theta}$  l'estimateur de  $\theta$ , l'ajustement paramétrique de  $\hat{Q}$  consistera à lui substituer  $\hat{Q}^{\text{ajustée}} = \{\hat{q}_x^{\text{ajustée}} = f(x; \hat{\theta}), x = \alpha, \dots, \omega\}$ . De nombreuses fonctions ont été proposées dans la littérature. Citons pour mémoire les formules de Moivre, de Sang, de Gompertz, de Makeham, de Perks et de Heligman-Pollard. Pour plus de détails, le lecteur intéressé est invité à consulter SEAL (1979).

Aussi raisonnable qu'il puisse paraître, un modèle paramétrique n'est jamais qu'un résumé parfois trop sommaire de la réalité du phénomène observé. De plus, rien ne garantit que le modèle paramétrique soit bien spécifié. C'est pourquoi de nombreuses méthodes de lissage ont été proposées pour les quotients de mortalité. Ces méthodes consistent à substituer à la série brute  $\hat{Q}$  une série plus régulière, notée  $\hat{Q}^{\text{lissée}} = \{\hat{q}_x^{\text{lissée}}, x = \alpha, \dots, \omega\}$ . La mortalité n'est donc pas résumée dans un petit nombre de paramètre, mais est décrite par les  $\omega - \alpha + 1$  probabilités annuelles de décès dont on a gommé les irrégularités par lissage. Etant donnée la puissance de l'outil informatique désormais à la disposition de l'actuaire, la complexité numérique inhérente aux modèles non-paramétriques n'est plus un obstacle à leur mise en pratique.

Depuis VERRALL (1996), les actuaires anglo-saxons préfèrent les méthodes semi-paramétriques d'ajustement des tables de mortalité. Cette approche allie souplesse et précision d'ajustement. Cet article a pour but de démontrer l'intérêt des méthodes semi-paramétriques dans le cadre des modèles relationnels.

## 1.2. Méthodes relationnelles en mortalité

De tout temps, les actuaires et les démographes ont utilisé des données de mortalité connexes pour améliorer l'estimation de la mortalité d'une population d'intérêt. L'approche relationnelle permet de relier les indicateurs démographiques relatifs à deux groupes d'individus. Ces indicateurs peuvent être les taux de mortalité, les probabilités de survie ou de décès, les espérances de vie, etc. Les deux groupes peuvent être



- deux populations distinctes
- une population et un sous-ensemble de celle-ci
- une même population à deux époques différentes.

Dans ce travail, nous nous inscrivons dans la lignée de VERRALL (1996) et nous montrons que les modèles linéaires et additifs généralisés fournissent des outils particulièrement bien adaptés à la construction de tables de mortalité. Les méthodes de construction des tables de mortalité qui en résultent sont tout à la fois intellectuellement satisfaisantes et empiriquement performantes. Ces modèles permettent également d'unifier les différentes approches suivies dans le cadre des méthodes relationnelles. Il suffit en effet d'introduire parmi les variables explicatives les caractéristiques de la mortalité de la population de référence (taux ou quotients de mortalité).

## 2. MODELES RELATIONNELS : REVUE DE LA LITTERATURE

### 2.1. Modèle à risques proportionnels de Cox

Les modèles paramétriques autorisent des comparaisons fines de la mortalité, mais sont évidemment sujets à mauvaise spécification : la forme paramétrique peut s'avérer erronée, jetant le discrédit sur les conclusions obtenues.

Le modèle à risques proportionnels proposé par COX (1972) permet de s'affranchir d'une formulation paramétrique rigide. Il postule que les taux de mortalité du groupe auquel l'actuaire s'intéresse sont proportionnels à ceux d'une population de référence, le facteur de proportionnalité ne dépendant pas de l'âge. Plus précisément, les taux  $\mu_x$  sont liés à un jeu de taux de référence  $\mu_x^{\text{ref}}$  par la relation

$$\mu_x = \theta \mu_x^{\text{ref}}, x = \alpha, \alpha + 1, \dots, \omega. \quad (1)$$

Il s'agit là du modèle relationnel le plus simple, liant la mortalité du groupe d'intérêt, représentée par les taux  $\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1}, \dots, \mu_\omega$  à celle de la mortalité de référence, représentée par les taux  $\mu_\alpha^{\text{ref}}, \mu_{\alpha+1}^{\text{ref}}, \dots, \mu_\omega^{\text{ref}}$ , à l'aide du modèle (1).

### 2.2. Modèle de Brass

La validité de (1) a cependant été mise en doute par de nombreux auteurs, dont BRASS (1971). En lieu et place de (1), BRASS (1971) suggère la relation

$$\text{logit}({}_x q_0) = \theta_1 + \theta_2 \text{logit}({}_x q_0^{\text{ref}}), x = \alpha, \alpha + 1, \dots, \omega, \quad (2)$$

où  $\text{logit}(q) = \ln(q/(1-q))$ . Il s'agit d'une relation linéaire entre les logit des quotients de mortalité d'intérêt et ceux d'une population de référence. Le recours à la transformation

logit permet d'obtenir une quantité non-contraite (alors que  $q \in (0,1)$ ,  $\text{logit}(q) \in \mathbb{R}$ ). Voyez également BRASS (1969, 1974).

ZABA (1979) proposa une variante de (2). Un peu plus tard, EWBANK, GOMEZ DE LEON & STOTO (1983) proposèrent à leur tour une forme paramétrique plus complexe liant  $\text{logit}({}_x q_0)$  à  $\text{logit}({}_x q_0^{\text{ref}})$ .

Sur base de plusieurs études empiriques, le paramètre  $\theta_2$  dans le modèle (2) s'est avéré proche de 1. Si nous posons  $\theta_2 = 1$  dans (2), il vient

$$\mu_x = \frac{\theta_1 \mu_x^{\text{ref}}}{1 - (1 - \theta_1)_x q_0^{\text{ref}}} \quad (3)$$

où  $\theta_1 = \exp(\theta_1)$  et  $\mu_x^{\text{ref}}$  est un taux instantané de mortalité de référence. Nous voyons dans ce cas que  $\mu_x \rightarrow \mu_x^{\text{ref}}$  si  $x \rightarrow +\infty$ .

### 2.3. Modèle de Hannerz

HANNERZ (2001) a procédé à une analyse empirique de la validité des relations (1), (2) et (3). Parmi les jeux de données considérés par cet auteur figuraient des statistiques fournies par la fédération suédoise des sociétés d'assurance. Après avoir constaté l'inadéquation des formes paramétriques simples présentées plus haut, HANNERZ (2001) a proposé un modèle alternatif basé sur ses travaux antérieurs. Plus précisément, l'évolution de la mortalité en fonction de l'âge pour une population féminine donnée est décrite par la relation

$$\text{logit}({}_x q_0) = a_0 - a_1 x^{-1} + a_2 \frac{x^2}{2} + a_3 \frac{\exp(cx)}{c}. \quad (4)$$

Les paramètres  $a_0, a_1, a_2$  et  $a_3$  possèdent chacun leur signification (représentant la mortalité sur différentes tranches d'âges). Ceci a amené cet auteur au modèle relationnel

$$\text{logit}({}_x q_0) = \text{logit}({}_x q_0^{\text{ref}}) + \theta_0 - \theta_1 x^{-1} + \theta_2 \frac{x^2}{2} + \theta_3 \frac{\exp(cx)}{c} \quad (5)$$

où chaque paramètre indique la différence entre les mortalités respectives des deux groupes sur des tranches d'âges données. Ainsi,

- si  $\theta_1 \neq 0$  alors les mortalités diffèrent aux âges les plus jeunes;
- si  $\theta_2 \neq 0$  alors la relation entre la mortalité à l'âge adulte et durant l'enfance diffère entre les deux populations considérées;
- si  $\theta_3 \neq 0$  alors les deux populations diffèrent aux âges élevés.

La relation (4) ne convient cependant pas aux hommes, en raison de la "bosse accidents", marquée chez les jeunes garçons (il s'agit des morts violentes, accidents de la route et suicides, entre 18 et 35 ans). HANNERZ (2001) propose alors un mélange de deux

lois de probabilité, l'une rendant compte des décès accidentels, et l'autre des décès naturels, chacune d'entre elles étant de la forme (4).

### 3. APPROCHE UNIFIEE DANS LE CADRE DES MODELES LINEAIRES ET ADDITIFS GENERALISES

Les modèles paramétriques se lisent aisément: chaque paramètre possède sa propre signification, ce qui permet une interprétation facile des résultats, et partant une explication des phénomènes sous-jacents. Dans la mesure où l'actuaire cherche moins à expliquer les causes des différences de mortalité qu'il constate qu'à en tenir compte dans le tarif, on peut imaginer avoir recours à des modèles semi-paramétriques, plus souples et autorisant des comparaisons plus fines de la mortalité.

#### 3.1. Unification des modèles de Cox, de Brass et de Hannerz

Le point de départ de notre démarche consiste à fondre les modèles paramétriques (1)-(2)-(5) dans une classe plus large de modèles. Tout d'abord, notons que le modèle (1) est un cas particulier de

$$\ln \mu_x = f(\ln \mu_x^{\text{ref}}), x = \alpha, \alpha + 1, \dots, \omega, \quad (6)$$

en prenant  $f(\xi) = \ln \theta + \xi$ . Le modèle (2) s'inscrit quant à lui naturellement dans la formulation générale

$$\text{logit}({}_x q_0) = f(\text{logit}({}_x q_0^{\text{ref}})), x = \alpha, \alpha + 1, \dots, \omega, \quad (7)$$

avec  $f(\xi) = \alpha + \beta \xi$ . Le modèle (5) nécessite l'introduction de deux fonctions: la première de  $\text{logit}({}_x q_0^{\text{ref}})$  et la seconde de l'âge  $x$ . Ainsi, on peut voir (5) comme un cas particulier de la formulation plus générale

$$\text{logit}({}_x q_0) = f_1(\text{logit}({}_x q_0^{\text{ref}})) + f_2(x), x = \alpha, \alpha + 1, \dots, \omega, \quad (8)$$

où  $f_1(\xi) = \xi$  et

$$f_2(\xi) = \theta_0 - \theta_1 \xi^{-1} + \theta_2 \frac{\xi^2}{2} + \theta_3 \frac{\exp(c\xi)}{c}.$$

La structure qui se dégage de ces exemples apparaît donc clairement: les indicateurs démographiques d'intérêt sont d'abord transformés de manière à ne plus être contraints (par une transformation logarithmique pour les taux et une transformation logit pour les quotients), et ensuite ils sont expliqués à l'aide d'une fonction de leurs homologues d'une population de référence, le cas échéant en y superposant une fonction de l'âge. Nous allons exploiter cette structure pour proposer une généralisation semi-paramétrique des modèles relationnels.

L'approche préconisée dans cet article peut se résumer comme suit. Plutôt que de chercher une expression analytique pour les fonctions intervenant dans (6)-(7)-(8) puis d'en estimer ces paramètres, nous estimerons directement ces fonctions sur base des statistiques de mortalité, évitant ainsi tout risque de mauvaise spécification. Cette approche convient parfaitement à l'actuaire, qui veut tenir compte des particularités de la mortalité du groupe qu'il couvre lorsqu'il établit une tarification, sans avoir nécessairement besoin d'expliquer les différences de mortalité qu'il constate. L'estimation directe des fonctions intervenant dans (6)-(7)-(8) sans en spécifier la forme paramétrique répond à cet objectif (alors que les spécifications des démographes visent à expliquer les variations de mortalité observées entre les groupes d'individus).

### 3.2. Taux de mortalité constants par morceaux

#### 3.2.1. Teneur de l'hypothèse

Cette section est consacrée à l'hypothèse que nous retiendrons par la suite. Dorénavant, nous supposerons que les taux instantanés de mortalité sont constants par morceaux, i.e.

$$\mu_{x+\xi} = \mu_x \text{ pour } 0 \leq \xi < 1 \text{ et } x \text{ entier.} \quad (9)$$

#### 3.2.2. Résultats qui en découlent

On vérifie facilement que, dans le cas où (9) est vérifiée, taux  $m_x$  et taux instantanés  $\mu_x$  de mortalité coïncident. De plus,

$$\begin{aligned} \mu_x &= -\ln(1 - q_x) \\ {}_{\xi}p_x &= \exp(-\xi\mu_x) = \{p_x\}^{\xi} \text{ pour } 0 \leq \xi < 1. \end{aligned}$$

Enfin, l'exposition au risque à l'âge  $x$ , notée  $ER_x$ , est liée au quotient de mortalité par la relation

$$ER_x = \frac{-L_x q_x}{\ln(1 - q_x)}$$

où  $L_x$  est le nombre de survivants à l'âge  $x$ .

#### 3.2.3. Estimation brute des taux de mortalité

Sous l'hypothèse (9), l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\mu_x$  est donné par

$$\hat{\mu}_x = \frac{D_x}{ER_x} \quad (10)$$

où  $D_x$  est le nombre observé de décès à l'âge  $x$ , pour une exposition au risque  $ER_x$ . On en déduit alors les estimations des quotients de mortalité grâce à la formule

$$\hat{q}_x = 1 - \hat{p}_x = 1 - \exp(-\hat{\mu}_x).$$

### 3.3. Modèles envisagés

Idéalement, les indicateurs choisis devraient être indépendants. Ainsi, choisir de relier  $\hat{q}_0$  et  ${}_xq_0^{\text{ref}}$  nécessite de prendre en compte lors de l'estimation des paramètres la structure de corrélation entre les  $\hat{q}_0$  pour différentes valeurs de  $x$ . Cette dépendance est très forte puisque

$${}_{x+1}\hat{q}_0 = {}_x\hat{q}_0 + (1 - {}_x\hat{q}_0)\hat{q}_x.$$

Afin de contourner cette difficulté, notre préférence va aux probabilités annuelles de décès  $\hat{q}_x$ , aux probabilités annuelles de survie  $\hat{p}_x$  et aux taux de mortalité  $\hat{\mu}_x$ . Les taux ou les quotients de mortalité seront préalablement transformés de manière à lever les contraintes pesant sur eux: nous travaillerons donc avec le logarithme des taux de mortalité et avec le logit des quotients de mortalité.

Différents modèles relationnels peuvent être envisagés, en fonction des statistiques disponibles. Nous les passons en revue ci-dessous.

#### 3.3.1. Seuls les taux de mortalité sont disponibles

Dans ce cas, un modèle du type

$$\ln \hat{\mu}_x = f(\ln \mu_x^{\text{ref}}) + \varepsilon_x \text{ avec } \varepsilon_x \sim \text{Nor}(0, \sigma^2), x = \alpha, \alpha + 1, \dots, \omega, \quad (11)$$

est envisageable.

Il est possible d'introduire des poids dans le modèle (11) afin de tenir compte d'une précision d'estimation différente selon l'âge. Dans ce cas, on aura recours à un ajustement par moindres carrés pondérés, les poids reflétant alors la précision de l'estimation de  $\mu_x$ , généralement décroissante avec l'âge  $x$ .

Le modèle (11) est un modèle additif: la fonction  $f(\cdot)$  qui lie les taux de référence aux taux de la population d'intérêt est estimée sur base des données disponibles. Notez que ce modèle est très souple: la seule hypothèse formulée à propos de la fonction  $f$  est qu'elle soit régulière. On peut donc capturer un lien non-linéaire entre les taux de mortalité.

**Remarque 3.1.** Le cas échéant, l'estimation  $\hat{f}$  ainsi obtenue peut ensuite servir à identifier une forme paramétrique raisonnable pour  $f$ . Ainsi, BROUHNS & DENUIT (2002) et BROUHNS, DENUIT & VERMUNT (2002) ont mis en évidence une relation linéaire sur une échelle doublement logarithmique entre la mortalité de la population belge et celles des rentiers (i.e., la fonction intervenant dans (11) est de la forme  $f(\xi) = \alpha + \beta\xi$ ).

Si nécessaire, on peut enrichir le modèle (11) en y incluant un effet de l'âge. Ceci peut s'avérer utile dans le cas où la mortalité des deux populations diffère sur certaines

tranches d'âges. On passe alors à un modèle du type

$$\ln \hat{\mu}_x = c + f_1(x) + f_2(\ln \mu_x^{\text{ref}}) + \varepsilon_x \text{ avec } \varepsilon_x \sim \text{Nor}(0, \sigma^2), \quad (12)$$

où la constante  $c$  apparaît par souci d'identifiabilité. Il s'agit cette fois d'estimer les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  apparaissant dans (12).

### 3.3.2. Les nombres de décès et les expositions au risque sont disponibles

Dans certains cas, les éléments constitutifs de  $\hat{\mu}_x$ , à savoir nombre de décès et exposition au risque correspondante, sont disponibles. On aura alors recours au modèle de régression poissonnien

$$D_x \sim \text{Poi}(\text{ER}_x \exp(f(\ln \mu_x^{\text{ref}}))), x = \alpha, \alpha + 1, \dots, \omega, \quad (13)$$

qui lève l'hypothèse d'homoscédasticité des erreurs intervenant dans (11).

Le modèle de Poisson (13) apparaît naturellement sous l'hypothèse (9). Bien entendu, le modèle poissonnien (13) n'est qu'une approximation de la réalité, puisque ce modèle permet avec une probabilité positive d'observer plus de  $L_x$  décès, ce qui est clairement impossible. Néanmoins, ce modèle fournit souvent une excellente approximation. Ceci est d'autant plus vrai qu'en vertu du théorème central-limite pour les lois discrètes,  $D_x$  est approximativement de loi de Poisson pour  $L_x$  suffisamment grand. BRILLINGER (1986) a montré que sous des hypothèses raisonnables formulées à propos des processus gouvernant les naissances et les décès, la loi de Poisson apparaissait naturellement pour modéliser le nombre de décès aux différents âges.

En plus de  $\ln(\mu_x^{\text{ref}})$ , on peut également expliquer  $\mu_x$  en fonction de l'âge  $x$  en passant à un modèle du type

$$D_x \sim \text{Poi}(\text{ER}_x \exp(c + f_1(x) + f_2(\ln \mu_x^{\text{ref}}))), x = \alpha, \alpha + 1, \dots, \omega,$$

où il s'agira d'estimer les fonctions  $f_1$  et  $f_2$ .

### 3.3.3. Seuls les quotients de mortalité sont disponibles

Lorsque seules les estimations brutes  $\hat{q}_x$  des quotients de mortalité sont disponibles, le modèle

$$\text{logit}(\hat{q}_x) = f(\text{logit}(q_x^{\text{ref}})) + \varepsilon_x \text{ avec } \varepsilon_x \sim \text{Nor}(0, \sigma^2),$$

est envisageable. Il correspond à (11), adapté pour les quotients de mortalité. Une extension tenant compte de l'âge  $x$  et de  $\text{logit}(q_x^{\text{ref}})$  est aussi envisageable, de même qu'une pondération reflétant la précision de l'estimation des quotients en fonction de l'âge.

### 3.3.4. Les nombre de décès et les effectifs en début de période sont disponibles

Dans ce cas, deux options sont envisageables. Soit l'exposition au risque est reconstituée sous l'hypothèse (9), de sorte qu'on peut alors recourir au modèle de régression poissonnien (13) pour  $D_x$ . Soit on recourt au modèle de régression binomial

$$D_x \sim \text{Bin} \left( L_x, \frac{\exp(f(\text{logit}(q_x^{\text{ref}})))}{1 + \exp(f(\text{logit}(q_x^{\text{ref}})))} \right), x = \alpha, \alpha + 1, \dots, \omega.$$

A nouveau, une fonction de l'âge peut être introduite dans le modèle.

#### 4. INFERENCE PAR MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE LOCAL

##### 4.1. Famille exponentielle naturelle

Supposons que les observations  $y_i$  (dans notre cas, les logarithmes des taux de mortalité, les logit des probabilités de décès ou de survie, les nombres de décès, etc.) sont indépendantes mais pas identiquement distribuées. L'indice générique  $i$  représente l'âge dans les problèmes relatifs à la mortalité (âge en années révolues, ou classes d'âges de 3 ou 5 ans par exemple). Spécifiquement, la densité  $f(\cdot | \theta_i, \phi)$  de  $y_i$  provient de la famille exponentielle linéaire à un paramètre  $\theta_i$ . La forme générique de cette densité (discrète ou continue) est

$$f(y_i | \theta_i, \phi) = \exp \left( \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{\phi} + c(y_i, \phi) \right), y_i \in S, \quad (14)$$

où  $S$  est un sous-ensemble des entiers non-négatifs  $N$  ou des réels  $R$ . Le paramètre  $\theta_i$ , encore appelé paramètre naturel, est le paramètre d'intérêt tandis que  $\phi$  est considéré comme un paramètre de nuisance. Les fonctions  $b(\cdot)$  et  $c(\cdot)$  déterminent la loi en question.

Les lois de probabilité utilisées plus haut pour modéliser la mortalité possèdent une densité pouvant se mettre sous la forme (14), comme en témoigne le Tableau 1.

Loi de proba.	Support $S$	Densité de proba.	Param. naturel $\theta = \theta(\mu)$	$b(\theta)$	$\phi$
Bernoulli $\text{Bin}(1, \mu)$	$\{0, 1\}$	$\mu^y (1 - \mu)^{1-y}$	$\ln \frac{\mu}{1 - \mu}$	$\ln(1 + \exp(\theta))$	1
Poisson $\text{Poi}(\mu)$	$N$	$\exp(-\mu) \frac{\mu^y}{y!}$	$\ln \mu$	$\exp(\theta)$	1
Normale $\text{Nor}(\mu, \sigma^2)$	$R$	$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{\sigma^2} (y - \mu)^2 \right)$	$\mu$	$\theta^2/2$	$\sigma^2$

**Table 1. Quelques lois de probabilité dont la densité est de la forme (14).**

**Remarque 4.1.** Nous verrons qu'il est parfois utile d'introduire une pondération dans (14). Ceci nous amène à considérer que la densité de  $y_i$  est de la forme

$$f(y_i | \theta_i, \phi, \omega_i) = \exp \left\{ \frac{y_i \theta_i - b(\theta_i)}{\phi} \omega_i + c(y_i, \phi / \omega_i) \right\}, y_i \in S, \quad (15)$$

où  $\omega_i$  est le poids accordé à la  $i$ ème observation.

On peut montrer que  $E[Y] = b'(\theta)$  et  $\text{Var}[Y] = \phi b''(\theta) / \omega$ . Dès lors, la variance de  $Y$  apparaît comme le produit de deux fonctions: la première,  $b''(\theta)$ , qui dépend uniquement du paramètre  $\theta$  (et donc de la moyenne  $\mu$ ) est appelée fonction variance et notée  $V(\mu)$ ; la seconde est indépendante de  $\theta$  et dépend uniquement de  $\phi$ . Les fonctions variance  $V(\cdot)$  intervenant dans les différents modèles présentés au Tableau 1 sont reprises au Tableau 2. Il est important de noter que, le cas de la loi normale mis à part, la variance est toujours fonction de la moyenne.

Loi de probabilité	Moyenne $\mu = b'(\theta)$	Fonction variance $V(\mu) = b''(\theta)$	Variance $\text{Var}[Y] = \phi b''(\theta) / \omega$
Bernoulli	$\mu = \frac{\exp \theta}{1 + \exp \theta}$	$\mu(1 - \mu)$	$\frac{\mu(1 - \mu)}{\omega}$
Poisson	$\mu = \exp \theta$	$\mu$	$\frac{\mu}{\omega}$
Normale	$\mu = \theta$	1	$\frac{\sigma^2}{\omega}$

**Table 2. Structure moyenne-variance associée aux lois de probabilité usuelles dont la densité est de la forme (15).**

#### 4.2. Modèle de régression

Lions à présent la variable réponse  $y_i$  aux variables explicatives  $\mathbf{x}_i$ . Ces variables explicatives sont généralement l'âge, le logarithme d'un taux de mortalité d'une population de référence ou le logit d'un quotient de mortalité d'une population de référence. Notant  $\mu_i$  la moyenne de  $Y_i$ , on suppose que les variables explicatives sont liées à la moyenne par l'intermédiaire d'un score  $\eta_i$ , i.e.

$$g(\mu_i) = \eta_i = c + \sum_{j=1}^p f_j(x_{ij}) \quad (16)$$

où la fonction monotone et dérivable  $g$  est appelée fonction de lien, et où les fonctions  $f_j(\cdot)$ ,  $j=1, \dots, p$ , supposées régulières, traduisent l'influence des variables explicatives  $x_1, \dots, x_p$  sur la réponse  $y$ . L'appellation de modèle additif provient de la forme additive du



score dans (16). Plus généralement, la forme additive (16) peut être abandonnée au profit de

$$g(\mu_i) = \eta_i = c + f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}).$$

### 4.3. Lien canonique

Chacune des lois de probabilité de la famille exponentielle linéaire possède une fonction de lien spécifique, dite fonction de lien canonique, définie par  $\theta = \eta$ , où  $\theta$  est le paramètre canonique. Le lien canonique est tel que  $g(\mu_i) = \theta_i$ . Or,  $\mu_i = b'(\theta_i)$  d'où  $g^{-1} = b'$ . Les fonctions canoniques sont reprises au Tableau 3. On voit ainsi que la loi de Poisson privilégie le lien logarithmique, alors que la loi de Bernoulli privilégie le lien logit.

Loi de probabilité	Fonction de lien canonique
Normale	$\eta = \mu$
Poisson	$\eta = \ln \mu$
Bernoulli	$\eta = \ln \mu - \ln(1 - \mu)$

**Table 3. Liens canoniques associés aux lois de probabilité usuelles dont la densité est de la forme (15).**

### 4.4. Méthode Loess

#### 4.4.1. Importance du cas gaussien

Les ajustements des modèles linéaires et additifs généralisés passent par une succession d'ajustements de pseudo-variables à l'aide de techniques de moindres carrés pondérés. Il s'agit donc en fait de maîtriser les techniques relatives aux modèles à erreurs gaussiennes.

Commençons par considérer le modèle élémentaire suivant. Nous disposons de  $n$  observations  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , où la variable à expliquer  $y_i$  et le régresseur  $x_i$  sont continues. L'influence de  $x_i$  sur  $y_i$  est modélisé à l'aide d'une fonction  $f(\cdot)$ , supposée régulière, à un bruit additif près, i.e.,

$$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i \text{ où } \varepsilon_i \sim \text{Nor}(0, \sigma^2). \quad (17)$$

Les erreurs  $\varepsilon_i$  sont de surcroît supposées indépendantes. La spécification (17) permet donc de s'affranchir de la contrainte de linéarité imposée dans la régression classique. L'estimation de  $f(\cdot)$  se fera à l'aide des techniques de lissage et nous nous intéresserons plus particulièrement à des lisseurs linéaires, en ce sens que  $\hat{f}(x_i)$  peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des valeurs  $y_1, \dots, y_n$ , i.e.

$$\hat{f}(x_i) = \sum_{j=1}^n h_{ij} y_j \quad (18)$$

où les poids  $h_{ij} = h(x_i, x_j)$  dépendent de l'endroit  $x_i$  où la réponse  $f(x_i)$  doit être estimée. Si on définit le vecteur  $\mathbf{f} = (f(x_1), \dots, f(x_n))^t$ , (18) permet d'écrire la relation matricielle  $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{H}\mathbf{y}$  (par convention, tous les vecteurs sont des colonnes et l'exposant "t" indique la transposition).

#### 4.4.2. Principe: moindres carrés pondérés

Cette méthode proposée par CLEVELAND (1979) fait partie de la famille des régressions polynomiales locales. Elle consiste à approximer localement  $f(\cdot)$  par une droite<sup>4</sup>. C'est ce qu'ont proposé CLEVELAND ET AL. (1988, 1991). L'idée est d'utiliser les  $\lambda$  plus proches voisins de  $x$  afin d'estimer  $f(x)$ . Le voisinage s'apprécie par rapport aux variables explicatives: on utilise les  $\lambda$  observations dont les variables explicatives sont les plus proches de  $x$  pour estimer la réponse  $f(x)$ .

La méthode Loess peut se décomposer comme suit : disposant des  $n$  observations  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

1. les  $\lambda$  plus proches voisins de  $x$  sont identifiés (soit  $V(x)$  l'ensemble de ceux-ci);
2. la distance  $\Delta(x)$  séparant  $x$  du plus éloigné de ses  $\lambda$  plus proches voisins est calculée comme

$$\Delta(x) = \max_{i \in V(x)} |x - x_i| ;$$

3. les poids

$$w_i(x) = K\left(\frac{|x - x_i|}{\Delta(x)}\right)$$

sont assignés à chaque élément de  $V(x)$ . La fonction  $K(\cdot)$  assignant les poids  $w_i(x)$  aux observations de  $V(x)$  doit avoir les propriétés suivantes:

- (a)  $K(u) \geq 0$  pour tout  $u$
- (b)  $K(u) = 0$  pour  $u > 1$
- (c)  $K$  est non-croissante sur  $(0, 1)$ .

Comme à l'accoutumée, nous utiliserons la fonction  $K(\cdot)$  donnée par

$$K(u) = \begin{cases} (1 - u^3)^3 & \text{pour } 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On donne donc plus de poids aux points du voisinage les plus proches de  $x$ .

---

<sup>4</sup>Notez qu'on peut également approximer localement  $f$  par une constante, auquel cas, on retrouve des moyennes mobiles pondérées, ou par un polynôme de degré 2. Nous ne considérerons ici que l'ajustement linéaire local.

4.  $\hat{f}(x)$  est obtenue en régressant les  $y_i$ ,  $i \in V(x)$ , sur les  $x_i$  correspondants à l'aide d'un ajustement des moindres carrés pondérés et en se servant de la droite de régression pour prédire la réponse correspondant à  $x$ .

Cette approche fournit une réponse de la forme (18).

Dans le cas d'un seul régresseur, la valeur ajustée  $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0(x_i) + \hat{\beta}_1(x_i)x_i$  s'obtient en déterminant  $\hat{\beta}_0(x_i)$  et  $\hat{\beta}_1(x_i)$  de façon à minimiser

$$\sum_{k \in V(x_i)} w_k(x_i)(y_k - \beta_0(x_i) - \beta_1(x_i)x_k)^2$$

ce qui fournit

$$\hat{y}_i = \sum_{k=1}^n h_k(x_i)y_k,$$

où  $h_k(x_i)$  ne dépend pas des  $y_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  ( $h_k(x_i)$  ne dépend que des régresseurs).

Si on s'intéresse à la réponse pour une valeur  $x$  non observée, le modèle utilisé pour estimer  $f(x)$  est donc

$$y_i = \beta_0(x) + \beta_1(x)x_i + \varepsilon_i \text{ pour } i \in V(x)$$

où les estimations  $\hat{\beta}_0(x)$  et  $\hat{\beta}_1(x)$  des paramètres  $\beta_0(x)$  et  $\beta_1(x)$  s'obtiennent en minimisant

$$\sum_{k \in V(x)} w_k(x)(y_k - \beta_0(x) - \beta_1(x)x_k)^2.$$

Ceci donne finalement  $\hat{f}(x) = \hat{\beta}_0(x) + \hat{\beta}_1(x)x$ .

#### 4.4.3. Intervalles de confiance

Si on note  $\hat{\mathbf{y}}$  le vecteur des valeurs ajustées  $(\hat{f}(x_1), \dots, \hat{f}(x_n))'$  et  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  le vecteur des résidus, on a

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{H}\mathbf{y} \text{ et } \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{y}.$$

Par conséquent,  $\hat{\mathbf{y}}$  et  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  obéissent tous deux aux lois normales multivariées de matrice variance covariance  $\sigma^2 \mathbf{H}\mathbf{H}'$  et  $\sigma^2 (\mathbf{I} - \mathbf{H})(\mathbf{I} - \mathbf{H})'$ , respectivement. Ceci nous permet d'obtenir des intervalles de confiance pour  $f(x)$ . Si nous posons

$$\delta_k = \text{trace}((\mathbf{I} - \mathbf{H})(\mathbf{I} - \mathbf{H})')^k \text{ pour } k = 1, 2,$$

on voit facilement que

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2 \right] = \sigma^2 \delta_1$$

de sorte que

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{\delta_1} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$$

est un estimateur sans biais de  $\sigma^2$ . De plus,

$$\frac{\delta_1^2}{\delta_2} \times \frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma^2}$$

suit approximativement la loi chi-carrée à  $\delta_1^2/\delta_2$  degrés de liberté (où  $\delta_1^2/\delta_2$  sera arrondi à l'entier le plus proche). Par conséquent,

$$\frac{\widehat{f}(x) - f(x)}{\widehat{\sigma} \sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2(x)}}$$

obéit approximativement à la loi de Student à  $\delta_1^2/\delta_2$  degrés de liberté. Ceci permet d'obtenir des intervalles de confiance pour la réponse  $f(\cdot)$  en différents points  $x$ .

#### 4.4.4. Degré de lissage

Comme le lecteur aura pu s'en rendre compte, l'approche Loess dépend donc du nombre  $\lambda$  de points contenu dans le voisinage  $V(x_0)$ . Le nombre de plus proches voisins, le plus souvent exprimé en pourcentage de la taille du jeu de données, joue le rôle de paramètre de lissage. La sélection d'une valeur optimale pour  $\lambda$  est considérée plus bas (en minimisant le critère AICC1, présenté dans la section suivante).

Lors de la comparaison des modèles, il est bon de disposer d'une mesure de la complexité de ceux-ci. Ceci peut s'effectuer à l'aide d'un nombre de degrés de liberté associé aux lisseurs satisfaisant (18). Le nombre de degrés de liberté  $DF_\lambda$  est fourni par la trace de la matrice  $\mathbf{H}_\lambda$  dont les éléments sont les  $h_{ij}$  intervenant dans (18). Ce choix provient du fait que dans le modèle de régression linéaire classique, la trace de la matrice qui fait passer des observations  $y_i$  aux valeurs ajustées  $\widehat{y}_i = \widehat{\beta}' \mathbf{x}_i$  vaut le nombre de paramètres (i.e. la dimension de  $\beta$ ).

#### 4.4.5. Mesure de la qualité de l'ajustement

La mesure de la qualité de l'ajustement est plus complexe pour les modèles où il s'agit d'estimer une fonction que pour les modèles paramétriques classiques. La plupart des critères font intervenir à la fois une mesure de la qualité de l'ajustement et une mesure de la complexité du modèle. La minimisation de tels critères permet également de sélectionner le paramètre de lissage.

Notons  $\widehat{\sigma}^2$  la somme des carrés des résidus. HURVICH & SIMONOFF (1998) ont proposé le critère suivant:

$$AICC1 = n \ln \widehat{\sigma}^2 + n \frac{\delta_1/\delta_2(n + DF_\lambda)}{\delta_1^2/\delta_2 - 2}$$

appelé AIC corrigé, où

$$\delta_1 = \text{trace}((\mathbf{I} - \mathbf{H}_\lambda)'(\mathbf{I} - \mathbf{H}_\lambda))$$

$$\delta_2 = \text{trace}(((\mathbf{I} - \mathbf{H}_\lambda)'(\mathbf{I} - \mathbf{H}_\lambda))^2).$$

Le premier terme intervenant dans AICC1 mesure la qualité de l'ajustement tandis que le deuxième évalue la complexité du modèle. Ce critère permet de sélectionner la valeur optimale de  $\lambda$  (i.e. celle minimisant AICC1).

#### 4.4.6. Extension à des régresseurs multiples

L'extension de la méthode Loess à plus d'un régresseur est immédiate. On considère alors un modèle de la forme

$$y_i = f(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}) + \varepsilon_i.$$

Il suffit d'approcher localement la fonction des variables explicatives par un hyperplan et ensuite de procéder comme expliqué plus haut dans le cas d'un seul régresseur. Il importe dans ce cas que les différents régresseurs aient des valeurs comparables (afin que les voisinages multidimensionnels ne soient pas déterminés sur la seule base de la variable prenant les plus grandes valeurs). Pour cela, les variables explicatives sont souvent normalisées.

**Remarque 2.** Dans notre cas, la taille des jeux de données à traiter étant relativement modeste, il n'est pas nécessaire d'utiliser des " $k-d$  trees" pour définir des voisinages multidimensionnels.

#### 4.4.7. Maximum de vraisemblance local

La méthode Loess s'étend naturellement aux modèles généralisés additifs. On aura alors recours à des ajustements locaux dans des modèles linéaires généralisés, par maximum de vraisemblance (exactement comme procédait la méthode Loess à partir d'une log-vraisemblance gaussienne). En pratique, ceci permet d'utiliser la procédure GENMOD de SAS/STAT avec les poids proposés dans Loess. Plus précisément, étant donné un point  $x$  où on veut estimer la réponse, on détermine un voisinage  $V(x)$  et des poids  $w_i(x)$  exactement comme dans Loess.

Par exemple, si on veut de la sorte estimer les  $q_x$ , on déterminera le voisinage  $V(x)$  et on estimera en  $x$  la fonction  $f$  intervenant dans

$$q_x = \frac{\exp(f(x))}{1 + \exp(f(x))}$$

en minimisant

$$L(\beta_0(x), \beta_1(x)) = \sum_{\xi \in V(x)} w_\xi(x) \ln \ell_\xi(\beta_0(x), \beta_1(x))$$

où

$$\ell_{\xi}(\beta_0(x), \beta_1(x)) = \binom{L_{\xi}}{d_{\xi}} (q_{\xi}(x))^{d_{\xi}} (1 - q_{\xi}(x))^{L_{\xi} - d_{\xi}}$$

avec

$$q_{\xi}(x) = \frac{\exp(\beta_0(x) + \beta_1(x)\xi)}{1 + \exp(\beta_0(x) + \beta_1(x)\xi)}.$$

Finalement,

$$\hat{q}_x = \frac{\exp(\hat{f}(x))}{1 + \exp(\hat{f}(x))}$$

avec

$$\hat{f}(x) = \hat{\beta}_0(x) + \hat{\beta}_1(x)x.$$

## 5. ILLUSTRATIONS NUMERIQUES

### 5.1. Portefeuille 1

#### 5.1.1. Présentation des données

Le premier jeu de données concerne un portefeuille standard d'assurance décès en France. Nous disposons de l'exposition au risque initiale et du nombre de décès de 30 à 70 ans, séparément pour les hommes et les femmes.

Les tables de référence potentielles sont:

- la table TD88-90 qui est souvent utilisée en tarification des produits décès en France
- la table AF/AM utilisée dans le même but au Royaume-Uni.

#### 5.1.2. Approche par maximum de vraisemblance local

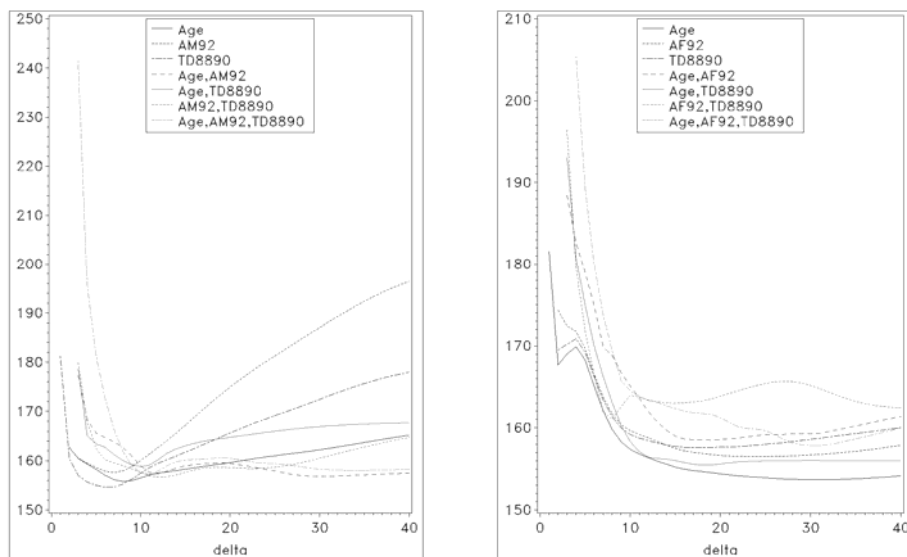
Dans un premier temps, nous proposons de recourir au modèle binomial

$$D_x \sim \text{Bin}(L_x, q_x)$$

où  $q_x$  est fonction de l'âge et/ou du logit du quotient de mortalité d'éventuelles tables de référence. Ce modèle est estimé par la méthode du maximum de vraisemblance local. Cette méthode possède l'avantage de pouvoir comparer plusieurs combinaisons de fonctions de variables explicatives, et différents voisinages, via le critère *AICC1* défini précédemment. Nous testons dans un premier temps les combinaisons suivantes de variables explicatives:

Modèle	Hommes	Femmes
1	$Age$	$Age$
2	$logit(q^{AM92})$	$logit(q^{AF92})$
3	$logit(q^{TD88-90})$	$logit(q^{TD88-90})$
4	$Age, logit(q^{AM92})$	$Age, logit(q^{AF92})$
5	$Age, logit(q^{TD88-90})$	$Age, logit(q^{TD88-90})$
6	$logit(q^{AM92}), logit(q^{TD88-90})$	$logit(q^{AF92}), logit(q^{TD88-90})$
7	$Age, logit(q^{AM92}), logit(q^{TD88-90})$	$Age, logit(q^{AF92}), logit(q^{TD88-90})$

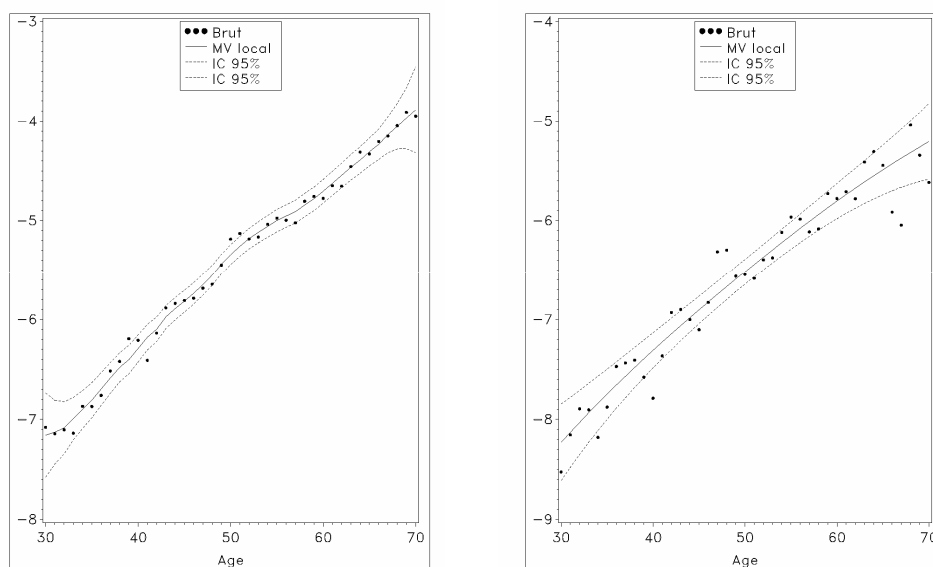
Définissons  $\delta$  comme le nombre d'âges pris en considération dans le voisinage entourant chaque âge  $x$  fixé. Plus précisément, chaque voisinage sera donc constitué par  $2\delta + 1$  points (excepté près des bornes de l'intervalle d'observation, i.e. 30-70 dans notre cas).



**Figure 1.** Maximum de vraisemblance local dans modèle binomial: critère AICC1 pour quelques modèles et quelques voisinages.  $\delta$  représente le nombre d'âges pris dans le voisinage de chaque côté de l'âge considéré. Les hommes sont à gauche et les femmes à droite.

Les valeurs du critère  $AICCI$  pour l'ensemble de ces modèles sont reprises à la Figure 1. Chez les hommes, le minimum est constaté pour le modèle avec la table TD 88-90 et  $\delta = 6$ . Il s'agit donc du modèle optimal au sens du maximum de vraisemblance local. Au contraire, le modèle féminin ne fait intervenir que l'âge, avec la valeur optimale  $\delta = 31$ . Ce constat peut s'expliquer par le fait que la table TD 88-90, utilisée dans le cadre d'opérations en cas de décès, est basée (conformément à un principe de prudence) sur la mortalité masculine. Il semble donc naturel que cette table soit retenue chez les hommes mais pas chez les femmes.

L'un des avantages de la méthode du maximum de vraisemblance et de pouvoir fournir des intervalles de confiance pour le lissage. En effet, s'agissant de modèle linéaires généralisés locaux, de tels intervalles peuvent être facilement obtenus. La Figure 2 expose ainsi le lissage opéré par les 2 modèles optimaux sur le score (i.e. le logit des quotients de mortalité observés). Des intervalles de confiance à 95% y sont également visibles.



**Figure 2.** Maximum de vraisemblance local dans modèle binomial: prédiction du score pour le modèle optimal (TD 88-90 pour les hommes, l'âge pour les femmes). Les hommes sont à gauche et les femmes à droite.



## 5.2. Portefeuille 2 - France - assurance décès - analyse en nombre d'assurés

### 5.2.1. Présentation des données

Le deuxième portefeuille traite d'assurance décès en France avec des petits effectifs. Nous disposons de l'exposition au risque initiale, de l'exposition au risque centrale et du nombre de décès de 23 à 79 ans. C'est un cas idéal pour comparer les résultats obtenus à partir du modèle binomial

$$D_x \sim Bin(L_x, q_x)$$

où  $q_x$  est fonction de l'âge et/ou du logit du quotient de mortalité d'éventuelles tables de référence, et du modèle de Poisson

$$D_x \sim Poi(ER_x \mu_x)$$

où  $\mu_x$  est fonction de l'âge et/ou du logarithme du taux instantané de mortalité d'éventuelles tables de référence.

