

Mémoire présenté devant  
l'UFR de Mathématique et Informatique  
pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'Actuaire de Strasbourg  
et l'admission à l'Institut des Actuaire  
le 16 décembre 2020

Par : Hugo CAMUS

Titre : Construction d'une courbe des taux d'actualisation conforme aux méthodes recommandées par la norme IAS 19 dans un univers de taux bas

Confidentialité :  NON  OUI Durée :  1 an  2 ans  3 ans  4 ans  5 ans

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Signature :

Membres du jury de l'Unistra :

Entreprise : Deloitte

P. ARTZNER  
J. BERARD  
A. COUSIN  
K.-T. EISELE  
M. MAUMY-BERTRAND

Directeur de mémoire en entreprise :

Nom : Jérémie LEVY

Signature :



Invité :

Nom : Alexandre Klock

Signature :

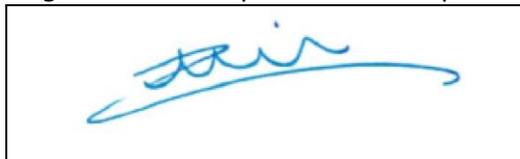


Jury de l'Institut des  
Actuaire :

Jean MODRY  
Eric RALAIMIADANA

**Autorisation de publication et de  
mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents  
actuariels** (après expiration de  
l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise



Secrétariat : Mme Stéphanie Richard

Bibliothèque : Mme Christine Disdier

Signature du candidat





# Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Patrice PLOUVIER pour m'avoir accepté en alternance au sein de Deloitte France. Je tiens également à remercier mon tuteur professionnel, Jérémie LEVY pour ses conseils lors de la rédaction de mon mémoire.

Je remercie l'équipe « Actuariat » du service Capital Humain, qui m'a aidé tout au long de mon stage pour chacune des tâches qui m'ont été confiées. Je remercie en particulier Alexandre KLOCK et Benjamin LEWIS pour leur investissement et leur soutien dans le cadre de ma mission de stage.

Enfin, j'adresse mes remerciements à mon tuteur universitaire, Areski COUSIN, pour son suivi et ses conseils lors de la rédaction de ce mémoire.

# Note de synthèse

Les entreprises proposant des plans d'avantages du personnel s'engagent à verser des prestations futures à leurs salariés sous certaines conditions. Ces dépenses futures probables imposent à l'employeur la constitution d'une provision. Dans le cadre de leurs comptes consolidés, les entreprises cotées et non cotées (sur option) sont soumises à la norme *International Accounting Standard 19 (IAS 19 révisée)* qui impose la méthode à appliquer lors de la constitution de la provision. Elle précise notamment des principes encadrant les principales hypothèses actuarielles.

Les actuaires chargés de calculer la provision liée à ce type de plan doivent ainsi procéder à des évaluations actuarielles en respectant les critères de la norme *IAS 19* révisée. Lors de leurs calculs, les actuaires sont amenés à manipuler des flux ayant lieu à différentes dates. Les taux d'actualisation permettent de les comparer en les exprimant à une même date. L'actualisation permet d'exprimer un flux futur à une date antérieure. La norme impose aux taux d'actualisation d'être une bonne estimation de la réalité.

Une courbe des taux d'actualisation (ou structure par terme des obligations zéro-coupon) permet ainsi d'apprécier la valeur-temps de la monnaie dans un cadre précis. Elle est fonction de la maturité (souvent exprimée en années), c'est-à-dire de l'horizon temporel considéré. Elle associe à une maturité un unique taux. Elle peut être de la forme suivante :

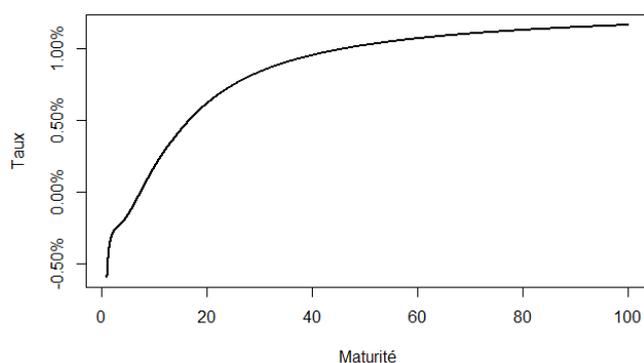


FIGURE 1 – Exemple de courbe des taux

Les taux d'actualisation se fondent sur des obligations, échangées dans les marchés financiers. La norme *IAS 19* révisée impose, en priorité, le recours à des obligations d'entreprises de haute qualité et en second choix l'utilisation d'obligations d'États de haute qualité, lorsque les flux des

obligations d'entreprises ne sont plus suffisamment nombreux. Ce choix s'inscrit dans une logique de prudence et dans la volonté de refléter au mieux la réalité. En pratique, ce critère correspond à des entreprises ou des états dont la dette respecte une notation minimale auprès des grandes agences de notations (généralement AA). À la date de référence de ce mémoire, le 30 juin 2020, le contexte financier était un univers de taux bas. Ceci implique une diminution des rendements attendus et donc une baisse des taux d'actualisation. Cet élément a ainsi dû être pris en compte lors de la construction de la courbe des taux.

Le cabinet Deloitte était déjà doté d'un outil lui permettant la construction régulière (généralement tous les mois) d'une courbe des taux conforme aux critères de la norme *IAS 19* révisée. Cet outil présentait néanmoins plusieurs limites qui ont motivé réalisation de l'outil lié à ce mémoire. L'ancienne méthode était fondée sur des travaux préliminaires proposés par des grandes institutions et des entreprises privées (Markit, Banque Centrale Européenne). L'objet de ce mémoire est de proposer une méthode construisant une courbe des taux à partir de données brutes (prix, maturité, taux de coupon... ). L'objectif est de proposer une méthode optimisée fondée sur des modèles plus complets et plus rigoureux, tout en étant compatible avec la norme. Dans ce cadre, la problématique retenue a donc été la suivante :

Comment construire une courbe des taux conforme aux méthodes recommandées par la norme *IAS 19* dans un univers de taux bas ?

Pour répondre à cette problématique, deux types de familles de modèles de courbes des taux d'actualisation ont été considérées : les méthodes fondées sur des *splines* et les méthodes fondées sur des classes de fonctions spécifiques. Parmi la première famille, le modèle considéré a été le modèle de Vasicek & Fong (1982). Pour la seconde famille, les méthodes considérées ont été la méthode de Nelson-Siegel (1987) et ses déclinaisons (méthodes de Svensson - 1994, de Björk & Christensen - 1999). La méthode du *bootstrap*, a également été étudiée, à titre de comparaison, mais n'a pas été retenue en raison de ses importantes hypothèses.

