La tarification de réassurance CAT-NAT

Thierry COHIGNAC
Geoffrey ECOTO

Sommaire

Modélisation du risque

Choix du type de modélisation du risque

- Le type de modélisation aura un impact direct sur les résultats de tarification

- Le choix de modèle doit être fonction des données disponibles, de la nature du risque et du type de programme de réassurance envisagé
  - Une modélisation à l'exposition ne sera pas possible si des données précises sur les risques assurés ne sont pas disponibles
  - Une sinistralité « attritionnelle » ne nécessitera pas une modélisation individuelle
  - Une modélisation agrégée annuelle ne conviendra pas à la tarification de traités XS avec reconstitutions

- En matière de Cat Nat deux approches sont envisageables :
  - Modélisation fréquence x sévérité basée sur l'historique de sinistralité
  - Modélisation « physique » dite par exposition

Modélisation du risque CAT

Approche historique

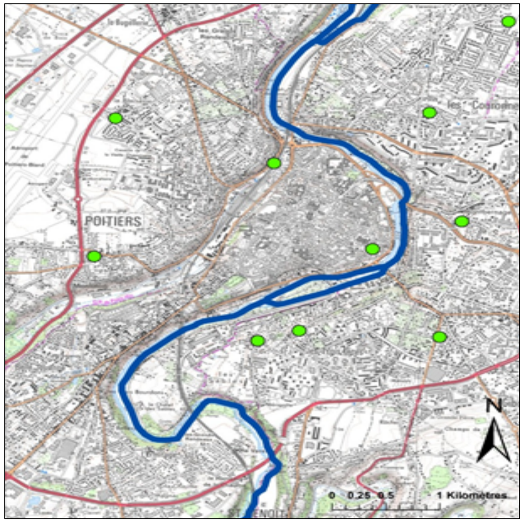
- Modèle fréquence sévérité de la sinistralité annuelle : $S=\sum_{i=1}^{N} X_i$
  - N représente le nombre d'événements par an. Usuellement N suit une loi de comptage de type Poisson ou Binomiale Négative,
  - X représente le coût d'un événement sur le portefeuille. Usuellement X suit une loi de type Log-Normal, Weibull, Pareto.

- Modélisation
  - Connaissant/définissant les familles de distributions possibles (pour N et X), choix d'une loi (pour N et X),
  - Estimation des paramètres des lois choisies à l'aide des sinistres historiques et de données additionnelles (nombre de contrats, primes, valeurs assurées, etc…) et de méthodes d'estimation (maximum de vraisemblance, moments, quantiles, etc…).

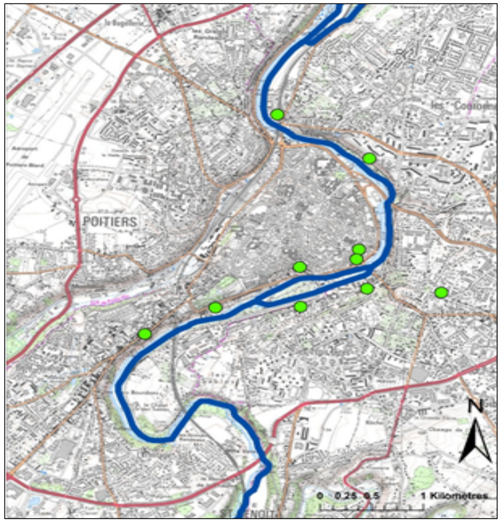
- Remarques
  - N et X correspondent aux sinistres au delà d'un certain seuil appelé **seuil atypique,**
  - Plutôt que de modéliser le coût X des sinistres, il peut être intéressant de modéliser les taux de destruction définis par $Co\hat{u}t / Valeur\ assur\acute{e}e$,
  - N et X doivent être estimés en tenant compte des effets IBNR (fréquence), IBNER (fréquence et coût) et de l'inflation (coût).

Modélisation du risque CAT

Evolution de l'exposition



Exposition faible en année N



Exposition importante en année N+1

- Un modèle basé sur l'historique ne permettra pas de capter, tout de suite (en N+1), l'augmentation de l'exposition entre N et N+1
- Cette différence d'exposition sera prise en compte ultérieurement (augmentation de la sinistralité historique) mais entre temps l'exposition aura encore évolué…

MODÉLISATION DU RISQUE CAT

Approche par exposition

▶ Les trois modules d'un modèle CAT : aléa, vulnérabilité et dommage

	Module d'Aléa	Module de Vulnérabilité	Module De Dommages
Inputs	Péril + Localisation géographique	Événements caractérisés + Caractéristiques du portefeuille	Distribution d'événements caractérisés croisée avec les caractéristiques du portefeuille + Conditions contractuelles (franchises, limites, etc.)
Etape(s) clé	**Génération et caractérisation d'événements**	**Croisement grâce aux données de géocodage**	**Détermination des taux de destruction et application des conditions contractuelles**
Outputs	Événements caractérisés	Événements caractérisés croisés avec les caractéristiques du portefeuille	**Sinistralité**

