Les engagements d’assurance vie

CEA 1ère année – 02/02/17

Introduction - Les différents types de contrat de l’assurance vie (1/3)

- Le contrat d’assurance en cas de vie :
  - est souscrit **individuellement ou collectivement** par l’intermédiaire d’une entreprise ou d’une association
  - permet l’**acquisition de droits** immédiats ou différés exprimés sous forme de **capital ou de rente,** si la personne assurée est en vie au terme du contrat
  - repose sur la **capitalisation viagère et financière** des cotisations versées
  - peut être assorti d’une **contre-assurance en cas de décès**.

Introduction - Les différents types de contrat de l’assurance vie (2/3)

- Le contrat d’assurance en cas de décès :
  - contrat d’assurance, souscrit individuellement ou collectivement par l’intermédiaire d’une entreprise, d’une association, ou à l’occasion d’un emprunt
  - il garantit le versement d’un capital ou d’une rente à un bénéficiaire désigné, en cas de décès avant le terme du contrat
  - peut comporter des garanties complémentaires d’assurance de dommages corporels : prestations en cas d’invalidité ou d’incapacité consécutive à une maladie ou à un accident, ou majoration de la garantie en cas de décès accidentel

Introduction - Les différents types de contrat de l'assurance vie (3/3)

- Différents supports possibles :
  - Contrats en euros : le montant des garanties et des cotisations est exprimé en euros
  - Contrats en unités de compte (UC) : le montant des garanties est exprimé par référence à une ou des unités de compte telles que des actions de SICAV ou des parts de SCI.

    Les garanties du contrat sont directement liées à la variation, à la hausse ou à la baisse, de ces parts ou actions.
  - Contrats multi-supports : les garanties font référence à un ou plusieurs supports en unités de compte et à un support en euros

Sommaire

1. Probabilités viagères
2. Tables de mortalité
3. Rappels de mathématiques financières
4. Engagements élémentaires

Quelques définitions…

- Variable aléatoire T_x, durée de vie restante d'un individu d'âge x

- L'influence des facteurs généraux : l'âge, le sexe, la profession, le pays

- L'influence de facteurs spécifiques à l'assurance : anti-sélection des assurés ou des rentiers, tant pour les garanties en cas de vie que pour les garanties en cas de décès.

Probabilités de survie et de décès

- Probabilité de survie au delà d'une période de durée t :

$$P[T_x > t] = {}_t p_x$$

- Probabilité de décès au cours d'une période comprise entre t et t+t' :

$$P[t < T_x < t + t'] = {}_{t|t'} q_x$$

- Relation entre ces probabilités : ${}_{t|t'} q_x = {}_t p_x - {}_{t+t'} p_x$

- En particulier : ${}_t q_x = 1 - {}_t p_x$

Nombre probable de vivants (1/2)

- On définit la variable indicatrice X(t), dont la valeur est 1 si l'individu est en vie à l'instant t, et 0 sinon.

- Espérance de la variable indicatrice :

$$E[X(t)] = 1 \cdot {}_t p_x + 0 \cdot {}_t q_x = {}_t p_x$$

- Variance de la variable indicatrice : $V[X(t)] = {}_t p_x \cdot {}_t q_x$

Nombre probable de vivants (2/2)

- On considère lx (nombre certain) individus indépendants de même âge x

- Au bout de t années, le nombre de survivants est : $L_{x+t} = X_1(t) + \ldots + X_{l_x}(t)$

- En espérance : $E\left[L_{x+t}\right] = l_x \cdot {}_t p_x$

- Et donc : ${}_t p_x = \dfrac{l_{x+t}}{l_x}$

Quelques applications

- Une première propriété :

$$_{t+t'}p_x = {}_t p_x \cdot {}_{t'}p_{x+t}$$

lecture : la probabilité de survie d'une personne au bout de t+t' années est le produit de la probabilité de survie au bout de t années par la probabilité de survie de cette personne plus vieille de t années au bout de t' années.

- Deuxième application, l'espérance de vie :

$$\dot{e}_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + ... + l_\omega}{l_x} + \frac{1}{2}$$

Le taux de mortalité instantané

- Le taux de mortalité instantané est défini de la manière suivante (lorsqu'il est exprimé sous la forme d'un taux annualisé) :

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\frac{dl_x}{dx}$$

- Soit encore : $\mu_x = -\frac{d}{dx}(\ln(l_x))$

- Réciproquement, si le taux de mortalité instantané est connu, on a :

$${}_t p_x = \exp\left\{-\int_x^{x+t} \mu_y dy\right\}$$

Expressions analytiques de l_x

- Plusieurs formules analytiques représentant la mortalité en fonction de l'âge ont été proposées.

- Formule de Makeham, le taux instantané de mortalité est donné par la relation suivante, avec A, B > 0 et c > 1

$$\mu_x = A + B \cdot c^x$$

- La fonction de survie correspondante est donnée par :

$$_t p_x = \exp\left\{ -At - \frac{Bc^x}{\ln c}(c^t - 1) \right\}$$

- La formule de Gomperz, qui date de 1824, correspond au cas particulier où A = 0.

Sommaire

1. Probabilités viagères
2. **Tables de mortalité**
3. Rappels de mathématiques financières
4. Engagements élémentaires

Les tables de mortalité - généralités

- Une table de mortalité met en regard, pour tous les âges, le nombre de survivants dans un groupe fermé
- Elle est le fruit d'une étude statistique
- Elle permet en particulier de déterminer pour chaque âge le taux annuel de mortalité et l'espérance de vie
- La connaissance de la table de mortalité d'une population permet de modéliser de manière fine son évolution démographique probable.
- C'est sur cette base que sont calculés les engagements liés à la durée de la vie : prévoyance, retraite, etc.

