CEA Finance I

Cours II - 09/03/2017

Vincent GAUGÉ

Cadre

Prêts emprunts à 3M 6M - FRA 3v6

On considère un agent qui

- peut prêter et emprunter sur 6 mois au taux Euribor 6 mois du jour
- peut prêter et emprunter sur 3 mois au taux Euribor 3 mois du jour
- peut prêter et emprunter sur 3 mois dans 3 mois au taux Euribor 3 mois constaté dans 3 mois

Opération	Aujourd'hui	Dans 3M	Dans 6M
Prêt/Emprunt 6M	Début		Fin
	Taux de référence Eur6M connu aujourd'hui		

Opération	Aujourd'hui	Dans 3M	Dans 6M
Prêt/Emprunt 3M	Début	Fin	
	Taux de référence Eur3M connu aujourd'hui		

Opération	Aujourd'hui	Dans 3M	Dans 6M
Prêt/Emprunt 3M dans 3M		Début	Fin
		Taux de référence Eur3M connu dans 3M	

- cet agent peut aussi acheter ou vendre un FRA 3v6 qui lui permet d'échanger une référence fixe (connue aujourd'hui) contre la référence variable 3M dans 3M

Rappel
Taux forward

- on redonne les 2 taux Euribor (taux annuels simples en base 360) de l'exercice VII de février

Maturité	Euribor	Maturité en jours
$3M$	$1,26\%$	92
$6M$	$1,54\%$	183

- le taux forward 3M dans 3M, vu de 0, est le taux que l'on peut fixer entre 3M et 6M et est déterminé à partir des taux 3M et 6M

Taux forward = taux prêt/emprunt à terme

déterminé par absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)

- Le taux d'emprunt à terme 3M dans 3M, vu de 0, est noté $L_0 = L(3M, 6M)$
- L'opération d'emprunt à terme est réplicable par un prêt 3M et un emprunt 6M au comptant

Opération	Aujourd'hui	Dans 3M	Dans 6M
Emprunt 3M	+ 1	$-1 - 1,26\% \times \frac{92}{360}$	
Prêt 6M	- 1		$+1 + 1,54\% \times \frac{183}{360}$
Emprunt à terme 3M dans 3M	0	$+1 + 1,26\% \times \frac{92}{360}$	$-(1 + 1,26\% \times \frac{92}{360}) \times (1 + L_0 \times \frac{91}{360})$
Total	0	0	AOA $\Rightarrow$ 0

- Taux forward $= L_0 = \frac{360}{91} \times \left(\frac{1+1,54\% \times \frac{183}{360}}{1+1,26\% \times \frac{92}{360}} - 1 \right)$

Taux d'équilibre du FRA

Objet des slides suivants

- le taux d'équilibre du FRA est le taux pour lequel la valeur du FRA est nulle, ie le taux auquel on peut acheter ou vendre un FRA au prix 0 (opération d'échange taux fixe/taux variable à l'équilibre)
- dans cette section, on veut montrer que le taux d'équilibre du FRA est égal au taux forward en mettant en place un montage
  - prêt à terme taux variable + vente FRA $\Leftrightarrow$ prêt à terme taux fixe
  - emprunt à terme taux fixe

et en utilisant la relation d'absence d'opportunité d'arbitrage

Premier cas: FRA postcompté

Montage: Prêt à terme à taux variable + FRA

- Le taux *Eur3M* constaté dans 3M est noté $\widetilde{L}$ - non connu en 0
- Prêt à taux variable + FRA de valeur nulle (FRA au pair)

Opération	Aujourd'hui	Dans 3M	Dans 6M
Prêt variable Réf variable $\widetilde{L}$	0	-1 Fixation de $\widetilde{L}$	$1 + \widetilde{L} \times \frac{91}{360}$
Vente FRA 3v6 Taux K	0	0	$(K - \widetilde{L}) \times \frac{91}{360}$
Prêt variable + FRA	0	-1	$1 + K \times \frac{91}{360}$

Taux FRA vs taux forward

Montage: montage précédent + emprunt à terme à taux fixe

- Combinaison de
  - Prêt à taux variable + FRA valeur nulle
  - Emprunt à terme notionnel 1 à taux fixe (=taux forward)

Opération	Aujourd'hui	Dans 3M	Dans 6M
Prêt variable + FRA v.n.	0	-1	$1 + K \times \frac{91}{360}$
Emprunt à terme 3M dans 3M	0	$+1$	$-(1 + L_0 \times \frac{91}{360})$
Total	0	0	AOA $\Rightarrow$ 0

- par raisonnement d'arbitrage, le taux fixe du FRA pour lequel la valeur du FRA est nulle (FRA au pair) est le taux forward $K = L_0$

Second cas: FRA précompté

Montage: Prêt à terme à taux variable + FRA+ placement différentiel du FRA

- Si le versement du différentiel est en début de période, même montage que précémment avec placement du différentiel sur 3 mois au taux $\widetilde{L}$

Opération	Aujourd'hui	Dans 3M	Dans 6M
Prêt variable Réf variable $\widetilde{L}$	0	-1 Fixation de $\widetilde{L}$	$1+\widetilde{L}\times\frac{91}{360}$
Vente FRA 3v6 Précompté Taux K	0	$(K-\widetilde{L})\times\frac{91}{360}$ $/(1+\widetilde{L}\times\frac{91}{360})$	
Placement du différentiel	0	$-(K-\widetilde{L})\times\frac{91}{360}$ $/(1+\widetilde{L}\times\frac{91}{360})$	$(K-\widetilde{L})\times\frac{91}{360}$
Prêt variable+ FRA + placement du diff.	0	-1	$1+K\times\frac{91}{360}$

Taux FRA vs taux forward

Montage: montage précédent + emprunt à terme à taux fixe

- Combinaison de
  - Prêt à taux variable + FRA valeur nulle versement précompté + placement du différentiel
  - Emprunt à terme notionnel 1