MODÉLISATION DU RISQUE CAT

SORTIES DES MODÈLES CAT

Identifiant de l'Evènement	Fréquence	Loi du coût de l'évènement
00001	λ_1	$C_1(p_1^1, p_2^1)$
00002	λ_2	$C_2(p_1^2, p_2^2)$
00003	λ_3	$C_1(p_1^3, p_2^3)$
⋮	⋮	⋮
0000n	λ_n	$C_n(p_1^n, p_2^n)$

- λ_i correspond à la fréquence de l'événement i sachant qu'un événement s'est produit

- C_i correspond au coût (de distribution C_i de paramètres p_1^i, p_2^i) de l'événement i sur le portefeuille modélisé. C_i est souvent une loi Beta

$$F_{X_i}(x) = \sum_{k=1}^{n} F_{C_k}(x)\frac{\lambda_k}{\lambda}, \qquad x \geq 0.$$

► Pour une année donnée, la sinistralité annuelle correspond à la somme pondérée (par les λ_i) des lois de coût C_i

► **Cette somme ne correspond à aucune loi usuelle**

► Nécessité d'avoir recours à des simulations de type Monte-Carlo afin d'obtenir un modèle de sinistralité annuelle

Modélisation du risque CAT

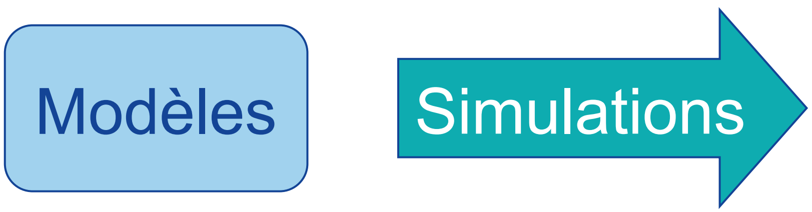
Comparaison des méthodes

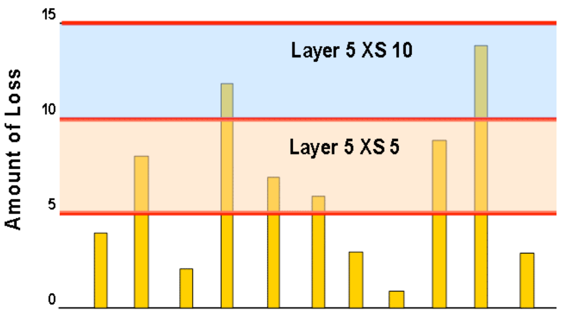
	Historique	Exposition
Avantages	- Nombre limité de données nécessaires - Délai réduit pour obtenir un modèle - Comparaison par rapport à la sinistralité historique	- Prise en compte de la vulnérabilité et de l'exposition - Prise en compte de l'évolution de l'exposition - Simulation d'événements absents de l'historique mais susceptibles de se produire (grâce à la modélisation de l'aléa météorologique sous-jacent)
Inconvénients	- Suppose que le passé est représentatif du futur - Complexité relative des effets IBNR et IBNER - Instabilité des résultats vis-à-vis de la sinistralité historique	- Nécessite beaucoup de données précises (géo-localisées) et de ressources informatiques importantes - Complexité des modèles physiques - Instabilité des résultats en fonction des évolutions de l'exposition (interprétation complexe des évolutions)

De la modélisation à la tarification

Tarification

- ▶ Les modèles de sinistralité permettent de générer des années probabilistes de sinistralité en prenant en compte d'éventuelles corrélations entre les périls
- ▶ De cette sinistralité est déduite la distribution de la sinistralité à la charge des traités de réassurance par application des conditions des traités





- ▶ La distribution de la charge des traités permet de calculer le tarif (technique) de réassurance en respectant certains principes appelés « principes de prime »