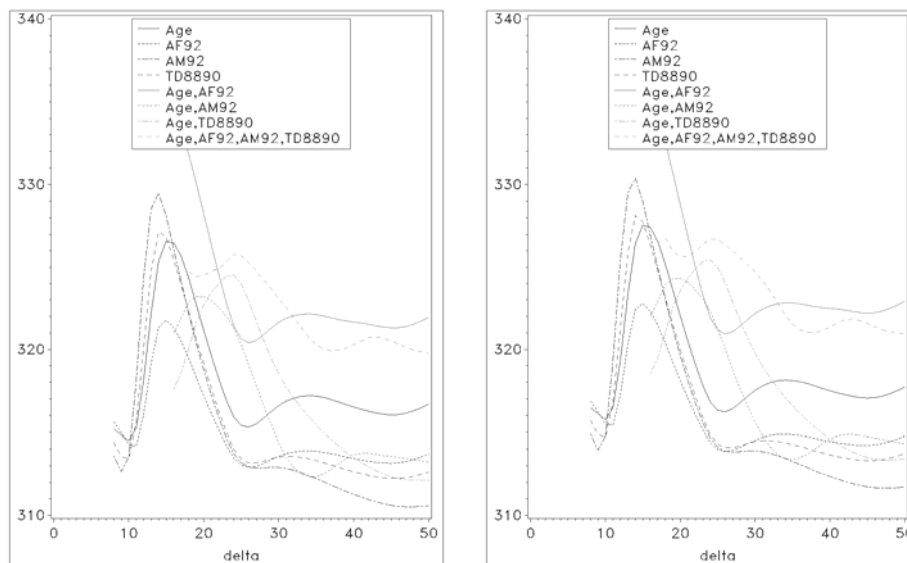
### 5.2.2. Approche par maximum de vraisemblance local

Comme pour le premier portefeuille, commençons par choisir le modèle optimal. Nous choisissons de tester les modèles suivants:

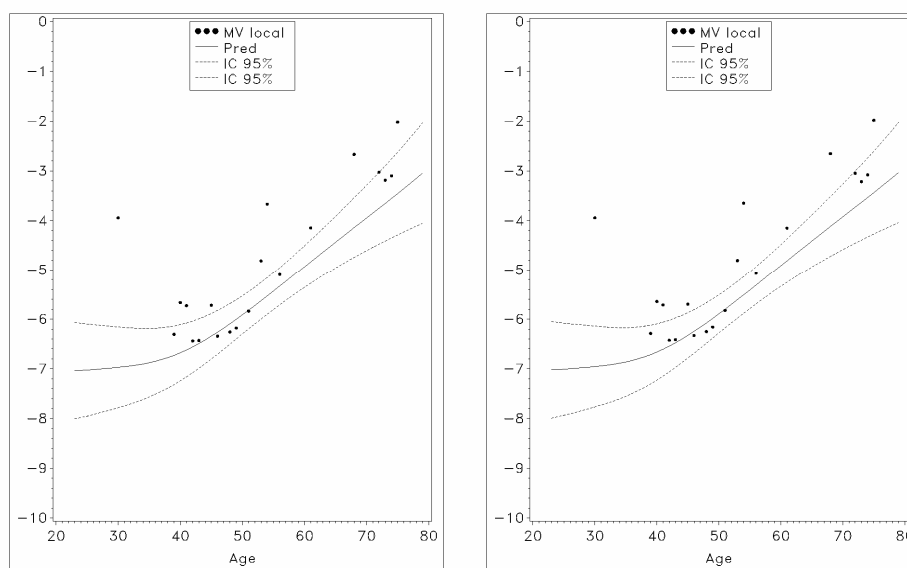
Modèle	Variables
1	$Age$
2	$x^{AF92}$
3	$x^{AM92}$
4	$x^{TD88-90}$
5	$Age, x^{AF92}$
6	$Age, x^{AM92}$
7	$Age, x^{TD88-90}$
8	$Age, x^{AF92}, x^{AM92}, x^{TD88-90}$

La variable  $x$  représente respectivement le logit du quotient de mortalité dans le cas du modèle binomial et le logarithme du taux instantané de mortalité dans le cas du modèle de Poisson.

La Figure 3 illustre les valeurs du critère  $AICC1$  pour quelques voisinages et les modèles choisis. Nous choisissons donc la table AM 92 et  $\delta = 47$  pour le modèle binomial comme pour celui de Poisson. Les valeurs lissées du logit du quotient de mortalité (modèle binomial) et du logarithme du taux instantané de mortalité (modèle de Poisson) sont visibles à la Figure 4, avec intervalles de confiance à 95%. Remarquons que les deux graphiques sont très semblables.



**Figure 3.** Maximum de vraisemblance local: critère AICC1 pour quelques modèles et quelques voisinages.  $\delta$  représente le nombre d'âges pris dans le voisinage de chaque côté de l'âge considéré. Le modèle binomial est à gauche et le modèle de Poisson à droite.



**Figure 4.** Maximum de vraisemblance local: prédiction du score pour le modèle optimal (AM 92). Le modèle binomial est à gauche et le modèle de Poisson à droite.

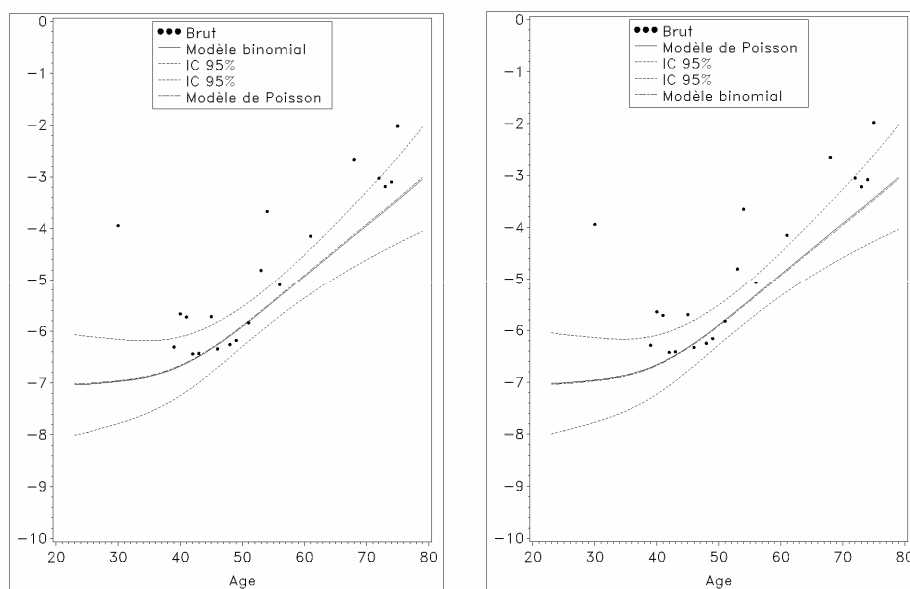
Afin de comparer les modèles, estimons les valeurs lissées par le modèle de Poisson du logit du quotient de mortalité, via la formule

$$\begin{aligned} \text{logit}(q_x^{Poi}) &= \ln\left(\frac{q_x^{Poi}}{1-q_x^{Poi}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1-\exp(-\mu_x^{Poi})}{\exp(-\mu_x^{Poi})}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

De la même manière, les valeurs lissées par le modèle binomial du logarithme du taux instantané de mortalité sont données par

$$\ln(\mu_x^{Bin}) = \ln(-\ln(1-q_x^{Bin})). \quad (20)$$

La Figure 5 permet ainsi de constater que les modèles engendrent des valeurs lissées très semblables.



**Figure 5.** Maximum de vraisemblance local: prédiction du score pour le modèle optimal (AM 92). A gauche, le lissage de  $\text{logit}(q_x)$  par le modèle binomial comparé à celui du modèle de Poisson après la transformation (19). A droite, le lissage de  $\log(\mu_x)$  par le modèle de Poisson comparé à celui du modèle binomial après la transformation (20).

### 5.3. Portefeuille 3 - France - assurance décès - analyse en montant

#### 5.3.1. Présentation des données

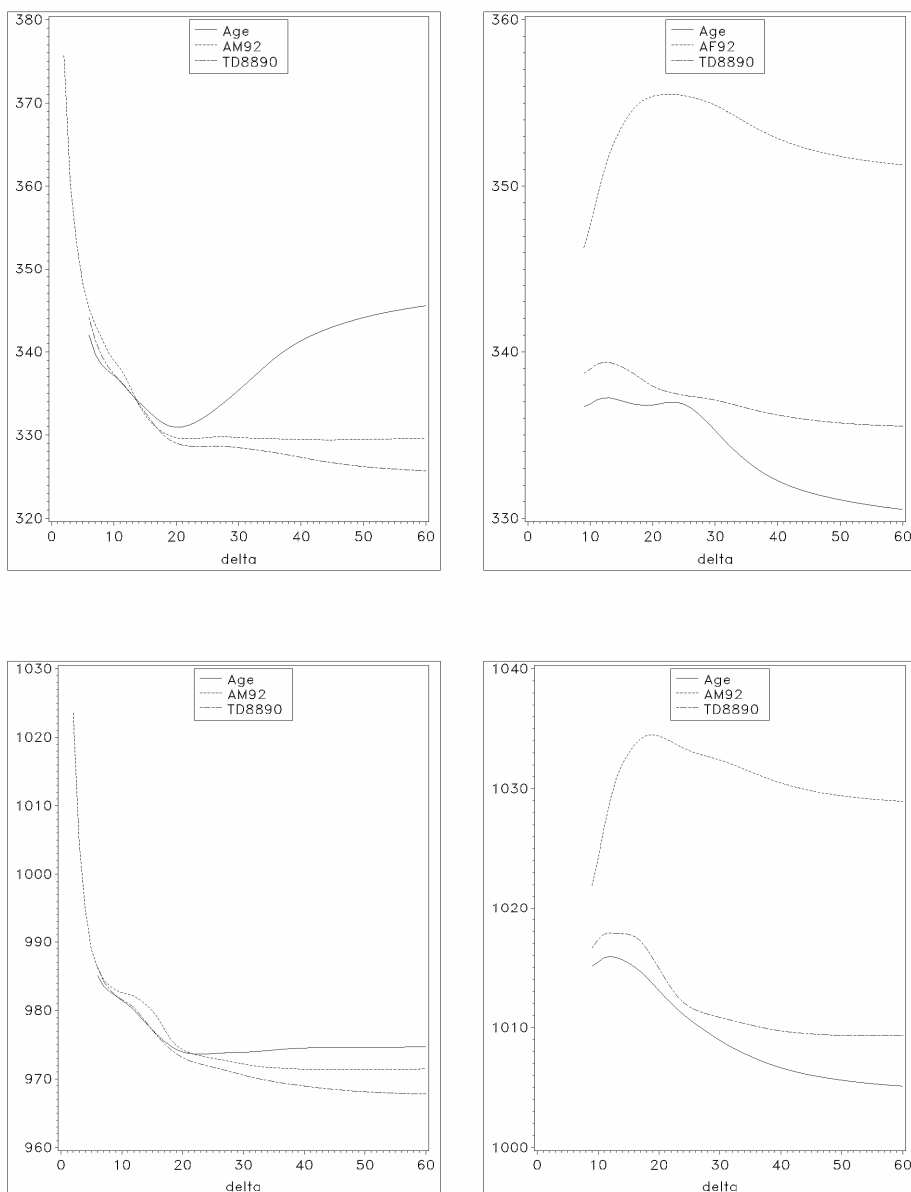
Le dernier portefeuille traite à nouveau d'assurance décès en France. Nous disposons de l'exposition au risque initiale, du nombre de décès de 14 à 74 ans pour les hommes et de 12 à 74 pour les femmes. Cette fois, les montants déboursés suite aux décès sont également disponibles.

#### 5.3.2. Approche par maximum de vraisemblance local

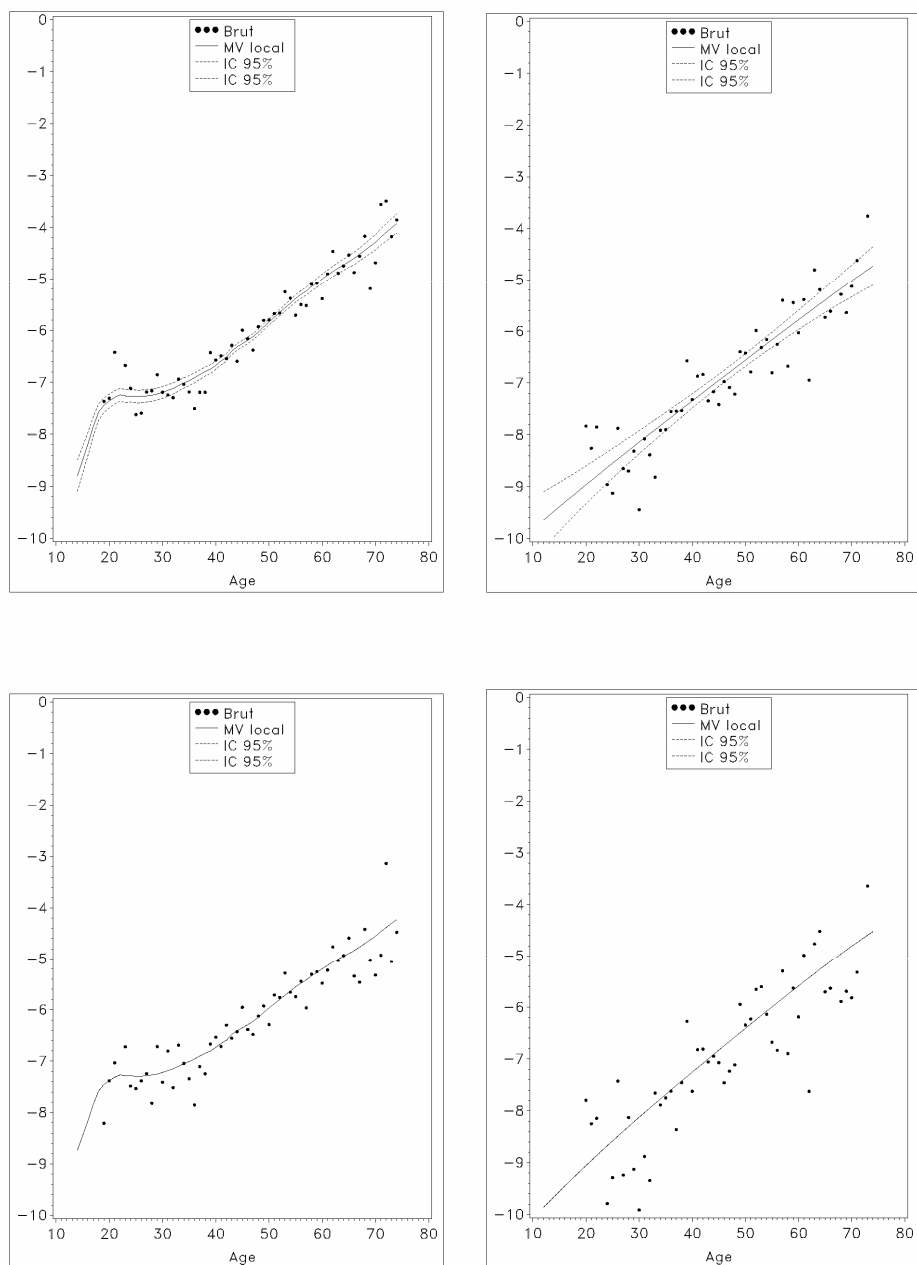
Comme précédemment, nous commençons par sélectionner le modèle binomial puisque l'exposition au risque initiale est disponible. Divers voisinages sont envisagés et quelques tables de référence sont comparées. Au vu des résultats obtenus à partir des portefeuilles précédents, nous restreignons nos analyses aux modèles simples composés d'une unique table de référence:

Modèle	Hommes	Femmes
1	<i>Age</i>	<i>Age</i>
2	$\text{logit}(q^{AM92})$	$\text{logit}(q^{AF92})$
3	$\text{logit}(q^{TD88-90})$	$\text{logit}(q^{TD88-90})$

La Figure 6 compare les valeurs du critère *AICCI* obtenues à partir des différents modèles et voisinages. Dans le cas masculin comme dans le cas féminin, c'est le plus grand voisinage ( $\delta = 60$ ) qui est préféré. En d'autres termes, chaque voisinage comprend l'entièreté des données (seuls les poids diffèrent). Comme pour le premier portefeuille, c'est la table TD 88-90 qui est sélectionnée chez les hommes, tandis que l'âge est préféré chez les femmes, et ce tant pour l'analyse en nombre que pour celle en montant. Les valeurs lissées obtenues à partir de ces modèles optimaux sont illustrées à la Figure 7.



**Figure 6.** Maximum de vraisemblance local dans modèle binomial: critère AICC1 pour quelques modèles et quelques voisinages.  $\delta$  représente le nombre d'âges pris dans le voisinage de chaque côté de l'âge considéré. Les hommes sont à gauche et les femmes à droite; analyse en nombre au-dessus, en montant en dessous.



**Figure 7.** Maximum de vraisemblance local dans modèle binomial: prédiction du score pour le modèle optimal (TD 88-90 pour les hommes, l'âge pour les femmes). Les hommes sont à gauche et les femmes à droite; analyse en nombre au-dessus, en montant en-dessous.

## REFERENCES

- BRASS, W. (1969). A generation method for projecting death rates. In "Population growth and the brain drain; Techniques and Methods of Study", Bechhofer F. editor, Edinburgh University Press, pp. 75-91.
- BRASS, W. (1971). On the scale of mortality. In "Biological Aspects of Mortality", Brass W. editor, Taylor & Francis Ltd., London, pp. 69-110.
- BRASS, W. (1974). Mortality models and their uses in demography. *Transactions of the Faculty of Actuaries* **33**, 122-133.
- BRILLINGER, D.R. (1986). The natural variability of vital rates and associated statistics. *Biometrics* **42**, 693-734.
- BROUHNS, N., & DENUIT, M. (2002). Risque de longévité et rentes viagères. III. Elaboration de tables de mortalité prospectives pour la population assurée belge, et évaluation du coût de l'antiselection. *Belgian Actuarial Bulletin* **2**, 64-72.
- BROUHNS, N., DENUIT, M., & VERMUNT, J.K. (2002). A Poisson log-bilinear approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics* **31**, 373-393.
- CLEVELAND, W.S. (1979). Robust locally-weighted regression and smoothing scatterplots. *Journal of the American Statistical Association* **74**, 829-836.
- CLEVELAND, W.S., & DEVLIN, S.J. (1988). Locally weighted regression: An approach to regression by local fitting. *Journal of the American Statistical Association* **83**, 596-610.
- CLEVELAND, W.S., DEVLIN, S.J., & GROSSE, E. (1988). Regression by local fitting. *Journal of Econometrics* **37**, 87-114.
- CLEVELAND, W.S., & GROSSE, E. (1991). Computational methods for local regression. *Statistics and Computing* **1**, 47-62.
- COX, D.R. (1972). Regression models and life tables. *Journal of the Royal Statistical Society – Series B Statistical Methodology* **34**, 187-220.
- DELWARDE, A., & DENUIT, M. (2005). *Construction de Tables de Mortalité Périodiques et Prospectives*. Economica, Paris (à paraître).
- EWBANK, D.C., GOMEZ DE LEON, J.C., & STOTO, M.A. (1983). A reducible four-parameter system of model life tables. *Population Studies* **37**, 105-127.
- HANNERZ, H. (2001). An extension of relational methods in mortality estimation. *Demographic Research* **4**, Article 10.
- HURWICH, C.M., & SIMONOFF, J.S. (1998). Smoothing parameter selection in

- nonparametric regression using an improved Akaike information criterion. *Journal of the Royal Statistical Society - Series B* **60**, 271-293.
- SEAL, H. (1979). The fitting of a mathematical graduation formula: A historical review with illustrations. *German Actuarial Bulletin* **14**, 237-253.
- VERRALL, R.J. (1996). A unified framework for graduation. Actuarial Research Paper **91**, Department of Actuarial Science and Statistics, City University, London.
- ZABA, B. (1979). The four-parameter logit life table system. *Population Studies* **33**, 89-100.



**TARIFICATION DES RISQUES INDUSTRIELS  
PAR LE MODELE DE CREDIBILITE :  
PRISE EN COMPTE DE LA TAILLE DES RISQUES EXTENSION  
A L'ASSURANCE DES PERTES D'EXPLOITATION**

Cécile DOUVILLÉ<sup>4</sup>  
*Fédération Française des Sociétés d'Assurance, Paris*

**RESUME**

L'assurance incendie des grands risques d'entreprises a enregistré ces dernières années d'importantes évolutions ayant sensiblement modifié la nature et les caractéristiques des risques assurés. Les bases du tarif professionnel (élaboré par la FFSA) étant anciennes, nous nous proposons d'exposer dans cet article quelques pistes visant à adapter au mieux la tarification des risques industriels à ces changements. En premier lieu, nous réaliserons un nouveau tarif incendie des risques directs (RD) en utilisant la méthode de crédibilité de Jewell dont le modèle hiérarchique est parfaitement adapté à la structure tarifaire retenue a priori pour les risques concernés. Partant du constat que ce tarif global réalise une mutualisation uniquement par activité sans prendre en compte l'hétérogénéité de la taille des risques, nous proposerons dans un deuxième temps d'enrichir cette mutualisation en y ajoutant une différenciation par classe de capitaux assurés qui sera mieux adaptée à un marché moins coassuré. Enfin, et toujours par la méthode de crédibilité hiérarchique de Jewell, nous établirons pour la première fois une tarification de l'assurance incendie des pertes d'exploitation (PE) par rubrique.

**ABSTRACT**

The fire insurance of industrial risks has registered these last years some important evolutions which have changed the nature and the characteristics of insured risks. As the bases of the professional tariff (published by the FFSA) are old, in this paper we propose to expose how it could be possible to adapt the industrial risks quotation to these changes. We will first realise a new fire tariff for direct damages by using the Jewell's hierarchical model of credibility, which is perfectly adjusted to the tariff structure choosen previously for these risks. But this global quotation is only making a distinction by activity without taking the heterogeneity of the risks dimension into consideration. So, we will propose in a second time to improve the tariff by adding a distinction according to the level of insured

---

<sup>4</sup> FFSA/DESSI – 26 boulevard Haussmann – 75311 PARIS cedex 09 – E-mail : c.douville@ffsa.fr

capital. Finally, and still using the Jewell's hierarchical model of credibility, we will establish for the first time a quotation by rubric for business interruption insurance.

*Avertissement : les résultats exposés dans cet article ont été rendus anonymes afin de préserver leur caractère confidentiel.*

## A. INTRODUCTION

L'assurance incendie des grands risques d'entreprises (plus communément appelée assurance des risques industriels) se caractérise par une forte volatilité des résultats techniques, l'aléa sur la charge des sinistres provenant du fait qu'un faible nombre de sinistres, les plus gros d'entre eux, constituent le facteur prépondérant dans la formation des résultats (les 100 à 150 dossiers supérieurs à 1 M€ chaque année totalisent en moyenne 70 % de la charge globale). Cette forte dépendance des résultats aux plus gros sinistres pose des problèmes spécifiques de tarification ; une société ne peut établir un tarif à partir de ses seules statistiques.

Une tarification analytique des risques industriels est donc proposée dans le traité d'assurance incendie risques d'entreprises (TRE ancien tarif rouge élaboré par la FFSA) qui établit un taux de base différencié par activité faisant l'objet d'ajustements à la hausse ou à la baisse en fonction de facteurs d'aggravation ou d'amélioration propres au risque. Ces taux (dont les valeurs constituent de simples recommandations en vertu de la liberté des prix et de la libre concurrence) ont été calculés par application de la théorie de la crédibilité lors de la refonte du tarif en 1990.

Or, ce domaine de l'assurance a enregistré ces dernières années d'importantes évolutions qui ont sensiblement modifié la nature et les caractéristiques des risques assurés :

1. les bases du précédent tarif sont anciennes. Le modèle de crédibilité utilisé est celui de Bulhmann Straub qui n'est pas le plus adapté à la structure tarifaire de la branche.
2. les calculs effectués reposent sur des données incendie risques directs (RD) uniquement, ignorant de ce fait le coût du risque associé à l'assurance des pertes d'exploitation (PE). Or celle-ci s'étant fortement développée ces dernières années (le nombre de risques assurés a augmenté de 60 % depuis 1990), le problème de l'insuffisance des données ne subsiste plus aujourd'hui. Par ailleurs, utiliser une méthode actuarielle pour tarifier l'assurance PE apparaît d'autant plus nécessaire que

les risques industriels, qui sont par nature fortement volatiles, voient leur volatilité augmenter en même temps que la présence de la garantie PE dans les contrats.

3. le tarif des risques industriels a été élaboré dans un contexte de marché fortement coassuré. Or, bien que la coassurance demeure majoritaire (en terme de cotisations), elle a récemment sensiblement diminué puisqu'elle ne concerne plus aujourd'hui qu'un risque sur 4 contre un risque sur deux en 1990. Ce recul de la coassurance (qui se recentre de plus en plus sur les grands risques) résulte de la concentration économique (des assureurs mais aussi des assurés), de l'augmentation des capacités des assureurs et de l'alternative que constitue la réassurance. Cette évolution de la coassurance a pour conséquence de dissiper le caractère homothétique des portefeuilles des sociétés à la population globale des risques concernés, d'où une plus grande nécessité pour celles-ci d'intégrer leurs propres résultats.
4. le tarif actuel réalise une mutualisation uniquement par activité, l'hétérogénéité de la taille des risques n'étant pas prise en compte. Or, comme on peut le constater dans le tableau ci-dessous; la distinction en fonction de la taille des risques donne des résultats sensiblement différents. On peut également relever la forte concentration des capitaux avec 1 % des affaires représentant plus de 50 % des capitaux assurés.

<b>Taille des capitaux RD émis en 2000</b>	Nombre de risques RD (en milliers)	Répartition des capitaux (RD+PE) en %	Fréquence 2000 (en %)	Taux de dommage 2000 (en %)
moins de 6 M€	60 ,0	12,8	27	2,4
6 à 20 M€	13,5	14,1	120	0,6
20 à 150 M€	5,0	20,9	395	0,2
plus de 150 M€	<b>0,9</b>	<b>52,2</b>	1892	0,03

Par ailleurs, le capital moyen assuré en risques directs par les sociétés (en tant que seul assureur) est inférieur à 2,3 M€ pour un tiers d'entre elles tandis que pour 17 % des compagnies la taille moyenne des risques couverts dépasse 15 M€, ce qui nous amène à souligner les limites pour une société dans l'utilisation exclusive du niveau tarifaire obtenu pour le marché global.

Ces constats étant posés, dans cette étude nous souhaitons utiliser le modèle de crédibilité hiérarchique de JEWELL pour :

- actualiser la tarification des risques directs,
- calculer des taux de prime pure crédibilisés pour l'assurance des pertes d'exploitation,
- enrichir la mutualisation par activité en ajoutant une différenciation tarifaire suivant la taille des risques assurés qui sera mieux adaptée à un marché moins coassuré.

Notre objectif final étant d' examiner un certain nombre de pistes visant à élaborer un *outil de tarification plus complet, prenant mieux en compte les caractéristiques actuelles des risques assurés et permettant aux sociétés de se rapprocher davantage des particularités de leur propre portefeuille.*

## **B. SOURCE ET MISE EN FORME DES DONNEES**

Notre étude s'appuie sur les données fournies par la statistique commune des grands risques incendie industriels et commerciaux. Cette statistique, dont l'information de base est la police d'assurance, est établie par la Fédération Française des Sociétés d'Assurances. Elle est alimentée par les copies de portefeuille d'une soixantaine de sociétés apéritrices représentant *plus de 90 % du marché national*. Le fichier des portefeuilles répertorie environ 100 000 contrats, le fichier historique des sinistres comptabilise quant à lui près de 200 000 dossiers.

La statistique a été refondue en 1990, mais il est possible de disposer de données de portefeuille agrégées et de l'ensemble des sinistres sur 18 années.

Les fichiers de la statistique commune des risques industriels sont gérés par le *logiciel SAS*, c'est donc à partir de ce langage que nous avons travaillé et que les programmes de calcul ont été réalisés.

Deux types de fichier coexistent ;

- les premiers sont annuels et conservent les caractéristiques de chacune des polices en indiquant le nombre et le coût cumulé des sinistres qui se rattachent à une police ainsi que les primes et capitaux correspondants. Bien que cumulée par police, la sinistralité demeure ventilée entre risques directs et perte d'exploitation et entre garantie principale incendie et garanties annexes.

- l'autre type de fichier est un historique qui cumule les résultats annuels au niveau de la rubrique et perd de ce fait la notion de police.
- Pour constituer le fichier d'entrée des données pour le calcul des taux crédibilisés, la partie de la police concernant les garanties annexes a été exclue, *notre tarification ne prendra donc pas en compte les risques dits annexes à l'incendie.*
- Nous avons également à déterminer la durée de la période à prendre en compte pour établir les taux de prime pure crédibilisés : *nous travaillerons sur une période d'observation limitée aux 10 dernières années (de 1991 à 2000).* Ce compromis permettra à la fois de satisfaire les exigences de la théorie statistique et notre souci d'adapter le tarif aux nouvelles réalités du marché. Il a par ailleurs l'avantage de faire coïncider le début de notre période d'observation avec l'année suivant la refonte de la statistique commune, ce qui constitue un gage supplémentaire de qualité et de comparabilité dans le temps des données utilisées.
- L'utilisation de la théorie de la crédibilité pose le problème du *choix de la variable de pondération*. Bien que les travaux précédents retiennent la variable « montant des capitaux assurés » plutôt que le nombre d'années risques, dans notre étude nous n'excluons ni l'un ni l'autre de ces choix car chacun ont leurs avantages propres et leurs inconvénients que nous mettrons en évidence avant de déterminer la meilleure pondération à retenir selon l'objectif visé.
- Dans le but d'élaborer une tarification à laquelle un grand nombre de sociétés puisse se référer, nous souhaitons intégrer *une distinction suivant la taille des capitaux assurés*. Dans ce cas nous devons repartir des fichiers annuels et classer la police dans une tranche donnée en fonction du niveau de capital émis qu'elle assure. Le fichier finalisé contient alors également la variable « DISTRI » qui indique dans qu'elle tranche se classe la police.

Au final, notre fichier de données comporte pour chacune des 146 rubriques et des 10 exercices :

- le taux de prime pure annuel (charge des sinistres/capitaux assurés) en %
- le numéro de fascicule
- le nombre d'années risques
- les primes acquises
- les capitaux acquis assurés
- la variable « DISTRI »

Afin de ne pas minorer le poids des exercices les plus anciens, les capitaux et primes sont revalorisés par l'indice RI (valeur au 1<sup>er</sup> juillet).

### **C. LA THEORIE DE LA CREDIBILITE**

Cette partie se limitera à une présentation très succincte de la théorie sans en reprendre les démonstrations.

#### **1. PRESENTATION**

La théorie de la crédibilité est une méthode tarifaire actuarielle. Elle permet à un assureur de déterminer les primes de contrat au sein d'un portefeuille plus ou moins hétérogène. La théorie de la crédibilité a pour objet de combiner les informations disponibles sur l'ensemble de la population (le portefeuille) et celle propres à chaque individu (le contrat), elle permet de déterminer le crédit qui peut être accordé aux passés individuels par rapport au passé collectif.

Plusieurs modèles de crédibilité ont été mis en place. Le premier, le plus simple, introduit en 1967 est le modèle de Bühlmann. Cependant ce modèle est d'une portée limitée car il ne tient pas compte de l'importance "économique" de certaines classes de contrats. Il ne permet de traiter que les cas où les contrats sont considérés comme identiques et indépendants.

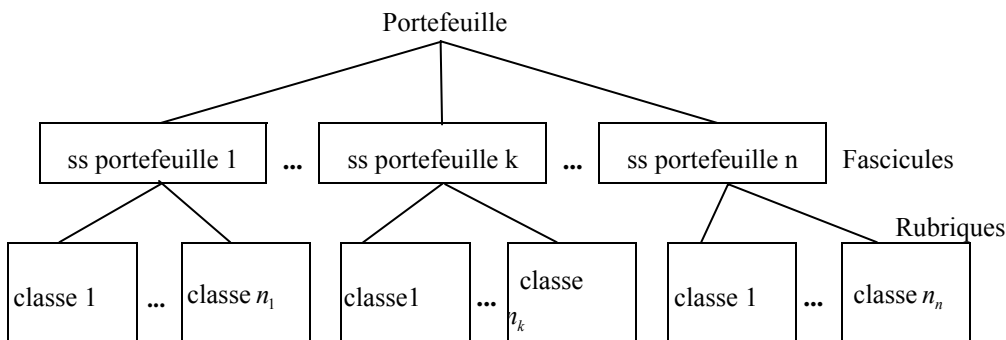
Or nous avons à estimer la prime à fixer en assurance risques industriels. Nous verrons par l'intermédiaire d'analyses des données, la forte diversité qui subsiste au niveau des secteurs d'activités et de la taille des risques. Il est donc indispensable pour que l'estimation soit la meilleure possible, de tenir compte de leurs poids respectifs.

Hans Bühlmann et Erwin Straub ont proposé en 1970 une amélioration du modèle de crédibilité de Bühlmann en affectant à chacun des contrats un poids. Puis Jewell, en 1975, a présenté un modèle de crédibilité hiérarchique qui, d'une part, tient compte des poids des contrats, et d'autre part, permet de scinder le portefeuille en sous portefeuilles plus homogènes. Le modèle de Bühlmann-Straub considère pour sa part, le portefeuille dans sa globalité.

#### **2. MODELE DE CREDIBILITE HIERARCHIQUE DE JEWELL**

Le portefeuille est segmenté en  $n$  sous-portefeuilles considérés comme présentant une homogénéité de comportement face au risque. Ces  $n$  sous-portefeuilles sont eux-mêmes segmentés en plusieurs classes de contrats.

Les schémas ci-dessous permettent de visualiser la structure du portefeuille selon Jewell.



sous portefeuille	k=1	k=2	...	k=n
<b>Var de structure1</b>	$\mathcal{G}_1$	$\mathcal{G}_2$	...	$\mathcal{G}_n$
<b>Var de structure2</b>	$\mathcal{G}_{11} \quad \mathcal{G}_{12} \quad \dots$	$\mathcal{G}_{21} \quad \mathcal{G}_{22} \quad \dots$	...	$\mathcal{G}_{n1} \quad \mathcal{G}_{n2} \quad \dots$
<b>Année1</b>	$X_{111} \quad X_{121} \quad \dots$ $\omega_{111} \quad \omega_{121} \quad \dots$	$X_{211} \quad X_{221} \quad \dots$ $\omega_{211} \quad \omega_{221} \quad \dots$	...	$X_{n11} \quad X_{n21} \quad \dots$ $\omega_{n11} \quad \omega_{n21} \quad \dots$
<b>Année2</b>	$X_{112} \quad X_{122} \quad \dots$ $\omega_{112} \quad \omega_{122} \quad \dots$	$X_{212} \quad X_{222} \quad \dots$ $\omega_{212} \quad \omega_{222} \quad \dots$	...	$X_{n12} \quad X_{n22} \quad \dots$ $\omega_{n12} \quad \omega_{n22} \quad \dots$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

La classe de contrats est donc décrite par  $(\mathcal{G}_{kj}, X_{kji}; i \geq 1; j = 1, \dots, n_k)$ . Le sous - portefeuille est décrit par  $(\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_{kj}, X_{kji}, i \geq 1; j = 1, \dots, n_k)$ .

Résumons. On a - au niveau du portefeuille  $E(X_{kji}) = m$ .

- au niveau du kième sous-portefeuille  $E(X_{kji} / \mathcal{G}_k) = \mu_0(\mathcal{G}_k)$ .
- au niveau de la classe (k, j),  $E(X_{kji} / \mathcal{G}_k, \mathcal{G}_{kj}) = \mu(\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_{kj})$ .

**Les hypothèses du modèle de Jewell sont les suivantes :**

<p><b>J0 :</b> les variables aléatoires <math>\mu(\mathcal{G}_k), \mu(\mathcal{G}_{kj}), X_{kji}</math> sont de carré intégrable.</p> <p><b>J1 :</b> les <math>n</math> sous-portefeuilles sont indépendants deux à deux. C'est à dire que pour <math>k \neq p</math>, les suites de variables aléatoires <math>(\mathcal{G}_p, \mathcal{G}_{pj}, X_{pji}, j = 1, \dots, n_p; i \geq 1)</math> et <math>(\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_{kj}, X_{kji}, j = 1, \dots, n_k; i \geq 1)</math> sont indépendantes en probabilité.</p> <p><b>J2 :</b> Pour <math>k</math> fixé dans <math>\{1, \dots, n\}</math>, conditionnellement à <math>\mathcal{G}_k</math>, les contrats (ou classes de contrats) <math>(k, 1), \dots, (k, n_k)</math> sont indépendants. C'est à dire que les <math>n_k</math> suites de variables <math>(\mathcal{G}_{kj}, X_{kji}, j = 1, \dots, n_k; i \geq 1)</math> sont indépendantes en probabilité.</p> <p><b>J3 :</b> Pour <math>k</math> fixé dans <math>\{1, \dots, n\}</math>, et <math>j</math> fixé dans <math>\{1, \dots, n_k\}</math>, conditionnellement à <math>\mathcal{G}_{kj}</math>, les variables aléatoires <math>X_{kji}; i \geq 1</math> sont indépendantes en probabilité.</p> <p><b>J4 :</b> Les couples de variables aléatoires <math>(\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_{kj})</math> ont tous la même loi de probabilité.</p> <p><b>J5 :</b> <math>E(X_{kji} / \mathcal{G}_k, \mathcal{G}_{kj}) = \mu(\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_{kj})</math></p> $\text{Cov}(\mathbf{X}_{kji}, \mathbf{X}_{kjl} / \mathcal{G}_k, \mathcal{G}_{kj}) = \frac{\sigma(\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_{kj})}{\omega_{kji}} \delta_{il}.$
--

Ainsi sous les hypothèses de **J0** à **J5**, Jewell a démontré que :

↳ pour la classe de contrat  $(k, j)$  l'estimateur de crédibilité linéaire homogène hiérarchique optimal de  $\mu(\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_{kj})$  à la date  $t$  est égal à :

$$\hat{\mu}(\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_{kj}) = (1 - z_{kj}) \varepsilon_{k..} + z_{kj} X_{kj.}$$

↳ pour le sous portefeuille n° $k$ , l'estimateur de crédibilité homogène optimal de  $\mu_0(\mathcal{G}_k)$  à la date  $t$  est égal à :

$$\hat{\mu}_0(\mathcal{G}_k) = (1 - z_k) \varepsilon + z_k \varepsilon_{k..}$$

**Notations :**

Les taux de primes pures :

- $X_{kji}$  est le taux de prime pure de la classe de contrats (rubrique) n°  $j$  du sous – portefeuille (fascicule) n°  $k$  pour l'année  $i$ .
- $X_{kj.} = \sum_i \frac{\omega_{kji}}{\omega_{kj.}} X_{kji}$  est le taux de prime pure moyen de la classe de contrats (rubrique) n°  $j$  du sous –portefeuille (fascicule) n°  $k$  sur la période  $t$ .



- $X_{k..} = \sum_j \frac{\omega_{kj.}}{\omega_{k..}} X_{kj.} = \sum_j \sum_i \frac{\omega_{kji}}{\omega_{k..}} X_{kji}$  est le taux de prime pure du sous-portefeuille n°  $k$  sur la période  $t$ .

Les poids :

- $\omega_{kji}$  est le poids de la classe de contrats  $j$  du sous-portefeuille  $k$  pour l'année  $i$ .
- $\omega_{kj.} = \sum_i \omega_{kji}$  est le poids de la classe de contrats n°  $j$  du sous-portefeuille n°  $k$  sur la période  $t$ .
- $\omega_{k..} = \sum_j \omega_{kj.} = \sum_j \sum_i \omega_{kji}$  est le poids du sous - portefeuille n°  $k$ .
- $\omega_{...} = \sum_k \sum_j \sum_i \omega_{kji}$  est le poids du portefeuille.

Les coefficients de crédibilité :

- $z_{kj} = \frac{a\omega_{kj.}}{S^2 + a\omega_{kj.}}$  est le coefficient de crédibilité de la classe de contrat n°  $j$  du sous - portefeuille n°  $k$ .
- $z_{k.} = \sum_j z_{kj}$ .
- $z_k = \frac{bz_{k.}}{a + bz_{k.}}$  est le coefficient de crédibilité du sous - portefeuille n°  $k$ .
- $z = \sum_k z_k$ .

**Remarque :**  $z_{k.}$  et  $z_k$  ne sont pas des coefficients de crédibilité linéaire. Ils ne sont d'ailleurs pas nécessairement compris entre 0 et 1.

Des pseudos taux de prime pure :

- $\varepsilon_{k..} = \sum_j \frac{z_{kj}}{z_{k.}} X_{kj.}$  est le taux de prime pure moyen pondéré par les coefficients de crédibilité de chaque classe de contrats.
- $\varepsilon = \sum_k \frac{z_k}{z} X_{k..}$  est le taux de prime pure pour le portefeuille.

**Estimateurs du modèle :**

- La statistique  $S_\omega^2 = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n_k} (t_{kj} - 1)} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n_k} \sum_{i \in T_{kj}} \omega_{kji} (X_{kji} - X_{kj})^2$  est un estimateur sans biais de  $S^2$  (avec  $t_{kj} = \text{card}(T_{kj})$ ).
- $\alpha = \frac{1}{\sum_{k=1}^n (n_k - 1)} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{n_k} z_{kj} (X_{kj} - \varepsilon_{k..})^2$  est un pseudo-estimateur sans biais de  $a$ .
- $\beta = \frac{1}{(n-1)} \sum_{k=1}^n z_k (\varepsilon_{k..} - \varepsilon)^2$  est un pseudo-estimateur sans biais de  $b$ .

**Interprétons ces paramètres :**

- $S^2$  mesure la variabilité des observations individuelles.
- $a$  mesure le degré d'hétérogénéité des risques dans le sous-portfeuille.
- $b$  mesure le degré d'hétérogénéité des sous-portfeuilles dans le portefeuille.

Après estimation des paramètres du modèle, nous obtenons **les formules de crédibilité** suivantes qui seront, désormais, les formules utilisées tant pour l'étude que pour la programmation.

$$\text{Pour le fascicule } k : \hat{\mu}(\mathcal{G}_k) = (1 - \hat{z}_k) \hat{\varepsilon} + \hat{z}_k \hat{\varepsilon}_{k..}$$

$$\text{Pour la rubrique } (k, j) : \hat{\mu}(\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_{kj}) = (1 - \hat{z}_{kj}) \hat{\varepsilon}_{k..} + \hat{z}_{kj} X_{kj}$$

Où les coefficients de crédibilité sont donnés par  $\hat{z}_{kj} = \frac{\alpha \omega_{kj}}{S_\omega^2 + \alpha \omega_{kj}}$ ,  $\hat{z}_k = \frac{\beta \hat{z}_{k..}}{\alpha + \beta \hat{z}_{k..}}$  et

$$\hat{z}_{k..} = \sum_{j=1}^{n_k} \hat{z}_{kj}$$

**Modalités pratiques de calcul :**

$S_\omega^2$  et  $X_{kj}$  sont des statistiques facilement calculables.

Les autres grandeurs dépendent des paramètres structuraux et sont interdépendants, d'où la nécessité de procéder à un calcul itératif.

- Etape 1 : On commence par calculer  $S_\omega^2$ .
- Etape 2 : On pose  $\alpha=1$ , on peut alors calculer  $Z_{kj}$  et  $Z_k$ .  
On pose  $\beta=1$ , on en déduit  $Z_k$  puis  $Z$ .

- Etape 3 : On calcule  $\varepsilon k_{..}$ , on en déduit la nouvelle valeur de  $\alpha$ .  
 On calcule  $\varepsilon$ , on en déduit la nouvelle valeur de  $\beta$ .

- Etape 4 : On calcule  $|an-an-1/an-1|$  et  $|\beta n-\beta n-1/\beta n-1|$ .

Si  $|an-an-1/an-1| < 0.001$  et  $|\beta n-\beta n-1/\beta n-1| < 0.001$  alors on peut calculer les estimateurs empiriques de crédibilité linéaire. Sinon on recommence à l'étape 2, et ainsi de suite jusqu'à obtenir la convergence.

**Sensibilité des résultats :**

Avant d'aborder plus précisément les résultats obtenus avec le modèle, il nous paraît utile de rappeler comment réagissent les coefficients de crédibilité et les taux crédibilisés qui en découlent.

- formation des coefficients de crédibilité :

- au niveau de la rubrique :

$$\hat{z}_{kj} = \frac{\alpha \omega_{kj}}{S_{\omega}^2 + \alpha \omega_{kj}} = \frac{\omega_{kj}}{S_{\omega}^2 / \alpha + \omega_{kj}} = \frac{1}{1 + S_{\omega}^2 / \alpha \omega_{kj}}$$

où  $S^2$  et  $\alpha$  constants.

Le coefficient de crédibilité croît avec le poids de la rubrique.  
 A pondération fixée,  $\hat{z}_{kj}$  évolue en sens inverse de  $S_{\omega}^2/\alpha$ .

- au niveau du fascicule :

$$\hat{z}_k = \frac{\beta \hat{z}_k}{\alpha + \beta \hat{z}_k} = \frac{\hat{z}_k}{\alpha / \beta + \hat{z}_k} = \frac{1}{1 + \alpha / \beta \hat{z}_k} \quad \text{avec} \quad \hat{z}_k = \sum_{j=1}^{n_k} \hat{z}_{kj}$$

$\alpha$  et  $\beta$  fixés.

Le coefficient de crédibilité du fascicule est une fonction croissante de  $\hat{z}_k$ .

- formation des taux de prime pure crédibilisé :

- au niveau de la rubrique (k,j) :  $\hat{\mu}(\mathcal{G}_k, \mathcal{G}_{kj}) = (1 - \hat{z}_{kj}) \hat{\varepsilon}_{k..} + \hat{z}_{kj} X_{kj}$ .

La correction du taux de prime pure (TPP) observé se fait par rapport à  $\varepsilon k_{..}$ .