Ces modèles ont été ajustés sur deux types de portefeuilles obligataires : des portefeuilles contenant des obligations d'entreprises et d'autres contenant des obligations d'États. Les portefeuilles appartenant au premier type sont issus l'indice *iBoxx € Corporates AA* et *iBoxx € Corporates A* (uniquement les obligations notées AA par au moins une grande agence de notation). Les portefeuilles appartenant au second type sont composés d'obligations appartenant à l'indice *iBoxx € Eurozone* notées AA par au moins une grande agence de notation.

L'ajustement des modèles est similaire pour les deux types de portefeuilles. Il s'effectue en minimisant une fonction fondée sur l'erreur quadratique. L'erreur est calculée à partir de la différence entre le prix des obligations constaté et les prix induits par les taux estimés par les modèles. Une pondération selon le poids de l'obligation dans le marché a été considérée. Ceci permet aux taux de mieux tenir compte des stratégies financières effectivement possibles compte tenu du marché. Ainsi, une obligation très présente dans le marché se verra attribuer un poids plus conséquent dans la modélisation. Une pondération selon la durée a également été considérée pour ajuster les modèles de taux sur les obligations d'États afin d'accorder aux obligations à maturité élevée un poids plus important dans l'ajustement. Par ailleurs, le marché des obligations est constitué d'un nombre non négligeable d'obligations à options incorporées, notamment des options dites *callable*. Une obligation *callable*, ou à option de rachat anticipé incorporée, permet à son émetteur

de la racheter avant sa date de maturité. Cette propriété impacte la structure du prix de l'obligation. Ce mémoire a proposé une approche simplificatrice permettant de modéliser explicitement le prix d'une telle obligation. Les résultats de cette modélisation ont été comparés aux résultats obtenus suite à l'ajustement de modèles sur des portefeuilles sans obligation *callable*. Cette dernière méthode a été jugée plus performante. Il a ainsi été décidé de fonder la courbe des taux sur un portefeuille excluant les obligations *callable*.

Dans le cadre de la construction d'une courbe des taux d'actualisation, la norme *IAS 19* révisée autorise le recours à des obligations d'États pour les maturités pour lesquelles les obligations d'entreprises sont peu présentes. Dans ce contexte, il a été décidé de fonder la courbe des taux sur des obligations d'entreprises pour les maturités allant de 0 à 12 ans et sur des obligations d'États pour les maturités supérieures. La courbe des taux finale est ainsi obtenue à partir de deux courbes distinctes. Deux courbes des taux ont dans un premier temps été retenues : une courbe fondée sur des obligations d'entreprises et une courbe fondée sur des obligations d'États. À la maturité 12 ans, la forme de la courbe des taux fondée sur des obligations d'États a été « accrochée » à la courbe des taux fondée sur des obligations d'entreprise. En d'autres termes, un écart de taux constant a été ajouté à la courbe des taux fondée sur des obligations d'États afin d'assurer la continuité et de ne retenir que la forme de la courbe, cette dernière étant considérée comme une estimation d'une courbe des taux qui aurait été fondée sur des obligations d'entreprises ayant des maturités supérieures à 12 ans.

Le graphique ci-dessous compare les courbes des taux au 30/06/2020 obtenues à l'aide de la méthode proposée dans ce mémoire et de la précédente méthode de construction de la courbe des taux.

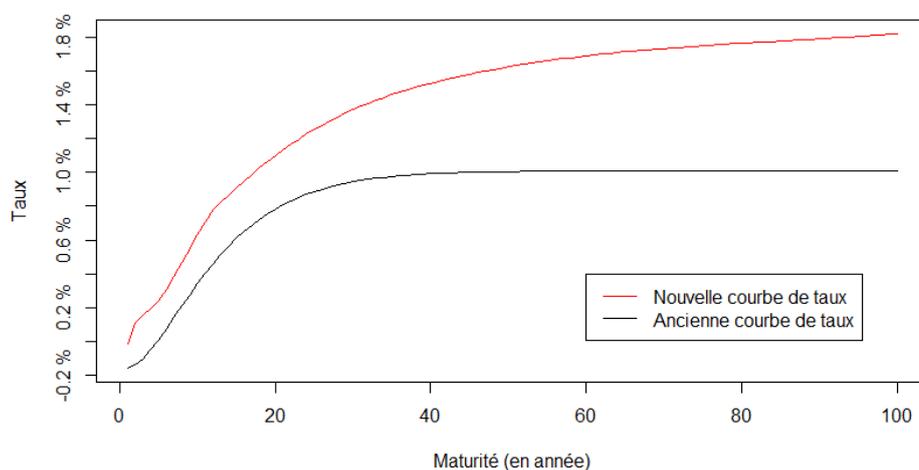


FIGURE 2 – Comparaison des méthodes de construction des courbes des taux au 30/06/2020

La courbe obtenue par la nouvelle méthode est en tout point supérieure à la précédente courbe. Ceci s'explique principalement par le fait que la précédente méthode était plus prudente dans la sélection des obligations. Cette prudence supplémentaire n'est pas imposée par la norme *IAS 19* révisée. C'est pour cette raison que la nouvelle méthode de construction de la courbe des taux s'est

fondée sur des obligations jugées légèrement plus risquée.

Dans une dernière partie, ce mémoire a tâché de proposer une illustration de l'application d'une telle courbe lors de l'évaluation de la provision liée à un régime de retraite supplémentaire à prestation définie (article 39). Le premier type de rente proposé par le régime considéré est de type différentiel. En d'autres termes, elle assure un certain niveau de retraite en complétant les rentes générées par la retraite légale (CNAV et AGIRC-ARRCO dans le cas considéré). Le second type de rente est de type additif : une rente trimestrielle fixe (hors revalorisation) est promise au bénéficiaire. Le calcul de la provision liée à la rente différentielle nécessite d'estimer la rente légale perçue par le bénéficiaire. Il est ainsi nécessaire de proposer une reconstitution de l'historique des salaires perçus, dans la mesure où ils déterminent le niveau de rente légale.

Le passage de la précédente méthode de construction de la courbe des taux à la nouvelle méthode a modifié l'engagement de l'employeur proposant ce plan. La dette actuarielle a baissé de 2,70 % et a évolué de 236 111 k€ à 229 833 k€. Des tests de sensibilité à la méthode de la courbe des taux retenue ont également été considérés. Deux courbes des taux, fondées sur des modèles différents, présentés dans ce mémoire, ont été utilisées afin de réévaluer l'engagement. Il en résulte que l'écart entre l'engagement obtenu en utilisant la courbe des taux retenue dans ce mémoire et l'engagement obtenu en utilisant les deux courbes des taux alternatives est au maximum de 0,5 %. Les résultats sont proches et ce test semble indiquer que les différents modèles considérés dans ce mémoire fournissent des résultats cohérents.