Présentation d'une table de mortalité

Table de mortalité TF 00-02

x	lx	x	lx	x	lx	x	lx
0	**100 000**	29	98 960	58	94 131	87	46 362
1	99 616	30	98 921	59	93 741	88	41 868
2	99 583	31	98 879	60	93 329	89	37 319
3	99 562	32	98 833	61	92 892	90	32 821
4	99 545	33	98 782	62	92 425	91	28 469
5	99 531	34	98 725	63	91 923	92	24 328
6	99 519	35	98 662	64	91 382	93	20 444
7	99 508	36	98 593	65	90 797	94	16 860
8	99 498	37	98 518	66	90 164	95	13 618
9	99 488	38	98 435	67	89 476	96	10 750
10	99 478	39	98 343	68	88 726	97	8 277
11	99 467	**40**	**98 242**	69	87 907	98	6 204
12	99 456	41	98 130	70	87 010	99	4 516
13	99 444	42	98 007	71	86 024	100	3 185
14	99 431	43	97 872	72	84 941	101	2 171
15	99 415	44	97 724	73	83 751	102	1 426
16	99 395	45	97 563	74	82 442	103	900
17	99 371	46	97 387	75	80 998	104	544
18	99 342	47	97 197	76	79 402	105	314
19	99 309	48	96 993	77	77 633	106	172
20	**99 274**	49	96 776	78	75 671	107	89
21	99 239	50	96 546	79	73 496	108	44
22	99 205	51	96 304	80	71 088	109	20
23	99 171	52	96 049	81	68 423	110	9
24	99 137	53	95 778	82	65 478	111	4
25	99 103	54	95 489	83	62 233	112	1
26	99 068	55	95 180	84	58 680		
27	99 033	56	94 851	85	54 828		
28	98 997	57	94 501	86	50 706		

Lecture de la table :

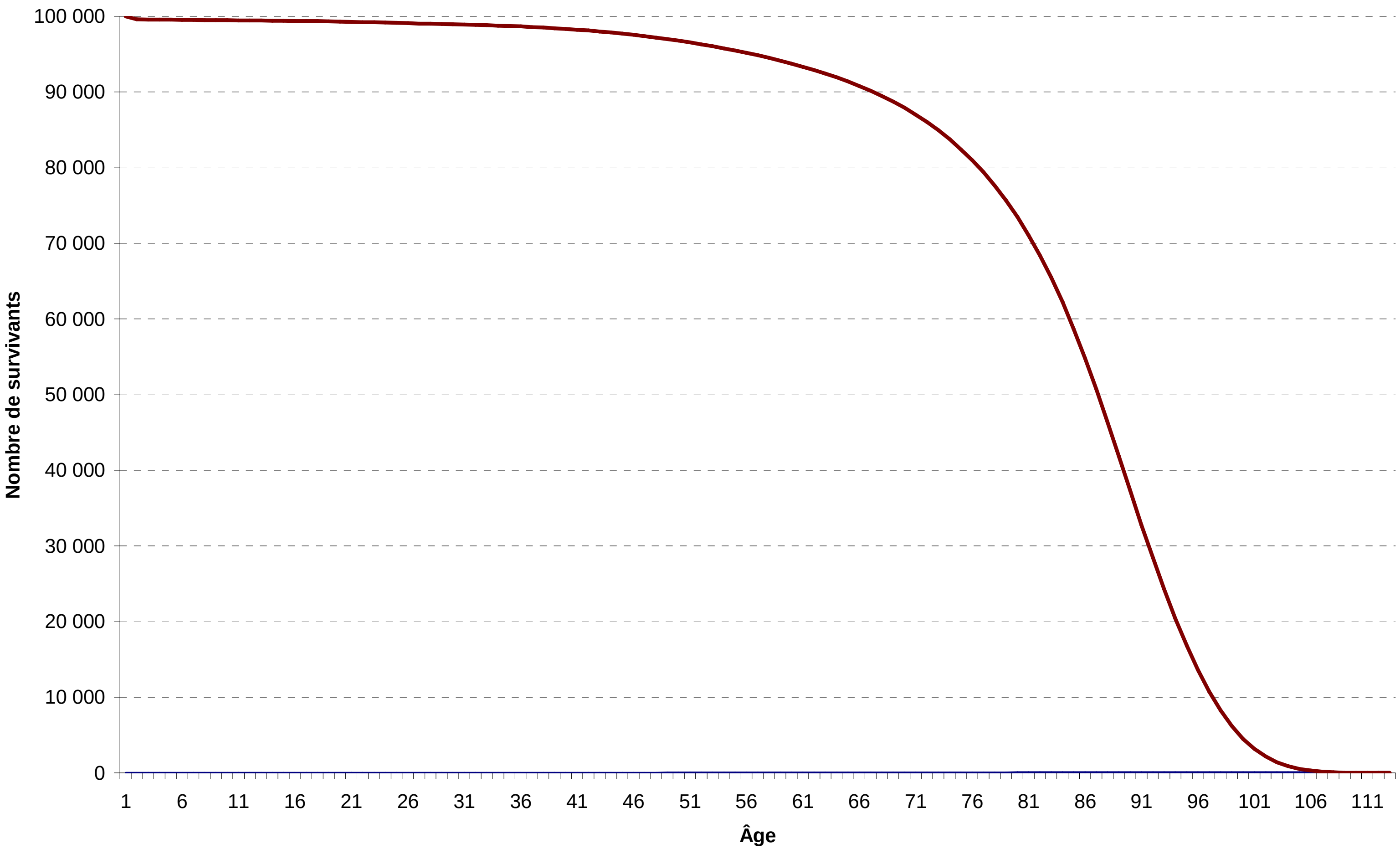
Sur 100 000 naissances, seules :

- 99 274 personnes survivront jusqu'à 20 ans
- 98 242 personnes jusqu'à 40 ans

La table suppose qu'aucune personne ne survivra au-delà de 112 ans. C'est l' « âge limite » de la table.