Elle sera d'autant plus forte que :

- le coefficient de crédibilité sera faible.
- le taux observé s'éloigne de la moyenne  $\varepsilon k_{..}$  du fascicule.
- au niveau du fascicule :  $\hat{\mu}(\mathcal{G}_k) = (1 - \hat{z}_k) \hat{\varepsilon} + \hat{z}_k \hat{\varepsilon}_{k..}$

La correction des TPP observés se fait par rapport  $\varepsilon k_{..}$  et  $\varepsilon$ .

Comme pour les rubriques, les TPP crédibilisés s'éloigneront d'autant plus des TPP observés que le coefficient de crédibilité du fascicule sera faible et/ou sera très différent de la moyenne  $\varepsilon$  calculée sur le portefeuille.

## C. TARIFICATION DES RISQUES DIRECTS

### 1. Ensemble du portefeuille-fascicule-rubrique

*Le modèle de crédibilité hiérarchique a été appliqué aux données en testant deux pondérations que sont les années risques et les capitaux assurés.*

#### 1.1. Etude des résultats selon la pondération choisie

Chacune présente ses propres avantages et inconvénients. La pondération par les années risques s'approche de la notion « d'expérience » statistique dont le nombre élevé est gage de significativité. Elle avantage les activités « atomisées » mais est biaisée par l'existence de polices multisites. La pondération par les capitaux assurés reflète d'avantage le degré d'engagement de l'assureur et le plus souvent, des capitaux élevés vont de paire avec un nombre élevé d'années risques.

Les deux méthodes de pondération donnent des résultats très proches (aussi bien sur les taux de prime pure –TPP- observés ou crédibilisés que sur les coefficients de crédibilité) à l'exception de quelques cas très « atypiques » constituées d'activités fortement capitalistiques avec peu de contrats (ex : les raffineries de pétroles) ou inversement des rubriques comportant de nombreux contrats à faibles capitaux assurés. Ces quelques cas posent tout de même problème dans la mesure où le tarif obtenu in fine peut être radicalement différent comme l'illustre le tableau ci-dessous. C'est pourquoi une pondération hybride constituée par **la moyenne géométrique des années risques et des capitaux assurés a été finalement retenue dans la suite de l'étude.**

TPP crédibilisés en ‰	Années risques	Capitaux	Moyenne géométrique
Rubrique B119	1,06	2,96	1,52
Rubrique I31	0,70	0,27	0,52

Les résultats sont davantage satisfaisants car pour la grande majorité des rubriques ils sont très proches des précédents, un nombre important de coefficients de crédibilité reste supérieur à 50 % et cette pondération a le mérite de conduire à des résultats plus nuancés pour les cas extrêmes.

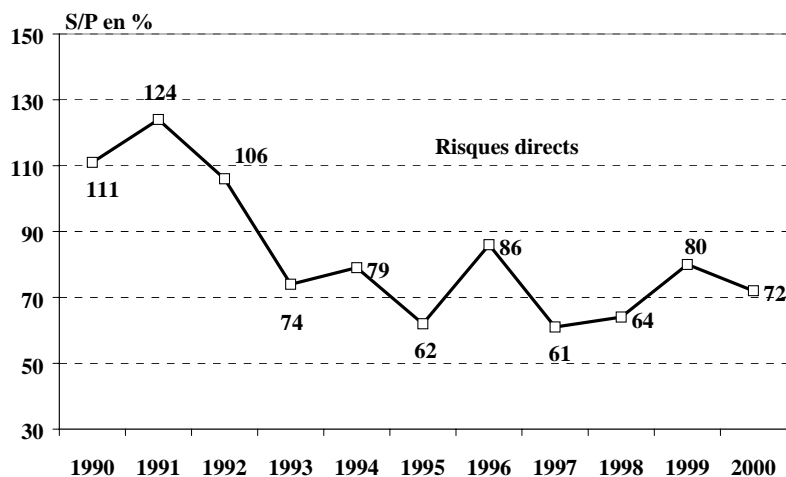
## 1.2. Propriétés du tarif obtenu

### a. Stabilité dans le temps

Nous calculons pour chacune des 146 rubriques 4 TPP crédibilisés pour chacune des périodes suivantes : 1990 à 1997, 1991 à 1998, 1992 à 1999 et 1993 à 2000. Comme indicateur de cette stabilité, nous avons retenu le coefficient de Pearson calculé sur ces 4 valeurs, la répartition des TPP étant la suivante :

CV en %	0 à 5	5 à 10	10 à 15	15 à 20	20 à 30	>= à 30	Total
TPP observé	6,2 %	15,1 %	15,1 %	12,3 %	22,6 %	<b>28,8 %</b>	100 %
TPP crédibilisé	8,9 %	25,3 %	21,2 %	19,9 %	21,9 %	<b>2,7 %</b>	100 %

L'analyse de ces résultats conduit à des constatations très satisfaisantes : 28,8 % des TPP observés enregistrent un coefficient de variation supérieur à 30 % contre seulement 2,7 % pour les taux crédibilisés ; 36 % des rubriques voient leur TPP observé varier de moins de 15 % alors que cette proportion atteint 55 % pour les TPP crédibilisés. Enfin, ces résultats apparaissent d'autant plus remarquables que la sinistralité a été sensiblement volatile sur la période 1990 à 2000 comme le montre le graphique ci-dessous.



Notre test revient à supprimer un exercice de début de période très sinistré pour lui substituer un exercice de fin de période plus clément, ce qui introduit une forte variabilité. Précisons ces résultats au niveau de chaque fascicule.

CV en %	0 à 5	5 à 10	10 à 15	15 à 20	20 à 30	>= à 30	Total
A	3	13	7	1	2		26
B	1	2	2	7	<u>3</u>	<u>1</u>	16
C		5	8	10	<u>9</u>	<u>2</u>	34
D		4					4
E		2	2	4	<u>2</u>	<u>1</u>	11
F		1	5	1			7
G			1		1		2
H	1		1	5	13		20
I	6	10	2	1			19
J	2		3		2		7
<b>Ensemble</b>	<b>13</b>	<b>37</b>	<b>31</b>	<b>29</b>	<b>32</b>	<b>4</b>	<b>146</b>

Les résultats les moins stables concernent des fascicules ( B, C et E) et des rubriques qui ont enregistré des variations importantes de sinistralité sur la période prise en compte mais pour ceux-ci, la variabilité constatée sur les taux crédibilisés reste très inférieure à celle des taux observés.

***b. Stabilité du tarif face à la survenance de sinistres importants.***

Par deux fois, nous avons recalculé le tarif après avoir supprimé un sinistre important ce qui a pour effet :

- de laisser invariant le TPP observé à l'exception bien évidemment de la rubrique impactée.
- lorsqu'un sinistre important est supprimé, la variance sur le portefeuille (notée  $S^2$ ) va diminuer.
- les conséquences sur les coefficients de crédibilité vont quant à elles découler de la modification de la valeur du rapport  $S^2/\alpha$  : si celui-ci diminue, les coefficients de crédibilité des rubriques seront plus élevés et inversement.

Nous avons recalculé les TPP crédibilisés après avoir supprimé un sinistre majeur dont le coût pour la rubrique B119 s'élevait à 213 millions € pour les seuls risques directs en 1992.

Nous observons alors les modifications suivantes : le taux de prime pure de la rubrique passe de 15,9 ‰ à 0,17 ‰ pour cet exercice ; la rubrique B119 se voit attribuer par la méthode un coefficient de crédibilité plutôt réduit de 0,21 qui passe à 0,20 après suppression du sinistre important ; trois autres rubriques voient leur crédibilité se modifier très légèrement et enfin la moyenne du TPP du fascicule diminue de 1,02 ‰ à 0,89 ‰.

Par fascicule, les variations sur les TPP crédibilisés se répartissent comme indiqué ci-dessous :

variation en %	< à -15	-15 à -10	-10 à -5	-5 à -2	-2 à +2	Total
Fascicule B	1	6	7	1	1	16
Autres					130	130
<b>Ensemble</b>	<b>1</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>1</b>	<b>131</b>	<b>146</b>

Nous constatons à la vue de ces résultats que pour la grande majorité des rubriques – 131 sur 146 soit 90% d'entre elles – les variations calculées sur le TPP crédibilisé sont inférieures à 2% en valeur absolue c'est à dire négligeables. De plus, la mutualisation du sinistre catastrophique s'opère en premier lieu et quasi exclusivement au sein du fascicule B.

Pour notre second test, nous avons recalculé les TPP crédibilisés après avoir supprimé un sinistre majeur dont le coût pour la rubrique C84 s'élevait à 198 millions € pour les seuls risques directs en 1996.

Cette modification a pour effet de faire passer le taux de prime pure de la rubrique de 6,05 ‰ à 0,58 ‰ pour cet exercice et le TPP moyen du fascicule C de 0,80 ‰ à 0,76 ‰. La rubrique C84 se voit attribuer par la méthode un coefficient de crédibilité supérieur au cas précédent et relativement élevé puisqu'il s'établit à 0,76 et passe à 0,78 après suppression du sinistre. D'autres rubriques voient leur crédibilité augmenter. Bien que modérée, cette variation est plus marquée que dans le premier scénario puisqu'elle va jusqu'à 0,03 point.

Les variations sur les TPP crédibilisés se répartissent comme indiqué dans le tableau ci-après :

variation en %	< à -10	-10 à -5	-5 à -2	-2 à +2	+2 à +5	Total
A				24	2	26
B			1	13	2	16
<b>C</b>	<b>1</b>	<b>9</b>	<b>14</b>	<b>10</b>		<b>34</b>
D			1	2	1	4
I			1	16	2	19
J			1	6		7
Autres				40		40
<b>Ensemble</b>	<b>1</b>	<b>9</b>	<b>18</b>	<b>111</b>	<b>7</b>	<b>146</b>

Les observations qui en découlent ne sont pas fondamentalement différentes de la première simulation, à ceci près que cette fois-ci quelques rubriques extérieures au fascicule C sont également impactées. Comme les coefficients de crédibilité ont augmenté, ces rubriques enregistrent une hausse de leur TPP crédibilisé lorsque leur TPP observé est supérieur à la moyenne du fascicule et inversement.

Il apparaît donc dans cette deuxième simulation que des rubriques extérieures au fascicule C ont été impactées par l'intermédiaire d'une modification sensible des coefficients de crédibilité. Or, l'impact d'un sinistre important étant sans effet sur les pondérations, il en résulte que seule la modification du rapport  $S^2/\alpha$  nouvellement calculé sur le portefeuille explique ces variations.

### 1.3. Conclusion

Un tarif obtenu par le modèle de crédibilité hiérarchique de JEWELL est robuste par rapport à la survenance d'un sinistre catastrophique dans la mesure où :

- La majorité des rubriques n'enregistre pas de variation significative de leur TPP crédibilisé (à l'exception de la rubrique directement impactée).
- La mutualisation s'opère en premier lieu et bien souvent quasi exclusivement à l'intérieur du seul fascicule concerné.

Les variations de TPP crédibilisés des rubriques du fascicule découlent alors de la forte modification du TPP moyen du fascicule.

- Pour que des conséquences notables sur les TPP crédibilisés d'autres rubriques extérieures au fascicule sinistré s'observent, cela suppose que l'impact du sinistre soit suffisamment important pour modifier sensiblement la variance globale  $S^2$  du portefeuille.

Les variations de TPP crédibilisés sur les rubriques extérieures au fascicule concerné par le sinistre découlent alors de la variation des coefficients de crédibilité.



## 2. Prise en compte de la taille des risques

Comme nous l'avons précédemment exposé, les risques d'entreprises présentent des caractéristiques différentes suivant leur importance, à la fois en terme de sinistralité et de traitement par l'assurance. C'est pourquoi nous proposons dans cette seconde partie de construire un tarif de crédibilité différencié selon la taille des risques.

- Définition a priori des classes de capital :

Ce découpage doit obéir à plusieurs contraintes : d'abord faire clairement la distinction entre « petits risques », « risques moyens » et « grands risques », ensuite contenir dans chacune des classes un nombre suffisant de polices et de sinistres afin d'obtenir un résultat significatif sur le plan statistique et enfin présenter pour chaque classe des caractéristiques de sinistralité et assurancielles suffisamment différenciées.

In fine, le choix des 3 classes retenues s'inspire de celui opéré par les assureurs lors de la constitution du pool GAREAT (Gestion d'Assurance et de Réassurance des Risques Attentats et Actes de Terrorisme).

La répartition obtenue sur les 10 années pour les trois classes retenues est la suivante:

Tranche de capital En €	Répartition des polices En %	Répartition des capitaux En %	Répartition de la variable Racine (années*capitaux)
Moins de 6 millions	75	14	48
6 à 50 millions	22	23	32
Plus de 50 millions	3	63	20
Ensemble	100 (680 000 polices)	100	100

Afin de vérifier que ces classes sont correctement différenciées, nous avons calculé 5 indicateurs de sinistralité et effectué des analyses de variance dont les résultats sont repris dans le tableau ci-après :

Variable	Fisher	Proba > F	Différenciation 2 à 2 des tranches au seuil de 5%		
			Tranche A et B	Tranche A et C	Tranche B et C
Fréquence	144,53	0,0001	Oui	Oui	Oui
Taux dommage	122,68	0,0001	Oui	Oui	Oui
Coût moyen	10,67	0,0003	Non	Oui	Oui
Taux Prime Pure	5,06	0,0128	Non	Non	Oui
Rapport S/P	2,87	0,0725	Oui	Non	Non

L'analyse conclut bien à une différence significative entre les 3 classes sur l'ensemble des critères. La fréquence des sinistres est le caractère le plus discriminant, suivi du taux de dommage puis du coût moyen et du TPP. Ce découpage est donc retenu puisqu'il satisfait aux contraintes préalablement fixées.

### **2.1 1<sup>er</sup> modèle : portefeuille - classe de capital - rubrique.**

Dans un premier temps, le niveau intermédiaire précédemment constitué du fascicule est remplacé par la classe de capital, ce choix présentant l'avantage de conserver l'information disponible sur l'ensemble du portefeuille. Mais la difficulté essentielle pour l'exploitation de ce modèle réside dans la très forte dépendance existant entre la construction des classes de capital et les variables de pondération possibles.

Par ailleurs, la disparition de la notion de fascicule dans le processus de tarification a pour conséquence d'uniformiser les TPP crédibilisés obtenus in fine. Ce modèle conduit donc à une plus grande mutualisation des risques à l'intérieur de chaque classe et ne permet pas une différenciation tarifaire suffisante. C'est pourquoi nous nous proposons d'explorer une autre voie qui consiste à réintégrer la notion de fascicule comme niveau intermédiaire tout en conservant une distinction par classe de capital.

### **2.2. 2<sup>ème</sup> modèle : portefeuille de la classe de capital concernée – fascicule - rubrique.**

Dans ce modèle, la répartition par classe de capital se fait en amont de la tarification. Nous allons donc construire 3 tarifs successifs, un pour chacune des classes de capital.

**2.2.1. Comparaison des résultats avec le 1<sup>er</sup> modèle.**

Dans les 2 cas, TPP observés et coefficients de crédibilités sont identiques. Par contre, les TPP crédibilisés obtenus peuvent être très différents puisque le second modèle effectue une correction en fonction du TPP du fascicule qui est le plus souvent très éloigné de celui obtenu dans la classe de capital.

En voici une illustration avec l'exemple de la rubrique G50 pour la classe de capital inférieur à 6 M€ :

	TPP moyen de la classe intermédiaire	TPP observé	Taux de crédibilité	TPP crédibilisé
1 <sup>er</sup> modèle (capital)	1,06 ‰	0,95 ‰	44%	1,01 ‰
2 <sup>ème</sup> modèle (fascicule)	0,64 ‰	0,95 ‰	44%	0,77 ‰

**2.2.2 Analyse des résultats et comparaison avec le modèle sans différenciation par classe.**

- TPP moyens par fascicule obtenus avec et sans différenciation par tranche.

Fascicule	Toutes tranches	Moins de 6 M€	6 M€ à 50 M€	Plus de 50 M€
<b>Tous fascicules</b>	<b>1,02</b>	<b>1,12</b>	<b>1,27</b>	<b>0,77</b>
A	1,30	1,20	1,85	1,08
B	1,02	1,03	1,52	0,74
C	0,80	0,92	0,77	0,79
D	1,32	0,88	0,93	1,63
E	1,28	1,02	1,83	0,76
F	1,47	1,44	1,98	0,77
G	0,38	0,64	0,99	0,27
<b>H</b>	<b>1,58</b>	<b>2,14</b>	<b>1,36</b>	<b>1,11</b>
I	0,66	0,83	0,85	0,44
J	0,65	0,43	0,74	0,70

D'après les données du tableau ci-dessus, des différences significatives apparaissent sur les TPP moyens lorsque l'on prend en considération la classe de capital à laquelle appartient la police, ces résultats démontrent donc que faire une telle distinction n'est pas inutile.

- Comparaison des résultats au niveau des rubriques :

Les résultats au niveau des rubriques ont été appréciés en calculant pour chacune d'entre elles l'écart absolu (en %) entre le TPP crédibilisé obtenu sans distinction de capital et les 3 TPP crédibilisés calculés par tranche, la moyenne de ces trois écarts ayant été en fine retenue comme indicateur. Les résultats figurent ci-dessous:

Écart moyen en %	< à 10 %	10 % à 20 %	20 % à 30%	30 % à 40 %	> à 40 %	Total
En nombre	13	34	52	31	16	146
Répartition en %	8,9	23,3	35,6	21,2	11,0	100

Il apparaît donc que pour plus des 2/3 des rubriques, faire une distinction par classe de capital donnent des TPP crédibilisés qui varient de plus de 20 % en moyenne. Les écarts sont bien entendu encore plus dispersés si l'on n'effectue pas de moyenne; sur les 438 écarts calculés (3x146 rubriques) près d' ¼ présente une variation supérieure à 40 %.

Les écarts entre TPP crédibilisés seront d'autant plus élevés que les TPP moyens par tranche de capital des fascicules seront éloignés du TPP moyen toutes tranches de capital confondues; ainsi, les différences sont marquées pour le fascicule G alors qu'elles sont beaucoup plus modestes pour le C. De même les résultats sont différents lorsque la répartition de la sinistralité est très inégale suivant les tranches de capitaux et lorsque le coefficient de crédibilité est lui aussi très différent.

Les situations sont bien évidemment fonctions des spécificités de chaque rubrique comme l'illustre le tableau ci-dessous :

Rubrique	Indicateur	Toutes tranches	- de 6 M€	6 à 50 M€	+ de 50 M€
G106	TPP observé	0,27 ‰		1,47 ‰	
	TPP crédibilisé	0,30 ‰		1,19 ‰	
I31	Crédibilité	28 %	0 %	0 %	31 %
	TPP crédibilisé	0,52 ‰			0,36 ‰
	TPP moyen	0,66 ‰			0,44 ‰
F123	Crédibilité		73 %		4 %
I144	TPP crédibilisé	0,54 ‰	0,65 ‰	0,66 ‰	0,42 ‰

L'activité de la rubrique I31 –qui se caractérise par une forte intensité capitalistique- enregistre assez logiquement une crédibilité proche de zéro pour les 2 premières tranches, qui monte à 31% (ce qui est proche de l'ensemble avec 28 %) dans les risques de plus de 50 M€. Mais elle est alors tarifée à 0,36 ‰ car le TPP moyen du fascicule pour ces risques s'établit à 0,44 ‰ ce qui est inférieur au 0,66 ‰ obtenu tous risques confondus.

De même la rubrique F123, où les entreprises sont de petite et moyenne taille, enregistre une crédibilité importante (73 %) pour les risques inférieurs à 6 M€ et quasi nulle (4%) dans la tranche des plus de 50 M€.

A l'opposé, la rubrique I144 se caractérise par un grand nombre de risques de toutes tailles. De ce fait, la distinction par tranche de capital donne des résultats assez proches qu'avec l'ensemble du portefeuille; pour toutes les tranches le TPP observé et la crédibilité restent relativement voisins de l'ensemble et les TPP crédibilisés sont donc moins différenciés.

### ***2.2.3 Stabilité du tarif par classe de capital face à la survenance de sinistres importants.***

Comme précédemment, pour évaluer comment réagissent les taux crédibilisés par rapport à la présence ou l'absence d'un sinistre important, nous avons simulé deux scénarii dans chacune des classes de capital. Puis, nous avons comparé les résultats obtenus avec la situation antérieure en calculant la variation (en %) observée sur les taux crédibilisés de chacune des rubriques.

Pour les deux tarifs dont les classes sont bornées respectivement à 6 M€ et 50 M€, nous avons simulé des sinistres de ces mêmes montants ce qui correspondrait à une destruction complète des biens assurés. Ces cas extrêmes ont été testés dans une rubrique à forte puis à faible crédibilité.

Par exemple, pour tester la stabilité du tarif dont les capitaux assurés sont inférieurs à 6 M€, nous avons recalculé les TPP crédibilisés après avoir simulé un sinistre de 6 M€ dans la rubrique B60 pour les seuls risques directs en 1999. Cette modification a pour effet de faire passer le taux de prime pure de la rubrique de 0,04 ‰ à 42,82 ‰ pour cet exercice. Par ailleurs, la rubrique B60 se voit attribuer par la méthode un coefficient de crédibilité plutôt faible de 0,12 qui demeure constant. Les autres rubriques enregistrent une variation de leur crédibilité nulle ou limitée à 1%. Par contre, la moyenne du TPP du fascicule B est fortement impactée que puisqu'elle augmente de 1,03 ‰ à 1,20 ‰.

Pour l'ensemble des fascicules, les variations sur les TPP crédibilisés se répartissent comme suit :

Variation en %	- 1 à + 1	+ 1 à + 2	+ 2 à + 3	+ 3 à + 10	+ 10 à + 20	> à + 20	Total
Ensemble	130	1	0	4	10	1	146
Dont B	0	1	0	4	10	1	16

En réalité, et pour tous les tests effectués, les résultats obtenus ne nécessitent pas d'être détaillés davantage tant ils appellent peu de commentaires. En effet, dans tous les cas et malgré l'importance des montants de sinistres simulés, l'impact sur les taux crédibilisés est très faible. La mutualisation s'opère essentiellement au sein du fascicule concerné et les effets de « contagion éventuelle » à d'autres fascicules restent modérés et ne s'observent que lorsque la rubrique impactée par le sinistre important présente un faible coefficient de crédibilité. Pour les deux classes de capital bornées respectivement à 6 M€ et 50 M€, la stabilité du tarif apparaît donc comme excellente.

Nous allons par contre nous attarder davantage sur la dernière tranche de capital - supérieur à 50 M€- dans laquelle les résultats sont plus nuancés. Par définition, cette classe de capital ne peut enregistrer de sinistre supérieur au capital maximum garanti dans une police (sur un même site industriel). Par soucis de cohérence avec les exemples choisis lors de la construction du tarif toutes classes de capital confondues, et afin de pouvoir comparer les résultats, nous avons choisi de reproduire les simulations basées sur les deux mêmes sinistres catastrophiques.

Nous détaillerons les résultats concernant la première simulation dans laquelle nous avons recalculé les TPP crédibilisés après avoir supprimé un sinistre très important dont le coût pour la rubrique B119 s'élevait à 213 millions € pour les seuls risques directs en 1992. Cette modification a pour effet de faire passer le taux de prime pure de la rubrique de 16,1‰ à 0,17 ‰ pour cet exercice. La rubrique B119 se voit attribuer par la méthode un coefficient de crédibilité plutôt réduit de 0,21 qui passe à 0,14 après suppression du sinistre important. Toutes les autres rubriques voient également leur taux de crédibilité diminuer. Enfin, la moyenne du TPP du fascicule B est fortement impactée puisqu'elle diminue de 0,74 ‰ à 0,50 ‰.

Pour chacun des fascicules, les variations sur les TPP crédibilisés se répartissent comme indiqué ci-après :

Variation %	< à - 15	- 15 à -10	- 10 à - 5	- 5 à - 2	- 2 à + 2	+ 2 à + 5	> à + 5	Total
A			1	3	15	5	2	26
<b>B</b>	<b>16</b>							<b>16</b>
C			2	3	14	10	5	34
D		1			2		1	4
E		1	1	7	1		1	11
F				1	6			7
G			1		1			2
H		1		1	16	1	1	20
I		1	2	5	8	2	1	19
J				1	5		1	7
<i>Ensemble</i>	<i>16</i>	<i>4</i>	<i>7</i>	<i>21</i>	<i>68</i>	<i>18</i>	<i>12</i>	<i>146</i>

On observe que : pour 68 rubriques les variations calculées sont négligeables, elles restent inférieures à 15% pour 89 % des activités ; la mutualisation du sinistre catastrophique s'opère en priorité et principalement au sein du fascicule B ; des rubriques extérieures au fascicule B ont été impactées par l'intermédiaire de la modification des coefficients de crédibilité, la variation de leur TPP crédibilisé est cependant limitée à 15 %. La stabilité du tarif est donc satisfaisante. Elle apparaît toutefois moins performante que dans la précédente simulation portant sur l'ensemble du portefeuille tous capitaux confondus où, dans le tableau correspondant, seules des rubriques appartenant au fascicule B enregistraient des variations de TPP crédibilisés supérieurs à 2% en valeur absolue. Or dans le cas d'un portefeuille réduit aux risques supérieurs à 50 M€, les variations constatées sont à la fois plus fortes et plus nombreuses et touchent d'autres fascicules que le B.

#### 2.2.4 Conclusion

Les résultats obtenus démontrent clairement la pertinence et l'utilité d'opérer une distinction par classe de capital, distinction qui se justifiait a priori par l'existence de pratiques commerciales et techniques différentes suivant les sociétés d'assurance (choix de n'assurer que de petits risques, présence de coassurance, etc...). L'intérêt d'une différenciation par tranche de capital est d'autant plus fort qu'il permet d'améliorer les propriétés de stabilité du tarif obtenu, surtout pour les deux premières tranches (alors même

que l'on aurait pu craindre le contraire du fait de la diminution du nombre de risques pris en compte). La classification des contrats en amont selon la taille des capitaux garantis se traduit par une homogénéisation des risques qui se retrouve au niveau de la sinistralité de chaque tranche. Seule la tranche de capital « supérieur à 50 M€ », qui concentre les sinistres réellement exceptionnels, et qui par définition est la plus hétérogène dans la mesure où elle n'a pas de borne supérieure, se caractérise par une tarification un peu moins stable par rapport à la survenance d'un gros sinistre que le portefeuille considéré dans sa totalité.

#### **D. TARIFICATION DES PERTES D'EXPLOITATION**

Si, par le passé, les tarifications effectuées avaient du se limiter aux seuls risques directs pour cause d'insuffisance d'observations en pertes d'exploitation, ce n'est plus le cas actuellement puisque le développement de cette assurance durant la dernière décennie nous permet de disposer aujourd'hui d'une base de données riche de près de 3 000 sinistres et 320 000 polices totalisant 2 125 milliards d'euros de capitaux assurés. La tarification de l'assurance des pertes d'exploitation a été réalisée (indépendamment de celle des risques directs) en appliquant le modèle de crédibilité hiérarchique de Jewell pour établir des taux de primes pures crédibilisés par rubriques.

Comme lors de la tarification des risques directs, le modèle a été appliqué sur l'ensemble du portefeuille avec le même découpage en dix fascicules et 146 rubriques, ceci afin d'obtenir des résultats comparables en RD et PE et de pouvoir fusionner les deux tarifications.

##### **1. Etude des résultats PE et comparaison avec ceux obtenus en RD.**

Pour des raisons identiques à celles exposées dans la partie « tarification des risques directs », la variable de pondération retenue est la moyenne géométrique des années risques et des capitaux assurés.

- les TPP observés :

Sur les 146 rubriques, 14 d'entre elles présentent un TPP nul ce qui signifie qu'elles n'ont enregistré aucun sinistre PE sur la décennie ; ce phénomène n'avait pas été observé en RD.

La dispersion des TPP observés est beaucoup plus forte avec la PE qu'elle ne l'est avec les RD comme on peut le constater dans le tableau récapitulatif ci-après.



En 0/00	TPP nul	0<TPP<0,1	TPP>4	Max TPP
RD	0	3	4	4,96
<b>PE</b>	<b>14</b>	<b>13</b>	<b>7</b>	<b>12,3</b>

Les valeurs observées en PE sont beaucoup plus extrêmes. D'autre part, les petites valeurs de TPP sont nombreuses et résultent du relatif faible nombre de sinistres constatés sur la période de 10 ans. En effet, avec 2 723 sinistres et 146 rubriques, chaque rubrique compte en moyenne annuellement moins de 2 sinistres.

- les coefficients de crédibilité :

Les coefficients de crédibilité supérieurs à 50 sont au nombre de 40 pour 146 rubriques, ce qui est un bon résultat proche de celui enregistré avec la tarification RD où 38 coefficients étaient dans ce cas. De même, 10 d'entre eux sont inférieurs à 10, contre une douzaine en RD.

Plus généralement, il est remarquable de constater la proximité des coefficients de crédibilité obtenus en tarifant les risques directs d'une part et les pertes d'exploitation d'autre part. Une illustration en est donnée dans le tableau ci-après qui récapitule les valeurs calculées pour les 6 rubriques du fascicule F.

Coefficient de crédibilité en %	Risques directs	Pertes d'exploitation	Différence (en points)
<b>F69</b>	24	31	7
<b>F96</b>	7	10	3
<b>F123</b>	61	64	3
<b>F139</b>	29	41	12
<b>F143</b>	20	25	5
<b>F145</b>	86	89	3
<b>F146</b>	13	21	8

Cette observation nous conforte dans le choix qui fut le nôtre de conserver même découpage et même variable de pondération pour construire les deux tarifs. Ces résultats de cohérence et de proximité sont également très importants puisqu'ils nous permettront de rapprocher les deux taux obtenus séparément pour, in fine, élaborer un tarif global RD+PE.

- les TPP crédibilisés :

Les TPP crédibilisés RD et PE n'ont aucune raison d'être proches, même s'ils ont des taux de crédibilité comparables, car les TPP observés peuvent être très différents.

La méthode de la crédibilité hiérarchique de Jewell a pour effet de resserrer les taux. Cet effet est particulièrement sensible pour la tarification des pertes d'exploitation pour lesquelles la valeur des taux est très étendue. Citons par exemple la rubrique B119, qui présentait un TPP maximum de 12,13 %, et qui se voit fort heureusement tarifée in fine à « seulement » 2,51 %.

## 2. Propriétés du tarif obtenu

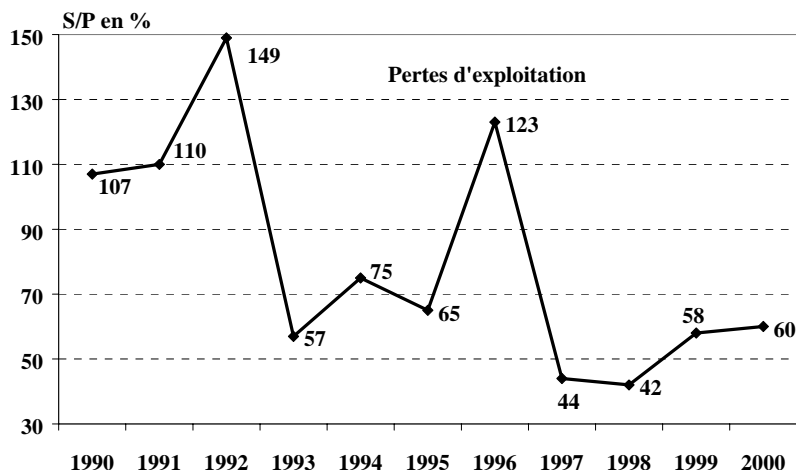
Le processus de test est identique à celui appliqué sur le tarif des risques directs.

### a. Stabilité dans le temps.

Comme pour la tarification des RD, le modèle a été appliqué sur 4 périodes de 8 années entre les exercices 1990 à 2000. Le coefficient de Pearson calculé sur les 4 valeurs de TPP est repris ci-dessous.

CV en %	0 à 5	5 à 10	10 à 15	15 à 20	20 à 30	>= à 30	Total
TPP observé	6,2 %	13,7 %	18,5 %	12,3 %	15,1 %	34,2 %	100 %
TPP crédibilisé	1,4 %	8,9 %	21,9 %	32,9 %	26,7 %	8,2 %	100 %

La méthode de tarification par la théorie de crédibilité hiérarchique de Jewell permet de lisser les fluctuations de sinistralité : ainsi 34,2 % des TPP observés enregistrent un coefficient de variation de plus de 0,30 contre seulement 8,2 % pour les taux crédibilisés. 50,7 % des rubriques voient leur TPP observé varier de moins de 20 %, cette proportion atteint 65,1 % pour les TPP crédibilisés. Ces résultats apparaissent d'autant plus satisfaisants que la sinistralité en pertes d'exploitation a été encore plus volatile que pour les RD sur la période comme en témoigne le graphique ci-après.



Toutefois, ces données confirment la plus grande variabilité des résultats obtenus avec les PE. En effet, 12 rubriques enregistrent une variation du TPP crédibilisé supérieure ou égale à 30 % contre 3 fois moins pour les RD. De même, seules 15 activités présentent une variation du TPP inférieure à 10 % en PE contre 50 lors des tests effectués sur les RD. Il n'en reste pas moins que la variabilité constatée sur les taux crédibilisés est très inférieure à celle des taux observés.

**b. Stabilité du tarif face à la survenance de sinistres importants.**

Comme pour les RD, nous avons recalculé les TPP crédibilisés après avoir supprimé le sinistre catastrophique dont le coût pour la rubrique B119 s'élevait à 152,4 millions d'€ pour les seules pertes d'exploitation en 1992. On constate alors les modifications suivantes : le taux de prime pure de la rubrique passe de 38,2 ‰ à 0,56 ‰ pour cet exercice ; le coefficient de crédibilité de la rubrique B119 passe de 0,13 à 0,07 ; et les coefficients de crédibilité de toutes les rubriques diminuent sensiblement. Ce phénomène n'avait pas été observé lors de la simulation correspondante en RD où les coefficients étaient restés quasi identiques. Cette différence résulte de la variation du rapport  $S^2/\alpha$  : puisque cette même valeur fait plus que doubler pour passer de 3 665 à 7 731 (car si la variance totale  $S^2$  du portefeuille diminue de 1692 à 1584, dans le même temps la valeur de  $\alpha$  : passe de 0,462 à 0,205), ce qui provoque la baisse des coefficients de crédibilité des rubriques. Enfin, le TPP du fascicule 3 diminue de 1,03 ‰ à 0,76 ‰.

Pour chacun des fascicules, les variations sur les TPP crédibilisés se répartissent comme indiqué dans le tableau qui suit :

Variation en %	< à - 15	- 15 à -10	-10 à -5	-5 à +5	+5 à +10	10 à 15	> à 15	Total
A	1	2	4	1	6	<u>6</u>	<u>6</u>	26
B	<u>11</u>	1	1	2	1			16
C	<u>1</u>	<u>3</u>	1	9	7	<u>8</u>	<u>5</u>	34
D		1	1	1		1		4
E		1	2	4	2		2	11
F	1		1	3	2			7
G				2				2
H		2	1	9	4	4		20
I	<u>2</u>	<u>2</u>	2	7	4	<u>1</u>	<u>1</u>	19
J			2	1		2	2	7
Ensemble	16	12	15	39	26	22	16	146

On y observe que les variations constatées sur les TPP sont contenues et que le fascicule B est sollicité en priorité pour s'ajuster aux fluctuations de sinistralité. Mais d'autres fascicules, et plus particulièrement les A-C et I, sont également impactés au travers des coefficients de crédibilité. Ce phénomène ne s'observait pas lors de la simulation correspondante sur le tarif RD où les variations sensibles de TPP étaient circonscrites au fascicule B. En PE, c'est l'ensemble du portefeuille qui est mis à contribution pour absorber le choc représenté par la survenue du sinistre.

#### c. Conclusion

Ces simulations nous permettent de conclure qu'une tarification des pertes d'exploitation obtenue par le modèle de crédibilité hiérarchique de Jewell est relativement satisfaisante dans la mesure où elle permet de lisser les fluctuations de sinistralité observées. En effet, un nombre conséquent de rubriques n'enregistre qu'une faible variabilité de leur TPP crédibilisé et, à de très rares exceptions près, les variations considérées comme les plus fortes restent relativement modérées. Enfin, la mutualisation s'opère essentiellement et en premier lieu à l'intérieur du fascicule impacté.

Toutefois, la sinistralité pertes d'exploitation étant à la fois beaucoup plus rare, beaucoup plus volatile et revêtant plus souvent un caractère exceptionnel, il en résulte que les résultats obtenus avec les risques PE sont moins stables qu'avec les risques directs.

Ainsi la forte variabilité de la sinistralité PE et son extrême dépendance à la présence de sinistres importants ne permettent pas d'obtenir un tarif aussi robuste qu'avec les risques directs. Le tarif PE ne peut s'affranchir totalement de la volatilité du risque et nécessitera donc d'être ajusté plus souvent qu'avec les risques directs.

## ANNEXE

*Avertissement : les résultats repris dans ces annexes ont été rendus anonymes afin de préserver leur caractère confidentiel.*

### Résultats détaillés pour le fascicule B.

#### 1. Tarification des Risques Directs

##### Toutes classes de capital confondues

Code rubrique	TPP observé	Coefficient de crédibilité	TPP fascicule	TPP crédibilisé rubrique
B 48	0.40	0.18	1.02	0.91
B 51	0.88	0.41	1.02	0.96
B 60	0.58	0.13	1.02	0.96
B 61	1.09	0.16	1.02	1.03
B 62	1.83	0.24	1.02	1.22
B 71	1.18	0.30	1.02	1.07
B 72	0.20	0.07	1.02	0.96
B 73	0.93	0.10	1.02	1.01
B 78	1.61	0.45	1.02	1.28
B 79	0.59	0.70	1.02	0.72
B 91	0.37	0.47	1.02	0.71
B 93	0.18	0.02	1.02	1.00
B 98	0.31	0.60	1.02	0.59
B116	4.73	0.08	1.02	1.33
B119	3.44	0.21	1.02	1.52
B140	1.01	0.86	1.02	1.02

**Classe de capitaux assurés < à 6 M€**

<b>Code rubrique</b>	<b>TPP observé</b>	<b>Coefficient de crédibilité</b>	<b>TPP fascicule</b>	<b>TPP crédibilisé rubrique</b>
B 48	0.05	0.03	1.03	1.00
B 51	1.94	0.43	1.03	1.42
B 60	0.51	0.12	1.03	0.97
B 61	0.08	0.05	1.03	0.98
B 62	0.11	0.21	1.03	0.84
B 71	0.37	0.30	1.03	0.83
B 72	0.04	0.09	1.03	0.95
B 73	0.23	0.11	1.03	0.94
B 78	0.95	0.48	1.03	0.99
B 79	1.57	0.41	1.03	1.26
B 91	1.42	0.38	1.03	1.18
B 93	0.00	0.01	1.03	1.03
B 98	0.21	0.40	1.03	0.71
B116	2.42	0.08	1.03	1.15
B119	0.01	0.02	1.03	1.01
B140	1.32	0.86	1.03	1.28

**Classe de capitaux assurés compris entre 6 M€ et 50 M€**

<b>Code rubrique</b>	<b>TPP observé</b>	<b>Coefficient de crédibilité</b>	<b>TPP fascicule</b>	<b>TPP crédibilisé rubrique</b>
B 48	1.31	0.04	1.52	1.51
B 51	1.00	0.29	1.52	1.36
B 60	0.65	0.09	1.52	1.44
B 61	2.90	0.07	1.52	1.61
B 62	3.83	0.17	1.52	1.90
B 71	2.38	0.16	1.52	1.66
B 72	0.31	0.05	1.52	1.45
B 73	2.16	0.06	1.52	1.55
B 78	1.85	0.36	1.52	1.64
B 79	1.06	0.40	1.52	1.34
B 91	0.33	0.27	1.52	1.19
B 93	0.00	0.00	1.52	1.52
B 98	0.56	0.41	1.52	1.13
B116	13.79	0.04	1.52	2.06
B119	0.00	0.04	1.52	1.46
B140	1.43	0.79	1.52	1.45

**Classe de capitaux assurés supérieurs à 50 M€**

<b>Code rubrique</b>	<b>TPP observé</b>	<b>Coefficient de crédibilité</b>	<b>TPP fascicule</b>	<b>TPP crédibilisé rubrique</b>
B 48	0.39	0.18	0.74	0.68
B 51	0.19	0.13	0.74	0.67
B 60	0.39	0.03	0.74	0.73
B 61	0.88	0.10	0.74	0.75
B 62	0.61	0.08	0.74	0.73
B 71	1.01	0.12	0.74	0.77
B 72	0.10	0.00	0.74	0.74
B 73	0.15	0.02	0.74	0.72
B 78	2.56	0.09	0.74	0.90
B 79	0.56	0.58	0.74	0.63
B 91	0.26	0.24	0.74	0.62
B 93	0.17	0.02	0.74	0.73
B 98	0.27	0.47	0.74	0.52
B116	0.05	0.03	0.74	0.72
B119	3.70	0.21	0.74	1.36
B140	0.39	0.56	0.74	0.54



**2. Tarification des Pertes d'Exploitation toutes classes de capital confondues**

<b>Code rubrique</b>	<b>TPP observé</b>	<b>Coefficient de crédibilité</b>	<b>TPP fascicule</b>	<b>TPP crédibilisé rubrique</b>
B 48	0.17	0.17	1.03	0.89
B 51	0.49	0.52	1.03	0.75
B 60	0.11	0.20	1.03	0.85
B 61	1.52	0.17	1.03	1.12
B 62	0.63	0.33	1.03	0.90
B 71	1.59	0.27	1.03	1.18
B 72	0.19	0.13	1.03	0.93
B 73	0.91	0.15	1.03	1.01
B 78	1.94	0.58	1.03	1.56
B 79	0.66	0.79	1.03	0.74
B 91	0.27	0.76	1.03	0.46
B 93	0.00	0.02	1.03	1.01
B 98	0.15	0.79	1.03	0.34
B116	4.52	0.13	1.03	1.49
B119	12.13	0.13	1.03	2.51
B140	0.76	0.91	1.03	0.79

**E. BIBLIOGRAPHIE**

- BENKTENDER – 1972** – « La fréquence des sinistres et le taux de prime pure en tant que fonction de la taille des risques » - 19<sup>ème</sup> congrès international des actuaires – Oslo
- BESSON – 12/1999** – «Eléments de théorie de la crédibilité » - Cours ISUP
- BESSON - 11/1997** – « Tarification des grands risques » - Séminaire AXA
- BOUROCHE, SAPORTA – 1983** – « L’analyse des données » - Que sais-je ? – PUF
- COHEN, DUPIN, LEVI - 1985** - « Application de la théorie de la crédibilité à la tarification des risques industriels » - Mémoire IAF
- ELLOUK – 1991** – « Application de la crédibilité hiérarchique à la surveillance des risques en assurance incendie des risques industriels » - Mémoire ISUP
- GENEST – 11/1999** – « L’assurance des risques industriels en France » - Conférence ISFA de Lyon
- JEWELL – 1975** – « The use of collateral data in Credibility Theory: a hierarchical model »
- LABONDE – 1993** – « Application de méthodes statistiques pour l’élaboration de courbes d’exposition employées pour la tarification de traités en réassurance non proportionnelle dans la branche Incendie Risques Industriels » - Mémoire ISUP
- MECHLER, PASQUIERS, STOULS – 1992** – « Etude de la distribution des sinistres risques industriels »
- MERCIER – 1999** – « Estimation du prix en assurance grêle sur cultures : mise en place d’une tarification par la théorie de la crédibilité » - Rapport de stage FFSA - Juillet 1999
- PETAUTON – 2000** – « Théorie de l’assurance dommages » - Dunod
- SAPORTA – 1982** – « Théories et méthodes de la statistique » - Technip
- TETIALI – 1992** – « Application de la crédibilité hiérarchique dans le calcul des primes de réassurance en excédent de sinistre par risque dans la branche incendie » - Mémoire ISUP
- ZAJDENWEBER – 1995** - « Business interruption insurance, a risky business. A study on some paretian risk phenomena » - World Scientific Publishing Company
- 1996** – « Traité d’assurance incendie des Risques d’Entreprises » - FFSA  
 Tome I - « Risques Directs : Dispositions générales et clauses »  
 Tome II - « Pertes d’exploitation »  
 Tome III - « Tarification analytique »
- Janvier 2002** – « Assurance incendie des grands risques d’entreprises : résultats 2000 »  
 FFSA/DESSI

# APPROCHE SEMI-PARAMETRIQUE DU CALCUL DES PROVISIONS TECHNIQUES : AJUSTEMENT DE SURFACES

Ismaïl HADJI

*Actuaire I.A à Monceau Assurances*

Alain MONFORT

*Professeur au Conservatoire National des Arts et Métiers*

## RESUME

Dans cet article on propose des méthodes de calcul des provisions techniques reposant sur des outils statistiques semi-paramétriques comme ceux fondés sur la notion de pseudo-vraisemblance. Ces méthodes permettent l'utilisation de procédures de tests et de choix de modèles à la fois rigoureuses et robustes aux erreurs de spécification sur la forme des lois de probabilités. Un exemple numérique montre la faisabilité et les potentialités de ces méthodes.

## ABSTRACT

In this paper we propose methods of reserve prediction, based on semi-parametric statistical tools like those derived from the notion of pseudo-likelihood. These methods provide tests and selection criteria which are, at the same time, rigorous and robust to specification errors in the probability distributions. An example shows the faisability and the potentialities of the proposed methods.

## MOTS-CLÉS

Provisions techniques, Semi-paramétrique, Pseudo-Maximum de Vraisemblance, Tests, Choix de Modèles, Ajustement de Surfaces.