PRINCIPES DE PRIMES ET MESURES DE RISQUE

Les principes de prime

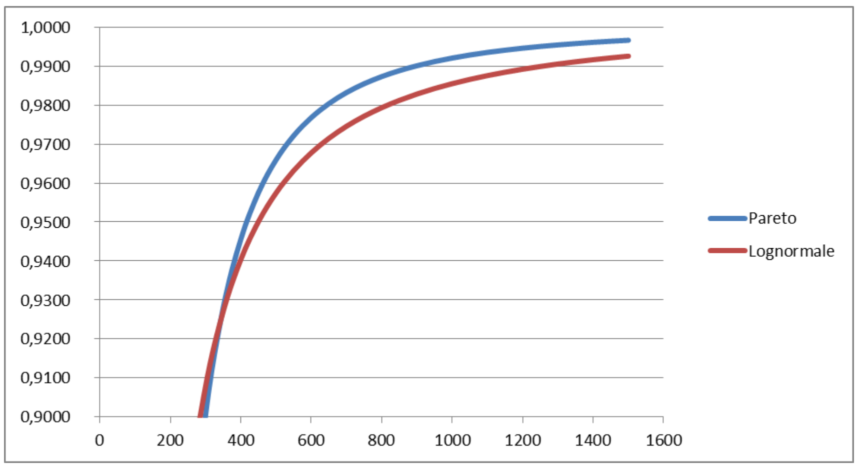
- Propriétés attendues de la prime P :
  - Au moins la prime pure : pour tout S, $P(S) \geq \mathbb{E}[S]$
  - Homogénéité : pour tout S et $\lambda \geq 0$, $P(S\lambda) = \lambda P(S)$
  - Invariance par translation : pour tout S et $c \geq 0$, $P(S+c) = P(S)+c$
  - Additivité : pour S et S' indépendantes, $P(S+S') = P(S)+P(S')$
  - Sous additivité : pour S et S', $P(S+S') \leq P(S)+P(S')$
  - Convexité : pour S, S', et $\lambda \in [0,1]$, $P(\lambda S+(1-\lambda)S') \leq \lambda P(S)+(1-\lambda)P(S')$

- Exemples :
  - Principe de l'espérance mathématique : $P(S) = (1+\alpha)\mathbb{E}[S]$, $\alpha > 0$
  - Principe de l'écart-type : $P(S) = \mathbb{E}[S] + \alpha\sqrt{V[S]}$, $\alpha > 0$

PRINCIPES DE PRIMES ET MESURES DE RISQUE

L'approche « classique » et ses limites

- Principe de l'écart-type : $P(S) = \mathbb{E}[S] + \alpha\sqrt{V[S]}$, $\alpha > 0$
- L'écart-type ne permet pas de prendre en compte la queue de distribution de S



- Distribution log-normale et Pareto de même moyenne et même écart-type
- Q_{200}
  - Pareto : 1250
  - Log-Normale : 1900

- Cette méthode est inadaptée à la tarification réassurance Cat qui, par définition, concerne la queue de distribution
- Prise en compte de la queue de distribution à l'aide des mesures de risque

Les mesures de risque

- Fonction qui à une variable aléatoire X associe un nombre réel positif $\rho(X)$
- **Définition** : une mesure de risque ρ est dite :
  - Monotone si $X \leq Y$ implique $\rho(X) \leq \rho(Y)$
  - Invariante par translation, ou cash-invariante, si $\forall c \in \mathbb{R},\ \rho(X+c) = \rho(X) + c$
  - Convexe si $\forall \lambda \in [0,1],\ \rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$
  - Positive homogène si $\forall c \geq 0,\ \rho(cX) = c\rho(X)$
  - Sous-additivité : $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$. Si $\rho(X+Y) = \rho(X) + \rho(Y)$, on parle alors d'additivité
- Normalisation : $\rho(0) = 0$

PRINCIPES DE PRIMES ET MESURES DE RISQUE

Les mesures de risque

- Exemples
  - **Value-at-Risk** (VaR) : $VaR_\alpha(X) = \inf\{y \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X \leq y) \geq \alpha\} = F_X^{\leftarrow}(\alpha)$
  - **Tail Value-at-Risk** (TVaR) : $TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\beta(X)\,d\beta$
  - **Mesures de risque de Wang** : $H_g(X) = \int_{-\infty}^{0} (g[S_X(x)] - 1)\,dx + \int_0^{\infty} g[S_X(x)]\,dx,$
    - $S_X(x)$ est la fonction de survie de X, i.e. $S_X(x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x)$
    - g fonction de distorsion, i.e. g est croissante et telle que $g : [0,1] \to [0,1]$, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$
    - **PH-transform** : $g(x) = x^\alpha$, $\alpha \in [0,1]$
    - **Wang-transform** : $g(x) = \Phi[\Phi^{-1}(x) + \beta]$, $\beta \in \mathbb{R}$, Φ fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