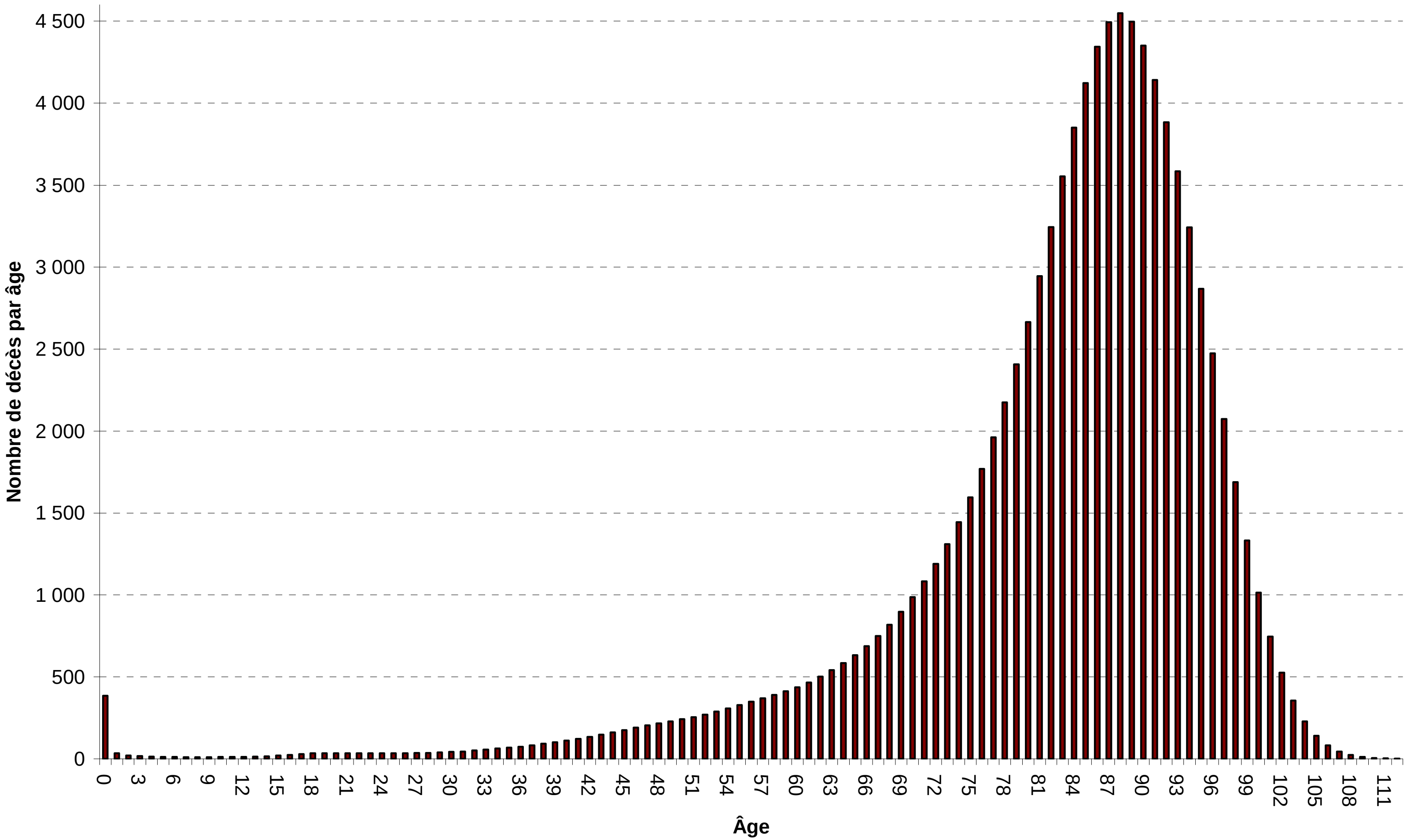
Le nombre de survivants par âge

- Notation : **lx**
- Nombre de survivants par âge, à tout âge, au sein d'une génération, pour 100 000 naissances (table TF 00-02)



Le nombre de décès par âge

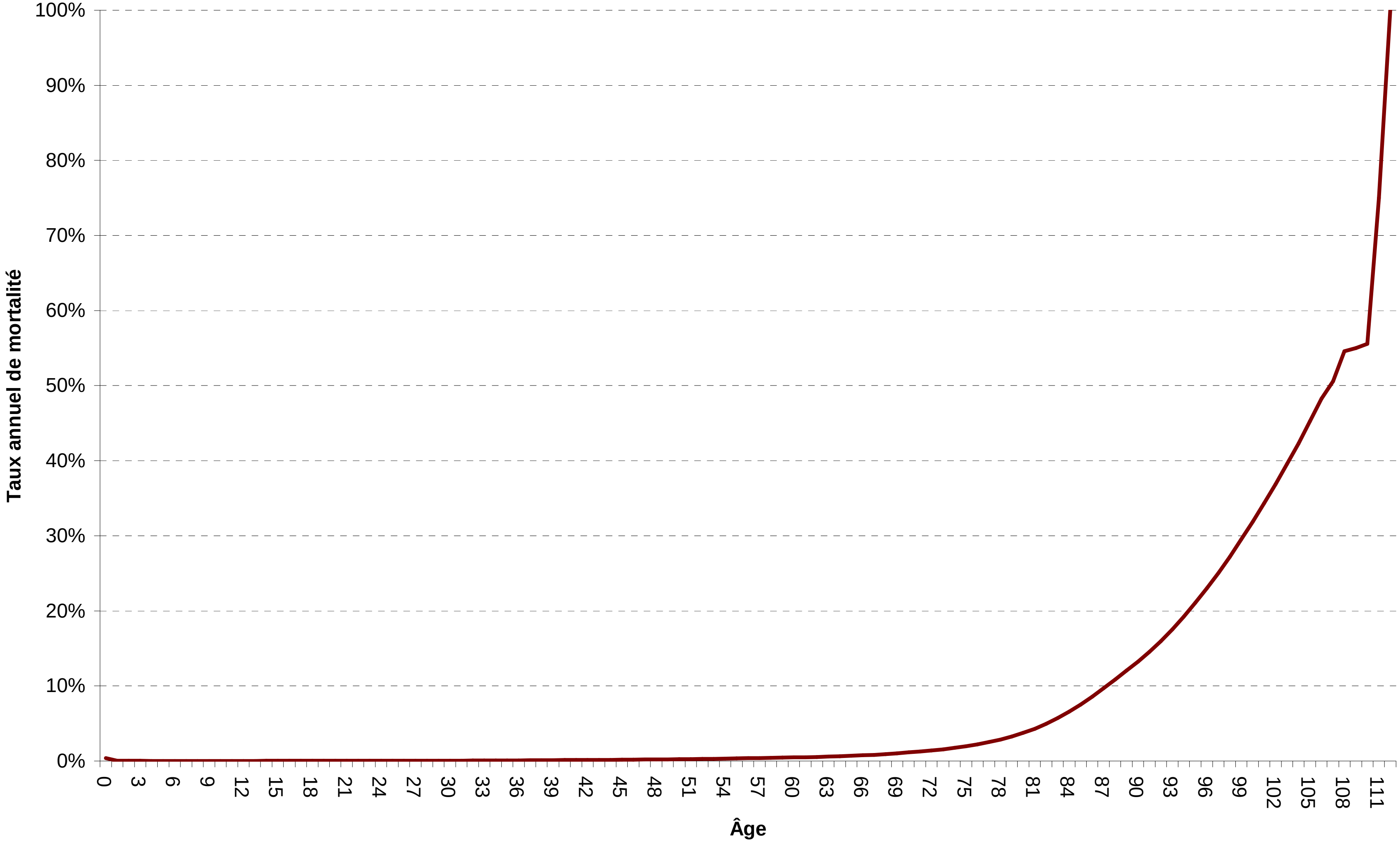
- <u>Notation</u> : $\mathbf{d_x = l_x - l_{x+1}}$ (TF 00-02)