## I. INTRODUCTION

En matière d'assurance Responsabilité Civile, les prestations à payer par une compagnie d'assurance pour un sinistre donné peuvent s'étaler sur plusieurs années après la date de survenance du sinistre. L'évaluation des provisions permettant de couvrir ces paiements futurs est un problème important qui a fait l'objet de nombreuses études. Une première catégorie d'études proposent des méthodes descriptives ne reposant pas sur un modèle probabiliste : méthodes Chain Ladder, London Chain (Benjamin et Eagles 1986), Bornhuetter-Ferguson (Bornhuetter et Ferguson 1972), méthodes d'ajustement de courbes

BULLETIN FRANÇAIS D'ACTUARIAT, Vol. 6, N° 12, 2004, pp. 137-151

de Craighead (Craighead 1986) ou de Hoerl (Kahane 1989). Ces méthodes ont l'avantage d'être simples d'utilisation mais présentent le gros inconvénient de ne pas pouvoir être soumises à des tests statistiques de significativité de paramètres ou de spécification du modèle. Une deuxième catégorie d'études proposent des modèles statistiques paramétriques c'est-à-dire des modèles dans lesquels la variable d'intérêt, souvent le règlement cumulé ou la charge de sinistres pour une année de survenance et une année de développement, est une variable aléatoire dont la loi est complètement spécifiée à un vecteur de paramètres inconnus près. On trouve ainsi des modèles de type gaussien (de Vylder 1978), exponentiel (Mack 1991), lognormal (Kremer 1982, Zehnirith 1989 et 1991, Renshaw 1989, Christofides 1990, Verrall 1990 et 1991) ou gamma (Mack 1994). Ces modèles permettent d'effectuer des tests statistiques mais ils présentent deux types d'inconvénients. D'abord la classe de probabilités à l'intérieur de laquelle les modèles sont estimés et testés n'est pas elle-même testée, ce qui peut entraîner des problèmes graves de non convergence vers la vraie loi si celle-ci n'appartient pas à la classe choisie a priori, et de non validité des procédures de test. Ensuite dans les études citées le nombre de paramètres est fonction croissante du nombre d'observations et on sait que ce problème de paramètres incidents rend invalide les théories statistiques paramétriques comme celle du maximum de vraisemblance. On peut enfin citer une troisième classe d'études qui ont pour but de proposer un modèle statistique dans lequel la méthode classique Chain Ladder a certaines propriétés d'optimalité (Mack 1993, Schmidt and Schnaus 1996). Ces études ont un intérêt théorique mais le problème fondamental du choix du modèle et donc de la méthode n'est pas abordé.

Dans cet article on propose une méthode semi-paramétrique qui présente l'avantage de fournir des tests de significativité des paramètres et des procédures de choix de modèles sans avoir à faire des hypothèses (difficilement testables) sur la forme des lois de probabilités des variables d'intérêt. Les hypothèses porteront uniquement sur l'espérance conditionnelle (et éventuellement la variance conditionnelle) de ces variables et les méthodes utilisées seront celles du Pseudo-Maximum de Vraisemblance (PMV) (Gourieroux, Monfort et Trognon 1984 et Gourieroux, Monfort 1989). Ces méthodes permettent en particulier de tester les hypothèses faites sur les moments conditionnels et de les estimer, sans faire d'hypothèse sur les lois et sans être confronté au problème des paramètres incidents. Notons que Doray (1997) a proposé un modèle linéaire semi-paramétrique pour le logarithme de la variable d'intérêt, mais une telle approche pose des problèmes pour la prévision de la variable elle-même.

Dans le deuxième paragraphe nous présentons ces méthodes du PMV et les ajustements de surfaces auxquels elles sont appliquées. Le troisième paragraphe est consacré, d'une part, à la validation de ces modèles semi-paramétriques à l'aide des tests d'adéquation, de test de spécification et de critères de choix de modèle et, d'autre part, à la construction de méthodes de comparaison avec des méthodes descriptives comme la méthode Chain Ladder. Le quatrième paragraphe présente une application numérique et le cinquième paragraphe propose une conclusion.

## II. L'APPROCHE SEMI-PARAMETRIQUE

### II.1. Notations

On notera :

$i$  : l'indice associé à l'année de survenance du sinistre ( $i = 1, \dots, n+1$ ) ;

$j$  : l'indice associé à l'année de développement ( $j = 0, \dots, n$ ) ;

$c_{ij}$  : le montant des règlements effectués l'année  $i+j$ , au titre des sinistres survenus en  $i$  ;

$C_{ij}$  : le montant des règlements cumulés entre l'année  $i$  et l'année  $i+j$  au titre des sinistres survenus en  $i$  ;

$R_{ij}$  : le montant des réserves estimées de l'année  $i+j$ , pour les sinistres survenus l'année  $i$  ;

$S_{ij}$  : le montant de la charge des sinistres estimée de l'année  $i+j$  pour les sinistres survenus l'année  $i$ .

On a donc :

$$C_{ij} = \sum_{k=0}^j c_{ik} \quad \text{et} \quad S_{ij} = C_{ij} + R_{ij}.$$

On suppose qu'on dispose des informations  $c_{ij}$ ,  $C_{ij}$ ,  $R_{ij}$ ,  $S_{ij}$  pour le triangle d'indices  $(i, j)$  pour  $i = 1, \dots, n+1, j = 0, \dots, n$  et  $i+j \leq n+1$ .

Dans la suite on s'intéressera aux taux d'accroissement des variables  $C_{ij}$  ou  $S_{ij}$ .

Donc  $Y_{ij}$  désignera

soit 
$$\frac{C_{ij} - C_{i,j-1}}{C_{i,j-1}} = \frac{C_{ij}}{C_{i,j-1}} - 1 \quad (\text{taux d'accroissement des règlements cumulés})$$

soit 
$$\frac{S_{ij} - S_{i,j-1}}{S_{i,j-1}} \quad (\text{taux d'accroissement de la charge de sinistres})$$

et on aura donc des observations des  $Y_{ij}$  pour  $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$  et  $i+j \leq n+1$ . Le nombre de  $Y_{ij}$  observés est  $N = n(n+1)/2$ .

## II.2. Les trois types de modélisation

On s'intéresse au comportement conditionnel des  $Y_{ij}$  sachant des variables exogènes  $X_{ij}$ . Dans la suite de l'étude  $X_{ij}$  sera le vecteur  $(i, j)$  mais les méthodes proposées pourraient être appliquées à d'autres types de variables exogènes. On peut donc imaginer trois types d'approches. Une approche paramétrique dans laquelle on spécifierait, à un vecteur de paramètres près, la loi conditionnelle de  $Y_{ij}$  sachant  $X_{ij}$ , mais on a dans l'introduction les inconvénients d'une telle approche. On pourrait, au contraire, imaginer une approche non paramétrique dans laquelle on ne ferait aucune hypothèse sur les lois et on chercherait à estimer la quantité d'intérêt, c'est-à-dire l'espérance conditionnelle  $E(Y_{ij} / X_{ij})$ , par une méthode de type noyau. Malheureusement, cette méthode se heurterait au problème classique du « curse of dimensionality », c'est-à-dire de la faiblesse du nombre d'observations relativement à la dimension de  $X_{ij}$ . Il faut donc imaginer une voie intermédiaire de type semi-paramétrique, dans laquelle on spécifie uniquement que la vraie espérance conditionnelle  $E(Y_{ij} / X_{ij})$  appartient à une famille  $\{m(X_{ij}, \theta), \theta \in \Theta\}$  où  $\theta$  est un paramètre inconnu de taille fixe (indépendante de  $N$ ).

## II.3. Les méthodes du Pseudo-Maximum de Vraisemblance (PMV)

Si la seule hypothèse faite est que  $E(Y_{ij}/X_{ij})$  appartient à  $\{m(X_{ij}, \theta), \theta \in \Theta\}$  la vraisemblance n'existe pas et on ne peut donc pas utiliser la méthode du maximum de vraisemblance. On peut cependant chercher une famille de densités  $f(y, m)$  de moyenne  $m \in M$ , telle que la maximisation en  $\theta$  de la pseudo-logvraisemblance :

$$\sum_{i,j} \log f[y_{ij}, m(x_{ij}, \theta)]$$

fournisse un estimateur convergent et asymptotiquement normal du paramètre  $\theta$ . On sait (voir Gourieroux, Monfort et Trognon 1984) que les familles possédant ces propriétés sont du type exponentiel linéaire, c'est-à-dire telles que

$$f(y, m) = \exp[A(m) + B(y) + C(m)y].$$

Diverses familles sont de ce type. Ainsi la famille gamma définie par :

$$f(y, m) = \frac{1}{\Gamma(a)} \exp\left(-\frac{ya}{m}\right) y^{a-1} \left(\frac{a}{m}\right)^a$$

où  $a$  est un réel positif fixé et  $m \in \mathbb{R}^+$ , est bien de ce type puisque :

$$f(y, m) = \exp\left[-\log \Gamma(a) + a \log\left(\frac{a}{m}\right) + (a-1) \log y - \frac{ay}{m}\right].$$

La maximisation de la pseudo-logvraisemblance se ramène à la minimisation de :

$$\sum_{i,j} \left\{ \log [m(x_{ij}, \theta)] + \frac{y_{ij}}{m(x_{ij}, \theta)} \right\}.$$

De même la famille gaussienne définie par :

$$f(y, m) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} (y-m)^2 \right]$$

où  $\sigma^2$  est un réel positif fixé, est aussi de ce type puisque :

$$f(y, m) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \log (2\pi\sigma^2) - \frac{m^2}{2\sigma^2} - \frac{y^2}{2\sigma^2} + \frac{my}{\sigma^2} \right].$$

La maximisation de la pseudo-logvraisemblance se ramène à la minimisation de :

$$\sum_{i,j} [y_{ij} - m(x_{ij}, \theta)]^2.$$

C'est la méthode des moindres carrés ordinaires.

Si on est prêt à faire également l'hypothèse que la variance conditionnelle  $V[Y_{ij}|X_{ij}]$  appartient à une famille donnée  $\{\sigma^2(x_{ij}, \varphi), \varphi \in \Phi\}$ , on peut améliorer l'estimation grâce à la méthode du PMV généralisé. Dans le cas gamma, cette méthode conduit à minimiser en  $\theta$  :

$$\sum_{i,j} \frac{m^2(x_{ij}, \hat{\theta})}{\sigma^2(x_{ij}, \hat{\varphi})} \left[ \log [m(x_{ij}, \theta)] + \frac{y_{ij}}{m(x_{ij}, \theta)} \right]$$

où  $\hat{\theta}$  et  $\hat{\varphi}$  sont des estimateurs convergents respectivement de  $\theta$  et  $\varphi$  obtenus, par exemple, pour  $\hat{\theta}$ , en utilisant la méthode du PMV simple et, pour  $\hat{\varphi}$ , minimisant en  $\varphi$  :

$$\sum_{i,j} \left\{ [y_{ij} - m(x_{ij}, \hat{\theta})]^2 - \sigma^2(x_{ij}, \varphi) \right\}^2.$$

On voit, en particulier, que cette méthode plus efficace se réduit à la méthode gamma simple si on suppose que la variance conditionnelle est proportionnelle au carré de la moyenne conditionnelle, ce qui est le cas dans le modèle à erreur multiplicative :

$$Y_{ij} = m(x_{ij}, \theta) \varepsilon_{ij} \quad \text{où } \varepsilon_{ij} \text{ sont de moyenne 1 et de variance } \sigma^2 \text{ fixe.}$$

Dans le cas normal la méthode du PMV généralisé conduit à la minimisation en  $\theta$  de :

$$\sum_{i,j} \frac{[y_{ij} - m(x_{ij}, \theta)]^2}{\sigma^2(x_{ij}, \hat{\varphi})}$$

où  $\hat{\varphi}$  est un estimateur convergent de  $\varphi$ , obtenu, par exemple, de la même façon que ci-dessus. Cette méthode se réduit à la méthode des moindres carrés non linéaires si on suppose que la variance conditionnelle est fixée, ce qui est le cas dans le modèle à erreur additive :

$$Y_{ij} = m(x_{ij}, \theta) + \varepsilon_{ij} \text{ où les } \varepsilon_{ij} \text{ sont centrés et de variance fixe } \sigma^2.$$

#### II.4. Quelques exemples de familles de surface

Comme on l'a déjà indiqué on se restreindra dans cet article aux fonctions  $m(x_{ij}, \theta)$  du type  $m(i, j, \theta)$ , cependant la méthode pourrait être étendue au cas où on considère d'autres variables explicatives comme par exemple les variables  $y_{i,j-1}, y_{i-1,j}$  et  $y_{i-1,j-1}$  : on aboutirait alors à un modèle de type champ markovien analogue à ceux utilisés en traitement d'images.

Pour un  $\theta$  donné la fonction  $m(i, j, \theta)$  définit donc une surface qui sera ajustée par une méthode de PMV sur les  $y_{ij}$  dont les indices  $(i, j)$  appartiennent au triangle  $i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, n ; i + j \leq n + 1$  ; et qui pourra être prolongée à tous les autres couples  $(i, j)$ , y compris éventuellement pour  $i > n$  ou  $j > n$ , et permettra donc un calcul des provisions.

Parmi les familles de surface possibles on peut en choisir trois qui présentent des formes variées tout en ayant un nombre de paramètres (composantes de  $\theta$ ) raisonnable.

La première famille généralise les courbes de Hoerl du type  $aj^b \exp(-\gamma j)$  à des surfaces du type :

$$(a_i + b_j + c_j^2)^d \exp(-e_j)$$

où les  $a_i, b_i, c_i, d, e$  sont spécifiés par exemple de façon exponentielle (pour respecter la positivité), on obtient alors la famille :

$$m(i, j, \theta) = [\exp(\theta_1 + \theta_2 i) + \exp(\theta_3 + \theta_4 i) j + \exp(\theta_5 + \theta_6 i) j^2]^{\exp(\theta_7)} \exp[-\exp(\theta_8) j]$$

On voit en particulier que  $m(i, j, \theta)$  tend vers 0 lorsque  $j$  tend vers  $+\infty$  ce qui est nécessaire dans la modélisation de taux d'accroissement.

La deuxième famille généralise les courbes de Weibull du type  $\exp[-(j/\alpha)^b]$  à des surfaces du type :

$$m(i, j, \theta) = [\theta_1 + \theta_2 i + (\theta_3 + \theta_4 i)^{\exp(\theta_5 + \theta_6 i)}]$$

On voit aussi que si  $\theta_3 + \theta_4 i < 0$ ,  $m(i, j, \theta)$  tend vers 0 lorsque  $j$  tend vers  $+\infty$ .



Dans les deux modèles précédents les  $m(i, j, \theta)$  sont positifs, ce qui est naturel lorsqu'on modélise un taux d'accroissement de règlements cumulés. En revanche lorsqu'on modélise un taux d'accroissement de charges de sinistre, il faut laisser la possibilité de valeurs négatives et une famille de surfaces naturelle est la famille « polynomiale exponentielle » définie par :

$$m(i, j, \theta) = [\theta_1 + \theta_2 i + \theta_3 i^2 + \theta_4 j + \theta_5 j^2 + \theta_6 ij] \exp(\theta_7 + \theta_8 j)$$

Si  $\theta_8$  est négatif  $m(i, j, \theta)$  tend vers 0 lorsque  $j$  tend vers  $+\infty$ .

### III. VALIDATION DES MODELES SEMI-PARAMETRIQUES

Un modèle statistique ne peut jamais être complètement validé mais on peut lui faire passer divers tests qui lui donnent une certaine force. On présente ici des tests de significativité de type Student et Wald ainsi que des tests de spécification non emboîtés et des procédures de choix de modèles. Comme le contexte est semi-paramétrique tous les tests fondés sur la vraisemblance ne sont pas disponibles. Cependant, tous les tests paramétriques classiques sont transposables au cas semi-paramétrique et, en particulier, au contexte de la pseudo-vraisemblance (voir Gillet - Serra 2003). Enfin on présente des méthodes de comparaison avec des méthodes descriptives de type Chain Ladder.

#### III.1 Tests de type Student et Wald

Dans les modèles présentés ci-dessus il est souvent important de pouvoir tester si une composante  $\theta_k$  de  $\theta$  donnée est différente de 0. La statistique de Student permettant d'effectuer ce test est définie de la façon suivante :

$$t_k = \frac{\hat{\theta}_k}{\sqrt{\hat{V}(\hat{\theta}_k)}}$$

où  $\hat{\theta}_k$  est un estimateur du PMV de  $\theta_k$  et  $\hat{V}(\hat{\theta}_k)$  est le terme  $(k,k)$  de la matrice

$\hat{V} = \hat{J}^{-1} \hat{I} \hat{J}^{-1}$  avec :

$$\hat{J} = - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \log f [y_{ij}, m(x_{ij}, \hat{\theta})]}{\partial \theta \partial \theta'}$$

$$\hat{I} = \sum_{i,j} \frac{\partial \log f [y_{ij}, m(x_{ij}, \hat{\theta})]}{\partial \theta} \frac{\partial \log f [y_{ij}, m(x_{ij}, \hat{\theta})]}{\partial \theta'}$$

On refuse l'hypothèse nulle  $\theta_k = 0$  au niveau asymptotique  $\alpha$  si  $|t_k|$  est supérieur à  $u_{1-\alpha/2}$ , quantile d'ordre  $1-\alpha/2$  de la loi  $N(0, 1)$  ; ainsi pour  $\alpha=5\%$  on a  $u_{97,5\%} \approx 2$ .

On peut aussi tester toute restriction sur  $\theta$  du type  $g(\theta)=0$ , où  $g$  est une fonction différentiable à valeurs dans  $IR^p$ . Le test est fondé sur la statistique de type Wald :

$$\xi = g'(\hat{\theta}) \left[ \frac{\partial g(\hat{\theta})}{\partial \theta'} \hat{V} \frac{\partial g'(\hat{\theta})}{\partial \theta} \right]^{-1} g(\hat{\theta})$$

On refuse l'hypothèse nulle  $g(\theta)=0$  au niveau asymptotique  $\alpha$  si  $\xi$  est supérieure à  $\chi^2_{1-\alpha}(p)$ , quantile d'ordre  $1-\alpha$  de la loi  $\chi^2$  à  $p$  degrés de libertés.

### III.2 Tests non emboîtés et critères de choix de modèles

Si on veut choisir entre deux spécifications :

$$M_1 \quad Y_{ij} = m_1(i, j, \theta) + \varepsilon_{ij} \quad \text{où } E(\varepsilon_{ij})=0 \text{ et } V(\varepsilon_{ij})= \sigma^2.$$

$$M_2 \quad Y_{ij} = m_2(i, j, \psi) + \eta_{ij} \quad \text{où } E(\eta_{ij})=0 \text{ et } V(\eta_{ij})= s^2.$$

On peut utiliser un test de type Davidson-McKinnon qui consiste à calculer la statistique  $t$  de type Student relative à  $\lambda$  dans le pseudo-modèle :

$$Y_{ij} = (1-\lambda)m_1(i, j, \theta) + \lambda m_2(i, j, \hat{\psi}) + \omega_{ij}$$

où  $\hat{\psi}$  est l'estimateur des moindres carrés non linéaires de  $\psi$  dans le deuxième modèle  $M_2$ .

Dans le test au niveau asymptotique  $\alpha$  de  $M_1$  contre  $M_2$  on refuse  $M_1$  si  $|t|$  est supérieur à  $t_{1-\alpha/2}$ .

En ce qui concerne les critères de choix de modèles on ne peut pas utiliser des critères fondés sur la logvraisemblance de type Akaike, mais on peut utiliser le critère de Takeuchi, fondé sur la pseudo-logvraisemblance et défini par :

$$\text{TIC} = \sum_{i,j} \log f \left[ y_{ij}, m(x_{ij}, \hat{\theta}) \right] - \text{Trace } \hat{I} \hat{J}^{-1}$$

On choisit alors le modèle ayant le critère TIC le plus élevé. Le critère TIC est la différence entre la pseudo-logvraisemblance à l'optimum et un terme de pénalité,  $\text{Trace } \hat{I} \hat{J}^{-1}$ , pour le nombre de paramètres. Si les deux matrices  $\hat{I}$  et  $\hat{J}$  sont égales, ce qui est approximativement vrai dans le cas de la méthode du maximum de vraisemblance ou pseudo-maximum de vraisemblance généralisé appliquée à deux modèles presque bien spécifiés, ce terme est égal au nombre de composante de  $\theta$  et on retrouve le critère d'Akaike.

### III.3 Comparaison avec les méthodes descriptives

Comme les méthodes descriptives, de type Chain Ladder, ne reposent pas sur des outils de statistique inférentielle, on ne peut pas les comparer aux méthodes présentées ci-dessus à l'aide de tests ou de critères de choix de modèles. On peut cependant proposer des critères de comparaison fondés leurs performances respectives en prévision.

#### • Critère de prévision à court terme dans l'échantillon ( $C_1$ )

Notons  $Z_{ij}$  la variable d'intérêt, (c'est-à-dire  $C_{ij}$  ou  $S_{ij}$ ) ; on :

$$Y_{ij} = \frac{Z_{ij} - Z_{i,j-1}}{Z_{i,j-1}}$$

La prévision à horizon un de  $Z_{ij}$  par une des méthodes proposées ci-dessus est :

$$\hat{Z}_{ij} = Z_{i,j-1} \left[ 1 + m(i, j, \hat{\theta}) \right] \text{ pour } i = 1, \dots, n ; j = 1, \dots, n \text{ et } i + j \leq n + 1$$

De même la prévision à horizon un de  $Z_{ij}$  par une la méthode Chain Ladder est :

$$\hat{Z}_{ij} = Z_{i,j-1} \hat{f}_j \text{ où } \hat{f}_j \text{ est le facteur de développement calculé par cette méthode.}$$

On peut alors calculer les erreurs absolues moyennes pour chaque méthode :

$$\hat{e} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i,j} |\hat{Z}_{ij} - Z_{ij}| \quad \text{et} \quad \hat{e} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i,j} |\hat{Z}_{ij} - Z_{ij}| \text{ avec } i + j \leq n + 1$$

et le pourcentage de gain par rapport à la méthode Chain Ladder :  $C_1 = \frac{\hat{e} - \hat{e}}{\hat{e}}$

#### • Critère de prévision multihorizon dans l'échantillon ( $C_2$ )

La prévision à horizon  $j$  de  $Z_{ij}$  par une des méthodes préconisées dans cet article est :

$$Z_{ij}^* = Z_{i,0} \prod_{k=1}^j \left[ 1 + m(i, k, \hat{\theta}) \right]$$

De même la prévision à horizon  $j$  de  $Z_{ij}$  par la méthode de Chain Ladder est :

$$Z_{ij}^{**} = Z_{i,0} \prod_{k=1}^j \hat{f}_k$$

Les erreurs absolues moyennes sont respectivement :

$$e^* = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i,j} |Z_{ij}^* - Z_{ij}| \quad \text{et} \quad e^{**} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i,j} |Z_{ij}^{**} - Z_{ij}| \text{ avec } i + j \leq n + 1$$

et le pourcentage de gain par rapport à la méthode Chain Ladder :  $C_2 = \frac{e^{**} - e^*}{e^*}$

• **Critère de prévision à court terme hors échantillon ( $C_3$ )**

On peut aussi estimer le paramètre  $\theta$  à l'aide des observations jusqu'à l'année  $n$  et non  $n+1$ , c'est-à-dire à partir des  $Y_{ij}$ ,  $i=1, \dots, n-1$ ;  $j=1, \dots, n-1$ ;  $i+j \leq n$  et prévoir les  $Z_{ij}$  de l'année  $n+1$ , c'est-à-dire les  $Z_{i, n+1-i}$   $i=1, \dots, n$ ; par :

$$\bar{Z}_{i, n+1-i} = Z_{i, n-i} [1 + m(i, n+1-i, \bar{\theta})]$$

De même, en utilisant la méthode Chain Ladder, on obtient :

$$\bar{\bar{Z}}_{i, n+1-i} = Z_{i, n-i} \bar{f}_{n+1-i}$$

où  $\bar{f}_{n+1-i}$  est le facteur de développement calculé avec les observations jusqu'à l'année  $n$  et non  $n+1$ ).

Les erreurs absolues moyennes sont respectivement :

$$\bar{e} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\bar{Z}_{i, n+1-i} - Z_{i, n+1-i}| \quad \text{et} \quad \bar{\bar{e}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\bar{\bar{Z}}_{i, n+1-i} - Z_{i, n+1-i}|$$

et le pourcentage de gain par rapport à la méthode Chain Ladder :  $C_3 = \frac{\bar{\bar{e}} - \bar{e}}{\bar{e}}$

#### IV. APPLICATION

A titre d'illustration nous appliquons les méthodes proposées ci-dessus à un tableau de charges de sinistres sur douze ans ; on a donc  $n+1=12$ ,  $n=11$  et le nombre d'observations est 66. Le triangle des taux d'accroissement  $Y_{ij}$  donné ci-dessous est similaire à des taux observés pour certaines garanties en matière de Responsabilité Civile Professionnelle.

Survénance	Années de développement										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1989	0.4059	0.1554	0.1628	0.0717	0.0409	-0.0200	-0.0220	0.1115	-0.0680	0.0376	0.1425
1990	0.5994	0.3331	0.0124	0.1656	-0.0400	0.0033	0.0485	0.0239	0.1560	0.0230	
1991	0.7636	0.1761	-0.0390	-0.1080	-0.0880	-0.0160	0.0508	0.0739	0.5045		
1992	0.6826	0.3137	0.0902	-0.0780	0.1146	0.1343	0.0152	0.1037			
1993	1.1700	0.2802	0.1491	-0.0700	0.0840	0.2845	0.0676				
1994	1.1160	0.1100	-0.0330	0.4720	0.0442	0.0346					
1995	1.4832	0.4793	0.0249	0.2651	0.3686						
1996	1.0743	0.5397	0.1255	0.1254							
1997	0.9144	0.4727	0.2630								
1998	0.6780	0.5195									
1999	1.8765										

Comme il s'agit d'un tableau comportant des valeurs négatives nous partons d'un modèle de type polynomial exponentiel :

$$m(i, j, \theta) = [\theta_1 + \theta_2 i + \theta_3 i^2 + \theta_4 j + \theta_5 j^2 + \theta_6 ij] \exp(\theta_7 + \theta_8 j),$$

et après mise en œuvre des tests de type Student présentés dans le paragraphe III, nous retenons le modèle à cinq paramètres :

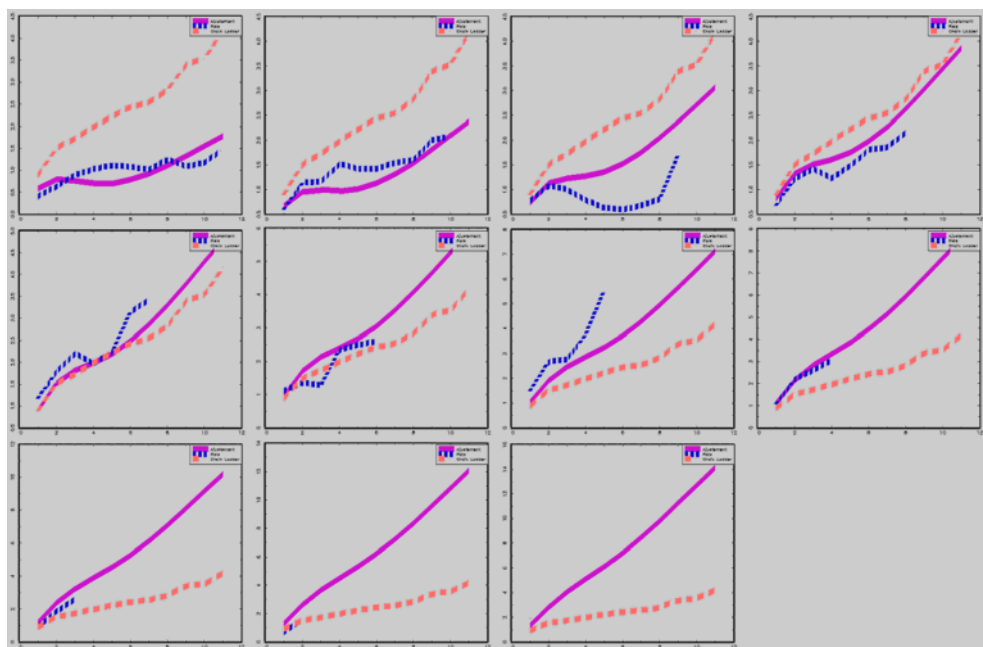
$$m(i, j, p) = (p_1 + p_2 i + p_3 j + p_4 j^2) \exp(p_5 j)$$

Les paramètres  $p_k$   $k=1, \dots, 5$  sont estimés par les méthodes du PMV gaussien c'est-à-dire, par les moindres carrés non linéaires (M.C.O.) et non linéaires généralisés (M.C.G.) (avec une spécification de la variance conditionnelle similaire à celle de l'espérance conditionnelle). Les résultats, obtenus à l'aide du logiciel Gauss, sont fournis dans le tableau ci-après :

Paramètres	Estimateurs M.C.O.	Student	Estimateurs M.C.G.	Student
$p_1$	1.7809	5.282	1.6343	5.399
$p_2$	0.1216	2.221	0.1127	2.686
$p_3$	- 1.1412	- 3.144	- 1.0062	- 3.472
$p_4$	0.1631	2.170	0.1334	2.557
$p_5$	- 0.4492	- 3.553	- 0.3941	- 4.059

Il est intéressant de comparer les évolutions des taux d'accroissement par rapport à l'année zéro tels qu'ils ont été observés et tels qu'ils sont fournis par le modèle retenu (estimé par la méthode des M.C.G.) et par la méthode Chain Ladder.

Les graphiques ci-après donnent ces évolutions pour les onze années de survénance. Les valeurs observées sont en petits pointillés, les valeurs fournies par le modèle polynomial exponentiel en trait plein et les valeurs fournies par la méthode Chain Ladder en gros pointillés.



On voit que le modèle polynomial exponentiel suit la réalité de beaucoup plus près que la méthode Chain Ladder, alors que le nombre de paramètres utilisés est beaucoup plus petit (cinq contre onze). En particulier la méthode Chain Ladder surestime fortement les évolutions pour les années de survenance anciennes et les sous-estime pour les années récentes. Les projections pour les années récentes fournies par les deux méthodes sont très différentes. Il n'est donc pas surprenant que les différents critères de comparaison proposés au paragraphe III-3 soient en faveur du modèle polynomial exponentiel ; les valeurs des différents critères sont :

$$C_1 = 7\%, \quad C_2 = 90\%, \quad C_3 = 42\%$$

On retrouve que le fait que les prévisions à long terme, prises en compte dans  $C_2$  sont très différentes.

## V. CONCLUSION

Dans cet article on a proposé des méthodes statistiques de calcul des provisions techniques pour les risques à développement long (Responsabilité Civile Professionnelle, par exemple) qui permettent des procédures de tests et de choix de modèles rigoureuses et robustes à des erreurs de spécification de la forme des lois de probabilités. Ces méthodes sont facilement mises en œuvre à l'aide de logiciels modernes comme Gauss. L'exemple montre qu'elles peuvent donner des résultats très différents de ceux fournis par une méthode classique comme la méthode Chain Ladder.

## VI. BIBLIOGRAPHIE

1. BENJAMIN P.S. & EAGLES L. M. (1986) : Reserves in Lloyd's and the London Market, Journal of the Institute of Actuaries, volume 113, p197-256 .
2. BORNHUETTER R.L. & FERGUSON R.E. (1972) : The Actuary and IBNR, Proceedings of the Casualty Actuarial Society, Volume 59, p181-195.
3. CHRISTOFIDES S. (1990) : Regression Models Based on Logincremental Payments, Claims Reserving Manual, Volume 2.
4. CRAIGHEAD D. (1986) : Techniques of Reserving. The London Market, Journal of the Institute of Actuaries, volume 11, p441-457.
5. DE VYLDER F. (1978) : Estimation of IBNR Claims by least squares, MUSUM, volume 197, p249-254.
6. DORAY L. G. (1997) : A Semi-Parametric Predictor of the IBNR Reserve, Astin Bulletin, Volume 27, N° 1, p113-116.

7. ENGLAND P.D. & VERALL R.J. (1999) : Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claim reserving. *Insurance Mathematics and Economics*, 25, p281-293.
8. GILLET A & SERRA B. (2003) : Effets de la Dépendance entre Différentes Branches sur le Calcul des Provisions, *Bulletin Français d'Actuariat*, Volume 6, n° 10, p117-148.
9. GOURIEROUX C. MONFORT A. & TROGNON A. (1984): Pseudo Maximum Likelihood Methods : Theory. *Econometrica*, Volume 52, Issue 3, p681-700.
10. GOURIEROUX C. & MONFORT A. (1989): *Statistique et Modèles Econométriques*, *Economica*, Volumes 1&2.
11. HADJI I. (2004): *La Responsabilité Civile Médicale : Etudes des Provisions pour Sinistre à Payer. « Une nouvelle approche », Mémoire d'actuariat, Conservatoire National des Arts et Métiers.*
12. KAHANE (1989): A modern approach to loss reserving in lon-tail lines – the case of automobile insurance. XXI Astin Colloquium, New York.
13. KREMER E. (1982) : IBNR Claims and Two-way Model of Anova, *Scandinavian Actuarial Journal*, p47-55.
14. MACK T. (1991): A simple Parametric Model for Rating Automobile Insurance of Estimating and IBNER Claims Reserves, *Astin Bulletin* , Volume 21, N° 1, p93-109.
15. MACK T. (1993): Distribution-Free Calculation of the Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates, *Astin Bulletin* , Volume 23, N° 2, p213-225.
16. MACK T. (1994): With Stochastic Model is Underlying The Chain Ladder Model, *Insurance Mathematics and Economics*, Volume 15, p133-138.
17. RENSHAW A. E. (1989) : Chain Ladder and interactive modelling , *Claims Reseving and GLIM*, *Journal of the Institute of Actuaries*, Volume 116, p559-587.
18. RENSHAW A. E. & VERALL R.J. (1998): A Stochastic Model underlying the Chain-Ladder Technique, *British Actuarial Journal*, 4, p903-923.
19. SCHMIDT K. D. & SCHNAUS A. (1996) : An Extension of Mack's Model for the Chain Ladder Method, *Astin Bulletin* , Volume 26, N° 2, p247-262.
20. TAYLOR G.C. (2000): *Loss Reserving : An Actuarial Perspective*, Volume 21, Kluwer Academic Publishers.
21. VERRALL R. J. (1990) : Bayes and Empirical Bayes Estimation for the Chain Ladder Model, *Astin Bulletin* , Volume 20, p217-243.
22. VERRALL R. J. (1991) : On the Estimation of Reserves from loglinear Models, *Insurance : Mathematics and Economics*, Volume 10, p75-80.



23. ZEHNWIRTH B. (1989) : The Chain Ladder Technique : A stochastic Models in :  
Claims Reserving Manual, Volume 2, Institute of Actuaries London.
24. ZEHNWIRTH B. (1991) : Interactive Claims Reserving Forecasting Sytem : Version  
6-1, Insurance ware PIL, Australia.



# A BOOTSTRAP APPROACH TO THE PRICE UNCERTAINTY OF WEATHER DERIVATIVES

Olivier ROUSTANT<sup>1</sup>

Jean-Paul LAURENT<sup>2</sup>

Xavier BAY<sup>1</sup>

Laurent CARRARO<sup>1</sup>

## ABSTRACT

This paper investigates price uncertainties in weather derivatives contracts through a bootstrap approach. Futures prices are computed under a periodic ARMA model in an actuarial framework for two different locations, Paris and Chicago. We show that statistical errors may lead to substantial uncertainties on futures prices with confidence intervals up to 20% of the assessed prices. Looking at the source of uncertainty, this suggests that some efforts have to be done in the modelling of the trend and seasonality in temperature.

## RÉSUMÉ

Dans cet article, nous évaluons l'incertitude des prix de produits dérivés climatiques avec une méthode de bootstrap. Les prix de contrats Futures sont calculés selon une approche actuarielle et en utilisant un modèle ARMA à variance périodique, ceci pour deux villes, Paris et Chicago. Nous montrons que l'erreur d'estimation des paramètres du modèle peuvent causer des erreurs significatives sur les prix futures pouvant aller jusqu'à 20% du prix annoncé. Regardant la source des incertitudes, cela indique que la modélisation de la tendance et de la saisonnalité doit être améliorée.

## I. INTRODUCTION

The market for weather derivatives was launched by investment banks, insurance companies and utilities in the late 90's. Most of the contracts are OTC though some can be traded on future exchanges (CME, LIFFE-Euronext). These products provide protection against losses due to non-catastrophic climatic events. End-users are, mostly, energy companies but also theme parks, breweries, winter shipment manufacturers, leisure resorts, fertiliser manufacturers... The underlying climatic risks are measured by means of indexes built from available meteorological data.

---

<sup>1</sup> Ecole des Mines de Saint-Étienne

<sup>2</sup> ISFA, Université Lyon 1

Since these markets are currently quite illiquid and not very transparent, it is difficult to mark to market the products and calibrate some parameters from market prices. Thus, market participants rather use econometric models plus a pricing rule and then mark to model. The outcome of the paper is to assess the impact of estimation error and some model error on the prices of weather futures. We provide some confidence intervals for prices; this can be used for determining a reserve policy and better cope with model risk.

The article is organised as follows. In section II, we introduce the data, the temperature model, the specifications and the valuation of temperature future contracts. In section III, we present the bootstrap methodology for the assessment of price uncertainty. Results are presented in sections IV (LIFFE case) and V (CME). Finally in section VI, the price uncertainties are compared with those obtained with an asymptotic delta-method methodology.

## **II. PRESENTATION OF THE DATA, THE TEMPERATURE MODEL, THE SPECIFICATIONS AND THE VALUATION OF TEMPERATURE FUTURE CONTRACTS**

### **II.1 The data**

We use daily average temperatures from the 1<sup>st</sup> of January 1979 to the 31<sup>st</sup> of December 1999. The average temperature is the common “underlying” for weather derivative contracts as proposed by the Chicago Mercantile Exchange for instance. We consider two meteorological stations: Paris-Montsouris and O'Hare Airport, near Chicago. The data come from Météo France for Paris and the website of the Chicago Mercantile Exchange for Chicago. In order to facilitate the treatment of data, we removed the 29<sup>th</sup> of February, which corresponds to remove 5 values per station for a total of 7665 temperatures.

### **II.2 The temperature model**

The model takes into account the major characteristics of temperature: seasonality of the values and of the dispersion, quick reversion to the mean, correlations from the days before and today... It has been presented by Cao and Wei (2000) or Roustant (2002). We refer to Dischel (1998), Dornier and Quérueil (2000), Moréno (2000), Brody, Syroka, Zervos (2001), Davis (2001) or Campbell, Diebold (2001) for related specifications. It is a linear model with a periodic variance:

$$X_t = m_t + s_t + \sigma_t Z_t$$

with:

- $m_t$  the trend;
- $s_t$  the seasonal component;
- $\sigma_t$  a deterministic and periodic process with an annual periodicity representing the standard deviation of  $X_t$
- $Z_t$  an ARMA process:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

where  $(\varepsilon_t)$  is a Gaussian white noise. The variance of  $Z_t$  is set to 1 (the variance of  $\varepsilon_t$  is then a function of  $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ , see Brockwell, Davis, 1991, §3.3.).

Moreover, we assume the following parametric forms:

- $m_t = dt + e$
- $s_t = \sum_{i=1}^{N_f} (a_i \cos(i\omega t) + b_i \sin(i\omega t))$
- $\sigma_t = a + b \cos(\omega t) + c \sin(\omega t)$

with  $\omega = 2\pi / 365$ .

Such expressions are justified by basic fitting based on data, and allow easy computation of maximum likelihood estimator. For the seasonal component, the choice of frequencies is achieved by means of a preliminary spectral analysis of the normal temperature of each series. In the case of Chicago, we only kept the fundamental (annual) frequency and  $s_t$  is simply parameterised by  $s_t = a_1 \cdot \cos(\omega t) + b_1 \cdot \sin(\omega t)$ . In addition, the discrete curve of the normal temperature of Paris is asymmetric which forces the use of at least two frequencies. Finally, we retained the form

$$s_t = \sum_{i=1}^2 a_i \cos(i\omega t) + b_i \sin(i\omega t).$$

The selection of  $p$  and  $q$ , the orders of the ARMA model is accomplished by standard procedures (see Brockwell, Davis, 1991), after a preliminary estimation of  $m_t$ ,  $s_t$  and  $\sigma_t$ . It leads to the choice  $p=3$ ,  $q=0$  for the two stations.

Despite its relative simplicity, this linear model for temperature is not far from being correct as one can see on Figure 1. In the case of Paris, correlograms of residuals and squared residuals show that the residuals can be considered as independent. In the case of Chicago, the first squared residuals autocorrelations are significant, which is consistent with the conditional heteroskedasticity model of Campbell and Diebold (2001). But, even in that case, the dependence is small. Some departures from normality are observed in the Paris case, for which the distribution of residuals exhibits fat tails for low temperatures.

### II.3 Specifications of temperature indexes

In this paper, we will focus on the weather futures contracts offered by the CME and LIFFE exchanges. They are built on temperature indexes that are also widely used on the over-the-counter (OTC) market. On the LIFFE, *modulo* a constant, the temperature index is simply the average temperature (expressed in degree Celsius):

$$AVE = 100 + \frac{1}{L} \sum_{t=t_1}^{t_2} X_t$$

where  $L$  is the length of the risk exposure period  $[t_1; t_2]$ . On the CME, two indexes are used, namely the Heating Degree-Day (HDD) index and the Cooling Degree-Day (CDD) index (expressed in degree Fahrenheit):

$$HDD = \sum_{t=t_1}^{t_2} (65 - X_t)^+ \quad CDD = \sum_{t=t_1}^{t_2} (X_t - 65)^+ .$$

The value of 65°F (18°C) is a benchmark in the energy industry, since it is usually considered that heating starts when temperatures go below 18°C. Since it takes into account all temperatures below 18°C, the HDD index is suitable for cool months (when heating is “necessary”); it is used from October to April. On the other hand, the CDD index is used from May to September.

### II.4 Specifications of futures contracts; futures prices

A weather future is a financial product that provides or demands reimbursement according to the level of a weather index. The risk exposure period is generally a month, or, more rarely, a season. Precise specifications are given in Table 1. The size of this payment is calculated as such no initial premium is required. For instance, the payment of a HDD-future contract is

$$F - N \times HDD$$

where  $F$  is the future price, and  $N$  is the contract size (on the CME for instance,  $N$  equals 100\$ per degree). Thus for a specified month, the payment is all the more important than the HDD index is low or, equivalently, than the temperatures are mild. On the other hand, the “payment” can be negative, and therefore required, for colder temperatures than usual. Typically, such a contract may be entered by an energy company to protect against mild winters; however, it will have to pay for cold winters...

There are currently a number of pricing methodologies for such contracts, see Carr, Geman and Madan (1999), Davis (2001), Musiela and Zariphopoulou (2001), Schweizer (2001) or Barrieu and El Karoui (2002). Roughly speaking, the different valuation approaches depend on whether or not the underlying weather variables can be “linked” to

the financial market: for instance, energy commodities may be correlated with temperature, and might be used for the valuation of weather derivatives. Most practitioners use an actuarial framework and the “standard deviation principle” (see Goovaerts, DeVylder, Haezendonck, 1984, or Bühlmann, 1996). They calculate the net premium as

$$P = E[\text{discounted payment}] + \lambda \times \sigma[\text{discounted payment}] . \quad (*)$$

In the following, we will restrict to pure premiums, i.e.  $\lambda = 0$  in (\*) ; we refer to Denneberg (1990), Schweizer (2001), Hürlimann (2001) or Moller (2001, 2003a and 2003b) for more discussions about the valuation rule.

For a weather future, assuming deterministic interest rates for simplicity, we have (see e.g. Duffie, 2001):

$$0 = E[F - N \times TI]$$

where  $TI$  denotes a temperature index and  $F$  the futures price. Therefore,

$$F / N = E[TI] .$$

When temperature is modelled by the ARMA model presented above, we will denote by  $P(\Theta)$  the futures prices corresponding to the temperature parameters  $\Theta$  :

$$P(\Theta) = E[TI(\Theta)] .$$

Note that expectations should be computed conditionally to available information. That includes the set of past temperatures. Actually, these have very little influence when the risk exposure period begins more than 20 days after the present date (Roustant, 2002), and will be further neglected.

When the assumptions of the model are verified, futures prices are obtained in closed-form. In the LIFFE case, we have  $P(\Theta) = 100 + \frac{1}{L} \sum_{t=t_1}^{t_2} (m_t + s_t)$ , while analytical expressions in the CME case can be found in (Cao, Wei, 2000).