# Summary

Companies offering employee benefit plans have to pay future benefits to their employees under predefined conditions. These probable future expenses require the constitution of a provision for the employer. In the context of their consolidated financial disclosure, companies listed on the stock exchange and companies which are not listed on the stock exchange (at their sole discretion) are subject to International Accounting Standard 19 (IAS 19), which imposes the method to be applied for the calculation of these provisions. It specifies the principles applying to the main actuarial assumptions. The actuaries responsible for the calculation of the provision for this type of plans must carry out actuarial valuations in accordance with the criteria defined by IAS 19. Actuaries have to manipulate cash flows taking place at different dates. Discount rates allow actuaries to compare them by expressing them at the same date. Discounting is used to express a future cash flow at an earlier date. IAS 19 requires discount rates to be a good estimate of reality (i.e. of yields of high-quality corporate bonds). A discount rate curve (or term structure of zero-coupon bonds) makes it possible to assess the time value of money within a precise framework. It is a function of the maturity (often expressed in years), i.e. the time horizon considered. It associates a single rate to a maturity. It can take the following shape:

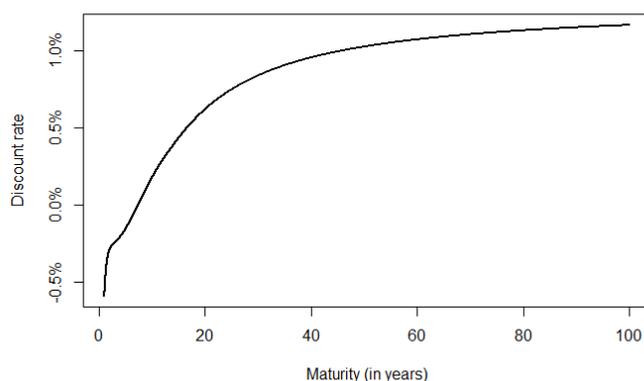


FIGURE 3 – Example of yield curve

Discount rates are based on bonds traded on financial markets. IAS 19 requires the use of high-quality corporate bonds in priority and as a second choice the use of high-quality government bonds for maturities when there are no longer enough of corporate bond cash flows. This choice is motivated by a logic of prudence and the desire to reflect reality as closely as possible. In practice,

this criterion corresponds to companies or states whose debt meets a minimum rating from the major rating agencies (generally AA). At the reference date of this dissertation, June 30, 2020, the financial context was a low interest rate universe. This implies a decrease in expected yields and a decrease in discount rates. This factor had to be taken into account in the construction of the yield curve.

Deloitte already had a tool allowing it to build a yield curve on a regular basis (generally every month) that complied with the criteria of IAS 19. However, this tool had several limitations which motivated the development of the tool related to this paper. The former method was based on preliminary work made by institutions and private companies (Markit, European Central Bank). The purpose of this paper is to propose a method to build a yield curve based on raw data (price, maturity, coupon rate, etc.). The objective is to propose an optimized method based on more complete and more rigorous models, while being compatible with IAS 19. In this context, the following problem was chosen:

How to build a yield curve that complies with the methods recommended by IAS 19 in a low interest rate universe?

In order to answer this question, two types of families of discount rate curve models were considered: spline-based methods and methods based on specific classes of functions. Among the first family, the model considered was Vasicek & Fong's model (1982). For the second family, the methods considered were Nelson-Siegel's method (1987) and its declinations (Svensson's model - 1994, Björk & Christensen's model - 1999). The bootstrap method was also considered for comparison, but was not chosen because of its assumptions.

These models were adjusted on two types of bond portfolios: portfolios containing corporate bonds and the second one containing government bonds. Portfolios belonging to the first type are extracted from the iBoxx € Corporates AA index and the iBoxx € Corporates A index (only bonds rated AA by at least one major credit rating agency). Portfolios belonging to the second type are composed of bonds belonging to the iBoxx € Eurozone index rated AA by at least one major credit rating agency.

Model fit is similar for both types of portfolios. It is performed by minimizing a function based on the quadratic error. The error is calculated from the difference between the observed bond prices and the prices calculated from the rates estimated by the models. A weighting according to the weight of the bond in the market was considered. This allows the rates to better take into account the financial strategies currently possible on financial markets. Thus, a bond that is very present in the market will be given a more significant weight in the model. A weighting based on duration was also considered to adjust the rate models on government bonds in order to give bonds with a high maturity a greater weight in the adjustment. In addition, the bond market is made up of a significant number of bonds with embedded options, including callable options. A callable bond allows its issuer to buy it back before its maturity date. This has an impact on the price structure of the bond. This paper has proposed a simplifying approach to explicitly modelize the price of such bonds. The results of this modelization were compared to the results obtained by adjusting models on portfolios without callable bonds. This method was considered as more efficient. It was thus decided to base the yield curve on a portfolio excluding callable bonds.

In the context of the construction of a discount rate curve, IAS 19 allows the use of government bonds for maturities for which corporate bonds are rare. In this context, it was decided to base the

yield curve on corporate bonds for maturities between 0 and 12 years and on government bonds for longer maturities. The final yield curve is obtained from two separate curves. Two yield curves were initially selected: one based on corporate bonds and one based on government bonds. At the 12 year maturity, the shape of the yield curve based on government bonds was "hooked" to the yield curve based on corporate bonds. In other words, a constant rate spread was added to the government bond yield curve to ensure continuity and to only use the shape of the curve, which is an estimate of a yield curve that would have been based on corporate bonds with these maturities.

The graph below compares the yield curves as at 30/06/2020 obtained using the method proposed in this paper and the previous method used to build the yield curve.

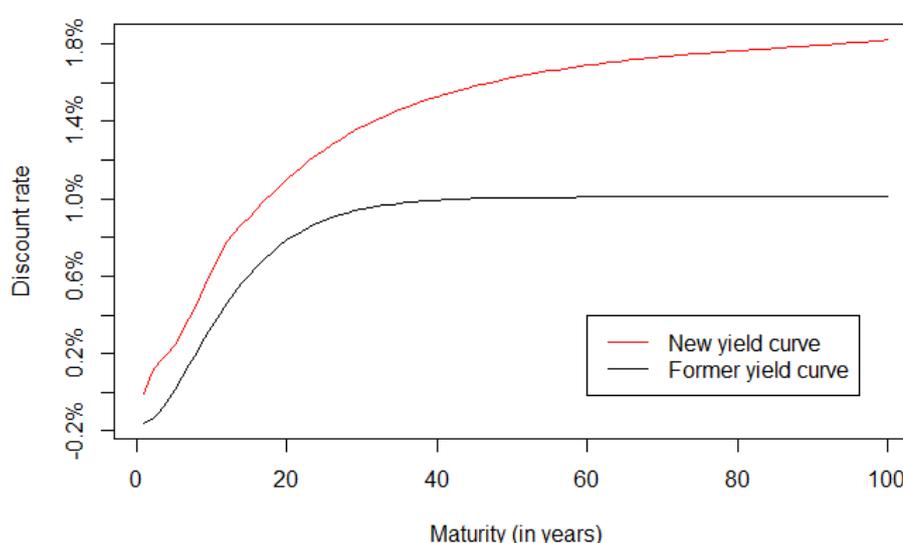


FIGURE 4 – Comparison of yield curve building methods as of 30/06/2020

The yield curve obtained using the new method is always higher than the previous curve. This is mainly due to the fact that the previous method selected higher quality bonds. This additional prudence is not imposed by the IAS 19. That is the reason why the new method used to build the yield curve was based on bonds with a slightly higher risk.