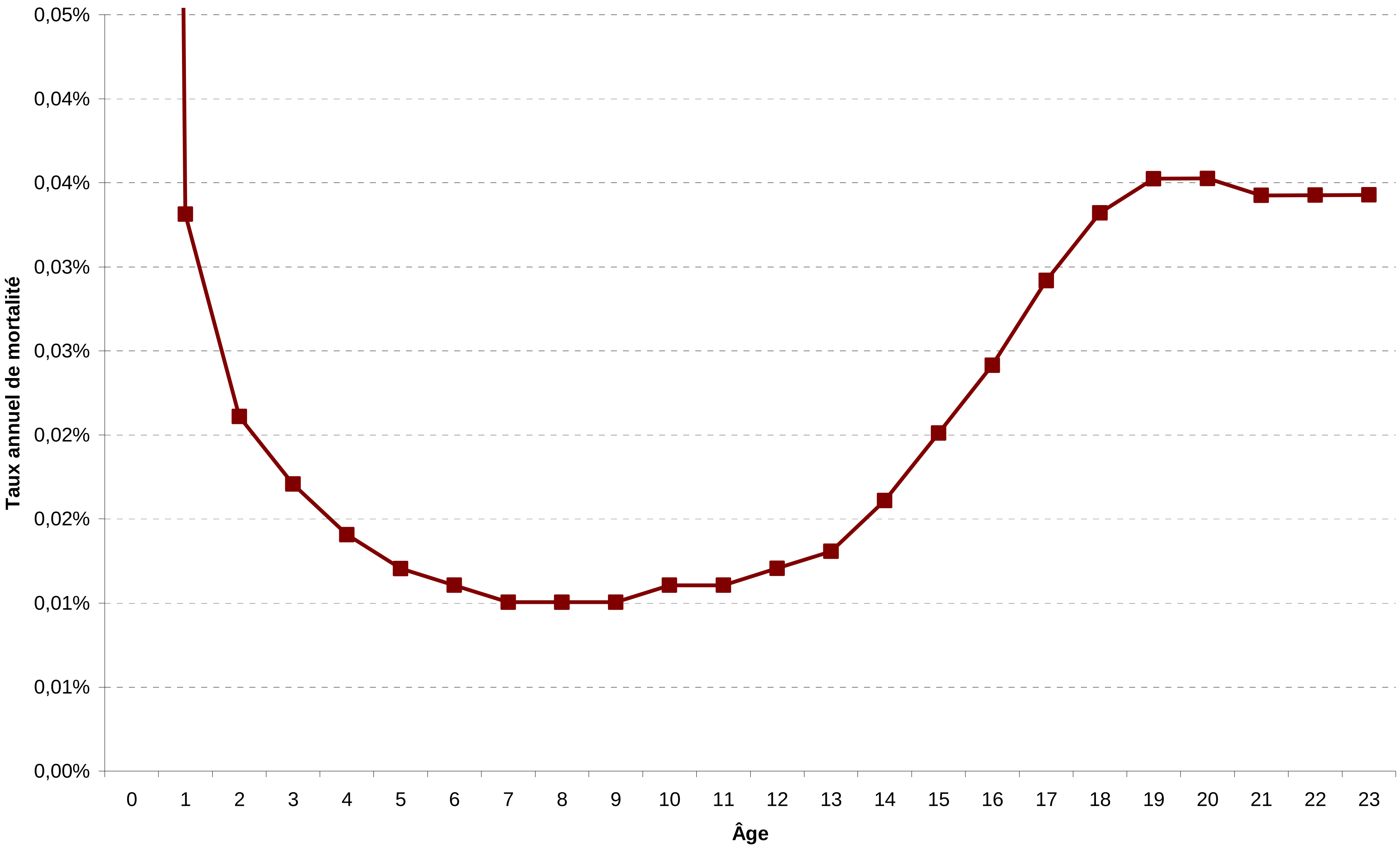
<u>NB</u> : « pics » de décès post-natals et aux âges élevés

Le taux annuel de décès par âge (1/2)

- Notation : $q_x = \dfrac{d_x}{l_x}$ (TF 00-02)



Le taux annuel de décès par âge (2/2)