Opération	Aujourd'hui	Dans 3M	Dans 6M
Prêt variable + FRA v.n. + plac. diff.	0	-1	$1+K\times\frac{91}{360}$
Emprunt à terme 3M dans 3M	0	$+1$	$-(1+L_0\times\frac{91}{360})$
Total	0	0	AOA $\Rightarrow$ 0

- par raisonnement d'arbitrage, le taux fixe du FRA avec versement du différentiel en début de période pour lequel la valeur du FRA est nulle est le taux forward $K = L_0$

FRA non au pair
Valeur de marché du FRA

- lors de la mise en place d'un FRA, le FRA est généralement au pair (valeur nulle)
- si lors de la mise en place avec le taux fixe spécifié, la valeur du FRA n'est pas nulle, une des deux parties du FRA doit payer la valeur de marché correspondante (la partie pour qui la valeur de marché du FRA est positive)
  $\Rightarrow$ on parle alors de soulte
- en cours de vie, i.e. entre la date d'achat/vente et l'expiration (date de fixation de la référence variable), les conditions de marché varient
- le taux forward qui correspond au taux d'équilibre du FRA varie tous les jours
  $\Rightarrow$ la valeur de marché du FRA est non nulle en cours de vie

Valeur de marché d'un FRA
Exercice VIII

- il y a un mois, A a acheté à B un FRA 3v6 de notionnel 1 ME (FRA1) - versement postcompté
  - le taux de référence correspond à une période de 91 jours
  - le taux fixe négocié il y a un mois est de 1,82%
- A décide d'annuler sa position

♣ A est-il exposé à une perte en cas de hausse ou de baisse des taux?

♣ Quelle opération de FRA xVy (FRA2) A doit-il mettre en place pour avoir une position nulle?
  - valeurs de x et y
  - taux fixe
  - achat ou vente

Valeur de marché d'un FRA
Exercice VIII suite

- Aujourd'hui, les taux Euribor de 1M à 6M sont les suivants (taux annuels simples en base 360)

Maturité	1M	2M	3M	4M	5M	6M
En jours	28	58	92	119	149	183
Taux Euribor	1,00%	1,20%	1,36%	1,50%	1,59%	1,64%

♣ Quel est le taux d'équilibre du FRA 2v5?

♣ Quel est le différentiel attendu dans 5 mois?

♣ Qui de A ou de C doit verser la soulte au moment de la mise en place du FRA?

Valeur de marché d'un FRA
Solution Exercice VIII

- A acheteur de FRA1 va payer le taux fixe et recevoir le taux Eur3M $\Rightarrow$ A est exposé (à une perte) à la baisse des taux
- pour immuniser sa position, A doit
  - vendre un FRA
  - de même taux fixe (1,82%)
  - sur la période correspondant au taux de FRA1 (FRA 2v5)

Valeur de marché d'un FRA
Solution Exercice VIII suite

- Taux d'équilibre du FRA 2v5
  le taux forward L_0 correspondant au 2v5 est tel que
  $(1 + 1,20\% \times \frac{58}{360}) \times (1 + L_0 \times \frac{91}{360}) = 1 + 1,59\% \times \frac{149}{360}$

  $L_0 = \frac{360}{91} \times (\frac{1+1,59\% \times \frac{149}{360}}{1+1,20\% \times \frac{58}{360}} - 1) = 1,84\%$
- A l'échéance de paiement dans 5 mois, A vendeur de FRA2
  - va recevoir le taux fixe $1,82\% \times \frac{91}{360}$
  - va payer le taux variable estimé aujourd'hui à $1,84\% \times \frac{91}{360}$

  Le différentiel attendu est négatif
- La valeur de marché du FRA est négative pour A, resp. positive pour C $\Rightarrow$ c'est C qui doit payer la valeur du FRA à A

Evolution du taux d'équilibre d'un FRA au cours du temps
Exercice IX

- On donne les 6 taux Euribor suivants (taux annuels simples en base 360)

Maturité	1M	2M	3M	4M	5M	6M
En jours	28	58	92	119	149	183
Taux Euribor	0,90%	1,10%	1,26%	1,40%	1,49%	1,54%

- On considère un FRA, noté FRA3, 3v6 de notionnel 1 ME payeur du taux fixe 1,82% (FRA acheté)

♣ en supposant que la courbe des taux reste identique dans le temps, calculer le taux d'équilibre du FRA
  - aujourd'hui
  - dans 1M

♣ quel est le signe de la valeur de marché du FRA aux deux dates?

Evolution du taux d'équilibre d'un FRA au cours du temps
Solution Exercice IX

- Taux d'équilibre du FRA 3v6
  le taux forward L_0 correspondant au 3v6 est tel que
  $(1+1,26\% \times \frac{92}{360}) \times (1+L_0 \times \frac{91}{360}) = 1+1,54\% \times \frac{183}{360}$
  $L_0 = \frac{360}{91} \times (\frac{1+1,54\% \times \frac{183}{360}}{1+1,26\% \times \frac{92}{360}} - 1) = 1,82\%$

  $\Rightarrow$ La valeur de marché de FRA3 est nulle

- Taux d'équilibre du FRA 2v5
  dans 1 mois, à courbe de taux identique, le taux forward L_1 correspondant au 2v5 est tel que
  $(1+1,10\% \times \frac{58}{360}) \times (1+L_1 \times \frac{91}{360}) = 1+1,49\% \times \frac{149}{360}$
  $L_0 = \frac{360}{91} \times (\frac{1+1,49\% \times \frac{149}{360}}{1+1,10\% \times \frac{58}{360}} - 1) = 1,74\%$

  $\Rightarrow$ La valeur de marché de FRA3 est négative

Courbes à forwards constants
Exercice X

- On reprend les 6 taux Euribor suivants (taux annuels simples en base 360)

	Aujourd'hui		Dans 1M	
Maturité	Euribor	Maturité en jours	Euribor	Maturité en jours
$1M$	$0,85\%$	29	?	?
$2M$	$1,05\%$	59	?	?
$3M$	$1,22\%$	90	?	?
$4M$	$1,42\%$	120	?	?
$5M$	$1,52\%$	151	?	?
$6M$	$1,60\%$	182		

♣ pour quels taux les FRAs 1v2, 2v3, 3v4, 4v5, 5v6 sont-ils au pair?