In a last chapter, this paper has proposed an illustration of the application of such a curve when valuing the provision related to a defined benefit pension plan (*Article 39*). The first type of pension proposed by the plan considered is qualified as "differential". In other words, it ensures a certain level of retirement pensions by increasing the pensions generated by the legal pension (*CNAV* and *AGIRC-ARRCO* in the case under consideration). The second type of pension is qualified as "additive": a fixed pension (modulo the pension increase) is promised to the beneficiary. The calculation of the provision of the differential pension requires to estimate of the legal pension received by the beneficiary. It is necessary to propose a reconstitution of the history of salaries received, since they determine the level of the legal annuity.

The change from the previous method of constructing the yield curve to the new method has

modified the employer's liability related to this plan. The actuarial liability decreased by 2.70% and evolved from 236,111 k€ to 229,833 k€. Sensitivity tests on the yield curve method used were also considered. Two yield curves based on different models presented in this paper, were used to reevaluate the liability. As a result, the difference between the liability obtained using the yield curve used in this report and the liability obtained using the two alternative yield curves is less than 0.5%. The results are close and this test seems to indicate that the different models considered in this paper provide consistent results.

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Note de synthèse</b>  | <b>2</b>  |
| <b>Summary</b>   | <b>6</b>  |
| <b>Introduction</b>  | <b>16</b> |
| <b>1 Contexte et motivations</b>   | <b>18</b> |
| 1.1 Introduction au concept de courbe des taux . . . . .                               | 18        |
| 1.1.1 La courbe des taux . . . . .   | 18        |
| 1.1.2 Les méthodes d'estimation de la courbe des taux . . . . .                        | 20        |
| 1.2 La norme <i>IAS 19</i> révisée . . . . .   | 20        |
| 1.2.1 Historique et champ d'application . . . . .                                      | 20        |
| 1.2.2 Construction d'une courbe des taux d'actualisation selon la norme <i>IAS 19</i>  | 26        |
| 1.3 Contexte économique et conséquences sur l'ancienne méthode . . . . .               | 27        |
| 1.3.1 Contexte économique . . . . .  | 27        |
| 1.3.2 Impact sur l'ancienne méthode . . . . .  | 29        |
| <b>2 Notions financières et ancienne méthode</b>                                       | <b>32</b> |
| 2.1 Notions financières . . . . .  | 32        |
| 2.1.1 Obligation zéro-coupon . . . . .   | 32        |
| 2.1.2 Obligation à coupons . . . . .   | 32        |
| 2.1.3 Le taux <i>spot</i> . . . . .  | 34        |
| 2.1.4 Calcul du prix d'une obligation zéro-coupon par la méthode du <i>bootstrap</i>   | 35        |
| 2.1.5 Le taux <i>forward</i> . . . . .   | 36        |
| 2.1.6 Les options incorporées . . . . .  | 38        |
| 2.1.7 Calcul du taux équivalent . . . . .  | 39        |
| 2.2 La méthode de Nelson-Siegel . . . . .  | 39        |
| 2.2.1 Modélisation . . . . .   | 39        |
| 2.2.2 Interprétation des paramètres du modèle . . . . .                                | 40        |
| 2.3 Présentation de l'ancienne méthode de construction de la courbe des taux . . . . . | 45        |
| 2.3.1 Construction de la courbe des taux d'entreprises . . . . .                       | 46        |
| 2.3.2 Construction de la courbe des taux d'États . . . . .                             | 47        |
| 2.3.3 Accrochage des deux courbes et ajustement de la fonction de Nelson-Siegel        | 47        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>3</b> | <b>Production de la courbe des taux</b>  | <b>49</b>  |
| 3.1      | Présentation des méthodes . . . . .  | 49         |
| 3.2      | Extensions du modèle de Nelson-Siegel . . . . .                                      | 49         |
| 3.2.1    | La méthode de Svensson (1994) . . . . .  | 50         |
| 3.2.2    | La méthode de Björk & Christensen . . . . .  | 50         |
| 3.3      | Le modèle de Vasicek & Fong (1982) . . . . .   | 51         |
| 3.3.1    | Approche du modèle de Vasicek & Fong choisie . . . . .                               | 53         |
| 3.3.2    | Interprétation des paramètres du modèle . . . . .                                    | 54         |
| 3.4      | Implémentation des méthodes . . . . .  | 54         |
| 3.4.1    | Construction de la courbe des taux fondée sur des obligations d'entreprises          | 56         |
| 3.4.2    | Construction de la courbe des taux fondée sur des obligations d'États . . .          | 66         |
| 3.4.3    | "Accrochage" et présentation de la courbe des taux finale . . . . .                  | 74         |
| <b>4</b> | <b>Application de la courbe à un régime de retraite supplémentaire</b>               | <b>76</b>  |
| 4.1      | Présentation du régime et de son portefeuille . . . . .                              | 76         |
| 4.1.1    | Présentation du régime . . . . .   | 76         |
| 4.1.2    | Présentation du portefeuille . . . . .   | 79         |
| 4.2      | La retraite en France . . . . .  | 82         |
| 4.2.1    | Calcul des rentes générées par le pilier 1 . . . . .                                 | 83         |
| 4.2.2    | Calcul des rentes générées par le régime de retraite complémentaire . . .            | 84         |
| 4.3      | Évaluation de la provision du régime de retraite supplémentaire . . . . .            | 86         |
| 4.3.1    | Hypothèses actuarielles . . . . .  | 86         |
| 4.3.2    | Reconstitution de la carrière . . . . .  | 91         |
| 4.3.3    | Reconstitution de la retraite . . . . .  | 91         |
| 4.3.4    | Calcul de la rente . . . . .   | 92         |
| 4.3.5    | Calcul du capital constitutif . . . . .  | 92         |
| 4.3.6    | La cristallisation des articles 39 . . . . .   | 93         |
| 4.3.7    | Actifs de couverture du régime . . . . .   | 94         |
| 4.3.8    | Fiscalité des régimes à prestations définies pour l'employeur . . . . .              | 94         |
| 4.4      | Présentation des résultats de l'évaluation et états comptables sous IAS 19 . . . . . | 94         |
| 4.4.1    | Présentation des résultats avec application de la nouvelle courbe des taux           | 94         |
| 4.4.2    | Comparaison des résultats selon la courbe des taux utilisée . . . . .                | 95         |
|          | <b>Conclusion</b>  | <b>99</b>  |
|          | <b>Bibliographie</b>   | <b>101</b> |
| <b>A</b> | <b>Le taux d'actualisation selon la norme IAS 19</b>                                 | <b>103</b> |
| <b>B</b> | <b>Périmètre d'application de la norme IAS 19</b>                                    | <b>104</b> |
| <b>C</b> | <b>Courbe des taux selon l'ancienne méthode</b>                                      | <b>106</b> |
| <b>D</b> | <b>Méthode des moindres carrés généralisée du modèle de Vasicek et Fong (1982)</b>   | <b>107</b> |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>E</b> | <b>Courbe des taux selon la nouvelle méthode</b>       | <b>109</b> |
| <b>F</b> | <b>Hypothèses CNAV</b>                                 | <b>110</b> |
| <b>G</b> | <b>Paramètres - AGIRC-ARRCO</b>                        | <b>111</b> |
| <b>H</b> | <b>Hypothèses du régime de retraite supplémentaire</b> | <b>112</b> |