- Application directe à la tarification

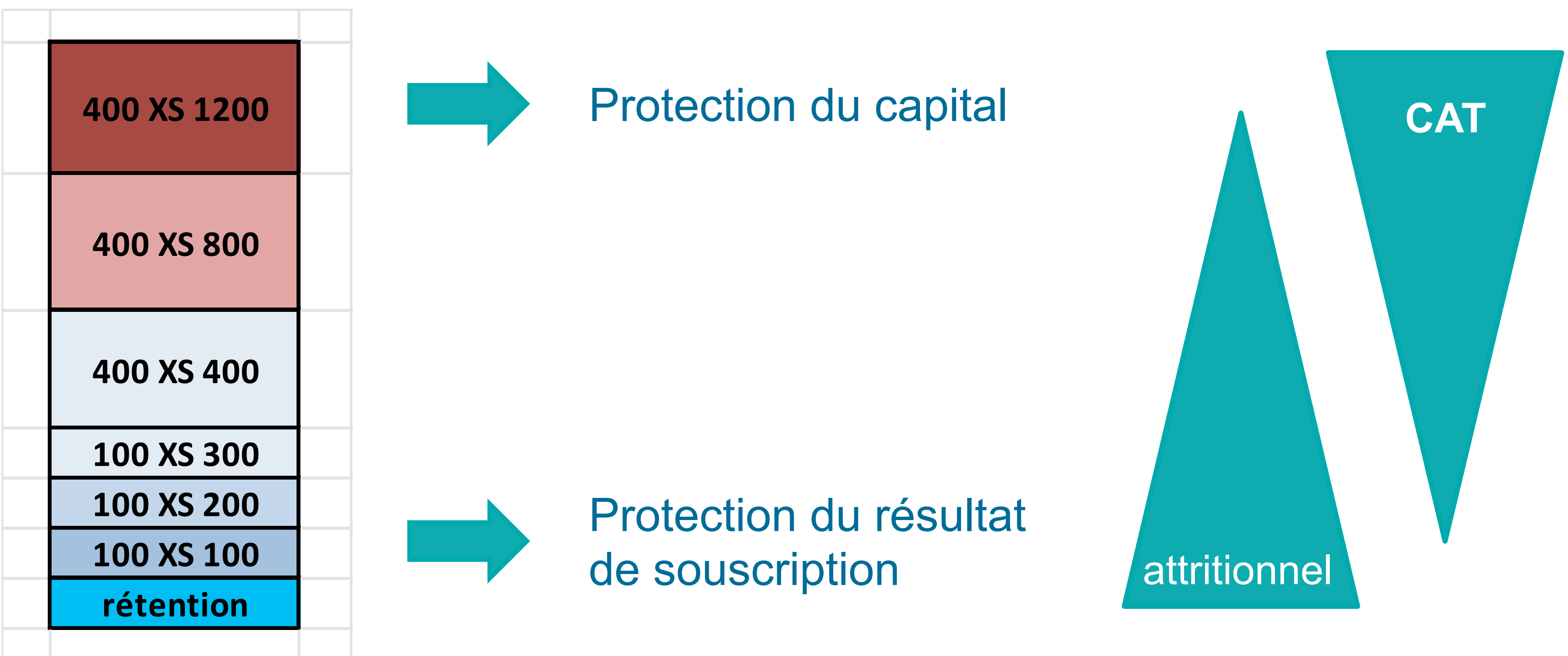
$$P(S) = \rho(S)$$

- En fonction des mesures de risque choisies, les propriétés attendues de la Prime P seront ou pas respectées

Vers une approche micro-économique

Limites de l'approche par mesure de risque

- L'approche par mesure de risque ne permet pas de prendre en compte directement l'aversion au risque de l'agent
- Cette approche ne permet pas de prendre explicitement en compte le coût du capital notion fondamentale pour la réassurance des événements CAT



L'APPROCHE MICRO-ÉCONOMIQUE : AVERSION AU RISQUE

Principes fondamentaux de théorie de la décision en avenir incertain

- Toute prise de décision peut être modélisée par une fonction d'utilité U telle que
  $X \geq Y$ (X préférée à Y) si et seulement si $V_{U}(X) \geq V_{U}(Y)$ avec