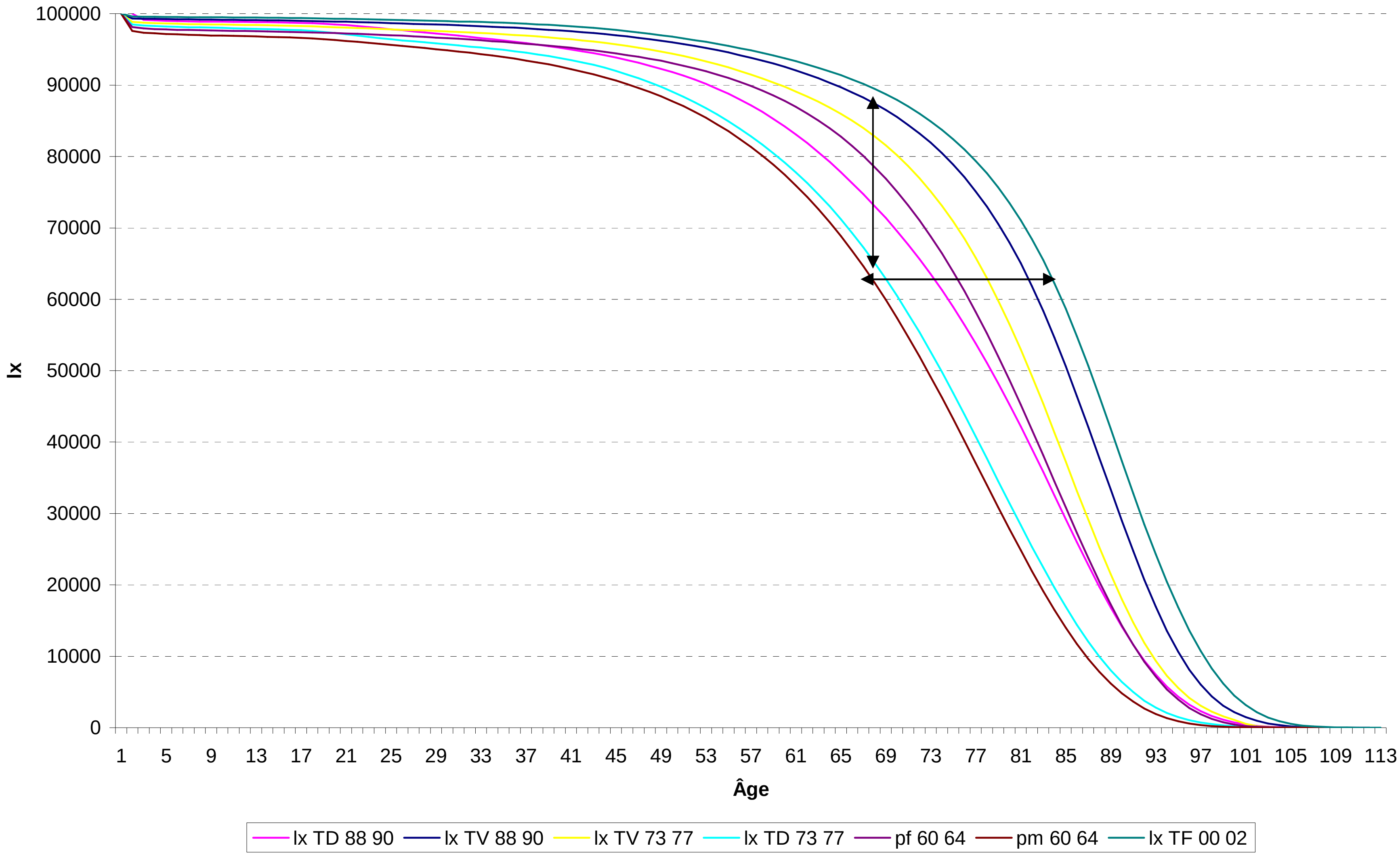
Les tables de mortalité réglementaires en France

Date d'application	Table	Origine	Application
Avant le 01/07/06	TV 88/90	Mortalité de la population générale féminine française pour la période d'observation 1988-1990	Tarification et provisionnement des garanties "vie" (autres que les rentes viagères)
	TD 88/90	Mortalité de la population générale masculine française pour la période d'observation 1988-1990	Tarification et provisionnement des garanties "décès" (autres que les rentes viagères)
A partir du 01/07/06	**TF 00-02 (d)**	**Mortalité de la population générale féminine française pour la période d'observation 2000-2002**	**Tarification et provisionnement des garanties "vie" et "décès" autres que les rentes viagères**
	TH 00-02 (d)	**Mortalité de la population générale masculine française pour la période d'observation 2000-2002**	**Tarification et provisionnement des garanties "vie" et "décès" autres que les rentes viagères**
A partir du 01/01/07	**TGH-TGF 05**	**Mortalité prospective de la population française. Intégration des effets de l'anti-sélection pour les rentes viagères Basées sur la population des assurés**	**Tarification et provisionnement des rentes viagères**

Réf. : A.335-1 du code des assurances

Cours sur les modes de tarification

Comparaison des tables de mortalité



Application

- Probabilité de survie entre âge n et âge x+n :

  ${}_{n}p_{x} = l_{x+n} / l_{x}$

- Probabilité de décès entre l'âge x et l'âge x+n :

  ${}_{n}q_{x} = 1 – {}_{n}p_{x}$

- Exemple : probabilité pour une personne de 60 ans d'être en vie à 75 ans

  ${}_{15}p_{60} = l_{75}/l_{60} = 80998 / 93329 = 86{,}8\%$

Sommaire

1. Probabilités viagères
2. Tables de mortalité
3. Rappels de mathématiques financières
4. Engagements élémentaires

Notations et rappels de mathématiques financières

- Toute opération financière – emprunt auprès d'un établissement financier, dépôt sur un compte rémunéré, etc. – repose sur deux éléments :
  - le temps : la durée de l'opération
  - le coût de l'argent : le taux auquel sera prêté l'argent, pour la durée considérée

- Définition : la valeur acquise d'un capital correspond au montant dont disposera une personne investissant un capital initial pour une certaine durée et à un certain taux, au terme de l'opération.

Valeur acquise d'un capital au terme de n périodes

- Les intérêts simples :
  - Les intérêts financiers sont directement proportionnels au capital investi, à la durée de placement et au taux de rémunération.
  - Capital disponible au terme de n périodes : $S \cdot (1 + n \cdot i)$
- Les intérêts composés :
  - Les intérêts financiers issus de l'investissement engendrent à leur tour des intérêts financiers.
  - Capital disponible au terme de n périodes : $S \cdot (1 + i)^n$

Passage d'un taux annuel à un taux périodique

- Calcul à <u>intérêts simples</u> :

$$Taux\ périodique = \frac{Taux\ annuel}{Nombre\ de\ \ périodes\ dans\ l'année}$$

- Calcul à <u>intérêts composés</u> (ou proportionnels) :

$$Taux\ périodique = (1 + Taux\ annuel)^{\frac{1}{Nombre\ de\ périodes\ dans\ l'année}} - 1$$

Soit encore : $(1+i_k)^k = 1+i$

<u>Remarque</u> : sauf précision contraire, capitalisation et actualisation seront toujours effectuées par la suite à l'aide des taux d'intérêts composés

Actualisation d'un capital

- L'<u>actualisation financière</u> constitue « l'opération inverse » de la capitalisation.

- **<u>Valeur actuelle</u>** d'un capital S versé de manière certaine au terme de n périodes :

$$C_0 = S \cdot \left(\frac{1}{1+i} \right)^n = S \cdot v^n$$

- $v = \dfrac{1}{1+i}$ est appelé facteur d'escompte financier

Application - Les annuités financières

- Objet : calcul de la contre-valeur (ou capital constitutif) d'une série de flux futurs certains, les annuités financières.