### III. ASSESSMENT OF PRICE UNCERTAINTY BY A BOOTSTRAP METHODOLOGY

In practise, futures prices are only estimated, and the estimated price is a function of the estimate of the temperature parameters. Thus, the estimation errors of the temperature model result in estimation errors on the corresponding prices. This is that kind of uncertainty that we want to assess now. Examples and further discussions about this price uncertainty approach can be found in (Campbell, Lo, MacKinlay, 1997, §9.3.3.) or (Cairns, 2000). To do this, we want, in addition, to account for the model misspecification relative

to the normality assumption in the residuals  $\varepsilon_t$ . Therefore, we will not assume that the temperature residuals are Gaussian; either, we will work with the empirical distribution of centred residuals:

$$\hat{F}_T(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T 1_{(-\infty, x]}(\hat{\varepsilon}_t - \bar{\varepsilon})$$

where  $T$  is the data size,  $\hat{\varepsilon}_t$  are the “initial” estimated residuals - that is the residuals corresponding to the initial parameters  $\Theta_0$  obtained by maximum likelihood estimation (MLE) based on the data, and  $\bar{\varepsilon}$  their mean. The residuals are centred to have the same mean as the innovations of the model. This has a very minor effect since the mean of  $\hat{\varepsilon}_t$  is nearly 0, and results in closed form expressions for futures prices (see section IV); it is also a current practise when bootstrapping with time-series, see for instance (Davinson, Hinkley, 1997, chapter 8). On a statistical point of view, our objective is equivalent to assess the precision of the estimator:

$$\hat{P}(\hat{\Theta})$$

where  $\hat{\Theta}$  is the maximum likelihood estimator, and  $\hat{P}$  is the future price under the empirical distribution of the (initial) residuals:

$$\hat{P} = E_{\hat{F}_T, \hat{\Theta}}[\text{Temperature index}].$$

This objective can be achieved by a bootstrap technique. The idea of bootstrap is to generate from the available data, solely, a sample of independent realisations of some statistic of interest. In our case, we would like to have a sample of price values  $\hat{P}(\Theta^{*1}), \dots, \hat{P}(\Theta^{*R})$  corresponding to a huge sample of temperature parameters values  $\Theta^{*1}, \dots, \Theta^{*R}$ ; price uncertainty could therefore be assessed by the 2.5% and 97.5% quantiles of  $\hat{P}(\Theta^{*1}), \dots, \hat{P}(\Theta^{*R})$ . When bootstrapping with time-dependent data, a three-stage procedure is currently done (see Efron, Tibshirani, 1986, §6 or Davinson, Hinkley, 1997). Firstly, the structure of the model is used (in the “reverse” sense) to extract a white noise from the data: this is *pre-whitening*; then, *bootstrap* is made on this noise and, finally, new paths are generated by reconstitution, or *post-blackening*, using again the structure of the model (in the “natural” sense). The bootstrap itself can be done in several ways, whether one assumes independence of the data - then a simple resampling can be used - or suspects some residual dependency: in that case, the *block bootstrap* for instance may be preferred (see Davinson, Hinkley, 1997 or Bühlmann, 2000 for a more extensive presentation of bootstrap techniques). In our case, it seems that there is no real need to use such techniques



(see again Figure 1) and we will restrict to simple resampling. Eventually, we do the following operations:

for  $r = 1, \dots, R$  do :

1. Simulate independently  $\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*$  from the centred empirical distribution of residuals
2. Reconstitute the corresponding temperature path  $x_1^*, \dots, x_n^*$  using the temperature model with the initial parameters (MLE based on the data)
3. Calculate the MLE  $\Theta^{*r}$  from the new data  $x_1^*, \dots, x_n^*$
4. Calculate the corresponding future price  $\hat{P}(\Theta^{*r})$ .

In practise, to insure stationarity of  $x_1^*, \dots, x_n^*$ , a longer sample is generated and first values are discarded (see e.g. Davinson, Hinkley, 1997, §8.2.2.). Of course  $\Theta^{*r}$  is not issued exactly from the distribution of the temperature parameter MLE estimator  $\hat{\Theta}$ , since resampling is made in the empirical distribution of a particular sample issued from it. However, the statistical bias vanishes as the sample size tends to infinity (see e.g. Davinson, Hinkley, 1997). As in our case the data size  $T = 7.665$  is rather large, we can reasonably think that this bias is small and, consequently, that the empirical properties of  $\hat{P}(\Theta^{*1}), \dots, \hat{P}(\Theta^{*R})$  will give accurate estimates of the statistical properties of  $\hat{P}(\hat{\Theta})$ . We will assess the future price uncertainty by the 95% confidence interval of  $\hat{P}(\Theta)$  given by the 2.5% and 97.5% quantiles of  $\hat{P}(\Theta^{*1}), \dots, \hat{P}(\Theta^{*R})$ .

#### IV. PRICE UNCERTAINTY OF THE LIFFE WEATHER FUTURES

For the LIFFE weather futures, the underlying index is a linear function of temperature. Thus, futures prices can be obtained in closed-form under the empirical distribution of (centred) residuals:

$$\hat{P}(\Theta) = 100 + \frac{1}{L} \sum_{t=t_1}^{t_2} (m_t + s_t)$$

where  $L$  is the length of the risk exposure period  $[t_1; t_2]$ . Hence, the methodology described in the previous section can be applied directly. We set  $R = 10.000$ , and with the prices sample obtained by bootstrap  $\hat{P}(\Theta^{*1}), \dots, \hat{P}(\Theta^{*R})$ , we calculated the median, the standard deviation and a 95% confidence interval obtained with the 2.5% and 97.5%-quantiles. Results are shown in Table 2. We also indicate the price uncertainty, expressed in percentage (last column) and the theoretical price, computed under the normality assumption and based on the initial parameters value  $\Theta_0$  (first column).

Note that the “bootstrap” future price estimated by bootstrap is not different from the expected value under the normality assumption for the temperature process. It shows that non-normalities have no impact on futures prices. The form of the index may help to understand this: the average over a long period of time may result in smoothing the daily differences that could exist. A more statistical explanation is that the linearity of the index implies the linearity of the future price as a function of the temperature parameters estimator. Now, anticipating the asymptotic results of section VI, this one is approximately normal, which explains that the futures prices sample is nearly equal to its mean, and may be unbiased, which explains that this mean is equal to the theoretical value. This asymptotic property may also explain the symmetry of confidence intervals observed in column 4 or 5. In absolute value, price uncertainty is constant over months (column 3) and is rather small. In percentages, slight fluctuations can be observed, but price uncertainty can be neglected in any case. Let us remark, however, that this conclusion will be different if the constant 100 were not added to the temperature mean: then, for instance, price uncertainty would represent more than 10% for winter months, and 8% for the winter whole season.

## V. PRICE UNCERTAINTY OF THE CME WEATHER FUTURES

At the CME exchange, weather products are based on HDD or CDD indexes, which are non-linear functions of temperature. In this situation, futures prices have no analytical expressions under the empirical distribution and must be estimated by Monte Carlo simulations. To reduce time computation, we used the control variates technique. Then, only 1.000 simulations are required to give correct estimates for  $\hat{P}(\Theta^{*r})$ , and the methodology of section 2 can be achieved.

The results are shown on Table 3. Firstly, we observe a seasonal pattern in the price uncertainty (column 3). This departs from the LIFFE case where all price uncertainties have the same order of magnitude. It may be a consequence of the non-linearity of the HDD and CDD indexes. Indeed the temperature threshold of 65°F does not “cut” temperatures in the same way in winter or in summer or in the “shoulder months” of May and September. When these indexes can be approximated by a linear one, as in winter (where temperature rarely goes above 65°F), the estimation error is nearly constant. Finally, when thinking of price uncertainty in terms of percentage, worst results are associated with lower prices, corresponding to May and September. For these months, price uncertainty goes beyond 15%. Excepting these particular cases, price uncertainty is

about 10% in summer and 5% in winter. Let us remark that this “5%” is associated with a high future price and therefore gives a large confidence interval.

**VI. ASSESSMENT OF PRICE UNCERTAINTY BY THE DELTA-METHOD**

One drawback with the bootstrap methodology presented in section III is that it requires the estimation of extreme quantiles. This estimation may be inaccurate and, as an alternative, we propose to estimate the asymptotic distribution of futures prices. We show that this distribution is approximately normal, so that quantiles can be related to the standard deviation, which is estimated more accurately. In addition, let us remark that asymptotic results may give good approximations here since the number of available data is large. To use this method, we need to assume that the ARMA model is well specified, and thus that the residuals are normally distributed. From now on, we will make this assumption and will denote  $P(\Theta)$  the corresponding futures prices.

We then argue that the asymptotic distribution of the MLE temperature parameters estimator  $\hat{\Theta}$  is approximately normal. The idea is that the model used for temperature departs from an ARMA only by deterministic terms (trend, seasonality, seasonal volatility). Therefore the asymptotic normality satisfied by the maximum likelihood estimator of an ARMA process (see for example Gouriéroux, Montfort, 1997, §9.2.F.) may be verified as well. To check this assumption, we applied statistical tests of normality to a sample of size  $R=10.000$  of MLE estimations obtained by resampling in the Gaussian distribution of residuals (of the temperature model). We used the Kolmogorov test to check the normality of the marginal distributions, and skewness and kurtosis tests for the normality of the multidimensional distribution (see Lütkepohl, 1993, § 4.5., formula 4.5.4., 4.5.5. and 4.5.8.). The results shown in Table 5 prove that the distributional assumption for  $\hat{\Theta}$  is satisfactory (nearly all marginal distributions pass the normality test, p-values are correct for the kurtosis test; the little weak p-value of the skewness test may then rather reveal the slow rate of convergence to the asymptotic distribution than a non-normality). More precisely, we will assume that (as for a pure ARMA process),

$$\sqrt{n}(\hat{\Theta} - \Theta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} N(0; \Gamma)$$

where  $\Theta$  is the “true” vector of parameters, and  $\Gamma$  is the asymptotic covariance matrix of  $\hat{\Theta}$ . Then, the *delta-method* consists of using a first-order Taylor expansion (Campbell, Lo, and MacKinlay, 1997, section A.4. of the appendix) to derive an asymptotic pivotal distribution of  $P(\Theta)$  :

$$\sqrt{n}(P(\hat{\Theta}) - P(\Theta)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} N\left(0; \frac{\partial P}{\partial \Theta}, \Gamma \frac{\partial P}{\partial \Theta}\right).$$

If derivatives  $\frac{\partial P}{\partial \Theta}$  can be evaluated, then price uncertainty can be assessed as a function of the standard deviation of the asymptotic normal distribution of  $P(\hat{\Theta})$ .

The delta-method methodology can be summarized as follows. For  $r = 1, \dots, R$  do :

- 1'. Simulate independently  $\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_n^*$  from the estimated Gaussian distribution of residuals
2. Reconstitute the corresponding temperature path  $x_1^*, \dots, x_n^*$  using the temperature model with the initial parameters (maximum likelihood estimation based on the data)
3. Calculate the maximum likelihood estimate  $\Theta^{*r}$  from the new data  $x_1^*, \dots, x_n^*$
- 4'. Calculate the empirical covariance matrix  $\Gamma(\Theta)$  to estimate the asymptotic normal distribution of  $\Theta^*$
- 5'. [Delta-method] deduce the asymptotic normal distribution of  $P(\Theta^*)$ , and calculate the 95% confidence interval of  $P(\Theta)$  based on the standard deviation of the distribution of  $P(\Theta^*)$ .

Note that there is no bootstrap here since resampling is made in the estimated Gaussian distribution of residuals. Indeed, the property of asymptotic normality may not be shared for any distribution assumption. In addition, the derivatives  $\frac{\partial P}{\partial \Theta}$  can then be obtained in closed-form (this is obvious for LIFFE futures; we report to appendix for the CME case).

In the LIFFE case,  $P$  is a linear function of  $\Theta$ . Therefore, the delta-method will give identical results as if one had assumed that  $\hat{\Theta}$  were exactly normally distributed, the first-order expansion being equality for linear functions. Thus, as departures from normality of the temperature residuals are not too important, we expect to obtain similar results as with the bootstrap methodology. In the CME case,  $P$  is a non-linear function of  $\Theta$ , and the differences between the two methods may appear in a more striking manner. The results obtained with the delta-method confirm these insights (Table 4), but also show that there are very few differences between the results of the two methods.

## VII. CONCLUSION

We studied the impact of temperature estimation error on prices of some standard futures contracts of the LIFFE and CME exchanges. By considering the price as a random

variable function of the temperature parameters, price uncertainty was assessed in two manners. By extreme quantiles, first, using a bootstrap technique; and by the standard deviation of a normal asymptotic distribution, using the delta-method. Both methodologies lead to the conclusions that price uncertainty is not negligible for CME weather derivatives, and may be important for some months; it can be neglected for LIFFE contracts, but this is due to the constant 100 added to the temperature mean in the indexes. For CME winter contracts, where the HDD index is approximately linear, errors are coming exclusively from the estimation errors made on the mean of the temperature process. This suggests that the modelling of trend and seasonality in temperature is a key feature of the valuation of weather derivatives.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

We gratefully acknowledge the helpful comments of an anonymous referee, Olivier Scaillet, and the relevant remarks of the participants of the AFFI congress in Paris and Strasbourg, where earlier versions of this paper were presented. We thank Météo France for the data of temperature of the Paris-Orly station. Computations were made with Matlab software. All errors are ours.

#### REFERENCES

- BARRIEU P., EL KAROUI N. (2002) : Optimal design of derivatives in illiquid markets. *Quantitative Finance, Vol. 2*, 181-188.
- BROCKWELL, P.J., DAVIS, R.A.(1991): *Time Series: Theory and Methods*. Springer Verlag.
- BRODY D.C., SYROKA, J., ZERVOS, M. (2001): Dynamical Pricing of Weather Derivatives. Working Paper, Imperial College, London. Submitted to: *Quantitative Finance*.
- BÜHLMANN H. (1996): *Mathematical methods in risk theory*. Springer-Verlag.
- BÜHLMANN P. (2000): Bootstrap for Time Series. Seminar für Statistik, ETH Zürich. Revised Version.
- CAIRNS A.J.G. (2000): A discussion of parameter and model uncertainty in insurance. *Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 27*, 313-330.
- CAMPBELL J.Y., LO A.W., MACKINLAY A.C. (1997): *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press.

- CAMPBELL S., DIEBOLD F.X. (2001): Weather Forecasting for Weather Derivatives. Working Paper, University of Pennsylvania, Philadelphia.
- CAO M., WEI J. (2000): Pricing Weather Derivatives: an Equilibrium Approach. Working Paper, Queen's University Kingston and University of Toronto, Ontario, Canada.
- CARR P., GEMAN H., MADAN D. (1999): Pricing and Hedging in Incomplete Markets. Working paper.
- DAVIS M. (2001): Pricing weather derivatives by marginal value. *Quantitative Finance*, Vol. 1, 1-4.
- DAVINSON A.C., HINKLEY D.V. (1997): *Bootstrap Methods and their Applications*. Cambridge University Press.
- DENNEBERG D. (1990): Premium calculation: why standard deviation should be replaced by absolute deviation. *Astin Bulletin*, Vol. 20, 181-190.
- DISCHEL R. (1998): The fledgling weather market takes off, Part. 2. *Applied Derivatives Trading*.
- DORNIER F., QUERUEL M. (2000): Caution to the Wind. *Risk, Energy and Power Risk Management*, August.
- DUFFIE D. (2001): *Dynamic asset pricing theory*. Princeton University Press.
- EFRON B., TIBSHIRANI R. (1986): Bootstrap Methods for Standard Errors, Confidence Intervals, and Other Measures of Accuracy. *Journal of Statistical Science*, Vol. 1, n°1, 54-77.
- GOOVAERTS M.J., DEVYLDER F., HAEZENDONCK J. (1984): *Insurance Premiums*. Elsevier.
- GOURIEROUX C., MONTFORT A. (1997): *Time Series and Dynamic Models*. Cambridge University Press.
- HÜRLIMANN W. (2001): Distribution free comparison of pricing principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 28, 351-360.
- LÜTKEPOHL H. (1993): *Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer Verlag.
- MOLLER T. (2001): On transformations of actuarial valuation principles. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 28, 281-303.
- MOLLER T. (2003): Indifference pricing of insurance contracts in a product space model: applications. *Insurance: Mathematics and Economics*, Vol. 32, 295-315.
- MOLLER T. (2003): Indifference pricing of insurance contracts in a product space model. *Finance and Stochastics*, Vol. 7, 197-217.

MORENO M. (2000): Riding the Temp. *Weather Derivatives, FOW Special Supplement*, December.

MORENO M., ROUSTANT O., (2002): *Modélisation des températures*, in Blondeau J., Partrat C., *La réassurance : approche technique*, Economica, 2003.

MUSIELA M., ZARIPHOULOU T. (2001): Pricing and Risk Management of Derivatives Written on Non-Traded Assets. Working paper.

ROUSTANT O. (2002): Une application de deux modèles économétriques de température à la gestion des risques climatiques, 1<sup>ère</sup> partie. *Banque & Marchés*, Vol. 58, 22-29.

ROUSTANT O. (2002): Une application de deux modèles économétriques de température à la gestion des risques climatiques, 2<sup>ème</sup> partie. *Banque & Marchés*, Vol. 59, 36-44.

SCHWEIZER M. (2001): From actuarial to financial valuation principles, *Insurance : Mathematics and Economics*, Vol. 28, 31-47.

**APPENDIX**

**Analytical expressions of the derivatives of HDD and CDD futures prices**

Let us consider, for example, the case of future contracts based on HDD. With the notation  $L_t = \frac{K - (m_t + s_t)}{\sigma_t}$ , the corresponding prices given by (Cao et Wei, 2000) can be expressed as:

$$P(\Theta) = \sum_{t=t_1}^{t_2} f_t = \sum_{t=t_1}^{t_2} \sigma_t \left( L_t N(L_t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-L_t^2 / 2) \right)$$

where  $N(.)$  is the cumulative density function of the  $N(0;1)$  distribution.

Denote  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ , and  $\frac{\partial P}{\partial \Theta} = \left( \frac{\partial P}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial P}{\partial \theta_k} \right)'$  the derivatives on the vectorial form.

An immediate calculation then gives  $\frac{\partial f_t}{\partial \theta_k} = -N(L_t) \frac{\partial (m_t + s_t)}{\partial \theta_k}$  if  $\theta_k$  is relative to the process mean  $m_t + s_t$ ,  $\frac{\partial f_t}{\partial \theta_k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-L_t^2 / 2) \frac{\partial \sigma_t}{\partial \theta_k}$  if  $\theta_k$  is relative to the process volatility  $\sigma_t$  and  $\frac{\partial f_t}{\partial \theta_k} = 0$  otherwise. Therefore, we obtain:

$$\frac{\partial P}{\partial \Theta} = \left( -[N(L_{t_1}), \dots, N(L_{t_2})] \times M_\mu \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [\exp(-L_{t_1}^2 / 2), \dots, \exp(-L_{t_2}^2 / 2)] \times M_\sigma \quad 0_p \right)'$$

where  $M_\mu$  and  $M_\sigma$  are matrices relative to the (linear) process mean and process volatility:

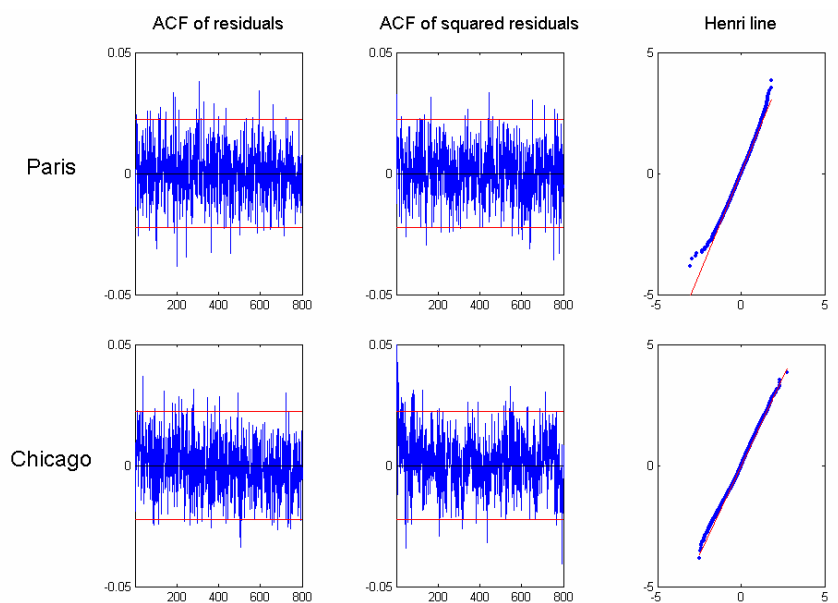
$$M_\mu = \begin{pmatrix} t_1 & 1 & \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1) & \dots & \cos(N_f \omega t_1) & \sin(N_f \omega t_1) \\ | & | & | & | & \dots & | & | \\ t_2 & 1 & \cos(\omega t_2) & \sin(\omega t_2) & \dots & \cos(N_f \omega t_2) & \sin(N_f \omega t_2) \end{pmatrix},$$

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1) \\ | & | & | \\ 1 & \cos(\omega t_2) & \sin(\omega t_2) \end{pmatrix}$$

Similarly, the derivatives of futures prices on CDD are:

$$\frac{\partial P}{\partial \Theta} = \left( \left[ N(-L_{t_1}), \dots, N(-L_{t_2}) \right] \times M_\mu - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \exp(-L_{t_1}^2/2), \dots, \exp(-L_{t_2}^2/2) \right] \times M_\sigma \quad 0_p \right)'$$

**Figure 1** – Diagnostic checking for the temperature model.





**Table 1** – Contract specifications on the CME and LIFFE Exchanges.

	<b>CME</b>	<b>LIFFE-Euronext</b>
Temperature index	HDD, CDD	100 + Average temperature
Length of the risk exposure period	1 month	a) 1 month b) Winter season (01/11-31/03)
Location	Atlanta, Chicago, Cincinnati, Dallas, Des Moines, Las Vegas, New York, Philadelphia, Portland, Tucson.	London, Paris, Berlin
Contract type	Futures and options	Futures
Maturity	1 to 12 months	a) 1 to 12 months b) 1 to 2 consecutive seasons
Contract value	1°F = 100\$	1°C = 3.000€ (£ for London)

**Table 2** – Assessment of future price and future price uncertainty by bootstrap. Station = Paris-Orly.

	Theoretical future price $P(\Theta_0)$	Future price median $F_{\text{bootstrap}}$	Future price std. dev.	Future price 95% confidence interval $I_{\text{bootstrap}}$	Relative 95% confidence interval (%) $(I_{\text{bootstrap}} / F_{\text{bootstrap}} - 1) \times 100$
Weather futures – Monthly indices					
January	104.55	104.55	0.30	[103.96 ; 105.14]	[-0.55 ; 0.56]
February	105.67	105.67	0.30	[105.08 ; 106.26]	[-0.56 ; 0.55]
Mars	107.96	107.96	0.30	[107.37 ; 108.54]	[-0.54 ; 0.53]
April	111.09	111.09	0.29	[110.51 ; 111.66]	[-0.51 ; 0.51]
May	114.70	114.70	0.29	[114.13 ; 115.26]	[-0.49 ; 0.48]
June	118.15	118.16	0.28	[117.59 ; 118.72]	[-0.48 ; 0.48]
July	120.34	120.34	0.29	[119.78 ; 120.91]	[-0.46 ; 0.47]
August	120.14	120.14	0.29	[119.58 ; 120.72]	[-0.46 ; 0.48]
September	117.26	117.26	0.29	[116.70 ; 117.84]	[-0.47 ; 0.50]
October	112.68	112.68	0.30	[112.10 ; 113.27]	[-0.51 ; 0.52]
November	108.17	108.18	0.31	[107.58 ; 108.77]	[-0.55 ; 0.55]
December	105.30	105.30	0.30	[104.70 ; 105.93]	[-0.57 ; 0.59]
Weather futures – Winter season index					
1 <sup>st</sup> Nov – 31 <sup>st</sup> March	106.37	106.37	0.26	[105.87 ; 106.89]	[-0.47 ; 0.48]

**Table 3** – Assessment of future price and future price uncertainty by bootstrap. Station = O’Hare Airport.

	Theoretical future price $P(\Theta_0)$	Future price median $F_{\text{bootstrap}}$	Future price std. dev.	Future price 95% confidence interval $I_{\text{bootstrap}}$	Relative 95% confidence interval (%) $(I_{\text{bootstrap}} / F_{\text{bootstrap}} - 1) \times 100$
CDD season					
May	53.56	52.77	5.37	[42.7 ; 63.8]	[-19.1 ; 20.9]
June	195.22	196.06	11.95	[172.4 ; 219.5]	[-12.1 ; 12.0]
July	314.90	316.04	14.50	[286.9 ; 344.1]	[-9.2 ; 8.9]
August	256.14	257.09	13.54	[230.8 ; 283.8]	[-10.3 ; 10.4]
September	90.77	90.32	7.68	[75.9 ; 106.2]	[-16.0 ; 17.6]
HDD season					
October	397.87	396.90	15.36	[367.1 ; 427.5]	[-7.5 ; 7.7]
November	752.31	752.03	16.87	[719.4 ; 785.5]	[-4.4 ; 4.5]
December	1079.00	1079.05	18.27	[1043.2 ; 1114.8]	[-3.4 ; 3.4]
January	1215.41	1215.35	18.12	[1179.4 ; 1250.5]	[-3.0 ; 2.9]
February	1036.39	1036.22	16.58	[1003.5 ; 1068.3]	[-3.2 ; 3.1]
Mars	901.86	901.42	18.12	[865.7 ; 936.9]	[-4.0 ; 4.0]
April	518.69	517.91	16.40	[486.2 ; 550.9]	[-6.2 ; 6.4]

**Table 4** – Assessment of the future price uncertainty: comparison of the bootstrap and the delta-method methodologies.

	Price uncertainty (%) (bootstrap)	Price uncertainty (%) (delta-method)	Price uncertainty (%) (bootstrap)	Price uncertainty (%) (delta-method)
	LIFFE Weather futures <i>station: Paris-Orly</i>		CME Weather futures <i>station: O'Hare Airport</i>	
May	[-0.49 ; 0.48]	± 0.49	[-19.1 ; 20.9]	± 19.7
June	[-0.48 ; 0.48]	± 0.47	[-12.1 ; 12.0]	± 12.0
July	[-0.46 ; 0.47]	± 0.46	[-9.2 ; 8.9]	± 9.1
August	[-0.46 ; 0.48]	± 0.47	[-10.3 ; 10.4]	± 10.4
September	[-0.47 ; 0.50]	± 0.48	[-16.0 ; 17.6]	± 16.6
October	[-0.51 ; 0.52]	± 0.51	[-7.5 ; 7.7]	± 7.6
November	[-0.55 ; 0.55]	± 0.55	[-4.4 ; 4.5]	± 4.5
December	[-0.57 ; 0.59]	± 0.57	[-3.4 ; 3.4]	± 3.4
January	[-0.55 ; 0.56]	± 0.57	[-3.0 ; 2.9]	± 2.9
February	[-0.56 ; 0.55]	± 0.57	[-3.2 ; 3.1]	± 3.1
Mars	[-0.54 ; 0.53]	± 0.54	[-4.0 ; 4.0]	± 3.9
April	[-0.51 ; 0.51]	± 0.52	[-6.2 ; 6.4]	± 6.1
1 <sup>st</sup> Nov – 31 <sup>st</sup> March	[-0.47 ; 0.48]	± 0.48		

**Table 4** – Normality testing of the MLE estimator distribution

	Paris	Chicago
<i>Marginal distributions</i>	Kolmogorov statistic	
$\hat{d}$	.0060	.0068
$\hat{e}$	.0059	.0066
$\hat{a}_1$	.0046	.0054
$\hat{b}_1$	.0042	.0049
$\hat{a}_2$	.0047	-
$\hat{b}_2$	.0060	-
$\hat{a}$	.0081	.0045
$\hat{b}$	.0040	.0094*
$\hat{c}$	.0043	.0066
$\hat{\phi}_1$	.0059	.0080
$\hat{\phi}_2$	.0084	.0089
$\hat{\phi}_3$	.0035	.0055
<i>Multidimensional distribution</i>	<i>p</i> -value	
Skewness test	.0251*	.0538
Kurtosis test	.4684	.4192
Joint test	.0678	.1022

For kolmogorov test, at 5% confidence level, normality is rejected here when the statistic value is superior to 0.00895. Stars indicate the cases of rejection at level 5%.



# **COPULES ET DEPENDANCES : APPLICATION PRATIQUE A LA DETERMINATION DU BESOIN EN FONDS PROPRES D'UN ASSUREUR NON VIE**

David CADOUX  
*Institut des Actuaires (IA)*  
*GE Insurance Solutions*<sup>1</sup>

Jean-Marc LOIZEAU  
*Institut des Actuaires (IA)*  
*MAAF Assurances*<sup>2</sup>

## **RESUME**

La modélisation des dépendances entre lignes d'affaire d'un portefeuille d'assurance non vie a souvent fait l'objet d'hypothèses simplificatrices. Les copules sont un outil flexible qu'il est désormais possible d'utiliser pour représenter la dépendance entre risques de façon réaliste. Cet article présente un cas pratique d'application de la théorie des copules à la détermination du besoin en fonds propres d'un assureur non vie du marché français tenant compte du seul risque de fluctuation des sinistres. Une méthodologie spécifique de recherche des dépendances au sein du portefeuille d'assurance est mise en place. Les copules représentant le mieux ces interactions sont ensuite sélectionnées à l'aide d'un test d'adéquation du chi-deux. Des simulations de Monte-Carlo permettent enfin de mesurer l'impact des dépendances sur le besoin en fonds propres de la compagnie, ce dernier étant évalué à l'aide de plusieurs mesures de risque.

## **MOTS-CLEFS**

Besoin en fonds propres, mesures de risque, dépendance, copule, tau de Kendall, statistique du chi-deux, Monte-Carlo.

## **ABSTRACT**

The modeling of dependent business lines of a non life insurance portfolio has often been based on a set of simplified assumptions. Copulae are a versatile tool which can now be used to represent dependence between risks in a realistic way. This study presents a practical case where copulae theory is applied to assess the capital adequacy of a French

---

<sup>1</sup> 107 rue Saint-Lazare, 75009 Paris France - Tél. : +331 55 07 13 91 - Fax : +331 55 07 14 02

E-mail : [david.cadoux@ge.com](mailto:david.cadoux@ge.com)

<sup>2</sup> Chauray, 79036 Niort Cedex 9 France - Tél. : +335 49 34 43 00 - Fax : +335 49 17 55 83

E-mail : [jean-marc.loizeau@maaf.fr](mailto:jean-marc.loizeau@maaf.fr)

non life insurer only adjusted for the risk of volatility in insurance losses. Firstly, a specific methodology is developed to detect dependencies embedded in the portfolio. Secondly, copulae that better reflect those links are selected through a chi-square goodness-of-fit test. Finally, Monte-Carlo simulations are used to measure the impact of dependencies on the capital adequacy of the insurer, the latter being assessed thanks to several risk measures.

**KEYWORDS:**

Capital adequacy, risk measures, dependency, copula, Kendall's Tau, Chi-square statistic, Monte-Carlo.

**INTRODUCTION**

L'activité d'assurance requiert de disposer d'un niveau minimum de fonds propres pour absorber les mouvements défavorables de résultats non anticipés. La détermination de ce montant minimal est devenue une problématique majeure pour les assureurs, notamment depuis les deux dernières décennies. En effet, auparavant les marchés étaient régulés, moins volatils et les rendements exigés par les actionnaires étaient de fait moins élevés. Progressivement, la compétition s'est accrue, la sinistralité a augmenté avec une plus grande concentration des risques assurés, l'environnement juridique est devenu de plus en plus incertain, les mouvements capitalistiques et la notion de création de valeur pour l'actionnaire sont apparus. Dans ce nouveau contexte, les assureurs sont désormais fortement incités à développer une gestion optimale de leurs fonds propres qui doit satisfaire des intérêts divergents. D'un côté, les autorités de contrôle, les agences de notation, et dans une mesure croissante les assurés, recherchent une solvabilité maximale de la société et donc plus de fonds propres. De l'autre, les actionnaires espèrent maximiser le rendement de leur investissement en limitant le capital injecté dans la société.

La recherche d'une optimalité du niveau des fonds propres soulève une question importante : l'optimum souhaité reflète-t-il des dépendances potentielles entre les risques supportés par la compagnie ? Récemment encore les réponses actuarielles apportées à cette question étaient basées sur des hypothèses fortes : soit les risques étaient supposés indépendants, soit on admettait leur dépendance mais en leur imposant de suivre la même loi de distribution. Désormais, une modélisation plus réaliste des liaisons entre risques est possible grâce à la théorie des copules, objet d'un vif regain d'intérêt depuis quelques années.

L'impact de la dépendance entre risques sur la détermination du besoin en fonds propres d'un assureur n'a été analysé à l'aide des copules que dans un cadre théorique. Cet



article présente une mise en œuvre pratique de cette problématique appliquée au portefeuille non vie d'un assureur du marché français, en se concentrant sur la dépendance entre charges sinistres de plusieurs garanties.

La première partie sera consacrée aux mesures de risque. On discutera de leurs propriétés et on présentera celles qui peuvent être retenues pour déterminer le besoin en fonds propres. Dans la deuxième partie, on rappellera les principaux résultats autour de la dépendance et des copules, et on proposera notamment une méthode de sélection de la meilleure copule basée sur la statistique du chi-deux. La troisième partie présentera les données du portefeuille d'assurance analysé, décrira une méthodologie permettant d'exhiber des dépendances intra-branche et inter-branches au sein de ce portefeuille et mettra en exergue les copules décrivant le mieux ces dépendances. Au cours de la dernière partie, on modélisera le besoin en fonds propres via diverses mesures de risque, et on évaluera via des simulations de Monte-Carlo comment il est affecté par la prise en compte de dépendances modélisées par diverses copules.

## Partie 1. MESURES DE RISQUE

Le principal outil théorique pour calculer le besoin en fonds propres est défini sous le vocable « mesures de risque ». Certaines de ces mesures de risque sont manipulées depuis fort longtemps par les actuaires, plus particulièrement dans le domaine de la tarification. Les mesures de risque utilisées pour le besoin en fonds propres ont donné lieu à de nombreux travaux actuariels ces dernières années. De manière générale, elles visent à fixer un niveau de capital pour un portefeuille de risques donné, et mesurent le risque en un ou plusieurs nombres. Dans ce qui suit on donnera la définition d'une mesure de risque et les propriétés associées qui peuvent être recherchées pour évaluer le besoin en fonds propres, puis on présentera les principales mesures de risque permettant de fixer un niveau optimal de fonds propres.

### 1.1. Définition

Soit  $\Omega$  l'ensemble fini des états de nature possibles, on appelle variable aléatoire réelle une fonction  $X$  qui à un état de la nature  $\omega$  associe le réel  $X(\omega)$ . En assurance, le résultat d'une compagnie sur une période donnée ou la charge agrégée de sinistres (d'une ou plusieurs garanties) peuvent être formalisés de cette manière.  $X$  pourra être caractérisée par sa fonction de répartition  $F_X : F_X(x) = P\{\omega / X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\}$ .

On appelle mesure de risque une fonction  $\rho$  associant à un risque  $X$  un réel positif  $\rho(X)$ . Le besoin en capital d'une compagnie d'assurance non vie peut être formalisé en

utilisant une telle fonction.  $X$  représentera dans ce qui suit le résultat<sup>3</sup> de la société, le besoin en capital étant fonction de cette variable.

## 1.2. Propriétés

Une mesure de risque doit pouvoir vérifier un certain nombre de propriétés élémentaires. A ce jour, il n'existe pas de consensus dans la littérature actuarielle sur les propriétés que doit nécessairement respecter une mesure de risque. Nous rappelons ci-après le corps des propriétés pouvant s'appliquer aux mesures de risque utilisées pour estimer le besoin en capital et présentons une traduction simple de ces propriétés en nous inspirant des travaux de De La Foata et Odjo [2001]. Il existe d'autres propriétés qui ne sont pas présentées car elles sont plus spécifiques au calcul du chargement de la cotisation. Pour deux risques quelconques  $X$  et  $Y$ , les sept propriétés suivantes peuvent être formulées :

### 1) *Invariance par translation*

$$\rho(X+c) = \rho(X) - c, \text{ pour toute constante } c.$$

Si on ajoute (respectivement on retranche) un montant certain  $c$  au résultat d'un centre de profit<sup>4</sup>, le besoin en capital décroît (respectivement augmente) du même montant.

### 2) *Sous-additivité*

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y).$$

La fusion de deux centres de profit ne crée pas de risque supplémentaire. Au contraire, la diversification tend à réduire le risque global. Cette propriété permet ainsi une gestion décentralisée du besoin en capital dans les différents centres de profit sans courir le risque d'un besoin global supérieur à la somme des besoins individuels de chacun des centres. Si cette propriété n'était pas respectée, une société ne respectant pas un certain niveau requis de capital pourrait être incitée à se scinder artificiellement en deux entités afin de réduire son besoin en capital.

### 3) *Homogénéité positive*

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X), \forall \lambda \geq 0.$$

De même qu'une fusion ne crée pas de risque supplémentaire ( $\rho(\lambda X) \leq \lambda \rho(X)$ ), une fusion sans diversification ne réduit pas le besoin global en capital.

<sup>3</sup> Volontairement le résultat n'est pas défini ici car il dépend du modèle d'évaluation du besoin en capital mis en œuvre.

<sup>4</sup> Le centre de profit peut être soit la compagnie dans son ensemble soit limité à une branche d'activité donnée.

**4) Monotonie**

$$X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \geq \rho(Y).$$

Si les pertes encourues avec le risque  $X$  sont toujours supérieures à celles obtenues avec  $Y$ , le besoin en capital pour  $X$  doit être supérieur à celui pour  $Y$ .

**5) Propriété de borne supérieure**

$\rho(X) \leq \max(-X)$  , le besoin en capital est borné par la perte maximale possible.

**6) Conservatisme**

$\rho(X) = \rho(X^-)$  où  $X^-$  désigne la partie négative de  $X$ , ( $X^- = \min(X, 0)$ ).

Elle est définie par Artzner *et al.* [1999] notamment pour la détermination du besoin en capital, et conduit à ne prendre en compte que les valeurs négatives de  $X$ , traduisant ainsi une forte aversion au risque.

**7) Propriété de sévérité**

Le besoin en capital doit tenir compte des amplitudes possibles des pertes.

Selon Artzner *et al.* [1999], une mesure de risque vérifiant les quatre premières propriétés est dite cohérente. Selon ces auteurs, une mesure de risque appropriée doit respecter le critère de cohérence. Ce corps de propriétés définissant une mesure cohérente ne fait pas l'unanimité dans la communauté actuarielle. On peut montrer en effet qu'il existe des situations où le non respect d'une des propriétés est préférable. Le principe d'homogénéité positive est remis en question lorsqu'une variation d'échelle du risque conduit à un effet plus que proportionnel sur le besoin en capital, lié, par exemple, à une difficulté pour se réassurer. Un autre exemple construit par Perronnet *et al.* [2001] montre que la diversification, recherchée à travers l'agrégation des risques, limite bien la dispersion du risque mais n'augmente pas nécessairement la probabilité d'être solvable. Dans l'exemple mis en œuvre, un agent basant son critère de souscription sur l'écart-type, en raison de sa sous-additivité, réduit effectivement la dispersion du risque mais augmente sensiblement la probabilité d'être insolvable.

**1.3. Principales mesures de risque pour évaluer le besoin en fonds propres**

Cette section décrit les caractéristiques, avantages et inconvénients des principales mesures de risque susceptibles d'être mises en œuvre pour déterminer le besoin en fonds propres.

**Probabilité de ruine**

La probabilité de ruine dans sa version primaire correspond au percentile du point au-delà duquel le capital initial est totalement épuisé sur une période donnée suite à un

résultat déficitaire. Autrement dit, si on note  $C$  le capital initial donné, la probabilité de ruine est égale à  $F_X(-C) = P(X < -C)$ . Assez logiquement, elle a aussi été utilisée dans les modèles assurance en fixant un niveau minimum de probabilité de ruine,  $\alpha$ , jugé acceptable selon l'aversion au risque de l'agent et en déterminant ensuite le niveau de capital qui lui correspond. Dans ce cas, on a alors  $F_X(-C) = \alpha$  et  $C$  est cette fois déterminé en fonction de  $\alpha$ . La probabilité de ruine issue des modèles d'assurance est à l'origine de la Value at Risk (VaR), bien connue du monde bancaire.

### Value at Risk (VaR)

La VaR est une mesure de risque commune aux organismes financiers qui est totalement équivalente au concept de Sinistre Maximum Probable (SMP), très familier des assureurs non vie. Elle est égale à la perte maximale que peut subir une organisation, dans des conditions normales de marché, sur une période de temps donnée pour un certain niveau de probabilité  $\alpha$ . On a donc  $VaR_\alpha(X) = -\inf\{x : F_X(x) \geq \alpha\}$ .

De manière pratique, la mise en œuvre de la VaR consiste à faire varier la probabilité  $\alpha$  et à déterminer le capital minimal associé en début de période qui permette de faire face à la perte maximale en fin de période. On obtient donc rétrospectivement le niveau de capital en deçà duquel l'organisation est en ruine avec une probabilité supérieure à  $\alpha$ . La VaR utilisée dans ce contexte n'est autre que la probabilité de ruine évoquée plus haut.

L'avantage de la VaR est d'être un concept simple et facile à calculer. Elle vérifie les propriétés d'invariance par translation, d'homogénéité positive, de monotonie, de borne supérieure et de conservatisme. En revanche, elle n'est pas sous-additive et ne tient pas compte de la sévérité de la ruine, ce qui constitue la critique la plus souvent formulée à son égard. Cependant cette mesure de risque peut faire sens dans un objectif de solvabilité.

### TailVaR (TVaR)

La TailVaR (TVaR) aussi appelée Expected Shortfall, Conditional Tail Expectation ou bien encore Conditional VaR, est une mesure de risque définie de la manière suivante :

$$TVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \frac{P(X < -VaR_\alpha(X))}{\alpha} \cdot E[-X - VaR_\alpha(X) \mid X < -VaR_\alpha(X)].$$

Cette expression s'explique par le fait que pour une distribution discrète, on peut avoir  $P(X < -VaR_\alpha(X)) < \alpha$ . Dans la pratique, on se place généralement dans le cas où  $F_X(x)$  est continue<sup>5</sup> et on a alors

<sup>5</sup> Dans la pratique,  $F_X(x)$  est le plus souvent inconnue et approchée par simulations. Grâce aux capacités informatiques actuelles, on peut disposer aujourd'hui d'un très grand nombre de simulations qui permet de considérer que l'on a un continuum d'observations.

$$\begin{aligned} TVaR_\alpha(X) &= VaR_\alpha(X) + E[-X - VaR_\alpha(X) \mid X < -VaR_\alpha(X)] \\ &= VaR_\alpha(X) + E[-X \mid X < -VaR_\alpha(X)] - VaR_\alpha(X) \\ &= E[-X \mid X < -VaR_\alpha(X)]. \end{aligned}$$

Par construction, cette mesure de risque est très sensible à la queue de distribution et est de fait plus conservatrice que la VaR car pour un seuil  $\alpha$  on a toujours

$$TVaR_\alpha(X) > VaR_\alpha(X).$$

Elle est également facile à expliquer et présente la particularité de respecter un très grand nombre de propriétés puisqu'elle est non seulement cohérente au sens d'Artzner *et al.* [1999] mais elle vérifie aussi les propriétés de borne supérieure, de conservatisme et de sévérité. Ceci explique qu'elle soit la mesure de risque la plus souvent recommandée.

### Excess TailVaR (XTVaR)

La XTVaR n'est autre que la ruine moyenne au-delà d'un certain seuil :

$$XTVaR_\alpha(X) = E[-X - VaR_\alpha(X) \mid X < -VaR_\alpha(X)].$$

Cette mesure de risque, aussi appelée Mean Excess Loss, est équivalente à l'espérance de vie résiduelle utilisée dans les modèles d'actuariat vie. Ce n'est autre que la différence entre la TVaR et la VaR :  $TVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + XTVaR_\alpha(X)$ .

Si l'on pose  $\beta = VaR_\alpha(X)$ , alors on a  $XTVaR_\alpha(X) = TVaR_\alpha(X) - \beta$  et l'on voit que par construction la XTVaR ne peut vérifier les propriétés de sous additivité, d'homogénéité positive et de monotonie.

## Partie 2. DEPENDANCE ET COPULES

Supposer l'indépendance entre les risques d'un portefeuille d'assurance est une hypothèse forte qui doit être testée. Les copules présentent de nombreux avantages pour modéliser la dépendance entre risques. D'une part, elles permettent de décrire le comportement individuel de chaque risque et « couplent » les lois marginales pour obtenir la loi jointe. D'autre part, elles offrent une représentation fonctionnelle de la dépendance qui donne une description très complète de la forme de cette dernière. Dans cette partie sont présentés les résultats fondamentaux de la théorie des copules.

### 2.1. Dépendance ou corrélation ?

Il est important de rappeler que la dépendance et la corrélation sont des notions différentes. En effet, on a  $X$  et  $Y$  indépendantes  $\Rightarrow X$  et  $Y$  non corrélées ou  $\rho(X, Y) = 0$  mais la réciproque est fautive sauf dans le cas où les variables sont gaussiennes car la dépendance est alors entièrement caractérisée par le coefficient de corrélation. Le contre-

exemple le plus connu dans la littérature est le suivant : soit  $X \sim N(0,1)$  et  $Y = X^2$ , alors  $cov(X, Y) = E(X^3) = 0$ .

Bien qu'il soit facile à calculer et fréquemment présent dans les travaux actuariels, en assurance comme en finance, le coefficient de corrélation doit être utilisée avec précaution car il n'est pertinent qu'en présence de distributions elliptiques (distribution multivariée Normale ou de Student) ou de dépendance linéaire. Les erreurs d'interprétation et limites liées à son utilisation sont discutées dans Embrechts *et al.* [1999].

## 2.2. Qu'est-ce qu'une copule ?

### Définition 1 : copule

Une copule est une fonction de répartition multivariée  $C$  définie sur l'hypercube  $[0; 1]^n$  et dont les marginales sont uniformes sur  $[0; 1]$ .

### Théorème 1 - Théorème de Sklar [1959]

Soit  $F$  une fonction de répartition  $n$ -dimensionnelle avec des marginales  $F_1, \dots, F_n$ , alors il existe une  $n$ -copule  $C$  telle que pour tout  $x$  de  $R^n$ ,  $F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ .

Le théorème de Sklar appliqué à des variables aléatoires continues conduit au théorème suivant.

### Théorème 2

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un vecteur de variables aléatoires continues admettant  $F_1, \dots, F_n$  comme fonctions de répartition marginales et  $F$  comme fonction de répartition jointe, alors il existe une copule  $C$  qui vérifie la relation du théorème 1. Si les marginales  $F_1, \dots, F_n$  sont continues, alors  $C$  est unique, autrement  $C$  est uniquement déterminée sur  $Im(F_1) \times \dots \times Im(F_n)$ . ( $Im(X)$  représentant l'ensemble des valeurs prises par  $X$ ).