# Table des figures

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1    | Exemple de courbe des taux . . . . .  | 2  |
| 2    | Comparaison des méthodes de construction des courbes des taux au 30/06/2020 . . . . .               | 4  |
| 3    | Example of yield curve . . . . .  | 6  |
| 4    | Comparison of yield curve building methods as of 30/06/2020 . . . . .                               | 8  |
| 1.1  | Exemple de courbe des taux . . . . .  | 18 |
| 1.2  | Évolution des taux des OAT 10 ans de 2017 à 2020 . . . . .  | 28 |
| 1.3  | Évolution du taux <i>iBoxx</i> € Corporates AA 10+ . . . . .  | 28 |
| 1.4  | Évolution du taux <i>iBoxx</i> € Corporates AA selon la maturité . . . . .                          | 30 |
| 1.5  | Courbe des taux des pays de la zone euro notés AAA au 30 juin 2020 - BCE . . . . .                  | 31 |
| 1.6  | Évolution de la courbe des rendements obligataires de la BCE jusqu'au 30/06/2020 . . . . .          | 31 |
| 2.1  | Diagramme de flux d'une obligation zéro-coupon . . . . .  | 32 |
| 2.2  | Diagramme de flux d'une obligation à coupons . . . . .  | 33 |
| 2.3  | Coupon couru d'une obligation . . . . .   | 34 |
| 2.4  | Schéma du taux <i>forward</i> . . . . .   | 37 |
| 2.5  | Impact des paramètres sur les taux <i>forward</i> instantanés du modèle de Nelson-Siegel . . . . .  | 41 |
| 2.6  | Évolution du taux <i>forward</i> en fonction de $\tau$ avec le vecteur de paramètre $P_1$ . . . . . | 42 |
| 2.7  | Évolution du taux <i>forward</i> en fonction de $\tau$ avec le vecteur de paramètre $P_2$ . . . . . | 43 |
| 2.8  | Impact des paramètres sur les taux <i>spot</i> du modèle de Nelson-Siegel . . . . .                 | 44 |
| 2.9  | Évolution du taux <i>spot</i> en fonction de $\tau$ avec le vecteur de paramètre $P_1$ . . . . .    | 45 |
| 2.10 | Évolution du taux <i>spot</i> en fonction de $\tau$ avec le vecteur de paramètre $P_2$ . . . . .    | 45 |
| 2.11 | Interpolation des taux synthétiques <i>iBoxx</i> € Corporates AA au 30/06/2020 . . . . .            | 47 |
| 2.12 | Courbe des taux déterminée selon l'ancienne méthode au 30/06/2020 . . . . .                         | 48 |
| 3.1  | Portefeuille 1 : facteur d'actualisation du modèle de Vasicek & Fong . . . . .                      | 60 |
| 3.2  | Portefeuille 1 : résidus au carré . . . . .   | 60 |
| 3.3  | Portefeuille 1 : courbes des taux d'actualisation et taux de rendement actuariels . . . . .         | 61 |
| 3.4  | Portefeuille 2 : facteur d'actualisation du modèle de Vasicek & Fong . . . . .                      | 62 |
| 3.5  | Portefeuille 2 : résidus au carré . . . . .   | 62 |
| 3.6  | Portefeuille 2 : courbes des taux d'actualisation et taux de rendement actuariels . . . . .         | 63 |
| 3.7  | Fonctions de répartition empiriques des maturités . . . . .   | 64 |
| 3.8  | Courbe des taux fondée sur des obligations d'entreprises . . . . .                                  | 66 |
| 3.9  | Portefeuille 3 : facteur d'actualisation du modèle de Vasicek & Fong . . . . .                      | 69 |
| 3.10 | Portefeuille 3 : résidus au carré . . . . .   | 69 |

---

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.11 | Portefeuille 3 : courbes des taux d'actualisation et taux de rendement actuariels . | 70 |
| 3.12 | Portefeuille 4 : facteur d'actualisation du modèle de Vasicek & Fong . . . . .      | 71 |
| 3.13 | Portefeuille 4 : résidus au carré . . . . .   | 71 |
| 3.14 | Portefeuille 4 : courbes des taux d'actualisation et taux de rendement actuariels . | 72 |
| 3.15 | Courbes des taux d'actualisation fondée sur des obligations d'États . . . . .       | 73 |
| 3.16 | Comparaison des méthodes de construction des courbes des taux au 30/06/2020 .       | 74 |
| 4.1  | Répartition des âges des actifs . . . . .   | 80 |
| 4.2  | Répartition des salaires des actifs . . . . .                                       | 80 |
| 4.3  | Répartition de l'ancienneté des actifs . . . . .                                    | 81 |
| 4.4  | Les trois piliers de la retraite française pour les salariés . . . . .              | 82 |
| 4.5  | Tranches AGIRC-ARRCO . . . . .  | 85 |
| 4.6  | Historique de l'inflation de la zone euro . . . . .                                 | 89 |
| 4.7  | Courbes des taux alternatives et courbe des taux issue de la nouvelle méthode . .   | 97 |