- Principe de base :

Capital constitutif = Valeur actuelle des flux futurs

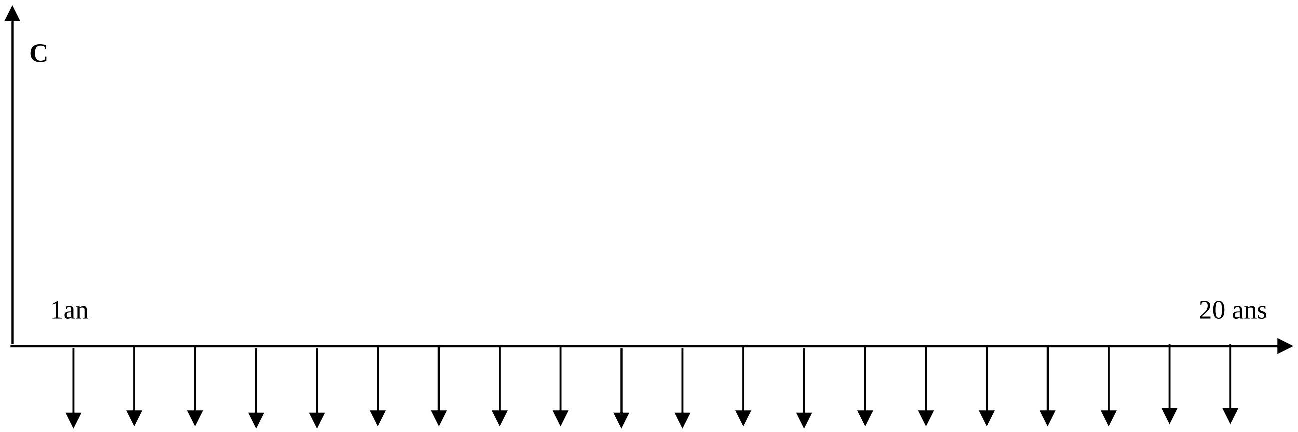
- Exemple : l'emprunt immobilier

Exemple : l'emprunt immobilier (1/2)

Une personne souhaite souscrire un emprunt immobilier d'un montant de 200 000 €.

La banque lui propose un emprunt à annuités constantes (versées en fin d'année, à terme échu), remboursable sur 20 ans, au taux annuel de 4%.

Quel est le montant de l'annuité ?



Exemple : l'emprunt immobilier (2/2)

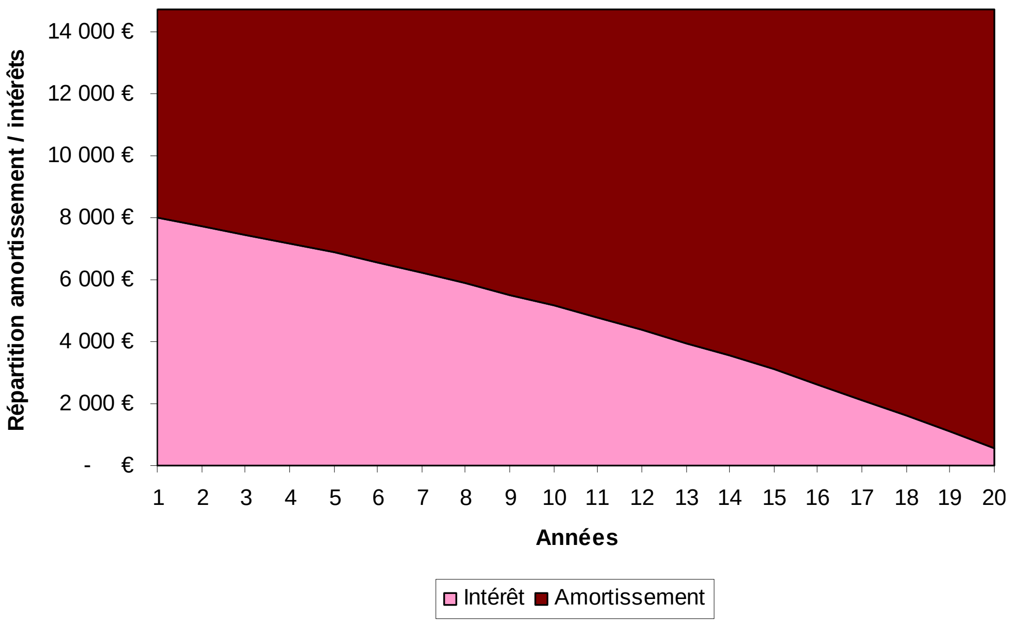
- Calcul de l'annuité

  200 000 = Annuité / (1+4%) + Annuité / (1+4%)^2 + … + Annuité / (1+4%)^20

  => Annuité = 14 716 €

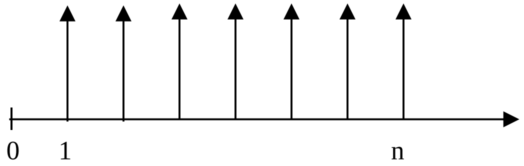
- Décomposition entre le remboursement du principal et des intérêts

	CRD début	Intérêt	Amortissement	Annuité	CRD fin
1	200 000 €	8 000 €	6 716 €	14 716 €	193 284 €
2	193 284 €	7 731 €	6 985 €	14 716 €	186 299 €
3	186 299 €	7 452 €	7 264 €	14 716 €	179 034 €
4	179 034 €	7 161 €	7 555 €	14 716 €	171 479 €
5	171 479 €	6 859 €	7 857 €	14 716 €	163 622 €
6	163 622 €	6 545 €	8 171 €	14 716 €	155 451 €
7	155 451 €	6 218 €	8 498 €	14 716 €	146 952 €
8	146 952 €	5 878 €	8 838 €	14 716 €	138 114 €
9	138 114 €	5 525 €	9 192 €	14 716 €	128 922 €
10	128 922 €	5 157 €	9 559 €	14 716 €	119 363 €
11	119 363 €	4 775 €	9 942 €	14 716 €	109 421 €
12	109 421 €	4 377 €	10 340 €	14 716 €	99 081 €
13	99 081 €	3 963 €	10 753 €	14 716 €	88 328 €
14	88 328 €	3 533 €	11 183 €	14 716 €	77 145 €
15	77 145 €	3 086 €	11 631 €	14 716 €	65 515 €
16	65 515 €	2 621 €	12 096 €	14 716 €	53 419 €
17	53 419 €	2 137 €	12 580 €	14 716 €	40 839 €
18	40 839 €	1 634 €	13 083 €	14 716 €	27 756 €
19	27 756 €	1 110 €	13 606 €	14 716 €	14 150 €
20	14 150 €	566 €	14 150 €	14 716 €	0 €