A partir du théorème 2, on voit qu'une copule permet d'exprimer une fonction de répartition multivariée selon ses marginales et que cette copule résume toute la structure de dépendance. Une copule n'est autre qu'une fonction de répartition dont les lois marginales sont uniformes, ce qui conduit à une expression probabiliste simple de la copule :

$$C(u_1, \dots, u_n) = Pr(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n).$$

Avec les copules, on ne travaille plus en nombre ou montant mais en rang. Autrement dit, dans la pratique on transforme linéairement les réalisations  $x_1, \dots, x_n$  en uniformes empiriques  $u_1, \dots, u_n$  où  $u_i = \frac{Rang(x_i)}{n+1}$  pour tout  $i$  de 1 à  $n$ .

### Définition 2 : densité d'une copule

La densité  $c$  d'une copule  $C$ , si elle existe, est définie comme suit

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C}{\partial u_1 \dots \partial u_n}(u_1, \dots, u_n).$$

### 2.3. Mesures de concordance

Il convient tout d'abord de rappeler la notion de concordance.

Soient  $(x, y)$  et  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  deux réalisations d'un vecteur aléatoire continu  $(X, Y)$ , alors  $(x, y)$  et  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  sont dites concordantes si  $(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) > 0$  et discordantes si  $(x - \tilde{x})(y - \tilde{y}) < 0$ .

#### Théorème 3

Soit  $\kappa$  une mesure de concordance pour des variables aléatoires continues  $X$  et  $Y$ .

1. si  $Y$  est une fonction croissante de  $X$ , alors  $\kappa\langle X, Y \rangle = 1$ ;
2. si  $Y$  est une fonction décroissante de  $X$ , alors  $\kappa\langle X, Y \rangle = -1$ ;
3. si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions strictement croissantes, alors

$$\kappa\langle \alpha(X), \beta(Y) \rangle = \kappa\langle X, Y \rangle.$$

Il est facile de construire des exemples où le coefficient de corrélation linéaire de Pearson n'est pas invariant par transformation strictement croissante (voir Embrechts *et al.* [2001]). Par conséquent, la corrélation linéaire n'est pas une mesure de concordance.

En revanche, le tau de Kendall et le rho de Spearman sont deux mesures de concordance bien connues en statistique. Elles donnent une mesure de la corrélation entre les rangs des observations, à la différence du coefficient de corrélation linéaire qui lui apprécie la corrélation entre les valeurs des observations. Elles offrent par ailleurs l'avantage de s'exprimer simplement en fonction de la copule associée au couple de variables aléatoires.

#### Définition 3 : tau de Kendall

Soient  $(X, Y)$  un couple de vecteurs aléatoires et  $(X', Y')$  une copie de  $(X, Y)$ , c'est-à-dire un couple de vecteurs en tout point identique à  $(X, Y)$ , le tau de Kendall s'écrit alors :

$$\tau(X, Y) = Pr\{(X - X') (Y - Y') > 0\} - Pr\{(X - X') (Y - Y') < 0\}.$$

Le tau de Kendall n'est autre que la différence entre la probabilité de concordance et celle de discordance. Son expression en terme de copule est la suivante :

#### Théorème 4

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires continues de copule  $C$ , alors

$$\tau(X, Y) = 4 \iint_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1 = 1 - 4 \iint_{[0,1]^2} \partial_u C(u, v) \partial_v C(u, v) dudv.$$

ce qui peut s'écrire encore  $\tau(X, Y) = 4E(C(U, V)) - 1$ , avec  $U, V \sim U(0, 1)$ .

Un estimateur du tau de Kendall se construit à partir d'un échantillon  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_T, y_T)\}$  de  $(X, Y)$  de la façon suivante :

$$\hat{\tau}(X, Y) = \frac{2}{T(T-1)} \sum_{j=2}^T \sum_{i=1}^{j-1} \text{sign}\{(x_j - x_i)(y_j - y_i)\} \quad \text{où } \text{sign}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \geq 0 \\ -1 & \text{si } z < 0 \end{cases} .$$

#### Définition 4 : rho de Spearman

Soient  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  et  $(X, Y)$  deux couples de vecteurs aléatoires copies d'un vecteur aléatoire  $(X, Y)$ , alors le rho de Spearman est égal à :

$$\rho_S(X, Y) = 3 \left[ \Pr\{(X - \tilde{X})(Y - Y') > 0\} - \Pr\{(X - \tilde{X})(Y - Y') < 0\} \right] .$$

Le rho de Spearman s'écrit aussi en fonction du coefficient  $\rho$  de corrélation linéaire de Pearson :  $\rho_S(X, Y) = \rho(F_X(X), F_Y(Y))$  où  $F_X$  et  $F_Y$  sont les fonctions de répartition respectives de  $X$  et  $Y$ . Son expression en terme de copule est la suivante :

#### Théorème 5

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires continues de copule  $C$ , alors

$$\rho_S(X, Y) = 12 \iint_{[0,1]^2} uv dC(u, v) - 3 = 12 \iint_{[0,1]^2} C(u, v) dudv - 3.$$

Un estimateur du rho de Spearman se construit à partir d'un échantillon  $\{(x_1, y_1), \dots, (x_T, y_T)\}$  de  $(X, Y)$  de la façon suivante :

$$\hat{\rho}_S(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^T (R_i - \bar{R})(S_i - \bar{S})}{\sqrt{\sum_{i=1}^T (R_i - \bar{R})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^T (S_i - \bar{S})^2}}$$

où  $R_i$  est le rang de  $x_i$ ,  $S_i$  celui de  $y_i$  et  $\bar{Z} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T Z_i$ .

#### 2.4. Dépendance de queue

Le concept de dépendance de queue fournit une description de la dépendance au niveau des queues de distribution, très intéressante pour étudier la survenance simultanée de valeurs extrêmes. C'est une mesure locale contrairement au tau de Kendall et au rho de Spearman qui mesurent la dépendance sur l'ensemble de la distribution.

#### Définition 5 : coefficients de dépendance de queue

Le coefficient de dépendance de queue inférieure ou *lower tail dependence coefficient* de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , de fonctions de répartition respectives  $F_X$  et  $F_Y$ , est défini par  $\lambda_L(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \Pr[X \leq F_X^{-1}(\alpha) \mid Y \leq F_Y^{-1}(\alpha)]$  (si cette limite existe).



Le coefficient de dépendance de queue supérieure ou *upper tail dependence coefficient* de deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , de fonctions de répartition respectives  $F_X$  et  $F_Y$ , est défini par  $\lambda_U(X, Y) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \Pr[X > F_X^{-1}(\alpha) \mid Y > F_Y^{-1}(\alpha)]$  (si cette limite existe).

On dit que  $X$  et  $Y$  sont asymptotiquement dépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution si  $\lambda_U \in (0; 1]$  et asymptotiquement indépendantes au niveau supérieur de la queue de distribution si  $\lambda_U = 0$ . Lorsque  $\lambda_U > 0$ , une interprétation simple peut être donnée lorsqu'on étudie la sinistralité extrême concomitante sur deux branches d'assurance : sachant qu'un sinistre extrême est survenu dans une branche, il existe une probabilité non nulle qu'un sinistre d'une intensité relative comparable survienne concomitamment dans l'autre branche.

La notion de copule de survie est très utile pour l'étude de la dépendance de queue. La définition en est la suivante.

**Définition 6 : copule de survie**

Soit  $\tilde{C}(u_1, \dots, u_n)$  la fonction définie par

$$\tilde{C}(u_1, \dots, u_n) = \bar{C}(1 - u_1, \dots, 1 - u_n) \quad \text{où} \quad \bar{C}(u_1, \dots, u_n) = \Pr[U_1 > u_1, \dots, U_n > u_n].$$

Alors  $\tilde{C}(u_1, \dots, u_n)$  est appelée copule de survie (*survival copula*) de la copule  $C$ .

**Définition 7**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires de copule  $C$ , alors on a

$$\lambda_L(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u} \quad \text{et} \quad \lambda_U(X, Y) = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}.$$

On montre facilement que le coefficient de dépendance de queue inférieure (resp. supérieure) de  $C$  est le coefficient de dépendance de queue supérieure (resp. inférieure) de  $\tilde{C}$ . Autrement dit, à partir d'une copule donnée, il est possible de créer une autre copule présentant une structure de dépendance de queue inversée.

**2.5. Copules archimédiennes**

Volontairement les copules gaussienne et de Student, dites copules elliptiques, ne seront pas présentées dans cet article. Elles sont en effet moins bien adaptées en assurance car elles s'appliquent à des distributions symétriques. Le lecteur pourra néanmoins en trouver une présentation dans Cadoux *et al* [2004]. Les copules archimédiennes ont le grand avantage de décrire des structures de dépendance très diverses dont notamment les dépendances dites asymétriques, où les coefficients de queue inférieure et de queue supérieure diffèrent.

**Définition 8 : copules archimédiennes**

Soit  $\varphi$  une fonction convexe, continue, strictement décroissante de  $[0; 1]$  dans  $[0; \infty[$  telle que  $\varphi(1) = 0$  et  $\varphi(0) = \infty$  alors  $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$  est une copule archimédienne stricte et  $\varphi$  est appelé générateur strict de  $C$ .

Notons que cette méthode de génération de copules peut être facilement étendue en dimension  $n$ . Elle présente un double intérêt. D'une part, elle permet de construire une grande variété de familles de copules. D'autre part, les copules ainsi générées ont des formes analytiques closes. Le tableau suivant regroupe les caractéristiques des familles les plus connues. On rappelle que le paramètre  $a$  mesure le degré de dépendance entre les risques. Plus il est élevé plus la dépendance est forte et une valeur positive de  $a$  indique une dépendance positive.

Copule	$\varphi(u)$	$C(u, v)$	$\lambda_L$	$\lambda_U$	$\tau_a$
<b>Gumbel</b>	$(-\ln u)^a, a \geq 1$	$\exp\left(-\left[(-\ln u)^a + (-\ln v)^a\right]^{1/a}\right)$	0	$2 - 2^{1/a}$	$1 - 1/a$
<b>Franck</b>	$-\ln\left(\frac{e^{-au} - 1}{e^{-a} - 1}\right), a \neq 0$	$-\frac{1}{a} \ln\left[1 + \frac{(e^{-au} - 1)(e^{-av} - 1)}{(e^{-a} - 1)}\right]$	0	0	$1 - \frac{4(1 - D_1(a))}{a}$
<b>Clayton</b>	$\frac{(u^{-a} - 1)}{a}, a > 0$	$(u^{-a} + v^{-a} - 1)^{\frac{1}{a}}$	$2^{1/a}$	0	$\frac{a}{a + 2}$

La copule de Gumbel n'appréhende que des dépendances positives et possède la caractéristique de pouvoir représenter des risques dont la structure de dépendance est plus accentuée sur la queue supérieure. Elle est à ce titre particulièrement adaptée en assurance et en finance pour étudier l'impact de la survenance d'événements de forte intensité sur la dépendance entre branches d'assurance ou actifs financiers.

La copule de Franck permet de modéliser les dépendances aussi bien positives que négatives. On note qu'il n'existe pas de dépendance de queue pour cette copule. Le tau de Kendall s'exprime en fonction de  $a$  grâce à la fonction Debye définie par

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt.$$

Comme la copule de Gumbel, la copule de Clayton ne permet de modéliser que les dépendances positives. A l'inverse de la copule de Gumbel, elle vise à rendre compte d'une dépendance sur les événements de faible intensité.

### 2.6. Copule HRT

La copule HRT n'appartient pas à la famille des copules archimédiennes. Elle a été introduite par Venter [2001] pour modéliser la dépendance sur des événements extrêmes de forte intensité. Elle a été construite comme étant la copule de survie de la copule de Clayton et présente donc une structure de dépendance inversée.

$$C(u, v) = u + v - 1 + \left( (1-u)^{-a} + (1-v)^{-a} - 1 \right)^{\frac{1}{a}}, \text{ et } \lambda_L = 0, \lambda_U = 2^{\frac{-1}{a}}, \tau_a = \frac{a}{a+2}.$$

### 2.7. Copule empirique

**Définition 9**, Deheuvels [1979] a introduit la notion de copule empirique :

Soit  $\{r_1^t, \dots, r_n^t\}$  la statistique de rang associée à l'échantillon multivarié  $\{x_1^t, \dots, x_n^t\}$  dont chaque vecteur possède  $J$  observations ( $\forall i \in [1; n], r_i^t$  est le rang de  $x_i^t$  parmi  $(x_i^t)_{t=1 \dots J}$ ) alors toute copule  $\hat{C}$  définie sur le treillis  $\left\{ \left( \frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_n}{T} \right) \mid 1 \leq k \leq n, 0 \leq t_k \leq T \right\}$  par 
$$\hat{C} \left( \frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_n}{T} \right) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \prod_{k=1}^n 1_{\{r_k^t \leq t_k\}}$$
 est une copule empirique.

Un exemple simple de calcul de copule empirique en dimension 2 avec  $J=T=3$  est donné dans Cadoux *et al.* [2004]. Il est important de noter que la copule empirique n'est pas unique mais que toutes les copules empiriques prennent les mêmes valeurs sur le treillis. Par ailleurs, si l'on note  $\hat{C}_T$  la copule empirique d'ordre  $T$ , où  $T$  représente la taille de l'échantillon utilisé pour sa construction, alors  $\hat{C}_T$  converge asymptotiquement vers  $C$  (voir Faivre [2002]).  $\hat{C}$  offre l'avantage de s'affranchir des fonctions de répartition marginales. En revanche, l'estimateur empirique naturel de la copule fait lui appel aux lois marginales et s'écrit  $\tilde{C}(u_1, \dots, u_n) = \tilde{F}(\tilde{F}_1^{-1}(u_1), \dots, \tilde{F}_n^{-1}(u_n))$  où  $\tilde{F}$  est la fonction de répartition empirique jointe et  $\tilde{F}_i$  la fonction de répartition empirique marginale.

Il est également possible de définir une densité empirique  $\hat{c}$  (équivalente à la densité de Radon-Nikodym) pour la copule empirique  $\hat{C}$  :

$$\hat{c} \left( \frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_n}{T} \right) = \sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_n=1}^2 (-1)^{i_1 + \dots + i_n} \hat{C} \left( \frac{t_1 - i_1 + 1}{T}, \dots, \frac{t_n - i_n + 1}{T} \right).$$

Elle est parfois appelée *empirical copula frequency* dans les travaux anglo-saxons et représente la probabilité d'appartenance à un hypercube de  $[0; 1]^n$  de longueur d'arrête  $\frac{1}{T}$ .

Il est possible d'exprimer directement  $\hat{C}$  en fonction de  $\hat{c}$  de la manière suivante :

$$\hat{C}\left(\frac{t_1}{T}, \dots, \frac{t_n}{T}\right) = \sum_{i_1=1}^{t_1} \dots \sum_{i_n=1}^{t_n} \hat{c}\left(\frac{i_1}{T}, \dots, \frac{i_n}{T}\right).$$

$\hat{C}$  et  $\hat{c}$  sont discontinues par construction et leur discontinuité s'accroît lorsque  $T$  diminue. Dans la pratique, leur temps de calcul, croissant avec  $T$ , peut être assez long. Il est conseillé de ne pas choisir une valeur trop grande de  $T$  afin de limiter les temps de traitement informatique tout en veillant à ne pas retenir une valeur trop faible qui conduirait à des résultats trop discontinus, engendrant alors une perte d'information sur la forme de la distribution. Ces deux fonctions empiriques peuvent être utilisées graphiquement mais elles ne permettent pas par simple visualisation de choisir la famille paramétrique de copules la mieux adaptée à la structure de dépendance des données.

## 2.8. Inférence statistique

Cette partie présente les principales méthodes permettant d'estimer le paramètre de la copule.

### Méthode des moments

Cette méthode revient à se donner une mesure de concordance  $\kappa\langle C \rangle$  et à considérer que la valeur du paramètre  $a$  de la copule  $C$  est celle qui égalise la valeur théorique  $\kappa\langle C(a) \rangle$  à  $\hat{\kappa}\langle C \rangle$ . Elle n'assure aucune robustesse de l'estimateur. Dans la pratique, l'estimateur empirique du tau de Kendall est le plus souvent utilisé comme mesure de concordance en raison de sa simplicité de calcul.

### Méthode du maximum de vraisemblance

A partir du théorème 1 et de la définition 2, sous des conditions de continuité, la densité jointe de la distribution  $F$  s'écrit :

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i).$$

Soient  $\{(x_1^t, \dots, x_n^t)\}_{t=1}^T$  l'échantillon d'observations,  $\theta$  le vecteur  $K \times 1$  des paramètres à estimer et  $\Theta$  l'espace dans lequel  $\theta$  prend ses valeurs.

La log-vraisemblance s'exprime alors

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_1^t), \dots, F_n(x_n^t)) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^n \ln f_k(x_k^t).$$

L'estimateur de  $\theta$  noté  $\hat{\theta}_{ML}$ , est tel que  $l(\hat{\theta}_{ML}) \geq l(\theta), \forall \theta \in \Theta$ . Il vérifie la propriété de normalité asymptotique :

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{ML} - \theta_0) \xrightarrow{L} N(0, I^{-1}(\theta_0)), \text{ avec } I(\theta_0) \text{ la matrice d'information de Fisher.}$$

Le problème avec cette méthode est qu'elle peut engendrer des temps de calcul très longs dans le cas d'une grande dimension car elle nécessite d'estimer conjointement les paramètres des lois marginales et les paramètres de la structure de dépendance. De plus, l'estimation de la copule est sensible à une éventuelle erreur d'estimation des marginales car elles interviennent directement dans le calcul de la log-vraisemblance.

### Méthode IFM (Inference Functions for Margins)

La méthode IFM ou méthode des fonctions d'inférence des marginales a été proposée par Joe *et al.* [1996]. Elle repose sur le fait que la représentation en copule permet de séparer les paramètres spécifiques des distributions marginales de ceux de la structure de dépendance. Ainsi, la log-vraisemblance peut s'écrire de la manière suivante :

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x'_t, \theta_1), \dots, F_n(x'_t, \theta_n); a) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^n \ln f_k(x'_t; \theta_k)$$

où  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n, a)$  le vecteur des paramètres contient les paramètres  $\theta_k$  de chaque marginale et les paramètres  $a$  de la copule. La maximisation s'effectue en deux étapes :

on estime les paramètres de chaque marginale

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_k &= \arg \max l_k(\theta_k) \\ &= \arg \max \sum_{t=1}^T \ln f_k(x'_t; \theta_k) \end{aligned}$$

on estime  $a$  à partir des estimateurs précédents

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \arg \max l_c(a) \\ &= \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x'_t, \hat{\theta}_1), \dots, F_n(x'_t, \hat{\theta}_n); a). \end{aligned}$$

Là encore, l'estimateur  $\hat{\theta}_{IFM} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n, \hat{a})$  vérifie la propriété de normalité asymptotique et on a  $\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IFM} - \theta_0) \rightarrow N(0, \nu^{-1}(\theta_0))$

avec  $\nu(\theta_0)$  la matrice d'information de Godambe. Si on définit  $g(\theta) = \left( \frac{\partial}{\partial \theta_1} l_1, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_n} l_n \right)$

alors la matrice de Godambe s'écrit (Joe [1997]) :

$$\nu(\theta_0) = D^{-1} M (D^{-1})^T \text{ où } D = E \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (g(\theta)^T) \right] \text{ et } M = E [g(\theta)^T g(\theta)].$$

Cette méthode pourrait présenter l'avantage de reposer sur des calculs plus légers que ceux générés par la méthode du maximum de vraisemblance mais la détermination de la matrice de Godambe peut s'avérer très complexe en raison des multiples calculs de dérivées. Là encore, la méthode est sensible à une éventuelle erreur de spécification des marginales pour la même raison que celle évoquée plus haut.

#### Méthode CML (Canonical Maximum Likelihood)

Cette méthode, recommandée par Bouye *et al.* [2000], est voisine de la méthode IFM à la différence qu'elle ne nécessite pas d'avoir recours à l'estimation des marginales. Pour cela, les observations  $\{(x_1^t, \dots, x_n^t)\}_{t=1}^T$  sont transformées en uniformes  $\{(\hat{u}_1^t, \dots, \hat{u}_n^t)\}_{t=1}^T$  en utilisant les fonctions de répartition empirique univariées et en estimant le paramètre comme suit :

$$\hat{a} = \arg \max \sum_{t=1}^T \ln c(\hat{u}_1^t, \dots, \hat{u}_n^t; a).$$

Cette méthode présente le grand avantage de procéder à une estimation paramétrique de la copule totalement indépendante de la forme paramétrique des lois marginales. En outre, elle génère des temps de calcul limités<sup>6</sup>. Ce sont deux atouts majeurs qui la rendent très attractive. C'est cette méthode qui a été choisie dans notre application.

#### 2.9. Sélection d'une copule à partir du test d'adéquation du chi-deux

La sélection de la meilleure copule doit s'appuyer sur un test statistique. Le test du chi-deux utilisé dans le cadre de l'ajustement d'une distribution paramétrique à une distribution empirique constitue à cet égard un outil intéressant pour le choix d'une copule. Habituellement mis en œuvre pour ajuster une distribution univariée, il offre l'avantage de facilement s'adapter au cas des distributions multivariées. Il est vrai qu'il nécessite de procéder à un découpage en classes qui réduit sa puissance et que la manière de choisir ces classes peut être critiquée. Néanmoins, sa facilité d'utilisation en fait un outil de décision très intéressant pour sélectionner la meilleure copule.

Nous proposons ci-après une méthode statistique de sélection de copule basée sur un ajustement bivarié entre la copule paramétrique et la copule empirique effectué à partir de la statistique du chi-deux. Notons que l'extension de cette méthodologie au cas trivarié est immédiate en veillant à bien adapter le calcul des probabilités trivariées (voir Cadoux *et al.* [2004]). Notre approche s'inspire d'un article de Hurlimann [2001a] dans lequel le test du

---

<sup>6</sup> Pour accélérer la maximisation du programme, il est conseillé de partir d'une valeur initiale de  $a$  égale à celle qui découle de l'estimateur des moments.

chi-deux est utilisé dans une version modifiée de la méthode IFM. Le processus de sélection d'une copule est décrit ci-après.

**1. Estimation du paramètre de la copule**

On estime le paramètre de la copule bivariable à partir de la méthode CML afin de s'affranchir d'une éventuelle erreur de spécification des lois marginales. On note  $C_{\hat{a}_{cml}}(u_1, u_2)$  la copule paramétrique obtenue.

**2. Calcul de la copule empirique**

On définit un treillis d'ordre  $T$  adapté au nombre d'observations et aux contraintes de temps de calcul puis on calcule la copule empirique bivariable sur ce treillis :

$$\hat{C}\left(\frac{t_1}{T}, \frac{t_2}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \prod_{k=1}^2 1_{\{t_k^t \leq t_k\}}$$

**3. Choix d'un nombre d'intervalles pour découper les uniformes univariées**

On se donne un nombre  $k$  afin de découper chacune des uniformes en  $k$  intervalles et de construire un tableau de contingence bivariable des effectifs.  $k$  et  $T$  doivent être choisis de concert afin d'obtenir aisément les effectifs empiriques à partir de la copule empirique. Sans a priori sur la distribution empirique bivariable, on découpe chaque uniforme sur des intervalles identiques. On note  $(b_0, b_1], (b_1, b_2], \dots, (b_{k-1}, b_k]$  et  $(c_0, c_1], (c_1, c_2], \dots, (c_{k-1}, c_k]$  les  $k$  intervalles pour découper respectivement  $u_1$  et  $u_2$ .

**4. Calcul des effectifs et construction du tableau de contingence bivariable**

L'objet de cette étape est de calculer les effectifs empiriques et théoriques sur chacun des  $k^2$  intervalles bidimensionnels  $(b_{i-1}, b_i] \times (c_{j-1}, c_j]$ ,  $i, j = 1, \dots, k$ .

Pour ce faire, il convient de calculer les probabilités bivariables  $p_{i,j}$  d'appartenance à un intervalle. La formule de calcul est la suivante :

$$p_{i,j} = C(b_i, c_j) - C(b_{i-1}, c_j) - C(b_i, c_{j-1}) + C(b_{i-1}, c_{j-1})$$

où  $i, j = 1, \dots, k$  et  $C(x, y) = \hat{C}(x, y)$  ou  $C_{\hat{a}_{cml}}(x, y)$ .

Les effectifs  $f_{i,j}$  sont calculés en multipliant les probabilités bivariables par le nombre total d'observations. On obtient alors un tableau de contingence bivariable donnant les effectifs empiriques issus de la copule empirique et les effectifs théoriques issus de la copule paramétrique. Il a la forme suivante :

$u_1 \setminus u_2$	$(c_0, c_1]$	$(c_1, c_2]$	...	$(c_{k-1}, c_k]$
$(b_0, b_1]$	$f_{1,1}$	$f_{1,2}$	...	$f_{1,k}$
$(b_1, b_2]$	$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	...	$f_{2,k}$
...	...	...	...	...
$(b_{k-1}, b_k]$	$f_{k,1}$	$f_{k,2}$	...	$f_{k,k}$

### 5. Application du critère de Cochran et regroupement en classes

Dans la pratique, les effectifs théoriques de certaines cases peuvent être très faibles voir proches de zéro. Il faut alors procéder à un regroupement des  $k^2$  intervalles initiaux en  $n$  classes permettant de respecter le critère de Cochran qui recommande d'avoir des effectifs théoriques au moins supérieurs à 1% du nombre total d'observations dans chaque classe, et supérieurs à 5% du nombre total d'observations dans au moins 80% des classes. Ce regroupement est aussi à effectuer sur le tableau bivarié des effectifs empiriques. Selon les zones de dépendance recherchées, on pourra notamment isoler les cellules des queues de distribution ou retenir des directions particulières comme la diagonale principale par exemple.

### 6. Calcul de la statistique bivariée du chi-deux et sélection de la copule

Après avoir défini le regroupement en  $n$  classes vérifiant le critère de Cochran, on calcule la statistique bivariée du chi-deux observée comme suit :

$$\chi_{obs}^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(O_j - E_j)^2}{E_j}$$

où  $O_j$  et  $E_j$  représentent respectivement les effectifs observés et attendus dans chaque classe  $j$ ,  $j=1, \dots, n$ . Cette statistique suit une loi du chi-deux à  $(n-r-1)$  degrés de liberté avec  $r$  le nombre de paramètres estimés de la copule. On se donne ensuite un seuil critique  $\alpha$  pour la zone de rejet et on calcule la p-valeur  $\hat{\alpha} = P(\chi_{n-r-1}^2 > \chi_{obs}^2)$ . On rejette l'adéquation de la copule paramétrique si  $\hat{\alpha} < \alpha$ . Il faut préciser pour les praticiens que la p-valeur exacte  $\hat{\alpha}$  se situe en fait dans l'intervalle suivant :

$$P(\chi_{n-1}^2 > \chi_{obs}^2) \leq \hat{\alpha} \leq P(\chi_{n-r-1}^2 > \chi_{obs}^2).$$

Cet encadrement étant de faible amplitude lorsque  $r$  est petit vis à vis de  $n$ , le seuil critique  $\alpha$  sera le plus souvent en dehors de cet encadrement et on conclura sans ambiguïté (Besson *et al* [2004]). Parmi les copules acceptées, on sélectionne alors celle qui maximise la p-valeur.



### **Partie 3. PORTEFEUILLE ETUDIE ET RECHERCHE DES DEPENDANCES**

Cette partie aborde l'aspect pratique de nos travaux. On y présentera le portefeuille d'assurance non vie étudié et les risques retenus pour l'application. On mettra ensuite en évidence un certain nombre de dépendances et on sélectionnera les copules les représentant le mieux.

#### **3.1. Portefeuille étudié**

Les données en notre possession sont celles d'une société d'assurance importante du marché français des particuliers et des petits professionnels. L'application se limite au seul risque de fluctuation de la charge sinistres du portefeuille, qui constitue un aléa majeur parmi ceux susceptibles d'affecter la solvabilité d'un assureur non vie. Trois branches ont été retenues au sens de la vision produit qu'en a la compagnie : Automobile (AUTO), Multirisque Habitation des Particuliers (MR PART), et Multirisque des Professionnels (MR PROF). Ce périmètre d'analyse représente plus de 70% du chiffre d'affaire non-vie de la compagnie. La base de données exploitée contient tous les sinistres survenus de 1996 à 2001, soit plus de 7,5 millions de sinistres. Les branches de la compagnie se déclinent ensuite en garanties. Au total, on en dénombre 23 comme entre autres les garanties Responsabilité Civile (RC), Tempête, Vol, Catastrophes Naturelles (Cat Nat).

Afin de disposer d'un échantillon suffisamment grand pour détecter les dépendances entre charge sinistres, on agrège les coûts individuels des sinistres par mois de survenance, ce qui conduit à 72 mois de charge sinistres pour chaque garantie. Il est important de souligner que la dépendance est évaluée sans analyser d'éventuels phénomènes de saisonnalité en raison de l'historique limité à six ans. Les mois constituant l'échantillon sont donc considérés comme indépendants, et on fait l'hypothèse qu'on a la même loi d'un mois à l'autre pour une garantie donnée.

Avant toute estimation statistique sur les charges sinistres mensuelles, les redressements suivants ont été réalisés :

- Les charges de sinistres ne sont pas comparables d'un mois à l'autre. Pour l'être, on doit procéder à une mise « as if » qui corrigera les sinistres des éléments suivants : évolution de la taille du portefeuille pour obtenir un portefeuille de taille constante, évolution de l'inflation pour avoir les sinistres en euros constants, évolution des franchises pour comparer les sinistres avec un même seuil de franchise.

- Les charges de sinistre issues des fichiers ne sont pas toutes stabilisées : des sinistres tardifs peuvent encore être déclarés, des modifications d'évaluations et des règlements complémentaires des sinistres en cours de gestion peuvent intervenir ... Il est donc nécessaire de calculer la charge finale prévisible de chaque exercice et de chaque mois de survenance, c'est-à-dire d'avoir une vision « à l'ultime » des sinistres.

En accord avec les experts de la compagnie, l'hypothèse a été faite que les évolutions de structure de portefeuille avaient un impact limité. De plus, le contenu des garanties et leurs plafonds ainsi que les méthodes de provisionnement n'ont pas subi de changement significatif sur la période observée. Ainsi, ces éléments n'ont conduit à aucune correction des charges sinistres.

Les tempêtes de décembre 1999, Lothar et Martin, représentent plus de 180 millions d'euros de charge sinistres pour la compagnie, dont plus de 90% concernent la garantie Tempête. Leur impact exceptionnel sur le portefeuille, rendant difficile l'ajustement de lois de distribution sur les charges sinistres mensuelles, nous a conduit à les exclure des traitements.

Après redressement, une loi de distribution marginale a pu être ajustée pour chaque charge sinistres des 23 garanties. La loi Log-Normale présente le meilleur ajustement dans 19 cas. Les lois de Weibull et Gamma sont retenues chacune deux fois.

### 3.2. Recherche des dépendances

La recherche porte à la fois sur les dépendances entre garanties à l'intérieur d'une même branche et sur les dépendances entre garanties de branches différentes. L'analyse repose sur :

- Les mesures de concordance du tau de Kendall et du rho de Spearman dont les valeurs absolues sont significatives au-delà de 0,21 et 0,30 respectivement pour un seuil de confiance de 1% et un échantillon de 72 observations (voir Saporta [1990])
- Le test d'indépendance du chi-deux au seuil 1%, qui contrairement aux mesures précédentes, ne donne aucune information sur le sens de la dépendance.

Le processus de sélection peut être décomposé en trois étapes.

#### *Etape 1 : sélection des couples avec une dépendance significative*

L'analyse de la significativité des mesures de concordance et du test d'indépendance du chi-deux conduit à ne retenir que 29 couples de garanties sur 253 combinaisons possibles.

**Etape 2 : exclusion des couples avec une dépendance négative**

L'intérêt de la compagnie portant avant tout sur les dépendances susceptibles de générer un besoin additionnel en capital, les dépendances négatives ont été volontairement omises.

**Etape 3 : exclusion des couples avec une dépendance difficilement interprétable**

Enfin, seules ont été sélectionnées les dépendances faisant l'objet d'une interprétation possible de la part des experts de la compagnie : relation de cause à effet entre deux garanties, ou relation due à une cause commune.

Le tableau suivant regroupe les 9 couples finalement sélectionnés à l'issue de ce processus, triés par valeurs décroissantes du tau de Kendall (mesure de concordance privilégiée car elle peut être reliée simplement au paramètre de la copule).

Couples triés par valeurs décroissantes du tau de Kendall		tau de Kendall	rho de Spearman	Proba. chi-deux 4 classes
MR PART.-Tempete inondations	MR PROF.-Tempete	0.68	0.83	0.00%
AUTO-Tempete	MR PART.-Tempete inondations	0.61	0.79	0.00%
AUTO-Tempete	MR PROF.-Tempete	0.55	0.74	0.00%
AUTO-Cat Nat	MR PROF.-Cat Nat	0.53	0.70	0.00%
MR PART.-Cat Nat	MR PROF.-Cat Nat	0.48	0.66	0.00%
MR PROF.-Pertes Financières	MR PROF.-Incendie	0.48	0.66	0.00%
AUTO-Cat Nat	MR PART.-Cat Nat	0.42	0.59	0.02%
AUTO-Vol	MR PROF.-Vol	0.34	0.48	0.13%
AUTO-RC matérielle	AUTO-Tous risques	0.31	0.44	0.00%

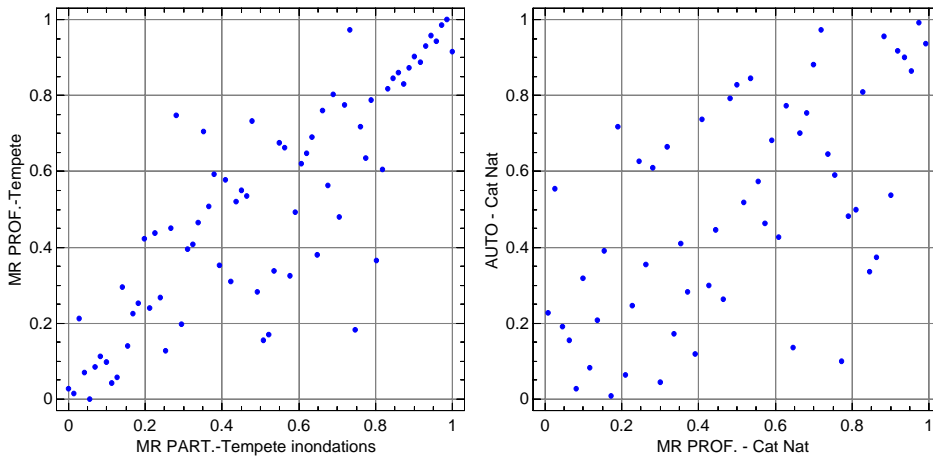
On note que 7 couples illustrent une dépendance inter-branches et deux couples une dépendance intra-branche. Les dépendances observées s'interprètent comme suit :

- **Couples Tempête et Cat Nat** : ils présentent les plus fortes dépendances. Les évènements climatiques impactent les automobiles, les habitations des particuliers et les locaux des professionnels en même temps.
- **AUTO-RC matérielle / AUTO-Tous risques** : l'interprétation de la dépendance observée est qu'un même sinistre en assurance Automobile peut fréquemment mettre en jeu la garantie RC pour les dommages aux tiers, et la garantie Tous risques pour les dommages au véhicule assuré.
- **MR PROF-Pertes Financières / MR PROF-Incendie** : l'incendie de bâtiments professionnels peut fréquemment générer des pertes d'exploitation ultérieures.

- **AUTO-Vol / MR PROF-Vol** : la liaison entre ces deux garanties Vol s'explique par l'évolution de la délinquance qui constitue une variable latente les affectant conjointement.

Les autres garanties non retenues seront considérées comme indépendantes entre elles et aussi vis-à-vis des garanties dépendantes sélectionnées.

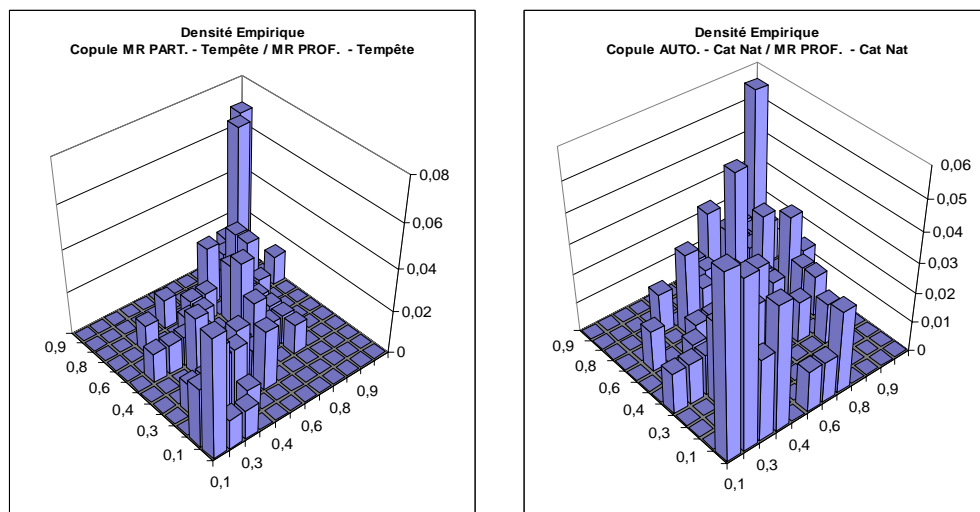
On donne ci-dessous un exemple graphique de deux couples illustrant la dépendance entre uniformes empiriques. A titre de comparaison, en cas d'indépendance parfaite nous devrions trouver dans chaque carré du graphique 72/25 observations, soit environ 3 points.



- **MR PART–Tempête / MR PROF–Tempête** : Le nuage de points est très proche de la 1<sup>ère</sup> bissectrice. Les queues de distribution sont très concentrées, notamment la queue supérieure.
- **MR PROF–Cat Nat / AUTO–Cat Nat** : Le nuage de points est moins proche de la 1<sup>ère</sup> bissectrice et les queues de distribution sont moins concentrées.

Le sens et l'intensité des dépendances entre uniformes empiriques observés graphiquement ont confirmé le classement des couples obtenu à l'issue de la phase de recherche de dépendances. En outre, ces graphiques donnent un premier renseignement sur la dépendance de queue qui peut être complété par une étude graphique des densités empiriques. Dans le cas bivarié, la densité empirique de la copule empirique n'est autre que la probabilité d'appartenance à un carré  $[0; 1]^2$  découpé en  $T$  arrêtes de longueur  $1/T$ .

Les graphiques suivants présentent la densité empirique de la copule empirique calculée avec  $T=12$ . Plus une barre est haute, plus il existe d'observations appartenant à l'intervalle bivarié  $[k/T; (k+1)/T] \times [j/T; (j+1)/T]$ ,  $k, j \in [0; T-1]$ .



De manière générale, la répartition des barres dessine une forme assez proche de celle du nuage de points des uniformes empiriques. Cela signifie que l'ordre  $T$  de construction de la copule empirique n'est pas trop faible car peu d'information est perdue sur la forme de la distribution bivariée. Autrement dit, les barres n'agrègent pas trop de données et l'analyse de la densité empirique fait sens. Pour la copule empirique liée à la garantie Tempête, on note une très forte surpondération dans la queue de distribution supérieure, et à un degré moindre dans la queue de distribution inférieure. Pour la copule empirique liée à la garantie Cat Nat, une surpondération dans les queues de distribution apparaît, plus marquée dans la queue de distribution inférieure que dans la queue de distribution supérieure.

### 3.3. Recherche des meilleures copules : estimation des paramètres et sélection

Les copules testées sont la copule HRT et les copules archimédiennes de Gumbel, Franck, Clayton. Néanmoins, la présence de dépendances de queue pour certains couples, illustrée notamment par les graphiques ci-dessus, pourrait éventuellement conduire à tester la copule  $t$  de Student.

Dans un premier temps, on calcule l'estimateur des moments du paramètre  $a$  de chaque copule,  $\hat{a}_{moments}$ , en retenant l'estimateur empirique du tau de Kendall comme

mesure de concordance. Dans un second temps, on utilise  $\hat{a}_{moments}$  comme valeur initiale permettant d’obtenir après maximisation  $\hat{a}_{CML}$ , estimateur du maximum de la logvraisemblance selon la méthode CML.

Pour les deux couples précédents, les tableaux suivants regroupent  $\hat{a}_{moments}$ ,  $\hat{a}_{CML}$ , le tau de Kendall issu de  $\hat{a}_{CML}$ ,  $\hat{\tau}_{\hat{a}_{CML}}$ , et le maximum de la logvraisemblance calculé à partir de  $\hat{a}_{CML}$ .

MR PART. – Tempête / MR PROF. – Tempête

	Gumbel	Clayton	Franck	HRT
$\hat{a}_{moments}$	3,094	4,189	10,426	4,189
$\hat{a}_{CML}$	2,917	2,345	9,512	2,866
$\hat{\tau}_{\hat{a}_{CML}}$	0,657	0,540	0,652	0,589
Logvrais.	48,468	35,839	43,604	41,355

AUTO – Cat Nat / MR PROF. – Cat Nat

	Gumbel	Clayton	Franck	HRT
$\hat{a}_{moments}$	2,068	2,136	6,044	2,136
$\hat{a}_{CML}$	1,724	0,394	5,126	1,398
$\hat{\tau}_{\hat{a}_{CML}}$	0,420	0,165	0,465	0,411
Logvrais.	24,676	12,721	22,910	22,593

Le test du chi-deux a été mis en œuvre pour sélectionner les copules représentant au mieux la structure de dépendance des différentes associations. Cela nécessite de découper chaque uniforme en  $k$  intervalles. Le nombre élevé d’associations testées a nécessité de développer une méthode standard de découpage en intervalles afin de limiter l’ampleur des travaux et des analyses. Pour ce faire, chacune des uniformes au sein d’une association a été découpée de manière identique : même nombre d’intervalles et même longueur d’intervalles. Plusieurs valeurs de  $k$  ont dû être testées afin de respecter le critère de Cochran.

In fine, les valeurs retenues pour  $k$  sont 4 et 6. A titre d’exemple, si dans le cas bivarié on a  $k = 4$ , alors le découpage de chaque uniforme correspondra aux intervalles  $(0; 0.25]$ ,  $(0.25; 0.50]$ ,  $(0.50; 0.75]$ ,  $(0.75; 1]$ .

Les effectifs empiriques dans chaque intervalle sont calculés à partir de la copule empirique. Le treillis de la copule empirique a été ajusté afin d’obtenir directement les fréquences empiriques sur les  $k$  intervalles. Dans le cas bivarié avec  $k = 4$ , l’ordre  $T$  retenu pour le calcul de la copule empirique est égal à 18.

La valeur du seuil critique  $\alpha$  pour la zone de rejet est unique et égale à 5% et l’encadrement de la p-valeur exacte,  $\hat{\alpha}$ , est systématiquement calculé. Parmi les copules situées dans la zone d’acceptation, on sélectionne celle dont les bornes de l’encadrement de  $\hat{\alpha}$  sont maximales, ce qui est équivalent à sélectionner celle dont la statistique du chi-deux est la plus faible.

Afin d'illustrer la mise en pratique du test du chi-deux, on donne ci-après le détail des résultats pour le couple « MR PART–Tempête / MR PROF–Tempête », avec uniquement les effectifs théoriques issus de la copule de Gumbel.

Effectifs empiriques					Ecart au carré pondérés				
	0 - 0,25	0,25 - 0,50	0,50 - 0,75	0,75 - 1		Franck	Clayton	Gumbel	HRT
0 - 0,25	13.00	5.00	0.00	0.00	C1	0.00	0.02	0.03	0.75
0,25 - 0,50	2.00	7.00	9.00	0.00	C2	0.50	0.06	0.24	0.00
0,50 - 0,75	3.00	5.00	6.00	4.00	C3	1.08	0.07	1.09	0.75
0,75 - 1	0.00	1.00	3.00	14.00	C4	0.06	2.08	0.00	0.00
					C5	0.01	0.15	0.05	0.91
					C6	0.16	2.35	0.00	0.01
					C7	6.16	4.15	4.49	4.48
					C8	0.24	0.03	0.05	0.05
					C9	0.16	2.35	0.00	0.01
					C10	0.01	0.15	0.05	0.91
Effectifs théoriques de la copule Gumbel					Chi-deux = somme des écarts au carré pondérés				
	0 - 0,25	0,25 - 0,50	0,50 - 0,75	0,75 - 1					
0 - 0,25	12.41	4.54	0.97	0.09	<b>8.38</b>	<b>11.39</b>	<b>5.99</b>	<b>7.87</b>	
0,25 - 0,50	4.54	8.41	4.50	0.55	p-value à 8 DL				
0,50 - 0,75	0.97	4.50	9.15	3.37	<b>0.40</b>	<b>0.18</b>	<b>0.65</b>	<b>0.45</b>	
0,75 - 1	0.09	0.55	3.37	13.99	p-value à 9 DL				
					<b>0.50</b>	<b>0.25</b>	<b>0.74</b>	<b>0.55</b>	

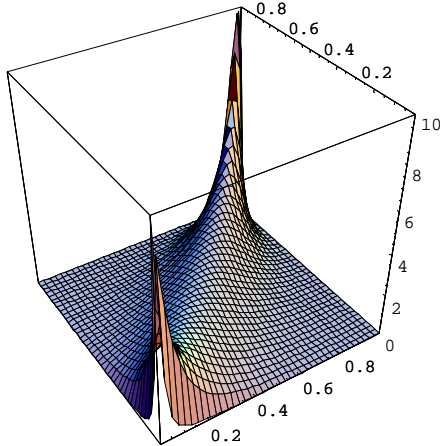
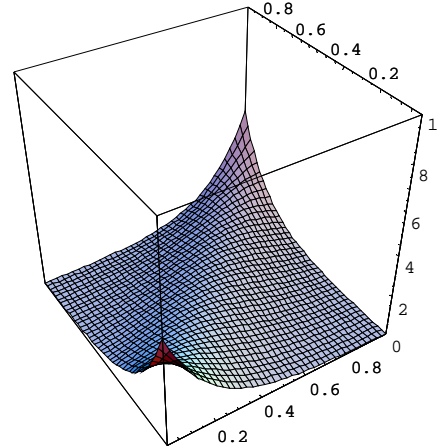
Ici, les uniformes ont été découpées en 4 intervalles conduisant à 16 cases, ensuite regroupées en 10 classes. Toutes les copules sont acceptées au seuil de 5%. La copule de Gumbel dont la p-valeur est maximale est sélectionnée comme copule décrivant le mieux la structure de dépendance de ce couple.