♣ quelle doit-être la courbe de taux 1 mois plus tard pour que ces FRAs, qui ont veilli d'un mois, soient toujours au pair?

Exercice
Solution exercice X

	Aujourd'hui			
Maturité	Euribor	Maturité en jours	FRAs	Taux d'équilibre
$1M$	$0,85\%$	29	1v2	1,24%
$2M$	$1,05\%$	59	2v3	1,54%
$3M$	$1,22\%$	90	3v4	2,01%
$4M$	$1,42\%$	120	4v5	1,90%
$5M$	$1,52\%$	151	5v6	1,98%
$6M$	$1,60\%$	182		

Calcul du taux 4v5 noté L

$$(1 + 1,42\% \times \frac{120}{360}) \times (1 + L \times \frac{31}{360}) = 1 + 1,52\% \times \frac{151}{360}$$

$$L = \frac{360}{31} \times (\frac{1+1,52\% \times \frac{151}{360}}{1+1,42\% \times \frac{120}{360}} - 1) = 1,90\%$$

Exercice
Solution exercice X suite

	Dans 1 mois						
Maturité	FRA	Taux Fwd	Jours FRA	ZC fwd	Jours cum.	ZC cum.	Euribor
$1M$	0v1	1,24%	30	99,90%	30	99,90%	1,24%
$2M$	1v2	1,54%	31	99,87%	61	99,76%	1,39%
$3M$	2v3	2,01%	30	99,83%	91	99,60%	1,60%
$4M$	3v4	1,90%	31	99,84%	122	99,43%	1,68%
$5M$	4v5	1,98%	31	99,83%	153	99,27%	1,74%

Calcul sur la ligne 4 M

$$ZC_{fwd}(4M) = \frac{1}{1+1{,}90\% \times \frac{31}{360}} = 99,84\%$$

$$ZC_{cum}(4M) = ZC_{cum}(3M) \times ZC_{fwd}(4M) = 99,43\%$$

$$ZC_{cum}(4M) = \frac{1}{1+Euribor(4M) \times \frac{122}{360}} \Rightarrow Euribor(4M) = 1,68\%$$

Contrat à terme
Description

- Eléments du contrat
  - Sous-jacent
  - Taille du contrat
  - Date de livraison
  - Nature de la livraison: physique, titres, cash
  - Lieu de livraison quand physique
- Les deux parties
  - acheteur du contrat
  - vendeur du contrat
- Contrat future oblige les deux parties
  - Confère à l'acheteur le droit et l'obligation d'acheter à un terme fixé le sous-jacent du contrat à terme.
  - Confère au vendeur le droit et l'obligation de vendre/livrer à un terme fixé le sous-jacent du contrat.

Marchés organisés - Gré à gré
Contrat future - Contrat forward

- Un contrat à terme peut se conclure
  - de gré à gré
  - sur un marché organisé
- Appellation usuelle
  - Gré à gré $\Leftrightarrow$ Contrat forward
  - Marché organisé $\Leftrightarrow$ Contrat future
- Le passage par un marché organisé apporte de la liquidité et de la simplicité(standardisation des produits)

Marchés organisés
Description

- marchés de futures sur sous-jacents non financiers
  - produits agricoles
  - métaux
  - pétrole...
- marchés de futures sur sous-jacents financiers
  - titres obligataires
  - actions, devises
  - dérivés...
- acteurs sur les marchés financiers
  - acteurs américains: CME, NYSE...
  - acteurs européens: EUREX, NYSE-EURONEXT, LCH Clearnet...

Marchés organisés
Fonctionnement

- la chambre de compensation propose aux intervenants de traiter sur un certain nombre de futures
  - sous-jacents
  - échéances
- elle collecte les intérêts acheteurs et vendeurs et se place entre les parties acheteuses et vendeuses
- la chambre publie quotidiennement des prix de clôture de chaque contrat
- sur la base de ces prix de clôture, elle fait des appels de marge quotidiens aux acheteurs et vendeurs (mécanisme décrit dans le cadre des contrats sur taux court)

Contrat sur taux court
Exemple contrat 3 mois Euribor - LIFFE

- Notionnel du contrat: 1 ME
- Contrats avec dates d'échéance tous les 3 mois
  IMM (International Monetary Market) $\Rightarrow$ les dates des 3èmes mercredis des mois de mars, juin, septembre et décembre sont les plus traitées
- Sous-jacent: référence Euribor 3 mois constatée deux jours avant la date d'expiration, notée $Eur3M$

- Le prix du contrat à échéance est égal $100 - Eur3M$
- $Eur3M$ est exprimé en pourcentage; pour une valeur de 2%,
  - $Eur3M$ vaut 2% exprimé en taux
  - $Eur3M$ vaut 2 exprimé en pourcentage
    $\Leftrightarrow$ $Eur3M$ vaut 2 exprimé en base 100

Contrat sur taux court
Exemple contrat 3 mois Euribor - LIFFE

- 24 contrats sont disponibles
  - 20 contrats en tout sont traités en échéance trimestrielle (jusqu'à 5 ans)
  - les 6 mois à venir sont aussi traités
- les 4 échéances trimestrielles prochaines à la date du 9 mars 2017

15 mars 2017	21 juin 2017	20 sept 2017	20 dec 2017

- Le prix du future évolue comme le prix d'un actif de taux
  - le prix du future diminue quand le taux augmente
  - le prix du future augmente quand le taux diminue