  $V_{U}(X) = \mathbb{E}[U(X)]$, modèle d'espérance d'utilité

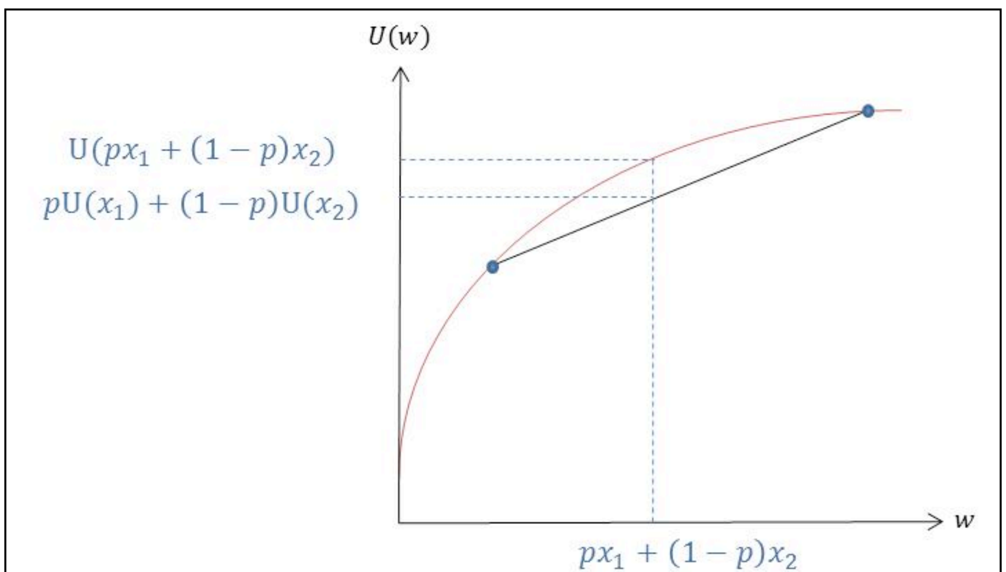
- **Définition (aversion pour le risque)** Un agent est dit averse au risque si à toute variable aléatoire X, il préfère la variable certaine $\mathbb{E}[X]$

- Exemple (loterie) : $\mathbb{E}[X]=100 \quad \succeq \quad L=\{200, 1/2\,; 0, 1/2\}$

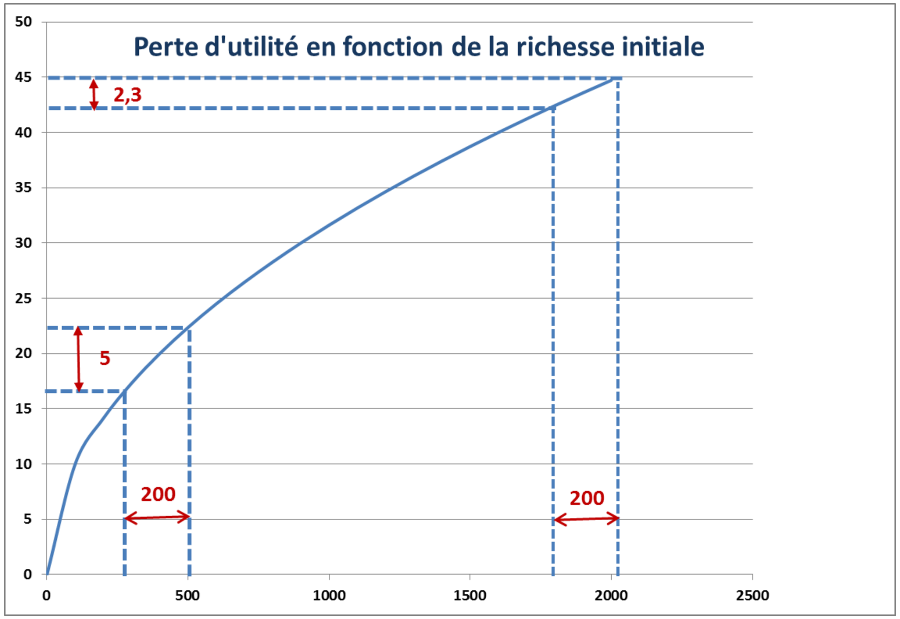
L'APPROCHE MICRO-ÉCONOMIQUE : AVERSION AU RISQUE

Aversion pour le risque et concavité de la fonction d'utilité

- L' aversion au risque correspond à une préférence pour un gain certain plutôt qu'à d'une loterie aléatoire de même gain :
  - Loterie $L=\{x_1, p; x_2, 1-p\}$
  - $L \preceq \mathbb{E}[L]$
  - $\mathbb{E}[U(L)] \leq \mathbb{E}[U(\mathbb{E}[L])] = U(\mathbb{E}[L])$
  - $pU(x_1) + (1-p)U(x_2) \leq U(px_1 + (1-p)x_2)$
  - U est concave



Fonction d'utilité et achat de réassurance



Compagnie A

Compagnie B

	Compagnie A	Compagnie B
Richesse initiale	500	2000
Sinistre	200	200
Perte d'utilité	5	2,3

Hypothèse : fonction d'utilité = $\sqrt{x}$

- Une perte ne se traduit pas par la même perte d'utilité en fonction de la richesse initiale
- **Les compagnies les moins riches auront tendance (ou besoin) à acheter d'avantage de réassurance que les plus riches**

L'APPROCHE MICRO-ÉCONOMIQUE : COÛT DU CAPITAL

EVA : Economic Value Added

- Notion de valeur (B. Finetti, 1957) :

$$\text{Valeur} = \sum_{t} \mathbf{E}\left(\mathbf{Dividendes}_t - \mathbf{Capital}_t\right) / (\mathbf{1}+\mathbf{r})^{t}$$