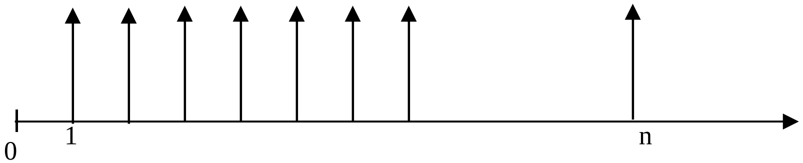
Annuités <u>à terme échu</u> constantes

- Annuité <u>temporaire</u> de n années <u>immédiate</u>



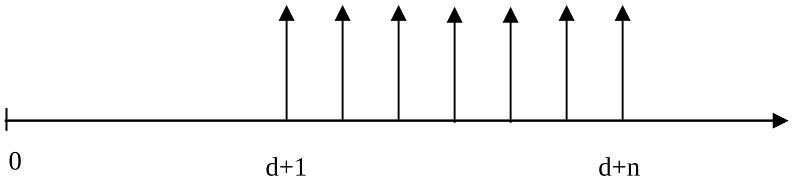
$$a_n = v + v^2 + \ldots + v^n = v \cdot \frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{i}$$

- Annuité <u>illimitée immédiate</u>



$$a = \frac{1}{i}$$

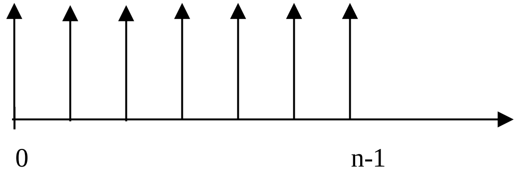
- Annuité <u>temporaire</u> de n années, <u>différée</u> de d années



$${}_d a_n = v^{d+1} + v^{d+2} + \ldots + v^{d+n} = v^d \cdot \frac{1-v^n}{i}$$

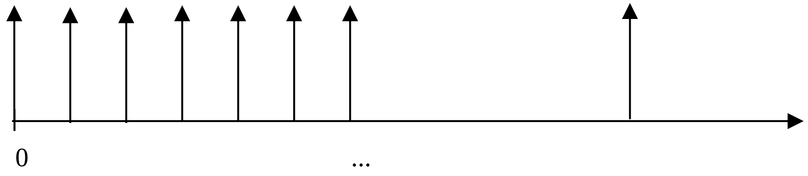
Annuités <u>d'avance</u> constantes

- Annuité temporaire de n années <u>immédiate</u>



$$\ddot{a}_n = 1 + v + v^2 + ... + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v}$$

- Annuité <u>illimitée immédiate</u>



$$\ddot{a} = \frac{1}{1-v} = 1 + \frac{1}{i}$$

Annuités <u>fractionnées</u> à terme échu

- Avec k entier, versements de 1/k effectués au terme de chaque k^e fraction d'année :

$$a_n^{(k)} = \frac{1}{k} \cdot (v^{\frac{1}{k}} + \ldots + v^n) = \frac{1}{k} \cdot v^{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{k}}}$$

- On définit en conséquence :

$$v_k = v^{\frac{1}{k}}$$

- Le taux périodique équivalent vérifie la relation suivante:

$$(1+i_k)^k = 1+i$$

- Soit donc :

$$a_n^{(k)} = \frac{1}{k} \cdot v_k \cdot \frac{1-v^n}{1-v_k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{i}{i_k} \cdot \frac{1-v^n}{i} = g_k \cdot a_n$$

  Remarque : $g_k > 1$

- On peut également montrer :

$$a_n^{(k)} \approx a_n + \frac{k-1}{2k} \cdot (1-v^n)$$

Annuités fractionnées d'avance

- Avec k entier, versements de 1/k effectués au début de chaque k[e] fraction d'année :

$$\ddot{a}_n^{(k)} = \frac{1}{k} + a_n^{(k)} - \frac{1}{k} \cdot v^n$$

- On peut également montrer :

$$\ddot{a}_n^{(k)} \approx \ddot{a}_n - \frac{k-1}{2k}(1-v^n)$$

Sommaire

1. Probabilités viagères
2. Tables de mortalité
3. Rappels de mathématiques financières
4. Engagements élémentaires

Les mathématiques actuarielles

- Reprennent les deux éléments à la base des mathématiques financières :
  - le temps
  - le coût de l’argent

- Ajoutent la dimension du hasard (à travers la mortalité dans le cas présent)

- Exemple de capitalisation viagère : les tontines

Exemple de capitalisation viagère : la tontine (1)

- 100 personnes âgées de 40 ans placent 10 000 euros pour une période de 20 ans.

- Quel sera le montant reçu par chaque survivant au terme de la période, sous les hypothèses suivantes ?

  – Taux annuel de 3%

  – Décès des personnes au rythme de la table de mortalité TF 00-02

Exemple de capitalisation viagère : la tontine (2)

- Montant (en €) atteint par le fonds au bout de 20 ans :

$$100 \cdot 10\,000 \cdot 1{,}03^{20} = 1806\,111$$

- Nombre probable de survivants au terme des 20 ans :

$$100 \cdot \frac{l_{60}}{l_{40}} = 100 \cdot \frac{93\,329}{98\,242} = 95{,}0$$

- Montant probable perçu par chaque survivant

$$\frac{1\,806\,111}{95{,}0} = 19\,012$$

- Comparaison : montant perçu en l'absence de l'effet viager

$$10\,000 * 1{,}03^{20} = 18\,061$$

L'actualisation viagère

- Quelle est la Valeur C à payer aujourd'hui par 1 personne de 59 ans pour recevoir 10 000 € dans un an, sur la base d'un taux de placement de 3%, en prenant comme table de référence la table de mortalité TF 00-02 ?

1 personne investit C à 3% :

Au bout d'un an, C est devenu C x (1+3%)

on doit verser 10 000 € à l_{60}/l_{59} survivants

$\Rightarrow$ 1 x C x (1+3%) = l_{60}/l_{59} x 10 000 € soit $\boxed{C = l_{60}/l_{59} \times 10\,000\text{ €} / (1+3\%)}$

C = 9 666 €

- C est appelée : valeur actuelle probable à 59 ans de 10 000 € versés un an plus tard (sur la base d'un taux d'actualisation de 3% et de la table TF 00-02)

Les principales garanties en assurance vie :

- Les engagements en cas de vie :
  - Le capital différé
  - Le capital constitutif de rente
- Les engagements en cas de décès :
  - La garantie temporaire décès
  - La garantie vie entière

Les engagements en cas de vie

- Le capital différé sans contre assurance
- La rente : succession de capitaux différés
  - Versement à terme échu vs versement à terme anticipé
  - Cas de la rente viagère servie à terme anticipé
  - Cas de la rente différée
  - Cas de la rente fractionnée

Le capital différé sans contre assurance

- Un assuré d'âge x à t = 0 souhaite recevoir un capital S, n années plus tard s'il est encore en vie à cette époque.