Contrat Euribor 3 mois

Prix du future et sommes versées

- On suppose que
  - A achète en mars au prix de 98 un contrat future Eur3M échéance juin
  - à l'échéance, le taux Eur3M vaut 1,5%
- Résultat pour A à l'échéance en prix
  - le prix du future à l'échéance est de 98,5.
  - l'acheteur paie 98 et va recevoir 98,5, donc recevoir un différentiel de prix de 0,5.
- pour déterminer ce que doit recevoir A en EUR, ce différentiel de prix est à multiplier
  - par 1/4 (le taux Euribor 3 mois est sur base annuelle) (comme lors d'un échange taux fixe - taux variable sur un FRA)
  - par 10 kE = 1ME notionnel du contrat unitaire divisé par 100 (le prix du future est en base 100)

Contrat Euribor 3 mois
Mécanisme d'appels de marge

- pour un contrat future, l'échange n'est pas fait à échéance mais tous les jours sur base du prix de clôture quotidien - cet échange sur base de variation de prix constitue l'appel de marge quotidien
- la chambre de compensation calcule l'appel de marge
  - le jour de la transaction en fonction du prix d'achat/vente et du prix de clôture
  - les jours suivants en fonction des prix de clôture de la veille et prix de clôture du jour
- le montant est appelé ou crédité sur un compte de dépôt de l'intervenant en fonction de sa position (acheteuse ou vendeuse) et du nombre de futures détenus

Contrat Euribor 3 mois
Variation de prix - point de base

- Point de base
  - un point de base correspond $0,01\%$
  - le taux Euribor passe de $2,00\%$ à $2,01\%$ $\Leftrightarrow$ le taux Euribor varie de 1 point de base (1 bp)
- en terme de prix du future, assis sur le taux de référence à échéance
  - La variation de prix correspondante est de $0,01$ (base 100) le prix du future passe de 98 à 97,99
  - pour un contrat, la variation de valeur en Euros est égale à $\frac{1}{4} \times 1ME \times \frac{0{,}01}{100} = 25$

Appels de marge
Exercice XI

- On suppose que le 11 mars, la partie A a acheté 10 futures échéance juin 2013 de notionnel 1 ME sur Euribor 3M au prix de 99,500.
- Entre le 11 et le 15 mars, les prix de clôture sont les suivants

11 mars 2013	12 mars 2013	13 mars 2013	14 mars 2013	15 mars 2013
99,500	99,480	99,495	99,510	99,535

♣ Donner pour la partie A en fin de journée

- les appels de marge quotidien
- les appels de marge cumulés

on supposera que la fraction annuelle de la période est égale à 1/4;
flux sortants avec un signe négatif - flux entrants avec un signe positif

Appels de marge
Solution exercice XI

Achat	11 mars 2013	12 mars 2013	13 mars 2013	14 mars 2013	15 mars 2013
99,500	99,500	99,480	99,495	99,510	99,535

	Variations de prix				
	0	-0,020	0,015	0,015	0,025

	Variations $\times$ 1/4 $\times$ 1/100 $\times$ 1 ME $\times$ 10				
	11 mars 2013	12 mars 2013	13 mars 2013	14 mars 2013	15 mars 2013
	0	-500	375	375	625

	Cumul appels de marge				
	0	-500	-125	250	875

Relation prix future - taux forward

Objet des slides suivants

- à partir du prix du future, on déduit un taux dit taux implicite
- dans cette section, on veut montrer que le taux implicite déduit du prix du future est légèrement différent du taux forward en mettant en place un montage
  - prêt à terme taux variable + achat future
  - emprunt à terme taux fixe

  et en utilisant la relation d'absence d'opportunité d'arbitrage

Prix vs taux implicite

- A l'échéance
  - le prix du future est égal à la différence entre 100 et le taux de référence constaté (noté $Eur3M$)

    $\Leftrightarrow Prix = 100 - Eur3M$
- en cours de vie
  - la relation prix taux à léchéance est utilisée pour déduire un taux implicite en fonction du prix
    - On suppose que l'on est 1 mois avant l'échéance et que le prix du future vaut 98
    - On note $Eur3M_{imp}$ le taux implicite déduit du prix du future
      $\Leftrightarrow 98 = 100 - Eur3M_{imp}$

      $\Leftrightarrow Eur3M_{imp}$ vaut 2 en base 100
      $\Leftrightarrow Eur3M_{imp}$ vaut 2%

Taux implicite vs taux forward
Modélisation de l'achat de future

- Modélisation de l'achat de future - notionnel 1 - sans prise en compte des appels de marge
  - le taux $Eur3M$ constaté dans 1M est noté $\widetilde{L}$ - cf FRAs - et est exprimé en taux
  - 1 mois avant l'échéance, le prix du future vaut 98
  - **en négligeant** la chronique des appels de marge, i.e. en supposant que le prix est versé à échéance

Opération	Dans 1M
Achat future Prix 98	Versement de 98=100-2 Réception de $P = 100 \times (1 - \widetilde{L})$
Position nette Notionnel 1 (*)	$(2\% - \widetilde{L}) \times \frac{91}{360}$

(*) $(2\% - \widetilde{L}) \times \frac{91}{360}$ correspond à la somme des appels de marge sur un contrat acheteur pour un notionnel de 1

Taux implicite vs taux forward
Montage: achat de future - prêt à taux variable

- Prêt à taux variable 3M ds 1M
- Achat de future - notionnel 1 - sans prise en compte des appels de marge

Opération	Auj.	Dans 1M	Dans 4M
Prêt variable Réf variable $\widetilde{L}$	0	-1 Fixation de $\widetilde{L}$	$1+\widetilde{L}\times\frac{91}{360}$
Achat future Prix 98	0	$(2\%-\widetilde{L})\times\frac{91}{360}$	
Placement du différentiel	0	$-(2\%-\widetilde{L})\times\frac{91}{360}$	$(2\%-\widetilde{L})\times\frac{91}{360}$ $\times(1+\widetilde{L}\times\frac{91}{360})$
Prêt variable + achat future + placement différentiel	0	-1	$1+2\%\times\frac{91}{360}$ $+(2\%-\widetilde{L})\times\widetilde{L}\times(\frac{91}{360})^2$