- Version simplifiée (horizon à 1 an) du modèle de Finetti :

$$EVA = E(resultat_{net}) - CoC \times K$$

- CoC est le coût du capital permettant de répondre aux attentes des investisseurs en matière de rendement du capital « K »
- Le capital « K » sera estimé à l'aide d'une mesure de risque

- Le but est de maximiser l'EVA en augmentant les dividendes et/ou en diminuant le capital nécessaire

Réassurance = Outil d'optimisation de l'EVA

Application à la tarification de réassurance

Point de vue du réassureur

- Situation initiale
  - w : richesse initiale du réassureur
  - p : primes reçues dues aux affaires déjà présentes (primes de réassurance)
  - S : perte due aux affaires déjà présentes (recoveries)
  - $R = w + p - S$: résultat à la fin de l'exercice

- Souscription d'une affaire nouvelle
  - Y : pertes dues au traité à tarifer (nouvelles recoveries)
  - π^R : prime de réassurance du nouveau traité
  - $R^{AN} = w + p - (S + Y) + \pi^R$

- Prise en compte du coût du capital

$$\boxed{EVA_0 = E(R) - coc.\rho(R)}$$

Situation initiale

$$\boxed{EVA_1 = E(R^{AN}) - coc.\rho(R^{AN})}$$

Avec l'affaire nouvelle

Application à la tarification

Point de vue du réassureur

- Prise en compte de l'aversion au risque du réassureur ($V_R(X) = \mathbb{E}[U(X)]$)

- On résout : $\boxed{V_R(R - coc.\rho(R)) = V_R(R^{AN} - coc.\rho(R^{AN}))}$

- Cette équation correspond au fait que l'ajout de l'affaire nouvelle ne doit pas détruire de valeur pour le réassureur tout en prenant en compte son aversion au risque

- Si π^R , la prime de réassurance, est telle que

  Si $V_R(EVA_0) > V_R(EVA_{AN})$, le traité ne sera pas souscrit.

  Il sera souscrit dans le cas contraire.

- En fonction de la présence ou pas de primes de reconstitution (primes de réassurance aléatoire), la résolution de cette équation se fera à l'aide de programmes d'optimisation

- **Le même raisonnement peut être fait en adoptant le <u>point de vue de l'assureur</u>**