Les résultats ci-dessous correspondent à l'ensemble des dépendances analysées.

	copule	$\hat{a}_{CML}$
MR PART. – Tempête / MR PROF. – Tempête	Gumbel	2,917
MR PART. – Tempête / AUTO – Tempête	Gumbel	2,194
AUTO – Cat Nat / MR PROF. – Cat Nat	Franck	5,126
MR PART. – Cat Nat / MR PROF. – Cat Nat	Gumbel	1,801
MR PROF. – Pertes Fin. / MR PROF. – Incendie	Franck	5,235
AUTO – Vol / MR PROF. – Vol	Franck	3,163
AUTO – RC Mat / AUTO – Tous Risques	HRT	0,779

Ces résultats montrent que les copules de Gumbel et de Franck décrivent le mieux les structures de dépendance présentes au sein du portefeuille. La copule HRT n'est sélectionnée qu'une fois. En raison des propriétés des copules sélectionnées, ceci signifierait que les dépendances exhibées se caractérisent avant tout, soit par une absence de dépendance de queue, soit par une dépendance de queue supérieure.

Ceci est illustré dans les graphiques suivants qui représentent la densité théorique des copules bivariées : Gumbel pour « MR PART–Tempête / MR PROF–Tempête », et Franck pour « AUTO–Cat Nat / MR PROF–Cat Nat ».

Copule de Gumbel,  $a=2.91674$ Copule de Franck,  $a=5.12634$ 

## Partie 4. MODELISATION DU BESOIN EN FONDS PROPRES

### 4.1. Hypothèses du modèle

Les travaux visent à mesurer l'impact sur le besoin en fonds propres des dépendances entre risques modélisées à l'aide de diverses copules. Plus précisément, l'objectif est d'estimer l'erreur commise lorsqu'on suppose l'indépendance entre risques. Le besoin en fonds propres est évalué à travers plusieurs mesures de risque, et on rappelle que seul le risque de fluctuation des sinistres bruts de réassurance est pris en compte.

Avant tout, il convient de définir un modèle qui régitte l'évolution des fonds propres de la compagnie. Le modèle présenté vise à évaluer simplement la situation financière de la compagnie afin d'obtenir des résultats facilement interprétables et apportant, dans la mesure du possible, une réponse claire à la problématique donnée. Un certain nombre d'hypothèses de travail ont donc été formulées.



L'aléa lié à la fluctuation des charges sinistres est analysé dans deux cas. Dans un cas, les charges sinistres sont supposées indépendantes entre garanties et sont agrégées les unes aux autres. Dans l'autre cas, les charges sinistres sont additionnées mais en intégrant entre certaines garanties des dépendances positives modélisées à l'aide de plusieurs copules.

Le modèle projette la situation financière de la compagnie avec un horizon annuel qui est l'année civile. Le modèle est discret en ce sens qu'on ne modélise pas la situation financière à un instant  $t$  quelconque de l'année. Une analyse dynamique de l'évolution des fonds propres sur plusieurs exercices successifs n'est pas étudiée mais pourrait faire l'objet de travaux ultérieurs.

En raison du risque modélisé, les fonds propres réellement détenus par la compagnie ne peuvent être utilisés dans ce modèle. En effet, ils sont destinés à couvrir tous les risques susceptibles d'affecter la situation financière de la compagnie. Une approche normative a donc été retenue afin de fixer le niveau des fonds propres en début de période. Ces derniers sont supposés égaux à la marge de solvabilité réglementaire européenne, et sont déterminés dans notre cas à partir du volume de cotisations.

Par ailleurs, on suppose qu'aucun mouvement ne les affecte en cours d'année. Les fonds propres de fin de période, avant allocation du résultat annuel, sont donc identiques à ceux de début de période. Ces fonds propres sont appelés *FP*.

Les contrats sont supposés émis au 1<sup>er</sup> janvier pour une durée d'exposition d'un an. Les cotisations commerciales acquises sont donc égales aux cotisations commerciales émises. De plus, on considère que les chargements pour l'acquisition, l'administration des contrats et la gestion des sinistres couvrent exactement les frais, et sont donc exclus des cotisations<sup>7</sup> pour simplifier les flux. Les cotisations acquises incluses dans la modélisation sont donc égales aux primes pures incluant un chargement de sécurité. Ces cotisations sont notées *P*.

La charge sinistres annuelle est la seule variable aléatoire du modèle. Elle est calculée sur l'ensemble du portefeuille et est brute de réassurance<sup>8</sup>. Elle somme les charges sinistres annuelles des 23 garanties. Pour chaque garantie, la charge sinistres annuelle est égale à la somme de 12 charges mensuelles simulées. Dans notre cas de figure, on rappelle que les mois ont été considérés comme indépendants et suivant la même loi. La charge

<sup>7</sup> De façon symétrique, le respect de l'hypothèse d'un jeu à somme nulle entre les chargements et les frais conduit à ne retenir aucun élément lié aux frais généraux dans la formation du résultat annuel.

<sup>8</sup> Ce qui revient à ne pas intégrer de résultat de réassurance.

sinistres annuelle reflète un seul exercice de survenance et les sinistres survenus sont entièrement réglés en milieu d'année. La charge sinistres annuelle est appelée  $S$ .

Les actifs de début de période sont égaux à la somme des cotisations et du capital de début de période. Ils sont par ailleurs supposés stables au cours de l'année.

Le résultat financier exclut toute réalisation de plus ou moins-value, et n'est constitué que des produits financiers dégagés par les actifs de début de période. Les actifs du segment fonds propres rapportent un taux d'intérêt annuel de 2% alors que les actifs du segment assurance, en l'occurrence les cotisations, génèrent un rendement annuel de 3% duquel il faut soustraire un manque à gagner, lié au règlement des sinistres intervenant en milieu d'année. Il n'y a pas de modélisation de besoin en fonds de roulement, et les rendements sont supposés sans aléa. Le résultat financier est noté  $RF$ .

Le résultat annuel sera appelé  $X$  et le besoin en fonds propres évalué en fin d'année sera fonction de cette variable. Par simplification,  $X$  sera vu avant impôts et taxes. En raison des hypothèses précédemment formulées,  $X$  s'écrit alors

$$X = \text{résultat technique} + \text{résultat financier}$$

$$X = (P - S) + (2\% \times FP + 3\% \times P - 1.5\% \times S) = 0.02 \times FP + 1.03 \times P - 1.015 \times S$$

On note que  $X$  est très peu sensible au niveau de fonds propres de début de période.  $X$  est une variable aléatoire dont la loi est inconnue. Sa distribution est approchée de façon empirique à travers les simulations effectuées. On note  $F_X$  sa distribution empirique.

#### 4.2. Mesures de risque

La sensibilité du besoin en fonds propres au phénomène de dépendances entre garanties est appréhendée à travers plusieurs mesures de risque faciles à mettre en œuvre pour un assureur dans un modèle interne de gestion des risques.

##### Probabilité de ruine :

La compagnie est dite en ruine lorsque les fonds propres de fin de période ne suffisent pas à absorber un résultat déficitaire, autrement dit la situation de ruine correspond à l'événement où  $X < -FP$ . On calculera sur la base des simulations la probabilité empirique de cet événement, soit  $F_X(-FP)$ .

##### VaR, TVaR, XTVaR :

Afin de tester la sensibilité des résultats au seuil de sécurité retenu, quatre valeurs sont données à  $\alpha$  : 0.5%, 0.1%, 0.05% et 0.01%.

#### 4.3. Simulations

On se propose d'exposer brièvement le principe de fonctionnement des algorithmes de simulation. Pour ce faire, on introduit les notations suivantes :

$X_i$  = charge sinistres de la garantie  $i$ ,

$U_i = F_{X_i}(x)$ , avec  $F_{X_i}$  fonction de répartition de  $X_i$  et donc  $U_i \rightarrow U[0;1]$ .

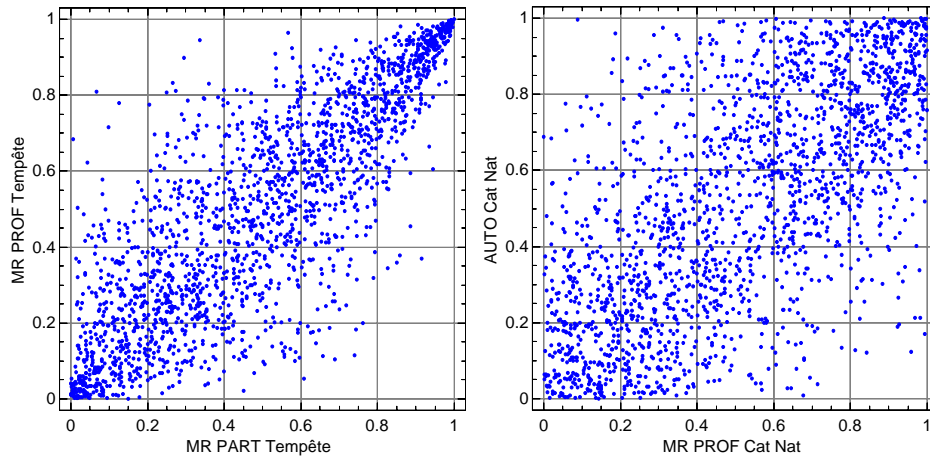
L'algorithme utilisé s'appuie sur la méthode de simulation par copule conditionnelle décrite dans Cadoux *et al* [2004]. Il est mis en œuvre afin que l'écart sur la charge agrégée,  $X_1 + X_2$ , entre la situation d'indépendance et celle de dépendance, soit uniquement dû à la prise en compte d'une dépendance entre les deux garanties<sup>9</sup>. Dans un premier temps, on calcule la charge agrégée en simulant indépendamment  $X_1$  et  $X_2$ , puis on choisit librement de déduire  $U_1$  ou  $U_2$ . Supposons qu'on déduise  $U_1$ , dans un second temps, on génère une variable aléatoire uniforme  $p$  représentant la fonction de répartition de la copule, que l'on inverse afin de déduire  $U_2$ , fonction de  $p$  et de  $U_1$ . Il ne reste plus alors qu'à inverser  $U_2$  pour obtenir  $X_2$  et avoir ainsi la charge agrégée de sinistres dans le cas dépendant.

Il est important de noter que l'inversion de la copule n'admet pas de forme close dans le cas d'une copule de Gumbel. Il faut alors procéder par résolution numérique. Dans le cadre de ces travaux, la méthode de Newton a été utilisée. Elle donne de bons résultats mais nécessite de bien optimiser l'algorithme développé afin de limiter les temps de calcul, notamment lorsque des valeurs extrêmes sont générées.

Les deux graphiques suivants représentent 2000 observations issues des simulations de la copule de Gumbel retenue pour le couple « MR PART–Tempête / MR PROF–Tempête » et de la copule de Franck retenue pour le couple « AUTO–Cat Nat / MR PROF–Cat Nat ». Ils permettent d'appréhender la forme des dépendances générées, et d'apprécier leur adéquation avec le profil des copules paramétriques présentées précédemment pour ces deux couples.

---

<sup>9</sup> Si on simule deux fois  $U_1$ , une fois dans le cas dépendant, et une autre fois dans le cas indépendant, il est indispensable de procéder à un nombre de simulations très élevé pour considérer que les deux variables générées fournissent la même représentation d'un seul phénomène. Cela augmente considérablement les temps de calcul.



#### 4.4. Impact des dépendances sur le besoin en fonds propres

Cette section présente les résultats du modèle d'évaluation du besoin en fonds propres calculé à l'aide des mesures de risque sélectionnées. Afin d'avoir des résultats robustes, un nombre important de simulations de Monte-Carlo ont été menées : 12 millions de mois ont été simulés, soit 1 million d'années. On rappelle que l'on cherche avant tout à tester la sensibilité des mesures de risque à la prise en compte de dépendances modélisées à l'aide de copules.

##### 4.4.1. Impact des dépendances modélisées

Le périmètre d'analyse couvre l'ensemble des 23 garanties des trois branches. Les résultats sont regroupés dans le tableau ci-dessous, pour les valeurs  $\alpha$  des différents seuils de sécurité testés, et avec les écarts en pourcentage entre les cas d'indépendance et de dépendance des garanties.

Probabilité de ruine avec fonds propres de début de période = 150.7 M€				Indép.	Dépend.	% écart dép. / ind.
				0.005%	0.012%	140%

en M€	VaR			TVaR			XTVaR		
	Indép.	Dépend.	% écart dép. / ind.	Indép.	Dépend.	% écart dép. / ind.	Indép.	Dépend.	% écart dép. / ind.
0,5%	22.1	29.5	33.8%	38.2	52.1	36.3%	16.2	22.6	39.7%
0,1%	43.8	60.2	37.5%	73.9	103.1	39.4%	30.1	42.9	42.2%
0,05%	58.8	81.6	38.9%	97.9	137.0	39.9%	39.2	55.4	41.5%
0,01%	117.2	165.7	41.3%	183.1	256.2	39.9%	65.9	90.5	37.4%

On note que la modélisation des dépendances à l'aide de copules augmente sensiblement le besoin en fonds propres, et ce quels que soient les seuils et les mesures de risque. En cas de dépendance entre garanties, le maintien d'un seuil de sécurité identique à

celui du cas d'indépendance implique une augmentation de la VaR ou de la TVaR allant de +33% à +41%. La probabilité de ruine est considérablement augmentée dans le cas dépendant par rapport au cas indépendant, étant près de deux fois et demie supérieure.

#### 4.4.2. Contribution aux ruines de chaque garantie

Sur un périmètre limité aux 12 garanties issues des 7 couples dépendants, on cherche à cerner le comportement de chacune des garanties lors des résultats les plus défavorables. Pour cela, on étudie les 609 ruines issues du cas d'indépendance, et on se limite aux 609 plus fortes ruines du cas dépendant afin de rendre la comparaison pertinente. Etant donné que les cas de ruines correspondent aux résultats adverses les plus extrêmes, on se propose de regarder quelles charges sinistres ont le plus de valeurs extrêmes dans ces cas afin de détecter celles ayant la plus forte contribution à la ruine.

Le tableau suivant regroupe plusieurs indicateurs pour chaque garantie afin de comprendre leurs contributions respectives aux pertes les plus extrêmes :

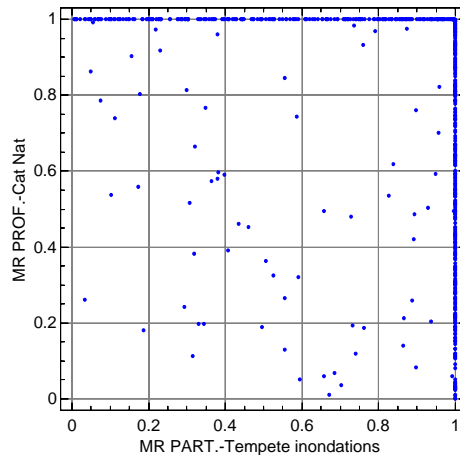
- La moyenne de chaque garantie ; et le coefficient de variation qui indique les garanties les plus volatiles.
- « *N Val. Extr.* » le nombre d'occurrences de valeurs extrêmes de la charge sinistres d'une garantie parmi les 609 ruines. La charge sinistres d'une garantie est dite extrême si son rang relatif – rang rapporté au nombre d'observations – est supérieur à 99,94%, c'est à dire si elle est parmi les 609 plus fortes valeurs de cette garantie.

Charges sinistres annuelles en M€		AUTO-RC mat.	AUTO-Tous risq.	AUTO-Vol	AUTO-Tempete	AUTO-Cat Nat	MR PROF.-Pertes Fin.	MR PROF.-Incendie	MR PROF.-Vol	MR PROF.-Tempete	MR PROF.-Cat Nat	MR PART.-Tempete	MR PART.-Cat Nat
		Moyenne	210.5	69.7	0.6	1.0	2.7	17.8	9.9	1.5	4.0	6.0	10.4
Ensemble des simulations	Coef de var.	4%	3%	4%	139%	157%	22%	18%	4%	123%	107%	89%	29%
Cas indép. 609 ruines	N val. Extr.	2	0	0	5	26	0	1	1	39	222	301	0
Cas dép. 609 plus fortes ruines	N val. Extr.	4	0	0	316	16	0	2	0	390	131	421	28

#### Cas d'indépendance

Les garanties Tempête des trois branches et deux des garanties Cat Nat présentent des valeurs extrêmes dans les cas de ruine. Ce sont aussi celles qui ont les plus forts coefficients de variation. Les garanties « MR PART-Tempête » et « MR PROF-Cat Nat » présentent le plus de valeurs extrêmes en cas de ruine, respectivement 301 et 222.

Le graphique qui suit permet de visualiser les rangs relatifs de ces 2 garanties pour les 609 cas de ruine. On note qu'il n'existe aucune accumulation de points dans le coin supérieur droit, ce qui confirme que les valeurs extrêmes des deux garanties surviennent de façon indépendante. En conclusion, dans le cas d'indépendance, les ruines s'expliquent principalement par la survenance non concomitante de valeurs extrêmes sur les garanties les plus volatiles.

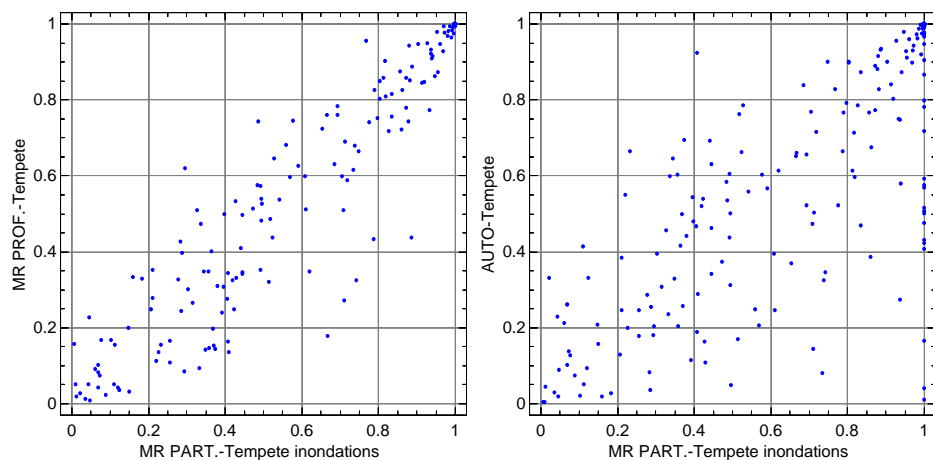


### Cas de dépendance

Au regard des résultats, les trois garanties Tempête contribuent encore plus fortement aux ruines que lorsqu'elles sont indépendantes. Les trois garanties Cat Nat ont aussi un effet important sur les ruines mais limité en raison de la part prépondérante des garanties Tempête.

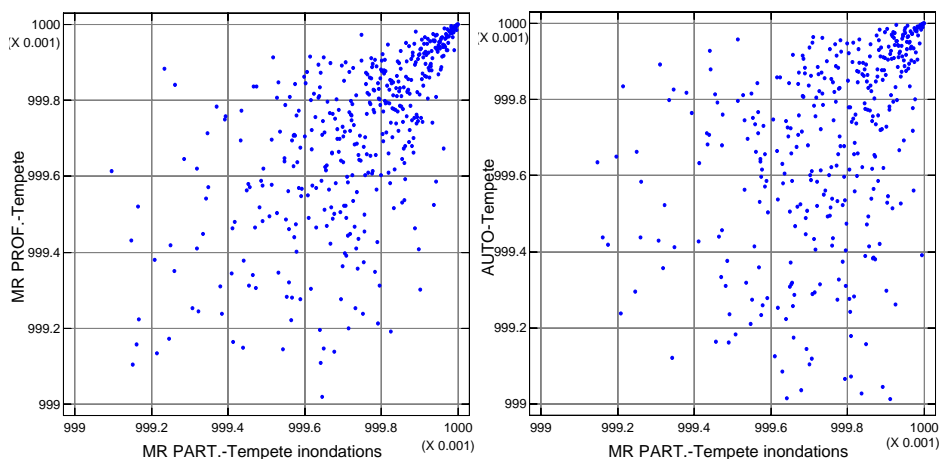
On voit ici tout l'effet de la modélisation de dépendances à l'aide de copules de Gumbel. En effet, plus d'une observation sur deux est désormais extrême pour les garanties « MR PROF–Tempête » et « AUTO–Tempête ». Cette forte contribution à la ruine s'explique par la liaison qui les fait dépendre de la garantie « MR PART–Tempête », modélisée par la copule de Gumbel qui accorde une probabilité plus forte à la survenance simultanée d'événements extrêmes. Un comptage effectué sur les cas de ruine indique qu'il existe 270 observations avec des valeurs extrêmes simultanées sur les trois garanties Tempête, auxquels s'ajoutent 103 autres événements extrêmes communs au couple « MR PART–Tempête » et « MR PROF–Tempête », ce qui représente au total plus de 60% des 609 plus fortes ruines.

Afin d'illustrer les résultats sur les garanties Tempête, on représente ci-dessous leurs rangs relatifs observés lors des 609 plus fortes ruines.



On observe facilement la dépendance positive existant entre les trois branches sur cette garantie, et surtout la forte concentration de valeurs supérieures extrêmes.

Afin de mieux visualiser cette accumulation, les graphiques ci-dessous reprennent les mêmes associations et effectuent un zoom sur les valeurs extrêmes situées dans l'intervalle bivarié  $[0,999;1]^2$ .



On note la très forte accumulation de sinistres extrêmes entre les branches MR PART et MR PROF. Ceci est aussi vrai entre les branches MR PART et AUTO, mais à un

degré moindre en raison de la plus faible valeur du paramètre de la copule de Gumbel ajustée sur ce couple.

## CONCLUSION

Ce cas pratique montre que la prise en compte à l'aide de copules de dépendances positives entre charge sinistres augmente sensiblement le besoin en fonds propres d'un assureur non vie. Ce résultat est lié à l'utilisation de certaines copules qui permettent de modéliser la concomitance de situations fortement adverses, phénomène observé sur les données empiriques analysées mais à un degré moindre.

Les dépendances négatives, également présentes au sein du portefeuille étudié, pourraient aussi être modélisées et nuancer les conclusions de cette étude. Parmi les copules utilisées au cours de ces travaux, seule la copule de Franck appréhende ce type de dépendance. L'analyse devrait être élargie à d'autres familles de copules telles que les copules elliptiques entre autres, et notamment la copule  $t$  de Student qui permet en outre d'intégrer des dépendances de queue.

Bien évidemment, le modèle présenté ici n'est qu'une première étape et ne peut prétendre en l'état apporter une réponse complète à l'analyse de la solvabilité d'un assureur non vie. Il devrait être prolongé en mesurant l'impact de la réassurance et en analysant l'ensemble des risques supportés par la compagnie.

La sélection des copules représentant au mieux les structures de dépendance constitue un axe d'investigation supplémentaire. Le test d'adéquation du chi-deux est utile car il donne au critère de décision un fondement statistique et peut être utilisé dans un cadre multivarié. Cependant, il nécessite un découpage en classes qui lui fait perdre de la puissance. La recherche de tests multidimensionnels plus puissants appliqués aux copules pourrait offrir de nouvelles perspectives d'application.

## BIBLIOGRAPHIE

- ARTZNER P., DELBAEN F., EBER J.-M. [1999], "Coherent measures of risk", *Mathematical Finance* 9.
- BELGUISE O. [2001], "Tempêtes: Etude des dépendances entre les branches Auto et Incendie avec la théorie des copulas", *mémoire IA-USA*.
- BESSON J.L., PARTRAT C. [2005], "Assurance non-vie - Modélisation, simulation", *Economica*.
- BEZAT A., NIKEGHBALI A. [2000], "La théorie des extrêmes et la gestion des risques de marché", *groupe de travail ENSAE*.



- BOUYE E., DURRLEMAN V., NIKEGHBALI A., RIBOULET G., RONCALLI T. [2000], "Copulas for finance : a reading guide and some applications", *GRO, Crédit Lyonnais, Paris*.
- CADOUX D., LOIZEAU J.M. [2003], "Mesures de risque. Besoin en fonds propres", *Séminaire "Solvabilité, rentabilité en assurance non vie", Centre de Perfectionnement des Actuaires, Paris 2003*
- CADOUX D., LOIZEAU J.M. [2004], "Dépendances au sein d'un portefeuille d'assurance non vie : cas pratique d'application de la théorie des copules à la détermination du besoin en fonds propres", *mémoire IA-CEA*
- CHARPENTIER A., PARTRAT C., ROBERT C. [2001], "Corrélation, tarification, pricing et solvabilité", *Journées de la FFA Biarritz 2001*.
- DEHEUELS P. [1979], "La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test non paramétrique d'indépendance", *Académie Royale de Belgique - Bulletin de la Classe des Sciences, 5<sup>ème</sup> série*.
- DE LA FOATA C., ODJO H. [2001], "Analyse d'un système de sécurité cohérent et optimal pour une compagnie d'assurance IARD", *ASTIN 2001, Washington*.
- DURRLEMAN V., NIKEGHBALI A., RONCALLI T. [2000], "Which copula is the right one?", *GRO, Crédit Lyonnais, Paris*.
- EMBRECHTS P., MCNEIL A., STRAUMAN D. [1999], "Correlation and dependance in risk management : properties and pitfalls", *Departement Mathematik, ETHZ*.
- EMBRECHTS P., LINDSKOG F., MCNEIL A. [2001], "Modelling dependance with copulas and applications to risk management", *Departement Mathematik, ETHZ*.
- FAIVRE F. [2002], "Copules, besoin en fonds propres et allocation de capital pour une compagnie d'assurance non vie multibranches", *mémoire IA-ISFA*.
- FERMANIAN J.D., SCAILLET O. [2003], "Nonparametric estimation of copulas for time series", *Working paper*.
- FERMANIAN J.D. [2003], "Goodness-of-fit tests for copulas", *Working paper, CREST 2003-34, Paris*.
- FREES E., VALDEZ E. [1998], "Understanding relationships using copulas", *North American Actuarial Journal, Volume 2, N°1*
- GENEST C., RIVEST L. [1993], "Statistical inference procedures for bivariate archimedean copulas", *Journal of American Statistical Association, Volume 88, N°423*.
- HURLIMANN W. [2001a], "Fitting bivariate cumulative returns with copulas", *Working paper, Winterthur Life and Pensions*.

- HURLIMANN W. [2001b], "Analytical evaluation of economic risk capital and diversification using linear Spearman copulas", *Working paper, Winterthur Life and Pensions*.
- JOE H., XU J.J. [1996], "The estimation method of inference functions for margins for multivariate models", *Department of Statistics, University of British Columbia, Technical Report*.
- JOE H. [1997], "Multivariate models and dependence concepts", *Chapman and Hall, London*.
- KLUGMAN S., PARSA R. [1999], "Fitting bivariate loss distributions with copulas", *Insurance : Mathematics & Economics* 24
- NELSEN R. [1999], "An introduction to copulas", *Springer Lecture notes in statistics*.
- PERONNET F., SELLAM B. [2001], "Allocation de fonds propres en assurance vie", *mémoire IA-ENSAE*.
- ROBERT C. [2001], "Gestion de risques multiples", *Journées Statistiques et Assurances Dommages, SFdS*.
- SAPORTA G. [1990], "Probabilités, analyse des données et statistiques", *Technip*.
- SKLAR A. [1959], "Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges", *Publications de l'Institut de Statistique de Paris*, 8, 229-231.
- VENTER G. [2001], "Tails of copulas", *ASTIN 2001*.
- VENTER G. [2003], "Fit to a t - estimation, application and limitations of the t-copula Topic 1 : Risk evaluation", *ASTIN 2003*.

# COMMENT DETERMINER LE RENDEMENT D'UN REGIME DE RETRAITE PAR REPARTITION QUI ACCEPTE DE CONSTITUER DES RESERVES

Jacques WETZEL

*Membre agrégé de l'Institut des Actuariers*

L'équation de pesée élaboré en 1963 par J. WETZEL, en s'appuyant sur des études antérieures publiées dans les bulletins de l'IAF par M. FRAISSE (Membre agrégé de l'I.A.) fournit la solution à un problème jusqu'alors irrésolu : comment faire la répartition de manière actuarielle en constituant des réserves ?

La solution optimise l'égalité de traitement des générations successives de retraités, contrairement à ce qui se passe en répartition sans réserves.

La pesée doit être pratiquée tous les ans de manière à serrer de près les paramètres du régime qui varient dans le temps (taux de mortalité, rendement des placements, inflation...). On compare ce rendement au rendement du régime au même moment, qui généralement lui est supérieur. La pesée fixe alors le cap à suivre par le régime ; ses dirigeants disposent de l'instrument de mesure pour être guidés dans le pilotage.

Avant d'exposer la théorie de la pesée, on rappellera la notion de rendement et le calcul du rendement dans un régime à répartition intégrale. On terminera en incitant les régimes « libres » à mettre en œuvre cette pesée sans interdire aux autres de se transformer.

## 1. DEFINITION DU RENDEMENT EFFECTIF D'UN REGIME - PARAMETRES $a$ ET $v$

Une cotisation annuelle de  $C$  euros est convertie en points  $P$ , en la divisant par le salaire de référence  $a$  en euros.

$$P = \frac{C}{a}$$

On peut aussi bien convenir d'acquérir  $P$  points par an, la cotisation étant alors égale à :

$$C = P.a$$

Une fois la notion de « points » acquise, on calcule la retraite acquise à **un âge déterminé**, en faisant la somme des points acquis année par année

$$\Sigma P$$

et en multipliant par la valeur  $v$  en euros du point de retraite au moment où on prend sa retraite, c'est-à-dire à l'âge déterminé au départ :

### **Retraite annuelle = $v \cdot \Sigma P$**

Une année déterminée, on connaît **a** (prix d'achat d'un point) et **v** (valeur de service d'un point) ; un actif est sensible à **a** et considère que s'il prenait sa retraite l'année où il achète **a** € un point, il percevrait **v** € en échange du point acquis.

Le rapport  $\frac{v}{a}$  est appelé rendement du régime pour une année donnée. Il mesure bien la santé d'un régime. Si, d'une année sur l'autre, **a** augmente et que **v** ne change pas, un actif se sentira frustré. Si une partie de l'augmentation de **a** est due à l'inflation, le retraité se plaindra de ne pas avoir été revalorisé en proportion de l'inflation.

Au cours des dernières années, le rendement des grands régimes de répartition (AGIRC, ARRCO) a fortement baissé par suite de l'absence de réserves, de l'énorme accroissement du nombre des retraités et de la faible augmentation de la masse salariale.

Bien évidemment, les rendements de deux régimes ne sont comparables que lorsque les règlements sont identiques : même âge de mise à la retraite, même taux de réversion, mêmes taux de frais de gestion et de prélèvements sociaux...

## **2. CHOIX DES PARAMETRES a ET v**

La gestion d'un régime par répartition est assurée par un Conseil d'Administration composé de membres de la profession libérale intéressée ou de représentants en nombre égal de salariés et de patrons dans le cas de salariés.

Le Conseil maîtrise le **v** ; tous les ans en général, il fixe sa valeur. Il n'en va pas toujours de même avec le **a** lorsque le règlement du régime l'attache à une donnée qu'il ne maîtrise pas, par exemple un salaire moyen ; le manque de souplesse qui en résulte est tourné, dans certains régimes, par l'intervention d'un taux de cotisation contractuel auquel on applique une majoration arbitraire pour obtenir le taux de cotisation réel ; les points ne sont acquis que sur la cotisation contractuelle.

## **3. CALCUL ELEMENTAIRE DU RENDEMENT D'UN REGIME DE REPARTITION INTEGRALE, C'EST-A-DIRE SANS RESERVES**

Les grands régimes de retraite complémentaires de salariés (AGIRC, ARRCO) ont débuté avec la volonté de ne pas constituer de réserves et aujourd'hui continuent de fonctionner en répartition intégrale. A l'époque, il était évident pour les créateurs qu'il ne fallait pas mettre de l'argent de côté parce que les taux des obligations étaient toujours inférieurs au taux d'inflation ; depuis, cet axiome est devenu faux.

De l'équation de trésorerie

$$\text{RECETTES} = \text{DEPENSES}$$

résulte immédiatement le rendement théorique et pratique. En effet

$$N_A \cdot P_A \cdot a = N_R \cdot P_R \cdot v$$

Où  $N_A$  est le nombre d'actifs ;

$P_A$  le nombre de points acquis dans l'année par un actif ;

$N_R$  le nombre de retraités ;

$P_R$  le total des points acquis par un retraité.

$$\text{D'où } \frac{v}{a} = \frac{N_A}{N_R} \cdot \frac{P_A}{P_R}$$

**Exemple actuel :** Deux actifs pour un retraité  $N_A / N_R = 2$   
 Si les points acquis par un retraité sont  
 le cumul de 40 années de cotisations  $P_A / P_R = 1/40$   
 D'où  $\frac{v}{a} = 2.1/40 = 5\%$

**Exemple du passé :** au démarrage des grands régimes de salariés, on avait plutôt cinq actifs pour un retraité. Les reconstitutions gratuites de carrière étaient inférieures aux retraites acquises aujourd'hui par des retraités qui ont cotisé toute leur carrière, on peut estimer :

$$\frac{P_A}{P_R} = 1/30 \text{ et } \frac{N_A}{N_R} = 5$$

$$\text{D'où } \frac{v}{a} = 5 \times 1/30 = 17\%$$

On est bien forcé d'être surpris par l'énorme différence dans le traitement des générations successives : en deux générations, on est passé d'un rendement de 17% à un rendement à 5%.

C'est évidemment toujours par les sacrifices demandés aux participants d'un régime qu'on arrive à faire baisser aussi fortement le rendement. On commence par freiner la revalorisation des retraites ( $v$ ) en période d'inflation ; l'effet est immédiat<sup>4</sup>. On accélère l'évolution du «  $a$  » lorsque le règlement le permet, diminuant ainsi le nombre de points acquis dans l'année, ce qui a un effet différé. Enfin, on peut reculer l'âge de la retraite, avec encore un effet différé.

<sup>4</sup> Pendant près de 10 ans, l'AGIRC a bloqué son  $v$

#### 4. CALCUL DE RENDEMENT ACTUARIEL D'UN REGIME DE RETRAITE PAR REPARTITION QUI ACCEPTE DE CONSTITUER DES RESERVES

La pesée à un instant donné, c'est-à-dire le calcul du rendement actuariel du régime résulte d'une équation actuarielle, et non plus d'une équation de trésorerie, qui place toutes les générations sur un plan d'égalité. Ici, on ne tient aucun compte des effectifs de cotisants ni de retraités.

Les actifs doivent payer chaque année la prime d'assurance-vie leur assurant l'élément de retraite qui leur sera alloué à un âge déterminé, ainsi que la réversion éventuelle en cas de décès, sur le conjoint. La prime est calculée en « **capitalisation** » avec une table de mortalité adéquate et un taux financier minimum estimé à long terme.

Si les engagements viagers pour les retraites promises à ces actifs sont couverts par des réserves et si les engagements pour les retraités bénéficiaires actuels sont également couverts par les réserves, il n'y aura pas d'autre cotisation à percevoir. On s'arrange habituellement pour faire payer à chaque actif une prime moyenne correspondant à l'âge moyen (on parle de capitalisation collective). On ajoute une contribution de  $\alpha\%$  pour frais de gestion.

Mais généralement les réserves pour le passé sont inférieures à ces engagements. Il faut par conséquent payer collectivement le déficit ; la seule façon de le faire payer par tous et indéfiniment c'est de le faire en répartition en payant la « rente perpétuelle » du déficit **D**, c'est-à-dire

##### *i. D*

où  $i$  est le taux d'intérêt choisi pour les engagements viagers

La cotisation totale est donc la somme de :

- la prime en capitalisation
- et la rente perpétuelle en répartition

$$P \cdot a = \alpha \cdot P \cdot a + v \cdot V_{\text{actifs}} + i \left[ \sum V_{\text{passé}} \cdot v - W \right]$$

où **P** est le nombre de points acquis dans l'année par les actifs ;

$V_{\text{actifs}}$  en points est la valeur actuelle des engagements créés dans l'année ;

$V_{\text{passé}}$  en points est la valeur actuelle des engagements acquis à la date de la pesée tant pour les actifs que pour les retraités ;

$W$  en euros est le montant des réserves,  $D$  étant lui-même égal à  $\sum V_{\text{passé}} \cdot v - W$

$$\frac{v}{a} = \frac{P(1-\alpha) + i \cdot W/a}{V_{\text{actifs}} + i \cdot \sum V_{\text{passé}}}$$

A un instant donné, il suffit d'estimer le  $a$  de l'année à venir pour calculer le rendement actuariel, c'est-à-dire pour peser le régime sur l'année à venir, donc pour obtenir le  $v$  de cette période.

Dans les cas extrêmes où les cotisations disparaîtraient,  $a$  ne sert plus.

et 
$$\frac{v}{a} = \frac{W}{a \cdot \sum V_{\text{passé}}}$$

$$v = \frac{W}{\sum V_{\text{passé}}}$$

Les retraites sont payées avec  $v$  proportionnel aux réserves constituées ; on retrouve un fonctionnement en capitalisation pure. Dans un régime en répartition pure, aucune retraite ne serait plus payée.

Chaque pesée est l'occasion de rectifier, le cas échéant, les paramètres de calcul, c'est-à-dire de changer éventuellement de table de mortalité et/ou du taux d'intérêt  $i$ , taux qui est aussi celui utilisé dans les calculs de  $V_{\text{actifs}}$  et de  $V_{\text{passé}}$ . C'est aussi l'occasion de réévaluer les actifs dans le calcul de  $W$  (immeubles par exemple).

## 5. QUELS SONT LES REGIMES CONCERNES PAR CETTE PESEE ?

La plupart des régimes de retraites des professions libérales fonctionnent en répartition avec réserves. La grande diversité de leurs gestions en matière de rendement s'explique par l'ignorance de leurs responsables en ce qui touche la pesée actuarielle qui vient d'être exposée. Il nous semble que tous ces régimes pourraient pratiquer cette pesée et s'efforcer de la respecter en pratique de telle sorte que leurs politiques de gestion soient identiques ; aujourd'hui, elles sont plutôt le fruit du hasard et des habitudes prises.

Les grands régimes de salariés à répartition intégrale semblent imperméables à l'idée de modifier leur politique de désinvolture vis-à-vis des nouvelles générations. Cependant il n'est pas inconcevable que ceux qui aujourd'hui préconisent une voie nouvelle en capitalisation (plans d'épargne) pour compléter ces régimes de plus en plus injustes pour les jeunes se posent la question de savoir s'il ne serait pas plus logique de diriger ces nouvelles cotisations supplémentaires vers ces régimes décriés dans le but de constituer peu à peu les réserves qui leur manquent tant ; il faudra du temps pour se rapprocher de la pesée actuarielle mais on aura arrêté la dégringolade qui choque tout le monde.

Enfin, il n'est pas impossible de voir des régimes en capitalisation pure se transformer en régime à répartition avec réserves, moyennant éventuellement une légère augmentation de leurs cotisations dont le montant résulterait de la pesée actuarielle lorsqu'au cours du temps se manifesterait une insuffisance des réserves.



**LISTE DES MÉMOIRES D'ACTUAIRES VALIDÉS**  
**Du 1<sup>er</sup> septembre 2004 au 30 juillet 2005**  
**(communiqués par les centres de formation d'actuares)**

**MÉMOIRES C.E.A.**

**BECACHE Emmanuel** (Sté PARTNER RE), *Exposition aux risques du résultat d'exploitation d'une compagnie d'assurance non vie*. Dir : Jean-Marie NESSI. 11 juillet 2005.

**BERGER François** (Sté GENERALI) & **DEBARD Stéphane** (Sté SOGECAP), *Essai d'extension de la formule de Blacks & Scholes, application à un contrat dans le cadre du plan d'épargne populaire*. Dir. : Philippe LALOYEAUX. 23 novembre 2004.

**BOUSQUET Thierry** (Sté SOGECAP), **LEBATTEUX Philippe** (Sté ERISA), *Certification des tables de mortalité des contrats temporaire décès*. Dir. : Philippe PERRET. 23 novembre 2004.

**CAMBOURIS Yani** (Sté Mutuelle Générale), **GERMAIN Michel**, *Une analyse de la mesure d'incertitude d'estimation d'une loi de maintien en capacité*. Dir. : Denis CAMPANA. 21 avril 2005.

**CHAPUIS Thomas** (MAAF Ass.), *Provisionnement en assurance construction MLG et mesure de l'aléa*. Dir. : Sébastien COSTE. 27 juin /2005.

**GAVANOU Jean-François** (Sté FIXAGE), *A la recherche de la juste valeur des passifs sociaux*. Dir. : Gérard VALIN. 21 avril 2005.

**GRINDA François** (Sté AXA), **Phi NGUYEN** (Sté DELOITTE), *Modèle du risque de contrepartie des réassureurs d'une compagnie d'assurance*. Dir. : Guillaume GORGE. 23 novembre 2004.

**KELLE Magali** (Sté MATMUT), *Provisionnement pour sinistre à payer ; analyses et modélisations sur données détaillées*. Dirs : Christian PARTRAT – Gilbert MACQUART. 27 juin /2005.

**MÉMOIRES ENSAE**

- ACHARD Arnaud, DECHAUX Nicolas**, *Les indicateurs de rentabilité en assurance vie.*
- ARTIGUENAVE Julie, POUS Séverine**, *Simulation sur le long terme du fonctionnement technique d'un PERP euro diversifié.*
- AUBE Jean-David**, *Approximation de formule fermée du modèle SABR dans le cadre de taux d'intérêt faibles.*
- AVRIL Emmanuel, LOOTVOET Jean-Marie**, *Valorisation d'une compagnie d'assurance et coûts frictionnels.*
- BASTIDE Anne-Cécile, MIZRAHI Pierre**, *Allocations optimales en assurance-vie dans le cadre de la gestion Actif-Passif.*
- BILLIAU Pierre**, *Modélisation des nappes de volatilités implicites et risques de marché.*
- CHAUMEL François, LAPLENIE Olivier**, *Application des modèles ACD à l'étude des transactions à la Bourse de Paris.*
- DORE Damien, DRAPPIER Renaud**, *Le Pairs Trading : une stratégie d'arbitrage statistique.*
- ESMEIN Paul**, *Conditions de rapprochement d'échelles de rating provenant de systèmes différents.*
- GLAIZAL Hortense**, *La mesure du risque de taux en gestion de bilan.*
- HE Lise**, *Méthodes de provisionnement et analyse de solvabilité d'une entreprise d'assurance non-vie.*
- HUGONIN Benoît, OUDANONH Thialouni**, *La norme IAS 39 : impact sur les stratégies de couverture du risque de taux.*
- KALTWASSER Perrine, LE MOINE Pierre**, *Modèles de risques et solvabilité en assurance-vie.*
- KOSKAS Anaïs**, *Construction de courbes de risque de crédit et valorisation des Credits Default Swaps (CDS).*
- LEGER Emilie, BRUHAT Agnès (CEA)** *Modèle d'allocation du capital en réassurance vie.*
- LEMPEREUR Patrick**, *Pricing et couverture dans un modèle de Bates.*
- MESNARD Aurélien**, *Qu'apporte le volume dans la gestion du risque alternatif ?*
- MOUDIAPPANADIN Alexandre**, *Structure de dépendance des facteurs de marché.*
- RENNO Yves**, *Mesure du risque des portefeuilles de type long/Short Equity.*
- ROGET Céline**, *Gestion du risque de crédit bancaire.*

**ROUSSELON Julien**, *L'assurance dépendance, enjeux et risques.*

**SELMI Mohamed**, *Provisionnement des garanties incapacité et invalidité avec les tables du BCAC.*

**SIBAI David**, *Modélisation dynamique des catastrophes naturelles.*

**SIJLAMASSI Mohamed, OUAKNINE Yoram**, *Valorisation par les déflateurs stochastiques.*

**VESSELINOFF Célia**, *Comment optimiser la priorité dans un traité de réassurance vie ?*

**YONTA TCHOUPOU Eric**, *Valorisation de dérivés de crédit : étude d'un modèle structurel.*

**MÉMOIRES EURIA**

**BASSET Delphine**, *Etude de l'exigence de marge de solvabilité du PERP Eurodiversifié*. (Fixage). 23 juin 2005.

**BOURDET Sophie**, *Bilan actuariel du PERP*. (Optimind). 23 juin 2005.

**CHENU Loïc**, *L'aide à la décision en gestion alternative; application à des méthodes de surclassement à la constitution d'un portefeuille de hedge funds*. Dir. : Jennifer BAHNICK (Addax Chicago). 24 juin 2005.

**CORRE Mélanie**, *Description de la garantie plancher et méthodes de calcul du provisionnement de la garantie plancher en cas de vie*. (Fédération Continentale). 24 juin 2005.

**GAILLOT Emilie**, *Adéquation entre la consommation médicale et un logiciel de tarification (Confidentiel)*. Dirs. : Sylvie LAMY et Mickaël DONIO. 23 juin 2005.

**HAGER Thibaud**, *Etude du maintien en incapacité sur un portefeuille d'assurance emprunteur (Confidentiel)*. Dir. : M. Vincent ROGER (Cabinet BESSE). 23 juin 2005.