Taux implicite vs taux forward

Montage: montage précédent + emprunt à terme

- Le taux forward 3M dans 1M vu en 0 est noté $L_0 = L(1M, 4M)$ - déterminé à partir des ZCs en 0
- On combine les opérations précédentes avec un emprunt à terme 3M dans 1M au taux L_0 ($\Leftrightarrow$ pas de versement initial)

Opération	Auj.	Dans 1M	Dans 4M
Prêt variable + achat future + placement différentiel	0	-1	$1 + 2\% \times \frac{91}{360}$ $+(2\% - \widetilde{L}) \times \widetilde{L} \times (\frac{91}{360})^2$
Emprunt à terme 3M dans 1M	0	$+1$	$-(1 + L_0 \times \frac{91}{360})$
Total	0	0	AOA $\Rightarrow$ 0

- En appliquant le raisonnement d'AOA, L_0 est (légèrement) différent du taux implicite de 2% (en espérance, $+(2\% - \widetilde{L}) \times \widetilde{L} \times (\frac{91}{360})^2$ n'est pas nul)

Taux implicite vs taux forward
Prise en compte des appels de marge

- Modélisation de l'achat de future postcompté - notionnel 1 - avec prise en compte des appels de marge
  - 1 mois avant l'échéance, le prix du future vaut 98
  - on suppose qu'il y a 20 jours ouvrés entre aujourd'hui et l'échéance
    - le prix demain est noté $\widetilde{P}_1$
    - le prix à l'échéance est noté $\widetilde{P}_{20}$
- Le tableau des appels de marge est présenté dans le slide suivant

Taux implicite vs taux forward
Prise en compte des appels de marge

Date	Prix future	Appels de marge
T_0	98	
T_1	$\widetilde{P}_1$	$(\widetilde{P}_1 - 98) \times \frac{1}{100} \times \frac{91}{360}$
...	...	
T_i	$\widetilde{P}_i$	$(\widetilde{P}_i - \widetilde{P}_{i-1}) \times \frac{1}{100} \times \frac{91}{360}$
...	...	
T_{20}	$\widetilde{P}_{20}$	$(\widetilde{P}_{20} - \widetilde{P}_{19}) \times \frac{1}{100} \times \frac{91}{360}$

- le fonctionnement du future nécessite de prendre en compte la chronique des appels de marge
- il faut modéliser ces chroniques pour obtenir l'espérance des coûts de financements/produits de placements jusqu'à l'échéance pour compléter les modélisations précédentes sans prise en compte des appels de marge *(hors cadre de ce cours)*

Futures et FRAs
Pour résumer

- Calcul des taux forwards
  - le taux d'équilibre d'un FRA et le taux forward correspondant se confondent (raisonnement AOA)
  - compte tenu du fonctionnement du future, le prix du future ne donne pas une indication directe sur le taux forward
    - pas de montage clair en AOA même en négligeant les appels de marge
    - la chronique des appels de marge doit être modélisée

  la différence entre le taux forward et le taux implicite déduit du prix du future est au plus de quelques bps dans les conditions de marché actuelles (taux bas)

  $\Rightarrow$ en pratique, par la suite, on confondra le taux forward et le taux implicite déduit du prix du future

Futures et FRAs
Pour résumer

- Souplesse de définition
  - les FRAs sont des instruments de gré à gré dont les dates peuvent être ajustées (souplesse pour définir le taux forward sous-jacent sur lequel se fait l'échange)
  - les dates des futures sont normalisées (dates IMM)
- Liquidité
  - les FRAs nécessitent de trouver pour chaque opération une contrepartie; la fourchette entre prix d'achat et prix de vente peut être importante
  - les futures sont traités dans de gros volumes (notamment aux dates d'expiration les plus proches) et sont facilement achetables et vendables

Couverture
Exercice XIII

Le 22 mars

- A prévoit d'emprunter pour 3 mois au taux Eur3M+100 bp le 19 juin
- B prévoit de placer pour 3 mois au taux Eur3M le 25 juin

♣ qui de A ou de B a intérêt à

- acheter un FRA?
- acheter un future?

♣ quel est le signe du résultat sur chacune des positions (achat future et achat FRA)

- en cas de hausse des taux?
- en cas de baisse des taux?

Couverture
Solution Exercice XIII

A est exposé à une hausse des taux	B est exposé à une baisse des taux
$\Downarrow$	$\Downarrow$
A doit acheter un FRA	B doit acheter un future

	Variation de valeur	
	FRA acheté	future acheté
Hausse des taux	$+$	$-$
Baisse des taux	$-$	$+$

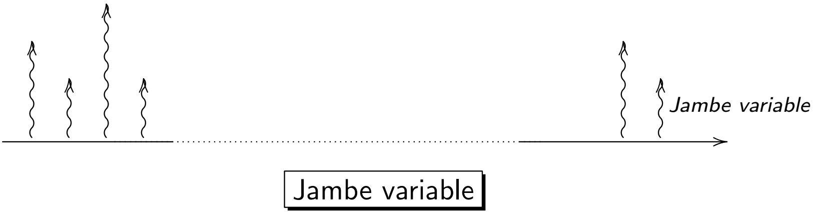
Descriptif swap

Opération d'échange

- Echanges périodiques de références:
  - variables/révisables
  - fixes
- Types de swaps
  - Swaps variables/variables
  - Swaps fixes variables
- Sous-jacents
  - sous-jacents: taux, actions, change, matières premières...
  - références variables: taux courts/longs, cours actions ou sous-jacent, performance