Application à la tarification

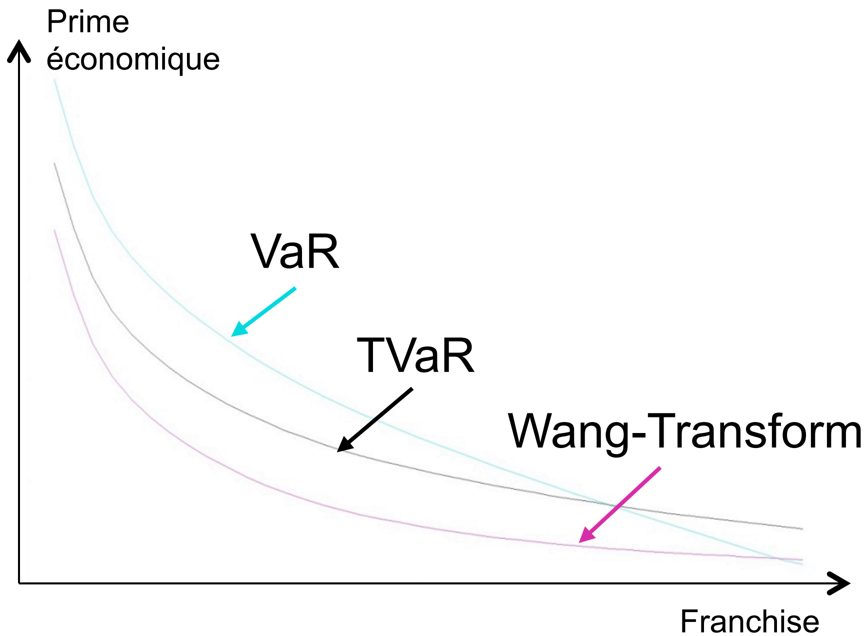
Choix des paramètres

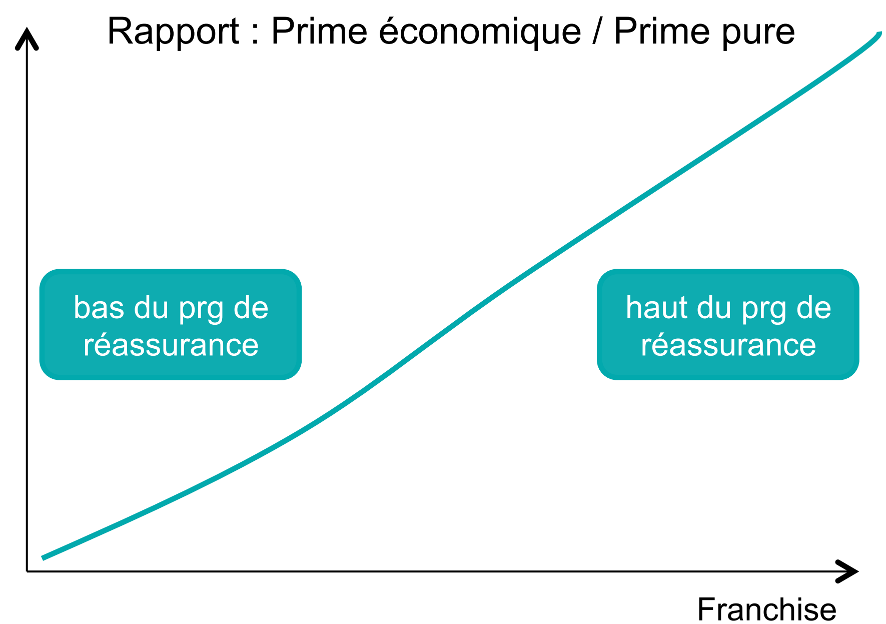
- Choix de la mesure de risque pour le coût du capital ρ(R)
  - VaRα , si $\alpha = 0.995$ cadre solvabilité 2
  - TVaR α (queue de distribution à partir de α)
  - Wang-transform (toute la distribution)

- Choix de la fonction d'utilité
  - U (X) = - ρ (X) est une fonction d'utilité si ρ est une mesure de risque
  - Exemple : PH-Transform: $\alpha = 0.9$, réassureur modérément averse au risque