# Liste des sigles et acronymes

|                    |   |
|--------------------|---|
| <b>AGIRC-ARRCO</b> | Association Générale des Institutions de Retraite des Cadres - Association des Régimes de Retraite Complémentaire |
| <b>AIC</b>         | Critère d'Information d'Akaike  |
| <b>AMF</b>         | Autorité des Marchés Financiers   |
| <b>AOA</b>         | Absence d'Opportunité d'Arbitrage   |
| <b>BCE</b>         | Banque Centrale Européenne  |
| <b>BIC</b>         | Critère d'Information Bayésien  |
| <b>CNAV</b>        | Caisse Nationale d'Assurance Vieillesse   |
| <b>IFRS 2</b>      | <i>International Financial Reporting Standard 2</i>   |
| <b>IAS 19</b>      | <i>International Accounting Standard 19</i>   |
| <b>IASB</b>        | <i>International Accounting Standards Board</i>   |
| <b>OAT</b>         | Obligation Assimilable du Trésor  |
| <b>PASS</b>        | Plafond Annuel de la Sécurité sociale   |
| <b>PUC</b>         | <i>Projected Unit Credit</i>  |
| <b>PUCM</b>        | <i>Projected Unit Credit Method</i>   |
| <b>SAM</b>         | Salaire Annuel Moyen  |
| <b>VAPF</b>        | Valeur Actuelle des Prestations Futures   |

# Introduction

Au cours des évaluations actuarielles, l'actuaire est amené à manipuler des flux ayant lieu à des moments différents. Le concept d'actualisation a ainsi été introduit afin de comparer ces différents flux en les exprimant à une même date. De ce fait, l'actualisation est un élément essentiel à l'évaluation actuarielle. Elle permet d'exprimer une valeur future à un instant antérieur. L'actuaire doit en effet régulièrement calculer des montants de provisions permettant le financement de dépenses futures. Le taux d'actualisation est alors une hypothèse primordiale dans ce type d'évaluation dans la mesure où il influence directement les coûts. Il doit être une bonne estimation de la réalité afin d'assurer la justesse de l'évaluation.

De nombreuses approches sont possibles pour construire la courbe des taux d'actualisation établissant le lien entre des valeurs futures et des valeurs exprimées à une date antérieure. Les taux d'actualisation se fondent sur des actifs financiers : les obligations. En théorie, tous les types d'obligations pourraient être considérés pour construire une telle courbe. Toutefois, l'actualisation s'inscrit dans une logique prudente et proche de la réalité. Le portefeuille d'obligations choisi pour la construction d'une telle courbe considère généralement des obligations avec des risques de défaut faibles. Cette présélection assure une meilleure prudence de la part des entreprises.

Ce mémoire cherchera ainsi à proposer une méthode de construction d'une courbe des taux. Ces taux auront vocation à être utilisés lors de missions de conseil aux entreprises et pour des missions d'audit. Par ailleurs, il est important de proposer une méthode justifiable d'un point de vue théorique en cas d'audit de clients conseillés par le cabinet Deloitte.

La méthode de construction développée dans ce mémoire est soumise à la norme *International Accounting Standard 19 (IAS 19)* révisée. Cette norme s'applique au sein des grands groupes internationaux et des groupes cotés proposant des plans d'avantages du personnel dont les paiements ne sont pas fondés sur des actions. Dans ce cadre, les données et les méthodes choisies pour la construction d'une courbe des taux doivent respecter plusieurs critères. Les obligations sur lesquelles se fondent les taux doivent notamment être de haute qualité. La norme impose en priorité l'utilisation d'obligations d'entreprises et en second choix l'utilisation d'obligations d'États, lorsque les flux des obligations d'entreprises ne sont plus suffisamment nombreux.

Par ailleurs, le contexte financier actuel est un univers de taux bas. Cela implique que les entreprises proposant des plans d'avantages du personnel nécessitant d'actualiser des flux voient leurs engagements augmenter. La méthode présentée devra tenir compte de cette situation tout en respectant les instructions de la norme *IAS 19* révisée.

Le cabinet Deloitte disposait déjà d'un outil lui permettant de régulièrement construire une courbe des taux d'actualisation soumis à la norme *IAS 19* révisée. Toutefois, cette méthode présen-

tait des limites et se fondait sur des travaux préliminaires proposés par des grandes institutions et des entreprises privées (Banque Centrale Européenne, Markit...), ce mémoire cherche à proposer un outil permettant la construction d'une courbe des taux à partir de données brutes. L'objectif est de pouvoir proposer une méthode optimisée fondée sur des modèles plus complets et plus rigoureux tout en étant compatible avec la norme *IAS 19*. La courbe finale sera ainsi construite à partir d'extractions des marchés financiers contenant des informations telles que le prix des obligations, leurs rendements financiers et leurs taux de coupons. Les cabinets de conseil doivent être capables d'expliquer les taux d'actualisation qu'ils préconisent. Le choix d'une telle méthode permettrait ainsi d'expliquer en profondeur d'où sont issus les taux d'actualisation.

En outre, l'outil développé dans ce mémoire devra respecter plusieurs critères. Il devra permettre de construire rapidement une courbe des taux. Il devra ainsi être efficace et pouvoir être utilisé et alimenté rapidement par un consultant en actuariat. Il proposera plusieurs méthodes et les comparera à l'aide d'éléments statistiques. La construction de la courbe des taux finalement obtenue devra néanmoins être guidée par l'actuaire, qui usera de son expérience lors de l'ajustement et du choix des modèles.

Dans ce contexte, la problématique de ce mémoire peut alors se formuler par la question suivante : Comment construire une courbe des taux conforme aux méthodes recommandées par la norme *IAS 19* dans un univers de taux bas ?

Pour répondre à cette problématique, ce mémoire sera divisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre exposera le contexte et apportera plus de détails sur les motivations de la recherche d'une nouvelle méthode de construction de la courbe des taux. Il introduira ainsi le lecteur au concept de courbe des taux, présentera les éléments principaux de la norme *IAS 19* révisée et développera les conséquences des taux bas sur la construction d'une courbe des taux.

Le deuxième chapitre commencera par présenter un ensemble de notions financières nécessaires à la bonne compréhension des modèles utilisés dans ce mémoire. Il détaillera ainsi des notions telles que les obligations et le concept de taux *spot*. Il présentera également la méthode du *bootstrap*, utilisée pour calculer les prix d'obligations zéro-coupon dans l'ancienne méthode de construction de la courbe des taux. Dans un second temps, il exposera l'ancienne méthode et notamment le modèle de construction de courbes des taux proposé par Nelson et Siegel en 1987.