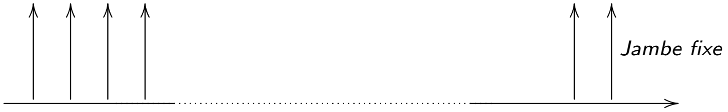
Swap de taux
Jambe variable

- Jambe variable représentée par des flèches ondulées



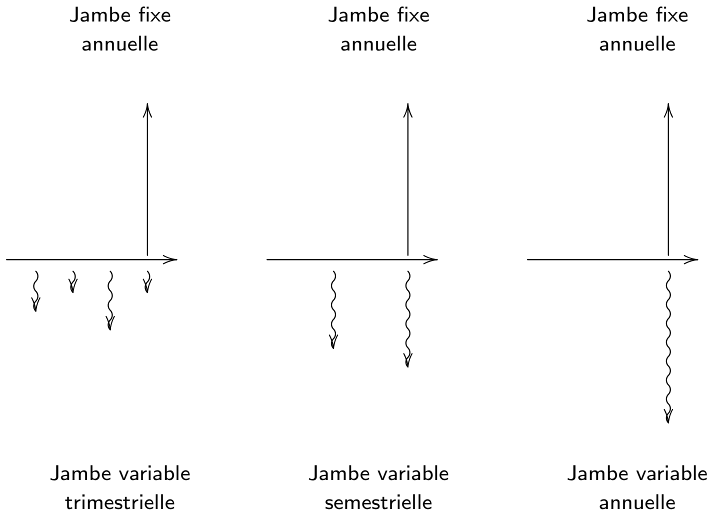
Swap de taux
Jambe fixe

- Jambe fixe représentée par des flèches droites



$\boxed{\text{Jambe fixe}}$

Swap de taux
Périodes jambe fixe et jambe variable



Fréquence jambe variable

- selon la fréquence de la jambe variable, les taux qui servent de référence sont différents

Jambe variable		
trimestrielle	semestrielle	annuelle
Taux de référence		
Eur3M	Eur6M	Eur12M

- dates usuelles de constatation et paiement

Jambe variable		
trimestrielle	semestrielle	annuelle
Date(s) de constatation		
0M,3M,6M,9M	0M,6M	0M
Date(s) de Paiement		
3M,6M,9M,12M	6M,12M	12M

Jambe variable
Tenors

- 3M est le tenor du taux Eur3M
- 12M est le tenor du taux Eur12M
  $\Rightarrow$ on parlera de swaps Euribor fixe contre tenor 3M (resp. fixes contre tenor 6M, fixes contre tenor 12M)
  ou plus directement de swaps Euribor contre 3M (resp. contre 6M, contre 12M)

- pour le calcul des flux de la jambe variable, on multiplie le taux constaté par la fraction annuelle de la période
  - $\frac{nbjours}{360}$ pour un swap EUR par exemple
  - pour simplifier, sans perte de généralité
    - $\Delta = 1/4$ pour une fréquence trimestrielle
    - $\Delta = 1/2$ pour une fréquence semestrielle
    - $\Delta = 1$ pour une fréquence annuelle

Calcul de flux jambes variables
Exercice XIV

- on donne le tableau suivant des constations des taux Euribor aux dates 0M, 3M, 6M et 9M

		Date de constatation			
		0M	3M	6M	9M
Taux Euribor	3M	0,35%	0,30%	0,30%	0,20%
	6M	0,50%	0,45%	0,45%	0,42%
	12M	0,65%	0,65%	0,60%	0,60%

♣ en supposant que les flux sont fixés en début de période et payés en fin de période, et que les fractions trimestrielles (resp. semestrielles, resp. annuelles) sont de 1/4 (resp.1/2, resp. 1), calculer les flux (dates et montants) pour une jambe variable de notionnel 1 ME

- trimestrielle
- semestrielle
- annuelle

Calcul de flux jambes variables

Solution Exercice XIV

Date de flux				
0M	3M	6M	9M	12M
Flux trimestriels				
	875	750	750	500
Flux semestriels				
		2 500		2 250
Flux annuel				
				6 500

Cotation des swaps
Swap au pair

- A la mise en place d'un swap, la valeur de marché est généralement nulle $\Rightarrow$ aucune des parties ne verse un montant initial à l'autre
- le swap est alors dit au pair
- outre les caractéristiques statiques du swap
  - maturité
  - périodicités des jambes
  - tenor de la jambe variable
- les deux éléments suivants sont spécifiés
  - taux de la jambe fixe, exprimé en taux; par ex: 2%
  - marge au-dessus de la jambe variable (exprimé en points de base; par ex: 20 bp (= 0,20 %)

Estimation de taux de swap au pair
Exercice XV

- on considère les tenors 3M, 6M et 12M - on donne les taux comptants et pour les dates 3M, 6M et 9M les taux forwards estimés vu de t=0

		Taux forwards			
		0M	3M	6M	9M
Taux Euribor	3M	0,35%	0,40%	0,40%	0,45%
	6M	0,50%	0,55%	0,58%	0,60%
	12M	0,60%	0,65%	0,70%	0,75%

♣ en négligeant l'actualisation et en supposant que les fractions périodiques sont égales (ex: 1/4 pour le taux constaté trimestriellement), donner une estimation du taux fixe annuel de swap au pair dans les cas suivants

- fixe annuel contre Eur3M + 30 bp
- fixe annuel contre Eur6M + 20 bp
- fixe annuel contre Eur12M + 5 bp

Estimation de taux de swap au pair
Solution Exercice XV

Jambe trimestrielle			
Tx_{annuel}	$\approx$	$1/4 \times (0,35\% + 0,30\%)$	$\approx 0,70\%$
	$+$	$1/4 \times (0,40\% + 0,30\%)$	
	$+$	$1/4 \times (0,40\% + 0,30\%)$	
	$+$	$1/4 \times (0,45\% + 0,30\%)$	
Jambe semestrielle			
Tx_{annuel}	$\approx$	$1/2 \times (0,50\% + 0,20\%)$	$\approx 0,74\%$
	$+$	$1/2 \times (0,58\% + 0,20\%)$	
Jambe annuelle			
Tx_{annuel}	$\approx$	$(0,60\% + 0,05\%)$	$\approx 0,65\%$

Swap de taux receveur

- Entrer dans un swap receveur, c'est mettre en place un swap dans lequel on reçoit le taux fixe
- Le swap receveur est aussi appelé swap prêteur

Swap receveur

Swap de taux payeur

- Entrer dans un swap payeur, c'est mettre en place un swap dans lequel on paie le taux fixe
- Le swap payeur est aussi appelé swap emprunteur