- Afin de faire face à cet engagement, l'assureur doit demander :

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n \cdot S$$

- Mise sous forme standard : $\frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot v^n = \frac{l_{x+n} v^{x+n}}{l_x v^x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} = {}_nE_x$

- Dx est le premier nombre de commutation vie

${}_nE_x$ est la valeur actuelle probable d'un capital de 1 € différé de n années, sans contre assurance

1er type de rente : la rente temporaire (1/3)

- L'assureur prend l'engagement de verser un montant R, à t = 1, t = 2, …, t = n

- Pour faire face à l'ensemble des n engagements, l'assureur doit prévoir :

$$\frac{D_{x+1}}{D_x}R+\frac{D_{x+2}}{D_x}R+\ldots+\frac{D_{x+n}}{D_x}R$$

- On note encore, pour des versements de 1€ :

$$a_{x:\overline{n}}=\sum_{t=1}^{n}{}_{t}E_{x}$$

1er type de rente : la rente temporaire (2/3)

- On définit le deuxième nombre de commutation vie

$$N_x = D_x + D_{x+1} + \ldots + D_\omega$$

- La valeur actuelle probable d ’une rente d’1 € temporaire de n années, versée à terme échu, s ’écrit sous la forme standard :

$$\frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} = a_{x:\overline{n|}}$$

1er type de rente : la rente temporaire (3/3)

- Si la rente est versée à terme anticipé (à t = 0, t = 1, …, t = n-1), l'assureur doit prévoir :

$$\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tE_x = 1 + a_{x:\overline{n|}} - {}_nE_x$$

- La valeur actuelle probable d'une rente temporaire de n années à versements de 1 €, effectués d 'avance s'écrit également sous la forme standard :

$$\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = \ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

2e type de rente : la rente viagère

– Elle est servie tant que le bénéficiaire est en vie.

– Valeur actuelle probable d'une rente viagère versée à terme échu :

$$a_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_tE_x$$

– Soit encore, sous forme standard : $a_x = \dfrac{N_{x+1}}{D_x}$

– Valeur actuelle probable d'une rente viagère servie à terme anticipé :

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\infty} {}_tE_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Cas de la rente différée

– Rente viagère différée de m années, temporaire de n années, servie à terme échu :

$$_{m|}a_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=m+1}^{m+n} {}_tE_x = {}_mE_x \cdot a_{x+m:\overline{n|}}$$

– Rente viagère différée de m années, temporaire de n années, servie d 'avance :

$$_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \sum_{t=m}^{m+n-1} {}_tE_x = {}_mE_x \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n|}}$$

Cas de la rente fractionnée

- La plupart du temps, une rente n'est pas versée par arrérage annuel, mais par arrérage trimestriel

- Plus généralement, on considère des versements de 1/k € effectués chaque k^{e} d'année

- Rente fractionnée à terme échu :

$$a_{x:\overline{n}|}^{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k\cdot n}\frac{D_{x+\frac{t}{k}}}{D_x} \approx a_{x:\overline{n}|} + \frac{k-1}{2k}(1-{}_nE_x)$$

- Rente fractionnée à terme anticipé :

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{t=0}^{k\cdot n-1}\frac{D_{x+\frac{t}{k}}}{D_x} \approx \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \frac{k-1}{2k}(1-{}_nE_x)$$

Les engagements en cas de décès

- Garantie temporaire décès d'un an
- Temporaire décès, généralisation
- Garantie vie entière
- Engagements en cas de décès avec différé

La garantie temporaire décès d'un an (1/2)

- Un assuré d'âge x à t = 0 souhaite que soit versé à un bénéficiaire un capital S s'il décède entre t = k et t = k+1

- Hypothèse retenue pour la conduite des calculs : on **suppose qu'en cas de décès, celui-ci intervient à t = k+1/2**

- Probabilité que le décès intervienne entre k et k+1 :

$$P[k < T_x < k+1] = \frac{d_{x+k}}{l_x}$$

La garantie temporaire décès d'un an (2/2)

– Valeur actuelle probable (VAP) de l'engagement : $\dfrac{d_{x+k}}{l_x} \cdot v^{k+\frac{1}{2}} \cdot S$

– Mise sous forme standard : $\dfrac{d_{x+k}}{l_x} \cdot v^{k+\frac{1}{2}} = \dfrac{d_{x+k} v^{x+k+\frac{1}{2}}}{l_x \cdot v^x} = \dfrac{C_{x+k}}{D_x}$

– $C_x = d_x v^{x+\frac{1}{2}}$ est le premier nombre de commutation décès.

– $\dfrac{C_{x+k}}{D_x}$ est la valeur actuelle probable d'une temporaire

décès d'un an de capital 1 €, pour l'année k

Temporaire décès : généralisation

- L'assureur prend l'engagement de verser un capital S quelle que soit la date du décès entre t = 0 et t = n

- Montant nécessaire à l'assureur pour honorer cet engagement :

$$\frac{C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1}}{D_x} \cdot S = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} S$$

- $M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega$ est le deuxième nombre de commutation décès

- Valeur actuelle probable d'une garantie temporaire décès de 1 €, d'une durée de n années :

$$A_{x:\,n\urcorner} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{d_{x+t}}{l_x} v^{t+\frac{1}{2}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

La garantie vie entière

- Contrat par lequel l’assureur s’engage à verser un capital (ici égal à 1 €) quelle que soit l’époque du décès

- Lorsque « n tend vers l’infini », M_{x+n} tend par construction vers 0 (nul en pratique au-delà de l’âge limite de la table)

- VAP de la garantie vie entière de capital 1 € : $A_x = \dfrac{M_x}{D_x}$

Engagement en cas de décès avec différé

- La garantie ne joue que m années après la souscription, effectuée à t = 0. L'objectif est ainsi d'éviter l'anti-sélection

- Exemple 1 : valeur actuelle probable d'une temporaire décès de n années, au capital de 1 €, différée de m années

$$ {}_{m|}A_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=m}^{m+n-1} \frac{d_{x+t}}{l_x} v^{t+\frac{1}{2}} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x} $$

- Exemple 2 : valeur actuelle probable d'un garantie vie entière de 1 €, différée de m années :

$$ {}_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x} $$