Le troisième chapitre traitera dans un premier temps des nouveaux modèles envisagés pour la nouvelle méthode de construction de la courbe des taux, c'est-à-dire les modèles de Svensson (1994), Björk et Christensen (1999) et Vasicek et Fong (1982). Dans un second temps, il détaillera la mise en place des méthodes (fonction objectif, méthodes d'ajustement) et les comparera à l'aide d'éléments statistiques. Une fois l'ajustement fait et les modèles finaux choisis, la courbe des taux obtenue par la nouvelle méthode sera finalisée et présentée.

Le quatrième et dernier chapitre de ce mémoire portera sur l'utilisation de la nouvelle courbe des taux lors de l'évaluation d'un régime de retraite supplémentaire de type article 39. Le chapitre commencera par présenter le régime et le portefeuille considérés. Il tâchera ensuite de détailler le fonctionnement de la retraite en France, ce qui apportera au lecteur les éléments nécessaires à la bonne compréhension de l'évaluation du plan. Enfin, l'évaluation de la provision et ses résultats sous la norme *IAS 19* révisée seront présentés. L'impact du passage à la nouvelle méthode de construction de la courbe des taux sera pour finir exposé.

# Chapitre 1

## Contexte et motivations

Ce chapitre a pour objectif de présenter les éléments fondateurs de ce mémoire. Il sera construit en trois temps. Il commencera par une brève introduction de la notion de courbe des taux et de ses fondements. Il présentera ensuite le cadre réglementaire de l'outil développé. Pour finir, il apportera des éléments de contexte économique motivant un changement de méthodologie de construction de la courbe des taux.

### 1.1 Introduction au concept de courbe des taux

#### 1.1.1 La courbe des taux

La notion de courbe des taux (ou structure par terme des obligations zéro-coupon) est un élément de référence dans toutes les économies qui permet d'apprécier la valeur-temps de la monnaie considérée. Une courbe des taux reposant sur des taux euros proposera ainsi une évolution de la valeur de l'euro entre deux dates. Graphiquement, elle peut avoir une forme comme ci-dessous.

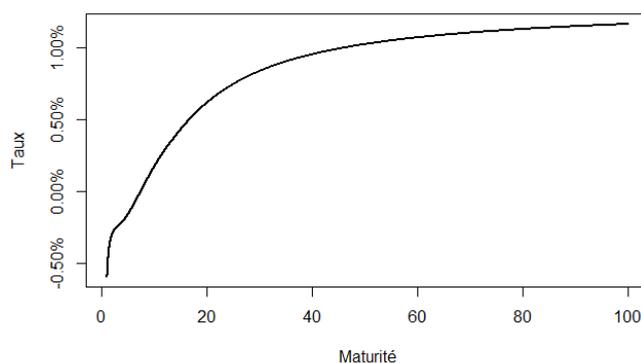


FIGURE 1.1 – Exemple de courbe des taux

En d'autres termes, une courbe des taux est fonction de la maturité, c'est-à-dire l'horizon temporel considéré. Elle associe à une maturité un unique taux. De cette dernière remarque, une question

peut apparaître : y a-t-il unicité du taux pour une maturité donnée ? La présence de plusieurs taux pour une même maturité s'expliquerait par l'existence de plusieurs marchés [RONCALLI, 1998]. Les données observées ne sont pas homogènes, tant au niveau de leur maturité qu'au niveau du marché considéré.

De plus, dans leurs structures, les obligations ne sont pas identiques. La notion de duration est une bonne représentation de ces distinctions. Elle se définit comme suit :

$$D = \frac{\sum_{k=1}^T \frac{t_k \times c \times N}{(1+i)^k} + \frac{T \times N}{(1+i)^T}}{\sum_{k=1}^T \frac{c \times N}{(1+i)^k} + \frac{N}{(1+i)^T}}, \quad (1.1)$$

avec :

- $c$  le taux de coupon ;
- $i$  le taux d'actualisation ;
- $N$  le nominal ;
- $T$  la maturité de l'obligation ;
- $t_k$  l'intervalle de temps entre la date d'actualisation et la date du  $k$ -ième flux.

La duration est ainsi la maturité moyenne, pondérée par les flux, d'une obligation. C'est une manière de résumer les dates de versements des différents flux de l'obligation.

Cette donnée permet alors de mettre en évidence l'hétérogénéité des obligations. Les obligations proposées sur les marchés financiers sont caractérisées par des flux et des dates de versements très différents. Pourtant, l'objectif de la courbe des taux est d'établir une relation uniquement entre la date de maturité et le taux. Ainsi, pour une obligation dont la date de maturité n'est pas égale à sa duration, cette relation ne sera pas respectée car d'autres variables interfèrent. L'intérêt des obligations zéro-coupon (cf. sous-section 2.1.1) se comprend alors : elles sont caractérisées par une maturité égale à leur duration. En effet, pour une obligation zéro-coupon, la formule de calcul de la duration énoncée précédemment est telle que  $D = T$  car l'obligation ne verse pas de coupon entre la date d'évaluation et la date d'échéance.

Ainsi, il y aura unicité de taux pour une maturité donnée si les deux critères suivants sont respectés :

- la courbe des taux est construite à partir d'obligations zéro-coupon. En pratique, les marchés financiers proposent peu d'obligations zéro-coupon. Toutefois, ce mémoire présentera des méthodes permettant de déduire des obligations zéro-coupon à partir d'obligations à coupons. Il sera donc possible d'exploiter des obligations à coupons dans les modèles présentés par la suite ;
- les titres considérés doivent présenter les mêmes caractéristiques en terme de risque de défaut, de fiscalité et de négociabilité [RONCALLI, 1998]. Ce point sera considéré comme vérifié. En effet, les modèles de courbes des taux proposés dans ce mémoire se fonderont sur des obligations de la zone euro (ie. un marché unique). De plus, elles seront choisies en se fondant sur des estimations de leurs risques de marché, fournies par des agences de notations.

### 1.1.2 Les méthodes d'estimation de la courbe des taux

La littérature propose différentes manières de catégoriser les méthodes de construction d'une courbe des taux. Ce mémoire aura recours à la classification proposée par Roncalli. Il propose de classer les méthodes en trois catégories :

- les méthodes fondées sur des *splines* ;
- les méthodes fondées sur des classes de fonctions spécifiques, sur lesquelles un ajustement est réalisé ;
- les méthodes non-paramétriques.

En pratique, les deux premières méthodes sont les plus utilisées. La plupart des banques centrales ont recours à une méthode fondée sur des classes de fonctions spécifiques pour construire leur courbe des taux. Ceci permet de facilement comparer les structures par terme des obligations zéro-coupon de nombreux pays. Seules quelques exceptions dérogent à cette règle (Canada, Royaume-Uni, États-Unis, Suède) et ont recours à des méthodes fondées sur des *splines* [Bank for international settlements, 2005].