Swap payeur

Swaps étudiés
Caractéristiques

- sans perte de généralité, on va considérer 5 swaps de maturités 1 an, 2 ans...5 ans
  - jambe fixe
    - le taux fixe du swap de maturité n est noté S_n
    - le flux est versé en fin d'année, la fraction de période annuelle est de 1
  - jambe variable
    - la jambe variable du swap est annuelle, sans marge - le tenor est Eur12M
    - Eur12M est constaté en début d'année
    - le flux correspondant est versé en fin d'année, calculé en rapportant le nombre de jours de la période à 360
- les 5 swaps sont payeurs du taux fixe

Swaps étudiés
Notations et flux

- dates et constatations

Dates	0A	1A	2A	3A	4A	5A
Nb jours		Nbj_1	Nbj_2	Nbj_3	Nbj_4	Nbj_5
Eur12M	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	

- flux des swaps par maturité

Dates	0A	1A	2A	3A	4A	5A
Swap1 JF		$-S_1$				
Swap1 JV		$L_0 \times \frac{Nbj_1}{360}$				
Swap2 JF		$-S_2$	$-S_2$			
Swap2 JV		$L_0 \times \frac{Nbj_1}{360}$	$L_1 \times \frac{Nbj_2}{360}$			
...	...	...	...			
Swap5 JF		$-S_5$	$-S_5$	$-S_5$	$-S_5$	$-S_5$
Swap5 JV		$L_0 \times \frac{Nbj_1}{360}$	$L_1 \times \frac{Nbj_2}{360}$	$L_2 \times \frac{Nbj_3}{360}$	$L_3 \times \frac{Nbj_4}{360}$	$L_4 \times \frac{Nbj_5}{360}$

Swaps étudiés
Flux constatés en cours de vie des swaps

- flux constatés - swaps de maturité 1 an et 2 ans

Dates	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
Swap1 JF		$-S_1$				
Swap1 JV		$L_0 \times \frac{Nbj_1}{360}$				
Swap2 JF		$-S_2$	$-S_2$			
Swap2 JV		$L_0 \times \frac{Nbj_1}{360}$	$L_1 \times \frac{Nbj_2}{360}$			

- flux constatés - swap de maturité 5 ans

Dates	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
Swap5 JF		$-S_5$	$-S_5$	$-S_5$	$-S_5$	$-S_5$
Swap5 JV		$L_0 \times \frac{Nbj_1}{360}$	$L_1 \times \frac{Nbj_2}{360}$	$L_2 \times \frac{Nbj_3}{360}$	$L_3 \times \frac{Nbj_4}{360}$	$L_4 \times \frac{Nbj_5}{360}$

Swaps étudiés - valorisation en t=0

Ce qui est connu en t=0 - ce qui n'est pas connu en t=0

- Flux attendus jambes fixes et variables des swaps de maturité 1 an et 2 ans

Dates	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
Swap1 JF		$-S_1$				
Swap1 JV		$L_0 \times \frac{Nbj_1}{360}$				
Swap2 JF		$-S_2$	$-S_2$			
Swap2 JV		$L_0 \times \frac{Nbj_1}{360}$	$\widetilde{L}_1 \times \frac{Nbj_2}{360}$			

- Flux attendus jambes fixes et variables du swap de maturité 5 ans

Dates	t=0	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
Swap5 JF		$-S_5$	$-S_5$	$-S_5$	$-S_5$	$-S_5$
Swap5 JV		$L_0 \times \frac{Nbj_1}{360}$	$\widetilde{L}_1 \times \frac{Nbj_2}{360}$	$\widetilde{L}_2 \times \frac{Nbj_3}{360}$	$\widetilde{L}_3 \times \frac{Nbj_4}{360}$	$\widetilde{L}_4 \times \frac{Nbj_5}{360}$

Swaps étudiés - valorisation en t=0

Valorisation des flux fixes

On suppose connus les Zeros coupons entre t=1 et t=5

- la valeur actuelle en 0 des flux connus est égale à la valeur du ZC multipliée par le montant du flux (actualisation d'un flux certain)
  - pour les flux fixes S_i payés en j, la valeur actuelle est égale à $S_i \times ZC(j)$
  - pour le flux fixé $L_0 \times \frac{Nbj_1}{360}$ payé en 1, la valeur actuelle est égale à $L_0 \times \frac{Nbj_1}{360} \times ZC(1)$
- la valeur actuelle du flux aléatoire (non connu en t=0) nécessite de mettre en place un raisonnement AOA

Swaps étudiés - valorisation en t=0

Valorisation d'un flux variable

- on cherche la valeur actuelle de $\widetilde{L}_{i-1} \times \frac{Nbj_i}{360}$ payé en i
- on se ramène à flux fixe en vendant un FRA
  $\Rightarrow$ la combinaison flux variable + vente du FRA est équivalente à un flux fixe

	Aujourd'hui	en i-1	en i
Flux variable Réf variable $\widetilde{L}_{i-1}$	0	0 Fixation de $\widetilde{L}_{i-1}$	$\widetilde{L}_{i-1} \times \frac{Nbj_i}{360}$
Vente FRA (i-1)Vi Taux K	0	0	$(K - \widetilde{L}_{i-1}) \times \frac{Nbj_i}{360}$
Flux fixe	0	0	$K \times \frac{Nbj_i}{360}$

Swaps étudiés - valorisation en t=0

Valorisation d'un flux variable

- la valeur actuelle du montage flux variable+FRA est égale à la valeur actuelle du flux fixe
- la valeur actuelle du FRA est égale à 0 (FRA au pair)

  $\Rightarrow$ la valeur actuelle du flux variable est égale à la valeur actuelle du flux fixe