APPLICATION À LA TARIFICATION

Sensibilité aux paramètres : coût du capital



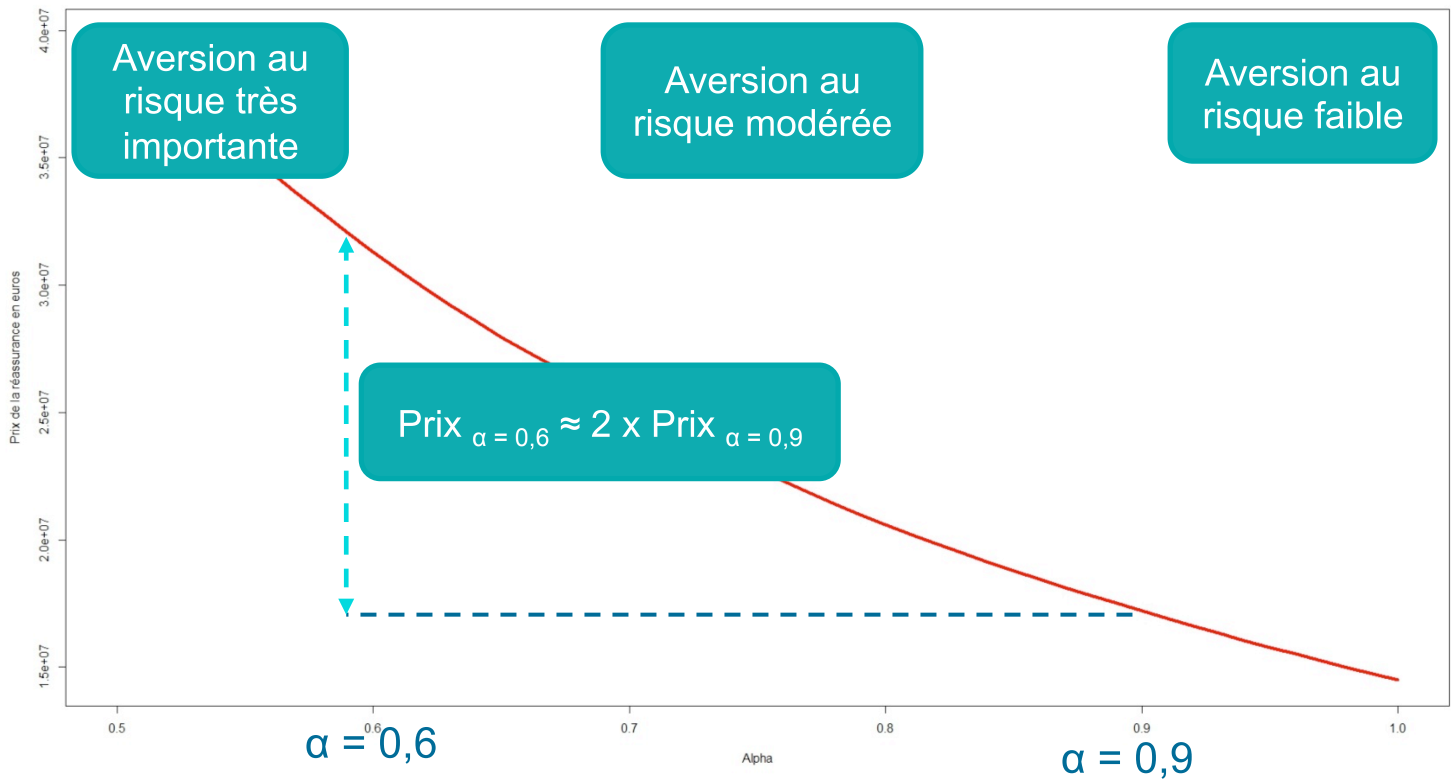


- Grande influence du choix de la mesure de risque permettant le calcul du capital économique sur la prime économique obtenue

- La prise en compte du coût du capital prend d'avantage d'importance (par rapport à la prime pure) lorsque la franchise augmente

Application à la tarification

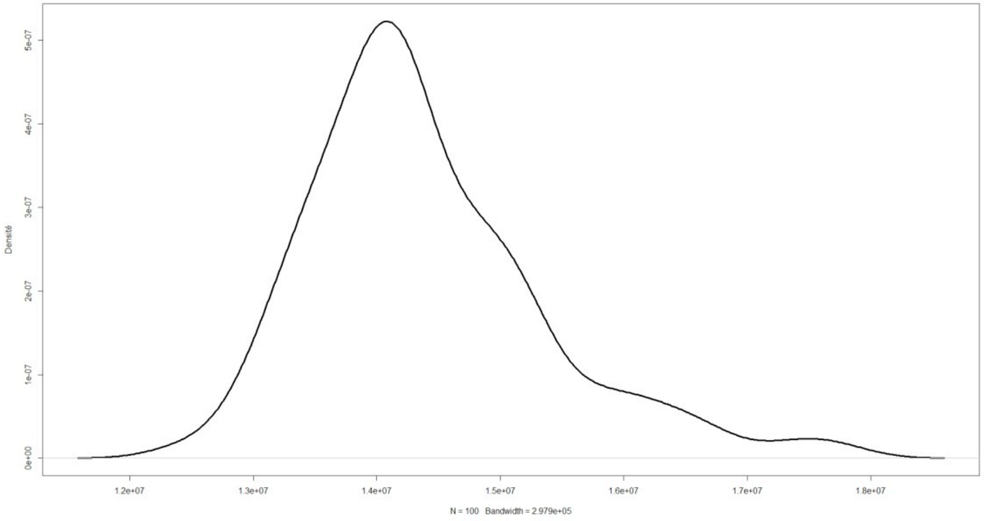
Sensibilité aux paramètres : aversion au risque



- Exemple d’une PH-Transforme de paramètre α
- Grande sensibilité du tarif obtenu en fonction de l’aversion au risque du réassureur

APPLICATION À LA TARIFICATION

Incertitude de modélisation



Densité des prix obtenus pour un même traité mais
pour 100 x 10K simulations

- Différents modèles (différentes simulations) donnent des tarifs différents
- Cet incertitude de modèle doit être prise en compte
- Certaines mesures de risque seront plus ou moins sensibles aux erreurs de modèle.

Conclusions et perspectives

- A partir d'un modèle de sinistralité (CAT ou Fréquence x Sévérité)
  - Le choix du type de modélisation dépendra des données disponibles et du type de programme de réassurance à tarifer.

- La tarification d'un traité CAT devra prendre en compte
  - Le coût du capital
  - L'aversion au risque du réassureur ou de l'assureur

- Perspectives de recherche
  - Prise en compte de l'erreur de modèle dans la tarification
  - Choix de mesures de risque « stables »

graphic or cartographic elements) are the exclusive property of CCR or of third parties having expressly authorised their use.

Any reproduction, representation or use of all or any part of the presentation is expressly prohibited, unless CCR's prior written consent has been obtained.

The content of the presentation is strictly for information purposes only and has no contractual value.

CCR accepts no responsibility for any direct or indirect loss or damage, whatever the cause or nature, associated with the presentation and incurred because of the use or possible inaccuracy of

Plus que prévoir, anticiper

Merci de votre attention

Thierry COHIGNAC

tcohignac@ccr.fr

Références bibliographiques

- Nabil Kazi-tani « Analysis of Backwards SDEs with Jumps and Risk Management Issues » Thèse 2013
- Geoffrey Ecoto « Tarification de traités de réassurance dans le cadre du régime des catastrophes naturelles français » Mémoire d'Actuariat 2014
- Guillaume Gorge & all « Insurance Risk Management and Reinsurance » Livre 2013
- Christian Robert & Pierre Therond «Distortion risk measures, ambiguity aversion and optimal effort » Présentation AFIR 2013