**HAMON Marion**, *Conception de lois de maintien d'expérience relatives aux risques statutaires des agents des collectivités locales (Confidentiel)*. Dir. : Richard DEVILLE (UNMPF). 23 juin 2005.

**LE GARS Emilie**, *Méthodes stochastiques de provisionnement des sinistres; application à l'assurance du risque incapacité-invalidité d'un portefeuille de contrats emprunteurs (Confidentiel)*. Dir. : Philippe BURGER (Towers Perrin). 23 juin 2005.

**LE PICARD Nathalie**, *Analyse tarifaire de la MRH*. (Suravenir Assurances). 24 juin 2005.

**MOURRAIN Marie-Solène**, *La norme IAS 19 (avantage au personnel) Impact de la mise en œuvre*. (Suravenir). 24 juin 2005.

**PHELIPPE-GUIVARCH**... A compléter.

**POTEAU Mathieu**, *L'option de remboursement anticipé des les opérations de titrisation*. (Caisse d'Epargne)... A compléter.

**RONA Julia**, *Evaluation des engagements sociaux selon la norme IAS 19. Validation des hypothèses retenues et difficultés de mise en œuvre. Application : compte épargne temps*. (JWA). 24 juin 2005.

**ROUXEL Marina**, *Impact du changement de classement des véhicules sur le tarif automobile d'une compagnie (Confidentiel)*. Dir. : Guillaume POISSANT (AXA France). 23 juin 2005.

**TABBAH Wassim**, *Embedded value : déterministe versus stochastiques*. Dir. : Pierre CHIDIAC (SARIMA Liban). 23 juin 2005.

**VIGNAUD Amélie**, *Modélisation du risque dépendance et étude statistique d'un portefeuille dépendance (Confidentiel)*. Dir. : GERARDIN (Mutualité Française). 23 juin 2005.

**MÉMOIRES I.S.F.A.**

**ANTONIOLI Jean-Marc**, *Etude technique de la migration d'un contrat d'assurance santé dans le cadre d'un regroupement inter mutuelles*. Dir. : Michel LIAUTARD (CAMEC MSN Mieux Etre). 6 juillet 2005.

**BESNARD Mathieu**, *Choix de portefeuille sous contrainte de CVaR*. Dir. : Amir B'CHIR (Caisse d'Epargne Rhône Alpes Lyon). 1 février 2005.

**BONIN Stéphane**, *Modélisation stochastique des régimes de retrait collective fonctionnant par points et en capitalisation (branche 26 des opérations d'assurance aux sens des directives européennes)*. Dir. : Denis SOULATGES (Ministère de la Santé et de la Protection Sociale. Direction de la Sécurité Sociale). 2 juin 2005.

**BOUDRAMA Sabri**, *Analyse de la sinistralité individuelle des assurés pour les contrats multirisques hôpitaux, prestations statutaires*. Dir. : Sébastien HASLÉ (SHAM). 17 janvier 2005.

**CALVANICO Leslie**, *Prévisions à court terme des effectifs de pensionnés de la Caisse de retraite de la SNCF*. Dir. : Vincent LEPEZ (SNCF). 24 novembre 2004.

**CHAFNI Saïd**, *Valorisation en « Fair Value » d'une compagnie d'assurance dommage*. Dir. : Jérôme VIGNANCOUR (AXA GIE). 6 décembre 2004.

**CLEMENT Jean-Michel**, *Intégration d'un régime de retraite fonctionnant en répartition dans les régimes de droit commun des salariés*. Dir. : Brigitte ECARY (SPAC). 25 mars 2005.

**CONSTANTIN Olivier**, *Impact marginal et tarification des traités catastrophe naturelle sur un portefeuille d'une compagnie de réassurance*. Dir. : Alexis VALLERON (GE Insurance Solutions). 6 décembre 2004.

**COSMA Aurélien**, *Modélisation de type DFA d'une Institution de Prévoyance. Application à la détermination d'une stratégie optimale d'allocation d'actifs*. (Prémalliance). 19 mai 2005.

**DE TAILLANDIER Ariane**, *Création d'un zonier automobile*. Dir. : Xavier MUNOZ (AVIVA Assurances). 25 mars 2005.

**DELCROIX ARNAUD**, *Etude du risque arrêt de travail et élaboration de tables de maintien en incapacité, invalidité et probabilité de passage en invalidité (Confidentiel)*. Dir. : Christine COUDREAU (AXA France). 17 janvier 2005.

**DUGELAY Gaël**, *Fair Value des passifs d'assurance non-vie et Market Value Margin, problématiques et propositions de traitement*. Dir. : Jean-Pierre LASSUS (MAZARS Actuariat). 6 décembre 2004.

**FLEURENCE Gwenaël**, *Evaluation du passif social : Utilisation de méthodes stochastiques pour l'évaluation de l'engagement et de la sensibilité aux hypothèses (Confidentiel 3 ans)*. Dir. : Elsa RENOUF (Actuaris). 6 décembre 2004.

**LOISEL Stéphane**, *Probabilités de ruine, probabilité win-first et théorie de la ruine avec une ou plusieurs branches d'activité*. Dir. : Daniel SERANT (Laboratoire SAF, UCBL). 15 décembre 2004.

**ODO Patrice**, *Pricing des Credit default Swap et étude de la base*. Dir. : Stéphanie CAPDEVILLE (CDC). 1 février 2005.

**PERRET Ophélie**, *Analyse du portefeuille de contrats santé de la MNPAF et incidence des modifications des remboursements de la mutuelle sur le poste « consultation »*. Dir. : Jean CHASSAING (MNPAF). 24 novembre 2004.

**PEY Noémie**, *Les méthodes stochastiques de provisionnement – Applications et limites(Confidentiel)*. Dir. : Jérôme SCHILLING (GIE AXA). 17 janvier 2005.

**POIRIEUX Julien**, *Construction d'un modèle d'estimation et de projection des droits de retraite en France*. Dir. : Florence BERGUIN (WATSON WYATT – Practice Benefits). 27 septembre 2004.

**OLYMPIO Anani**, *Elaboration de tables d'expériences décès sur un portefeuille d'assurance vie entière (Confidentiel)*. Dir. : Angel GINER NAVARRO (AUXIA Assurance). 27 septembre 2004.

**ROBERT Gildas**, *Rente patrimoniale : Etudes marketing et techniques*. Dir. : Henri-Pierre RODRIGUES (Crédit Foncier). 29 juin 2005.

**SURGET Julie**, *Evaluation et allocation du Capital Economique pour l'activité prévoyance*. Dir. : Tristan ESKINAZI (CARDIF - BNP Paribas Assurances). 25 mars 2005.

**TERRASSON Caroline**, *Customer Value Measurement : Méthode de valorisation client en santé individuelle*. Dir. : Gildas BASLE (AXA France). 25 mars 2005.

**VERDIER Bertrand**, *Développement des sinistres sur les branches long-tailed. Cotation des traits proportionnels*. Dir. : Artur KLINGER (Alea Europe LTD). 24 novembre 2004.

**VIGAN Benoît**, *Le capital économique*. Dir. : Philippe BROSSARD (Euler Hermes SFAC). 28 avril 2005.

**MÉMOIRES ISUP**

**AIT OMAR Mouna**, *Définition et mise en place d'un nouveau produit : le Plan d'Epargne Populaire (PERP). Etude de rentabilité gestion d'actifs*. Dir. : Hugues CHUPIN (JWA). 20 juin 2005.

**APPERT-RAULLIN Yannick**, *Etude des sinistres graves de responsabilité civile automobile. Optimisation de la réassurance*. Dir. : Hervé SAINT-SAËNS (AXA France). 14 mars 2005.

**BAGARRY Marc**, *Un modèle stochastique non-vie utilisant des copulas elliptiques de dimension n pour évaluer des besoins de fonds propres*. Dirs. : M. FLEURY et M. GUILLE. 23 mars 2005.

**BAGUE Rémy**, *Exposition aux risques du résultat d'exploitation d'une compagnie d'assurance non-vie*. Dir. : Jean-Marie NESSI (PARTNER RE). 11 juillet 2005.

**BEHAR Jérôme**, *Allocation d'actifs et analyse des risques*. Dir. : Gregor JOURDIN (BNP Paribas Assurance). 16 décembre 2004.

**BRIS Laurent**, *Tables de mortalité prospectives et évaluation du portefeuille*. Dir. : Maissetou COULIBALY (Mutuelle Générale). 29 juin 2005.

**CALVARD Sophie**, *Première adoption des normes IAS/IFRS : choix de l'application rétrospective des normes IAS/IFRS dans le cadre de la norme IAS19, "avantages du personnel"*. Dir. : Mme PLESSIS (DELOITTE). 19 avril 2005.

**CHANG Peili**, *Elaboration de tables de maintien en arrêt de travail et étude d'un aspect "prospectif"*. Dir. : Mlle COULIBALY (Mutuelle Générale). 23 mars 2005.

**CODET Erwan**, *Transformation d'un fonds de fonds traditionnel en fonds de fonds mixte avec la mise en place de stratégies visant à modifier la sensibilité du fonds de fonds de fonds de face au risque de marché*. Dir. : Arnaud CLEMENT-GRANDCOURT (La Française des Placements). 19 avril 2005.

**COL Sébastien**, *Utilisation de la segmentation dans la tarification du risque invalidité*. Dir. : Christian ROZE (AGF). 29 juin 2005.

**DHIN DIPPAH Danielle**, *Modélisation du ratio sinistres sur primes dans le cadre d'un projet de transfert du risque de sinistralité sur un portefeuille d'assurance IARD automobile*. Dir. : Sara FERT (GIE-AXA). 11 juillet 2005.

**ERONI Stéphanie**, *Construction et utilisation d'un indice d'aversion au risque sur les marchés financiers*. Dir. : Delphine GEORGES (Crédit Agricole Asset management). 11 juillet 2005.



**EROUKHMANOFF Guillaume**, *Stratégie de la convexité dans le crédit : obligation contre obligation, CDS contre obligation et action. Présentation de la convexité de corrélation*. Dir. : Michaël DONIO (JWA-Actuaires). 29 juin 2005.

**FONTAINE Benoît**, *Elaboration d'un nouvel outil de tarification d'une complémentaire santé pour des contrats collectifs en France*. Dir. : Annie ADAM-GUILLAUME (Gie HENNER). 25 mars 2005.

**GAROTIN Mathilde**, *Estimation de la retraite obligatoire. Comparaison PERP/produit MADELIN*. Dirs. : Aurore PIERRON/Olivier SANCHEZ (MACSF). 20 juin 2005.

**GARREAU Isabelle**, *Etude d'un modèle de courbes forward sur les énergies et d'un modèle de taux d'intérêts*. Dir. : M. BENMENZER (Gaz de France). 19 avril 2005.

**GIRARD Philippe**, *La gestion Actif - Passif d Plan d'Epargne Populaire (PERP)*. Dir. : Hervé VIGNALOU (Tillingast Towers Perrin). 21 juin 2005.

**HENRY Mathieu**, *Analyse et provisionnement du risque sécheresse*. Dir. : Laurent LAMARLE (AXA France). 14 mars 2005.

**HUGUET Emmanuelle**, *La théorie des copules. Etude de la dépendance entre deux branches d'assurance en cas de survenance d'un sinistre potentiel*. Dir. : Luc ROUILLE (GRAS-SAVOYE Ré). 11 juillet 2005.

**LABAUNE Romain**, *Optimisation du modèle de prime commerciale pour un portefeuille auto RC 4 roues, segmentation des chargements*. Dir. : M.BEL BARAKA et M. BROSSARD (GIE-AXA). 14 mars 2005.

**MOUNIER Lorraine**, *Elaboration d'un modèle optimal de scoring dans le domaine du crédit automobile*. Dir. : Cheikh NIANG (DIAC). 18 avril 2005.

**PARIS David**, *Allocation stratégique d'actifs liées aux contraintes imposées par la loi Fillon dans le cas d'un PERP multisupports*. Dir. : Michaël DONIO (JWA). 20 juin 2005.

**POULLAIN Emilie**, *Construction d'un score de prospection*. Dir. : Laurence FOURNY. 22 Novembre 2004.

**ROCHOTTE Erika**, *Recherche et application de méthodes d'analyse statistique des effets secondaires d'essais cliniques pour des événements simples et répétitifs, prenant en compte le temps passé dans l'étude et dans le cas où le groupe de traitement a un temps d'observation inférieur à l'autre groupe*. Dir. : Nathalie BARBIER (Novartis Pharma AG). 18 avril 2005.

**SCHIATTI Marion**, *Modélisation stochastique de la courbe des taux d'intérêt*. Dir. : Aurélie TREILHOU (AXA-France). 29 juin 2005.

**SEBO Sophie**, *Etude de risque de déraillement des trains de marchandises dus aux efforts longitudinaux de compression*. Dir. : Florence SOURGET (SNCF). 18 avril 2004.

**SERGENT Vincent**, *Etude de la sensibilité de l'assuré aux prix en assurance auto de particuliers*. Dir.: Claire DUTEY (AXA France). 11 juillet 2005.

**GILKES Guillaume**, *Insurance for the poor Development of a health and Life Mutual Fund in India*. (ONG membre de Uplift India Association). 21 juin 2005.

**MÉMOIRES PARIS DAUPHINE**

**CHOCHA Yoni**, *Modèles de volatilité*. Dir. : BERNET Marc et ROBERT Christian Yann (Murex). 15 novembre 2004.

**CHRAIBI Maria**, *Modélisation des Risques ALM en assurance-vie*. LEGLISE Philippe (AGF IART). 16 novembre 2004.

**COSTE Cédric**, *Modèle de stochastique d'un plan d'épargne retraite populaire*.

**D'AVIAU DE TERNAY Cedrick**, *Allocations d'actifs: intégration des prévisions des gérants dans l'optimisation de portefeuille*. NICOLAS Franck (CDC IXIS AM). 10 novembre 2004.

**DE SARRAU Antoine**, *Garanties liées aux unités de compte des contrats d'assurance*. Dir. : MUGNIER Christophe (AXA France). 1 novembre 2004.

**FREOA Benjamin**, *Evaluation de l'obligation TEC*. Dir. : GIGNOUX Jean-Luc (Société Générale Corporate and Investment Banking). 15 novembre 2004.

**HÛE Hervé**, *Système de trading <Trend Follower> en gestion Alternative*. Dir. : CARAGUEL Stéphane (BNP Paribas Asset management). 15 novembre 2004.

**JOEL Laurence**, *Modélisation de la durée de vie à priori d'un contrat d'assurance automobile*. Dir. : FORCHIONI Pascal (AGF). 16 novembre 2004.

**KALLEL Dorra**, *Mise en place d'une méthode de calcul de provision pour risques croissants en assurances santé individuelle*. Dir. : CHARTON Michel et MISERROTI Eric (AXA France Solutions). 9 novembre 2004.

**LALAM Yacine**, *Logiciel de reconstruction d'épargne pour les produits multisports*. Dir. : MACIEL Victor (AXA France). 9 novembre 2004

**MAHUZIER Axel**, *Intégration d'un fonds en euros avec mécanisme de participation aux bénéfices différés dans un contrat -support dédiés*. Dir. : ROULLIN Fabienne (AXA France). 17 novembre 2004.

**PIAN Floraine**, *Etude technique des garanties décès sur des contrats de prévoyance Individuelle et d'assurance des Emprunteurs*. Dirs. : NELET Julie et ESKINAZI Tristan (BNP Paribas Assurance). 9 novembre 2004.

**PINSON Bruno**, *Amélioration du calcul des valeurs Auto 4 Roues dans le modèle CVM (Customers Value Measurement)*. Dir. : CABANETTES Philippe (AXA France Solutions). 16 novembre 2004.

**ROBERT Thibaut**, *Turnover et engagements sociaux*. Dir. : ROUSSEAU Sylvain (Towers Perrin). 15 novembre 2004.

**SAUSER Cédric**, *Assessing Implied Volatility Fairness*. Dir. : Arnaud JOUBERT (Société Générale). 15 novembre 2004.

**SOUCHON Carine**, *Etude de la dépendance entre deux branches d'assurance IARD*. Dir. : Rajid FIROJALY (AXA Corporate Solutions). 16 novembre 2004.

**SOULIÉ Christophe**, *L'intégration de régimes de retraite: méthodologie des tarifications de la soulte et impact sur le régime intégré*. Dir. : François LEPRINCE. 10 novembre 2004.

**TOUAT Sabahe**, *Loi et rachat variable*. Dir. : Benoît FELIX (Axa France). 10 novembre 2004.

**MAGISTERE D'ACTUARIAT STRASBOURG**

**BOROWICZ Jakub**, *DFA and Parameter Uncertainty*. Dir. : Richard MILLNS, FIA, Senior Consultant (EMB Consultancy LLP). 22 octobre 2004.

**CHALAYE Mélodie**, *Acceptations en Réassurance Non Vie*. Dir. : Emmanuel FIGUEREAU (AON). 21 octobre 2004.

**DERIEN Anthony**, *Cotation des traités XS par simulation*. Dir. : Jean-François WALHIN (SECURA Re). 21 octobre 2004.

**DREYFUS Noémie**, *Actuariat des engagements sociaux : Nouvelles normes comptables et états réglementaires*. Dir. : Pierre LEGRALL (Assurances du Crédit Mutuel). 21 octobre 2004.

**ELBAHTOURI Laila**, *Techniques de provisionnement de la garantie plancher*.

Dir. : Snějina MALINOVA (Fortis Assurances). 22 octobre 2004.

**ELIJALAT Leila**, *Le Plan d'Épargne Retraite Populaire : fondements et analyses*. Dir. : Céline BLATTNER (Actuaris). 21 octobre 2004.

**FAVRE Audrey**, *Modélisation Invalidité - Loi de maintien*. Dir. : Michel HEBERT (Swiss Re). 21 octobre 2004.

**HEINRICH Nicolas**, *La retraite collective: statistiques et création d'un outil de simulation de l'évolution des contrats*. Dir. : Olivier PIETRUSKA (AREAS CMA). 22 octobre 2004.

**JAUDEL François**, *Développement d'un logiciel pour les produits Vie: évolution de l'épargne, valeur de rachat, participation au bénéfice*. Dir. : Victor MACIEL, Johann Rodolphe SIMON (AXA France). 22 octobre 2004.

**KESSOUR Linda**, *La Courbe de Crédit: Un actif enfin négociable*. Dir. : Frédéric GIROD (CIC Banque CIAL). 22 octobre 2004.

**MARTIN Rémi**, *Evaluation des engagements sociaux du groupe AXA aux normes US GAAP*. Dir. : Adeline GERARD (AXA). 22 octobre 2004.

**RANGUELOVA Diana**, *Gestion actif/passif et création de valeur sur un portefeuille en run off*. Dir. : Sébastien KUNTZ (AXA Liabilities Managers). 22 octobre 2004.

**SCHOSGER Florence**, *Modélisation prospective du portefeuille et valeur intrinsèque d'une société d'assurance vie*. Dir. : Frédéric EWALD (AZUR-GMF). 21 octobre 2004.

**TOLEDANO Jacques**, *Risk measurements in the Hedge fund industry*. Dir. : Dr Daniel SEILER (Swiss Capital Group). 21 octobre 2004.

**URIO Elise**, *Profit testing de produits d'assurance vie individuelle*. Dir. : Philippe SCHMITT (La Mondiale Europartner). 22 octobre 2004.

**WEBER Frédéric**, *Rentabilité en assurance construction*. Dir. : Stanislas BAUGE (AXA France). 21 octobre 2004.

**WENDLING Pierre**, *Gestion risque de crédit, Etude du spread de crédit*. Dir. : Henri Pierre RODRIGUES (Crédit Foncier). 22 octobre 2004.

**YU Mingjie**, *Modélisation d'un portefeuille d'acceptation en réassurance: Dépendances multivariées et copulas*. Dir. : Hervé ODJO (Groupama). 21 octobre 2004.

**YU Bénédicte**, *Structures de dépendance dans le cadre du Risk Based Capital chez ZFS*. Dir. : Alexandre PORACCHIA (Zurich Financial Services). 21 octobre 2004.

DIVERS  
**CONGRES**

**28ème CONGRES INTERNATIONAL DES ACTUAIRES**

**28 mai – 02 juin 2006**

Le 28<sup>ème</sup> Congrès International des Actuaires se tiendra à Paris du 28 mai au 2 juin 2006 au Palais des Congrès.

Il s'agit d'une manifestation exceptionnelle qui se déroule tous les 4 ans et réunit les actuaires du monde entier, de tous métiers et de tous niveaux professionnels.

L'ensemble de la profession de l'assurance et de la banque ont accepté de se mobiliser pour la réussite de ce Congrès et Claude Bébéar, ancien Président d'Honneur de l'Institut des Actuaires Français et Président du Conseil de Surveillance du groupe AXA, a accepté d'en assurer la présidence.

Un programme scientifique très fourni, en particulier sur les thèmes les plus d'actualités et les plus porteurs, est proposé aux participants :

**1/ Actualités Scientifiques :**

**A. THÈME N° 1**

*La dépendance stochastique (corrélation et dépendance non linéaire).*

**B. THÈME N° 2**

*Les mesures de la solvabilité et la gestion actif-passif.*

**2/ Actualités Professionnelles :**

**A. THÈME N° 3**

*La responsabilité de l'actuaire.*

**B. THÈME N° 4**

*Le point de vue et le rôle des actuaires vis-à-vis des nouvelles normes comptables.*

**3/ Actualités Techniques :**

**A. THÈME N° 5**

*Problèmes actuariels liés au départ en retraite de la génération du baby-boom.*

**B. THÈME N° 6**

*Les grands risques et l'assurabilité.*

De nombreux orateurs, actuaires et non actuaires, dirigeants d'entreprises, responsables des administrations publiques, représentants d'organisme internationaux, s'adresseront à la communauté des actuaires à l'occasion de ce Congrès.

Les modalités d'inscription se trouvent sur le site du Congrès : [www.ica2006.com](http://www.ica2006.com).

Le Comité d'organisation<sup>1</sup> vous invite à saisir cette opportunité et vous donne rendez-vous le 29 mai à 9 heures au Palais des Congrès.

---

<sup>1</sup> ACIAP – 4 rue Chauveau Lagarde – 75008 Paris- France – Tél : (+33) 1 44 51 72 72  
E-mail : [info@ica2006.com](mailto:info@ica2006.com)



*Kactu'Z présente :*

# LA NUIT DES ACTUAIRES 2006



*La 3<sup>e</sup> édition du Gala réunissant  
Professionnels et Etudiants du Mouvement Actuariel*

se tiendra

**le Samedi 1<sup>er</sup> Avril 2006**

au Pavillon Dauphine (Paris 16<sup>e</sup>)

Pour plus d'informations,  
mail : [info@lanuitdesactulaires.com](mailto:info@lanuitdesactulaires.com)  
site : [www.lanuitdesactulaires.com](http://www.lanuitdesactulaires.com)

## IN MEMORIAM

### Alain TOSETTI (1944-2003)

Alain TOSETTI aura marqué tous ceux qui ont eu le privilège de le rencontrer, que ce soit les étudiants en actuariat, ses collègues du contrôle des assurances, les dirigeants des sociétés et plus surprenant encore, les amateurs de poésie. Présent dans nos mémoires, il ne nous a pas vraiment quittés en septembre 2003.

A travers ses ouvrages techniques les actuaires l'ont connu ou le connaîtront. Il avait créé pour eux une collection remarquable auprès d'un grand éditeur et il avait initié cette entreprise en écrivant, avec ceux qu'il avait dirigé, trois livres traitant, outre les mathématiques actuarielles, tout aussi bien de comptabilité, de réglementation, ou de gestion d'actif. Sa façon de traiter des questions complexes, car il ne les élude pas, est on ne peut plus pédagogique : décrivant d'abord une réalité brute, il vous explique comment on peut au départ simplifier les choses afin d'en rendre possible le traitement actuariel, sans toutefois que le modèle soit une caricature, puis, la première étape étant maîtrisée, il vous amène petit à petit à complexifier la représentation afin qu'elle soit la plus fidèle possible. Il avait cette manière de faire, en raison d'une longue expérience, et parce que sa réflexion sur le métier qu'il pratiquait n'avait jamais cessé.

J'ai eu la chance d'avoir Alain TOSETTI comme collègue, comme collaborateur au Conservatoire National des Arts et Métiers, et même comme ami. Un des plus grands mérites que je lui reconnais est de m'avoir fait prendre conscience de certaines vérités qu'on peut ensuite considérer comme des évidences, d'avoir enfin vu qu'il y avait une forêt, après m'être longtemps aveuglé en considérant de trop près certaines essences rares. Ainsi il m'a persuadé que les écarts de sinistralité étaient un phénomène très secondaire au regard des erreurs flagrantes de tarification. Dit d'une autre façon pour les théoriciens, la mauvaise appréciation d'une espérance mathématique est plus grave que l'absence de prise en compte des écarts types. Un commissaire contrôleur sait d'ailleurs que l'existence apparente d'une marge de solvabilité ne peut corriger une sous tarification chronique ou une insuffisance de provisions techniques. Un autre exemple du bon sens ravagé d'Alain TOSETTI est la façon qu'il avait d'expliquer le choix des seuils dans les tests statistiques : il était clair pour lui qu'on les choisissait de telle sorte qu'il permettait de conserver l'hypothèse soumise au test, mais à laquelle on tenait par-dessus tout. Bien qu'il ne fût pas encore reconnu par l'IAF, c'est très tôt qu'il a suivi les colloques de l'ASTIN, et c'est à son contact que j'ai pris connaissance pour la première fois des travaux actuariels en assurance non-vie.

Mais la personnalité d'Alain TOSETTI était plus riche encore. Combien savent que ce fut un poète ? Faisant partie d'une troupe de théâtre amateur et voyant qu'il était

intéressé par ces activités, je l'ai présenté aux saltimbanques sans me douter que cela révélerait en lui des talents insoupçonnés. En fait c'était un grand auteur de sketches, un peu dans la veine de Woody Allen qu'il appréciait dans le texte original. Ses poésies ont aussi de l'humour et n'ont rien d'hermétique. Tenez ! Voici une pièce de sa composition :

*ÇA FAIT BEAU TEMPS*

*Le torchon à vaisselle, ça fait beau temps*

*Que tu n'y as plus mis les mains*

*Le sofa du living, ça fait beau temps*

*Que tu n'y as plus mis les fesses*

*La carpe de l'entrée, ça fait beau temps*

*Que tu n'y as plus mis les pieds*

*Et sous mes lèvres et sous mes mains, ça fait belle lurette*

*Que tu n'y as rien mis du tout de tout ce qui est toi*

*Et quand je dis ça fait beau temps, ça fait*

*Belle lurette, c'est une façon de parler, car*

*Ni le temps, ni la lurette ne me semblent si beaux*

*Que ça, depuis que tu es partie*

...

Les moments les plus extraordinaires furent ses derniers mois, car, souffrant des atteintes douloureuses d'une maladie fatale et n'ayant pas d'illusion sur les suites, victime de l'ingratitude et d'un manque d'égards qu'il supportait en silence, il déploya une activité débordante, comme pour montrer que la vie devait l'emporter, en dépit des apparences. Essayons de ne pas le démentir et que justice lui soit enfin rendue.

**Pierre PETAUTON**



## OUVRAGES PARUS (Sommaires)

**DELWARDE A., DENUIT M. :**

### ***Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives***

**Economica, Collection « Assurance Audit Actuariat »**

#### **I. Tables de mortalité périodiques**

##### **1. *Modélisation stochastique***

- 1.1. Introduction
- 1.2. Durée de vie restante
- 1.3. Quotient de mortalité
- 1.4. Fonction de survie
- 1.5. Taux de mortalité et exposition au risque
- 1.6. Taux instantané de mortalité
- 1.7. Répartition des décès dans l'année
- 1.8. Espérance de vie
- 1.9. Prime unique pure d'un contrat de rente viagère
- 1.10. Vie médiane
- 1.11. Entropie d'une table de mortalité
- 1.12. Hétérogénéité en matière de survie

##### **2. *Modèles paramétriques***

- 2.1. Introduction
- 2.2. Loi de Makeham
- 2.3. Loi de Weibull
- 2.4. Loi logistique
- 2.5. Loi de Heligman-Pollard
- 2.6. Combinaison de lois de mortalité

##### **3. *Lissage des statistiques de mortalité***

- 3.1. Introduction
- 3.2. Famille exponentielle naturelle et modèles linéaires généralisés
- 3.3. Nombres de décès et expositions au risque
- 3.4. Lissage par régression poissonnienne paramétrique
- 3.5. Modèles additifs généralisés
- 3.6. Modèles relationnels

3.7. Déformation d'une table de mortalité

**4. *Méthodes d'extrapolation de la mortalité aux grands âges***

4.1. Introduction

4.2. La méthode de Denuit & Goderniaux

4.3. La méthode de Coale & Guo

4.4. La méthode de Coale & Kisker

4.5. La méthode de Lindbergson

4.6. Le modèle logistique

4.7. Le modèle de Kannistö

4.8. Comparaison des méthodes

**II. Tables de mortalité prospectives**

**5. *De l'approche transversale à l'approche longitudinale***

5.1. Evolution de la mortalité en France

5.2. Le diagramme de Lexis

5.3. Estimation brute des statistiques de mortalité

5.4. Généralisation de l'hypothèse de répartition des décès dans l'année

**6. *Modèle de Lee & Carter pour l'élaboration de tables de mortalité prospectives***

6.1. Introduction

6.2. Modèle

6.3. Estimation des paramètres

6.4. Mesure de la qualité de l'ajustement

6.5. Analyse des résidus

6.6. Extrapolation de la tendance temporelle

6.7. Extension de Renshaw-Haberman

6.8. Modèle avec tendance temporelle linéaire

6.9. Modèle avec table limite

6.10. Comparaison de pays francophones

6.11. Modèle de Lee-Carter et fermeture des tables

**7. *Modèle de Poisson pour l'élaboration de tables de mortalité prospectives***

7.1. Modèle

7.2. Estimation des paramètres

7.3. Mesure de la qualité du modèle

7.4. Diagnostics

7.5. Extrapolation de la tendance temporelle

- 7.6. Extension de Renshaw-Haberman
- 7.7. Modèle avec tendance temporelle linéaire
- 7.8. Modèle avec table limite
- 7.9. Modèle de Wilmoth-Valkonen

**8. *Intervalles de confiance pour les indicateurs de mortalité***

- 8.1. Introduction
- 8.2. Approche par simulation Monte Carlo
- 8.3. Méthodes de rééchantillonnage des décès
- 8.4. Méthodes de rééchantillonnage des résidus
- 8.5. Vision bayésienne du modèle de Poisson

**III. Applications actuarielles**

**9. *Construction de tables de mortalité réglementaires***

- 9.1. Introduction
- 9.2. Tables réglementaires pour le marché français
- 9.3. La nouvelle TPRV

**10. *Tarification et gestion actuarielle des rentes viagères***

- 10.1. Introduction
- 10.2. Antisélection en rentes
- 10.3. Ruine, tables de mortalité et taux d'intérêt
- 10.4. Corrélation entre risques couverts
- 10.5. Capitaux différés
- 10.6. Bornes et approximations pour la probabilité de survie  ${}_d^1 P_{a0}$
- 10.7. Réassurances et titrisation

**11. *Quelques applications des rentes : vente en viager, conversion de l'usufruit ou réparation des dommages corporels***

- 11.1. Introduction
- 11.2. Une nouvelle méthode de capitalisation
- 11.3. Conversion de l'usufruit
- 11.4. Capitalisation des dommages corporels

**DENUIT M., CHARPENTIER A. :**

***Mathématiques de l'Assurance Non-vie  
Tome II : Tarification et Provisionnement***

**Economica, Collection « Economie et Statistiques Avancées ».**

**9. *Tarification a priori***

- 9.1. Introduction
- 9.2. Les variables tarifaires
- 9.3. Principes de base de la statistique
- 9.4. Analyse des données
- 9.5. Méthodes de scoring
- 9.6. Modèle linéaire
- 9.7. Modèles additifs
- 9.8. Les modèles linéaires généralisés
- 9.9. Les modèles additifs généralisés
- 9.10. Cas pratique de tarification automobile
- 9.11. Tarification sur données de panel
- 9.12. Justifications techniques de la segmentation

**10. *Théorie de la crédibilité***

- 10.1. Introduction
- 10.2. Crédibilité bayésienne
- 10.3. Crédibilité linéaire
- 10.4. Crédibilité totale
- 10.5. Crédibilité multivariée
- 10.6. Crédibilité hiérarchique

**11. *Systèmes bonus-malus***

- 11.1. Introduction
- 11.2. Echelles en univers non-segmenté
- 11.3. Echelles en univers segmenté
- 11.4. Illustration numérique
- 11.5. Performance des échelles bonus-malus

**12. *Microéconomie de l'assurance et contrats optimaux***

- 12.1. Introduction
- 12.2. Décision dans l'incertain
- 12.3. Mesure de risque et aversion pour le risque



- 12.4. Offre et demande d'assurance
- 12.5. Asymétrie d'information et antisélection
- 12.6. Couverture des risques multiples

**13. *Approche dynamique du passif et provisionnement***

- 13.1. Introduction
- 13.2. Notation et motivation
- 13.3. Les méthodes déterministes
- 13.4. Les méthodes stochastiques
- 13.5. Modèles GLM et provisionnement
- 13.6. Choix de la méthode de provisionnement
- 13.7. Etudes de cas pratiques

**14. *Théorie des extrêmes et couverture des catastrophes***

- 14.1. Introduction
- 14.2. Loi limite des maxima
- 14.3. Epaisseur des queues de distribution
- 14.4. Etude de la loi des excès
- 14.5. Estimation de quantiles extrêmes
- 14.6. Théorie des extrêmes multivariés
- 14.7. Principaux traités de réassurance
- 14.8. Tarification de traités non-proportionnels
- 14.9. Ruine et grands risques

**15. *Méthodes de simulation***

- 15.1. Introduction
- 15.2. Principes généraux
- 15.3. Bootstrap (ou rééchantillonnage)
- 15.4. Simulation de lois usuelles univariées
- 15.5. Simulation de lois multivariées
- 15.6. Simulation de processus
- 15.7. Monte Carlo par Chaînes de Markov
- 15.8. Réduction de variance
- 15.9. Contrôle de la convergence et arrêt

**16. *Les limites des modèles actuariels et de leur utilisation***

- 16.1. Introduction
- 16.2. Tous les risques sont-ils assurables ?
- 16.3. Doit-on chercher à assurer l'inassurable ?
- 16.4. Est-il possible d'assurer l'inassurable ?

**MALEVERGNE Y., SORNETTE D. :*****Extreme Financial Risks******From Dependence to risk Management*****Springer****1. *On the origin of risks and extremes***

- 1.1. The multidimensional nature of risk and dependence
- 1.2. How to rank risks coherently ?
- 1.3. Origin of risk and dependence

Appendix

- 1.A. Why do higher moments allow us to assess larger risks?

**2. *Marginal distributions of returns***

- 2.1. Motivations
- 2.2. A brief history of returns distributions
- 2.3. Constraints from extreme value theory
- 2.4. Fitting distributions of returns with parametric densities
- 2.5. Discussion and conclusions

Appendix

- 2.A Definition and main properties of multifractal processes
- 2.B A survey of the properties of maximum likelihood estimators
- 2.C Asymptotic variance-Covariance of maximum
- 2.D Testing the Pareto model versus the stretched-exponential model

**3. *Notions of copulas***

- 3.1. What is dependence?
- 3.2. Definition and main properties of copulas
- 3.3. A few copula families
- 3.4. Universal bounds for functionals of dependent random variables
- 3.5. Simulation of dependent data with a prescribed copula
- 3.6. Application of copulas

## Appendix

- 3.A Simple proof of a theorem on universal bounds for functionals of dependent random variables
- 3.B Sketch of a proof of a large deviation theorem for portfolios made of Weibull random variables
- 3.C Relation between the objective and the risk-neutral copula

**4. *Measures of dependence***

- 4.1. Linear correlations
- 4.2. Concordance measures
- 4.3. Dependence metric
- 4.4. Quadrant and orthant dependence
- 4.5. Tail dependence

## Appendix

- 4.A Tail dependence generated by student's factor model

**5. *Description of financial dependences with copulas***

- 5.1. Estimation of copulas
- 5.2. Description for financial data in terms of Gaussian copulas
- 5.3. Limits of the description in terms of the Gaussian copulas

## Appendix

- 5.A Proof of the existence of  $\lambda^2$  statistic for testing Gaussian copulas
- 5.B Hypothesis testing with pseudo likelihood

**6. *Measuring extreme dependences***

- 6.1. Motivations
- 6.2. Conditional correlation coefficient
- 6.3. Conditional concordance measures
- 6.4. Extreme co-movements
- 6.5. Synthesis and consequences

## Appendix

- 6.A Correlation coefficient for Gaussian variables conditioned on both  $X$  and  $Y$  larger than  $u$
- 6.B Conditional correlation coefficient for student's variables
- 6.C Conditional Spearman's rho

**PARTRAT C., BRAILLARD P., LECOEUR E., NESSI J.-M.,  
NISIPASU E., REIZ O.**

***Evaluation des provisions techniques en assurance non-vie***

**Economica, collection « AAA » (mars 2006)**

*Chapitre 1.*

Les provisions techniques

**PARTIE I : Détermination de la provision pour sinistres à payer**

*Chapitre 2.*

Méthodes déterministes.

Méthodes chain ladder, loss ratios (Cape Cod, Bornhuetter-Ferguson), coût moyen, Verbeek-Taylor.

Traitement de l'inflation, escompte, facteur de queue.

*Chapitre 3.*

Généralités sur les méthodes stochastiques.

Paramètres de provisionnement, estimation prédiction.

*Chapitre 4.*

Méthodes stochastiques récursives (Mack).

Best estimates, erreurs de prédiction, Munich chain ladder, chain ladder multivariée, provisionnement multi-branches.

*Chapitre 5.*

Méthodes stochastiques factorielles.

Facteur, best-estimates, risques d'estimation et de prédiction (méthode delta), régression Log Normale, cellules « anormales », influentes.

Modélisation GLM, modèles Log Poisson surdispersé et Gamma. Sélection de modèles, intégration de pondérations. Joint modelling.

*Chapitre 6.*

Distribution prédictive, Value-at-Risk.

Techniques bootstrap : potentiel et limites.

Bootstrap sur résidus ; distributions approchées.

*Chapitre 7.*

Modèles additifs et GAM ; intégration d'avis d'experts ; provisionnement dynamique dans un modèle DFA ; copules et provisionnement multi-branches.

**PARTIE II : Les spécificités de la réassurance***Chapitre 8.*

Traitement de la réassurance dans le provisionnement

Réassurance proportionnelle et non proportionnelle. Exemple des Etats-Unis.

*Chapitre 9.*

Provisionnement pour une société de réassurance

Données, seuil de communication, segmentation, proportionnel et non proportionnel, retraitement, sinistres majeurs, change, run-off

Eléments de durée et leurs effets, sinistres latents : méthodes d'analyse, effets des modifications réglementaires

Corporate, marge de solvabilité, rétrocession, escompte

Segments spécialisés : décennale, RC médicale, ...

**PARTIE III : Le provisionnement pour les normes comptable et la solvabilité***Chapitre 10.*

Problématiques liées à la solvabilité

Marge de solvabilité : historique, marges en Europe, solvabilité II et cartographie des risques

Marge de solvabilité hors d'Europe : Etats-Unis, Canada, Suisse, Royaume Uni : Enhanced Capital Requirement, modèle interne, projection de sinistralité.

Conclusion.

*Chapitre 11.*

Problématiques liées aux normes IFRS.

Généralité : Exposure Draft, Phase I et II, IFRS 4, « juste valeur », impacts sur le passif, Market Value Margin (MVM).

Provisionnement en phase I : provision d'égalisation, provision pour évènements catastrophiques, tests de sinistralité, prise en compte de la réassurance.

Provisionnement en phase II : cash-flows, MVM, bootstrapping, taux d'actualisation, disparition du collatéral.

Conclusion.

**PLANCHET F., THEROND P., JACQUEMIN J. :**

*Modèles financiers en assurance*

*Analyses de risque dynamiques*

Economica, Collection « Assurance Audit Actuariat »

**PREMIERE PARTIE – LES OUTILS TECHNIQUES DE BASE**

**Chapitre 1. Outils actuariels**

1. Assurance non-vie
2. Assurance vie

**Chapitre 2. Outils économiques et financiers**

1. Les méthodes issues de l'approche par arbitrage
2. Le traitement d'un engagement par un assureur
3. La structure par terme des taux d'intérêt
4. L'inflation
5. Les actions
6. Les autres actifs
7. Un modèle stochastique simple de modélisation de l'actif

**Chapitre 3. Outils mathématiques**

1. Outils statistiques essentiels
2. Séries temporelles
3. Rappels de calcul stochastique
4. Analyser la dépendance entre variables aléatoires
5. Modéliser la dépendance entre variables aléatoires

**DEUXIEME PARTIE – TECHNIQUES DE SIMULATION**

**Chapitre 4. Générer des nombres aléatoires**

1. Les générateurs pseudo-aléatoires
2. Les générateurs quasi-aléatoires
3. Un exemple : valorisation d'un call européen avec dividendes dans le cadre du modèle Black & Scholes

**Chapitre 5. Simuler des réalisations de variables aléatoires**

1. Méthodes d'inversion de la fonction de répartition
2. Méthode de la composition
3. La méthode du rejet
4. Les méthodes spécifiques à certaines distributions

5. Méthodes susceptibles d'améliorer la qualité des simulateurs
6. Simulations de Monte-Carlo par Chaîne de Markov

Annexe : Constantes de l'algorithme de Moro

#### **Chapitre 6. Discrétisation de processus continus**

1. Discrétisation exacte
2. Discrétisation approximative
3. Application : méthode de valorisation par simulation d'une option sur maximum

#### **Chapitre 7. Mise en œuvre pratique : deux exemples**

1. Rente de réversion, avec influence du décès de la première tête sur celui de la seconde
2. Allocation d'actifs en assurance non-vie

### **TROISIEME PARTIE – EVALUATIONS D'ENGAGEMENTS**

#### **ET MESURES DE RISQUE**

#### **Chapitre 8. Mesures et comparaisons de risques**

1. Les mesures de risque
2. Comparaison des risques

#### **Chapitre 9. Lecture optionnelle d'un contrat d'épargne**

1. Contrat à taux garanti, sans participation aux bénéfices, ni clause de rachat
2. Contrat à taux garanti, avec participation aux bénéfices, sans clause de rachat
3. Contrat à taux garanti avec clause de rachat

#### **Chapitre 10. Garanties plancher dans les contrats en unités de compte**

1. Introduction
2. Les contrats à garantie plancher
3. Analyse du coût de la garantie
4. Etude de sensibilité à quelques paramètres
5. Choix de la probabilité
6. Prise en compte des imperfections de couverture

#### **Chapitre 11. Evaluation de l'engagement associé à un plan de stock-options**

1. Définition
2. Cadre réglementaire et fiscal
3. Evaluation de l'engagement de la société
4. Conclusion

Annexe 1 : Lexique des termes spécifiques

Annexe 2 : Fiscalité des stock-options

Annexe 3 : Schémas de programmation du modèle

### **Chapitre 12. Modèles stochastiques de mortalité**

1. Introduction
2. Modélisation du processus d'intensité
3. Utilisation pour la tarification de dérivés de mortalité

#### **QUATRIEME PARTIE – ASPECTS REGLEMENTAIRES**

### **Chapitre 13. Normes IAS/IFRS**

1. La mise en place des normes IFRS
2. Comptabilisation des engagements sociaux : IAS 19 et IFRS 2
3. Comptabilisation des instruments financiers : IAS 32 et IAS 39
4. Comptabilisation des contrats d'assurance : IFRS 4

Annexe : Principaux acronymes utilisés

### **Chapitre 14. Solvabilité 2**

1. Les modèles proposés par Solvabilité 2
2. La mise en œuvre pratique de ces modèles
3. Illustration

### **Chapitre 15. Méthodes et outils de projection d'une activité d'assurance**

1. Outils déterministes classiques de projection
2. Gestion Actif/Passif (ALM)
3. Les modèles de type DFA

### **Chapitre 16. Allocation d'actifs**

1. Contexte
2. Formulation du problème
3. Limites des modèles usuels
4. La revalorisation des rentes viagères
5. Illustration : Allocation d'actifs d'un régime de rentes en cours de service







## NOTES AUX AUTEURS

1. Les articles soumis pour publication doivent être envoyés à

l'Editeur du Bulletin Français d'Actuariat  
INSTITUT DES ACTUAIRES  
4 Rue Chauveau Lagarde  
75008 PARIS - FRANCE

2. Les articles, en français ou en anglais, doivent être des travaux originaux ou des synthèses sur des sujets fondamentaux. Ils ne sont pas simultanément soumis pour publication dans un autre périodique.
3. Lors de la soumission, l'article devra être envoyé **en trois exemplaires**, imprimés en double interligne au recto avec des marges de 2,5 cm et une taille de police de 10.
4. La première page de l'article contiendra : titre, nom(s) de(s) auteur(s), institution(s), résumé en français, résumé en anglais.
5. Les références bibliographiques seront ordonnées alphabétiquement par auteur et chronologiquement sur un même auteur sur le modèle suivant :

BARLOW R.E., PROSCHAN F. (1975) : *Mathematical theory of reliability and life testing*. Holt, Rinehart and Winston.

JEWELL W.S. (1975) : Regularity conditions for exact credibility. *ASTIN Bull.* Vol. 8, 336-341.

Les références bibliographiques dans le corps du texte utiliseront le nom de l'auteur suivi de l'année de publication.

6. L'adresse de l'un au moins des auteurs suivra les références bibliographiques.
7. La réception de l'article fera l'objet d'une confirmation.  
Il sera ensuite soumis à des rapporteurs pour avis.
8. En cas d'acceptation, l'auteur enverra une version définitive de l'article sous forme de fichier Word pour PC.  
Les graphiques éventuels devront avoir été collés **en tant qu'image** sans mode point ni liaisons.

ISSN en cours