- le taux fixe du FRA est égal au taux forward donné par la relation

$$1 + \frac{Nbj_i}{360} \times L(i-1, i) = \frac{ZC(i-1)}{ZC(i)}$$

$\Rightarrow$ la valeur actuelle du flux variable est égale à

$$ZC(i) \times \frac{Nbj_i}{360} \times L(i-1, i) = ZC(i) \times \left(\frac{ZC(i-1)}{ZC(i)} - 1 \right)$$

$$VA_{flux\ \ variable\ \ i} = ZC(i-1) - ZC(i)$$

Swaps étudiés - valorisation en t=0
Valorisation de la jambe variable

- valeur actuelle du premier flux

$$VA_{flux\ \ variable\ \ 1} = ZC(1) \times \frac{Nbj_0}{360} \times L_0 = ZC(1) \times \left(\frac{ZC(0)}{ZC(1)} - 1 \right) = 1 - ZC(1)$$

- valeur actuelle du flux i

$$VA_{flux\ \ variable\ \ i} = ZC(i-1) - ZC(i)$$

- valeur actuelle de la somme des n premiers flux (jambe variable maturité n) (avec $ZC(0) = 1$)

$$VA_{jambe\ \ variable\ \ n\ \ flux} = \sum_{i=1}^{n} (ZC(i-1) - ZC(i)) = 1 - ZC(n)$$

Valeurs jambes fixes et variables
Taux d'équilibre du swap

	Flux					VA
Dates	1A	2A	3A	4A	5A	0A
Swap1 JF	$-S_1$					$-S_1 \times ZC(1)$
Swap1 JV	$L_0 \times \frac{Nbj_1}{360}$					$1 - ZC(1)$
Swap2 JF	$-S_2$	$-S_2$				$-S_2 \times \sum_{i=1}^{2} ZC(i)$
Swap2 JV	$L_0 \times \frac{Nbj_1}{360}$	$\widetilde{L}_1 \times \frac{Nbj_2}{360}$				$1 - ZC(2)$
...	...	...	...			
Swap5 JF	$-S_5$	$-S_5$	$-S_5$	$-S_5$	$-S_5$	$-S_5 \times \sum_{i=1}^{5} ZC(i)$
Swap5 JV	$L_0 \times \frac{Nbj_1}{360}$	$\widetilde{L}_1 \times \frac{Nbj_2}{360}$	$\widetilde{L}_2 \times \frac{Nbj_3}{360}$	$\widetilde{L}_3 \times \frac{Nbj_4}{360}$	$\widetilde{L}_4 \times \frac{Nbj_5}{360}$	$1 - ZC(5)$

$$J_{Fixe} + J_{Variable} = 0$$
$$\Updownarrow$$
Le taux du fixe du swap au pair (taux d'équilibre) est donné par

$$S_n = \frac{1 - ZC(n)}{\sum_{i=1}^{n} ZC(i)}$$

Relation entre ZC et taux de swap
Relation I

- swap de maturité 1 an

$$1 - ZC(1) = S_1 \times ZC(1)$$
$$\Updownarrow$$
$$ZC(1) = \frac{1}{1+S_1}$$

- swap de maturité n

$$1 - ZC(n) = S_n \times \sum_{i=1}^{n} ZC(i)$$
$$\Updownarrow$$
$$1 - ZC(n) \times (1 + S_n) = S_n \times \sum_{i=1}^{n-1} ZC(i)$$
$$\Updownarrow$$
$$ZC(n) = \frac{1 - S_n \times \sum_{i=1}^{n-1} ZC(i)}{1+S_n}$$

Relation entre ZC et taux de swap
Relation II

- swap de maturité 1 an

$$1 - ZC(1) = S_1 \times ZC(1)$$
$$\Updownarrow$$
$$ZC(1) = \frac{1}{1+S_1}$$

- swap de maturité n
  en utilisant $1 - ZC(n-1) = S_{n-1} \times \sum_{i=1}^{n-1} ZC(i)$

$$1 - ZC(n) = S_n \times \sum_{i=1}^{n} ZC(i)$$
$$\Updownarrow$$
$$ZC(n) = \frac{1-(1-ZC(n-1)) \times \frac{S_n}{S_{n-1}}}{1+S_n}$$

Construction de courbe ZC à partir des taux de swap
Exercice XVI

- on donne la courbe de taux de swaps suivante (contre 1 Y annuelle)

Maturité	Taux Swap	ZC	Somme des ZCs
1A	2,00%	?	?
2A	3,00%	?	?
3A	4,00%	?	?
4A	4,50%	?	?
5A	5,00%	?	?
6A	5,50%	?	?
7A	6,00%	?	?

♣ Calculer la valeur des ZCs 1A, 2A, ...7A en appliquant les deux méthodes

♣ Calculer la valeur du taux forward 1 an dans 4 ans (on supposera Δ=1)

Construction de courbe ZC à partir des taux de swap
Solution Exercice XVI

Maturité	Taux Swap	ZC	Somme des ZCs
1A	2,00%	98,04%	98,04%
2A	3,00%	94,23%	192,27%
3A	4,00%	88,76%	281,03%
4A	4,50%	83,59%	364,62%
5A	5,00%	77,88%	442,50%
6A	5,50%	71,72%	514,22%
7A	6,00%	65,23%	579,45%

Construction de courbe ZC à partir des taux de swap
Solution Exercice XVI suite

Relations I et II	
$ZC(1A) = \frac{1}{1+2\%}$	
Relation I	Relation II
$ZC(2A) = \frac{1-3\%\times 98,04\%}{1+3\%}$	$ZC(2A) = \frac{1-(1-98,04\%)\times \frac{3\%}{2\%}}{1+3\%}$
Relation I	Relation II
$ZC(3A) = \frac{1-4\%\times 192,27\%}{1+4\%}$	$ZC(3A) = \frac{1-(1-94,23\%)\times \frac{4\%}{3\%}}{1+4\%}$

Taux forward 1 an

$$1 + \Delta L(4,5) = \frac{ZC(4)}{ZC(5)}$$

$$\Updownarrow$$

$$L(4,5) = \frac{1}{\Delta} \times \left(\frac{ZC(4)}{ZC(5)} - 1\right) = \frac{83,59\%}{77,88\%} - 1 = 7,34\%$$