Les méthodes non-paramétriques sont parmi les moins présentes dans la littérature. Elles sont également peu utilisées en pratique. Ce mémoire comparera plusieurs méthodes et tâchera de présenter des méthodes fondées sur des *splines* et des méthodes fondées sur des classes de fonctions spécifiques.

## 1.2 La norme IAS 19 révisée

Il convient de définir le cadre réglementaire de ce mémoire. Cette section sera donc fondée sur les textes officiels de l'*International Accounting Standards Board (IASB)* consultables en Annexes A et B [IASB, 2011]. L'outil de construction de la courbe des taux réalisée est soumis à la norme *International Accounting Standard (IAS 19) - Avantages du personnel révisée*. Cette dernière encadre la comptabilisation, par l'employeur, de tous les avantages du personnel à l'exception de ceux dont les paiements sont fondés sur des actions (qui dépendent de la norme *International Financial Reporting Standard 2 - IFRS 2*). Par ailleurs, afin d'alléger les termes utilisés, la norme IAS 19 révisée sera appelée norme IAS 19.

Cette section comportera deux sous-sections : l'une expliquant le calcul des provisions sous IAS 19 et l'autre portant sur les indications de la norme IAS 19 concernant la construction d'une courbe des taux d'actualisation.

### 1.2.1 Historique et champ d'application

La version initiale de la norme IAS 19 a été publiée en février 1998. Sa version actuelle est le fruit de plus de 10 ans d'ajustements par des amendements [IASB, 2011]. La justification de ces modifications est principalement la volonté d'une meilleure comparabilité entre les grands groupes. Au fil du temps, la norme a été l'objet de plusieurs amendements, certains d'entre eux ayant été effectués au niveau de l'Union Européenne.

Cette norme s'inscrit dans l'ensemble des normes IAS-IFRS et s'applique à tous les pays qui le souhaitent. Toutefois, depuis 2005, l'Union Européenne impose à toutes les sociétés européennes

cotées de publier leurs comptes consolidés conformément aux normes *IFRS*. En comptabilité, la norme porte sur les comptes consolidés (et non les comptes sociaux). En France, les sociétés non cotées ont également la possibilité de publier leurs comptes sociaux en norme *IFRS*, bien qu'elles aient en général recours aux normes française (*French GAAP*). Ce point ne sera néanmoins pas abordé dans ce mémoire.

Le tableau ci-dessous reprend les différentes normes applicables selon le type d'entreprise en France :

|                            | Comptes sociaux   | Comptes consolidés                                 |
|----------------------------|-------------------|--|
| <b>Sociétés cotées</b>     | Normes françaises | Normes <i>IFRS</i>                                 |
| <b>Sociétés non cotées</b> | Normes françaises | Normes françaises ou normes <i>IFRS</i> sur option |

TABLE 1.1 – Récapitulatif des normes comptables applicables en France

### 1.2.1.1 Périmètre d'application

La norme *IAS 19* procède en deux temps. Elle commence par définir le cadre dans lequel un plan d'avantages du personnel peut être défini pour ensuite définir la notion d'avantages du personnel (cf. annexe B).

Selon elle, trois principaux cadres sont à distinguer :

- les régimes définis par la législation du pays, des accords de branches ou des conventions collectives ;
- les régimes définis dans le cadre d'un accord formel entre l'entreprise et le ou les salariés ou leurs représentants ;
- les régimes définis de façon informelle conduisant à une obligation implicite de l'employeur vis-à-vis de ses salariés.

Autrement dit, un plan d'avantages du personnel peut être défini à différentes échelles et il n'est pas nécessairement défini de manière formelle.

Les avantages du personnel soumis à *IAS 19* peuvent prendre quatre formes :

- les avantages du personnel à court terme ;
- les avantages postérieurs à l'emploi ;
- les autres avantages à long termes (congrés liés à l'ancienneté, jubilés, congrés sabbatiques, indemnités pour invalidité de longue durée... ) ;
- les indemnités de fin de contrat de travail.

#### Les avantages du personnel à court terme

Les avantages du personnel à court terme sont octroyés dans les 12 mois qui suivent la prestation de services de l'employé. Ils rassemblent notamment les salaires, les cotisations de sécurité sociales, les primes et les congrés payés.

Ils ne nécessitent pas de calcul actuariels dans la mesure où ils sont rapidement octroyés et immédiatement comptabilisés dans le bilan et le compte de résultat de l'exercice où la prestation de service a eu lieu. Ils ne nécessitent donc pas d'hypothèses actuarielles (taux d'actualisation... ). La courbe des taux proposée dans ce mémoire ne s'appliquera donc pas à ce type de plans.

### **Les avantages postérieurs à l'emploi**

La norme *IAS 19* définit comme avantages postérieurs à l'emploi tous les accords selon lesquels l'entreprise accorde un avantage postérieur à l'emploi. Ils regroupent notamment les pensions de retraite, les assurances-vie ou les assistances médicales postérieures à l'emploi.

Les avantages postérieurs à l'emploi peuvent être regroupés dans deux grandes familles :

- les régimes à cotisations définies ;
- les régimes à prestations définies.

### **Les régimes à cotisations définies**

Pour ce type de régimes, l'employeur paie directement des cotisations à un tiers (État, fonds de pension, compagnie d'assurance, etc.). Ceci le libère de tout engagement auprès de ses salariés dans la mesure où il a été externalisé. De plus, même en cas de déficit du régime, l'employeur n'a pas à assumer le coût du plan accordé à ses employés.

Ainsi, des cotisations régulières sont payées et la société concernée comptabilise directement chaque cotisation en charge pour l'exercice pendant lequel elles ont été payées. En outre, la société est tenue d'indiquer en annexe le montant comptabilisé.

Les régimes à cotisations définies ne sont donc pas soumis au provisionnement chez l'employeur. Il n'est pas nécessaire d'avoir recours à un taux d'actualisation et c'est pour cette raison que le travail de construction d'une courbe des taux réalisé dans ce mémoire ne sera pas applicable à ce type de régimes.

### **Les régimes à prestations définies**

Les régimes à prestations définies peuvent être définies comme tout avantage postérieur à l'emploi n'étant pas un régime à cotisations définies. Ils sont souvent caractérisés par une formule de calcul précise, qui dépend notamment de l'historique des salaires du bénéficiaire à son âge de départ à la retraite.

Le bon fonctionnement de ce type de régimes peut être assuré de trois manières :

- le provisionnement en interne ;
- l'externalisation auprès d'un assureur.
- la couverture des engagements à l'aide d'actifs de couverture.

L'employeur peut ainsi décider de la part des engagements qui sera assurée par le provisionnement en interne, de la part des engagements qui sera externalisée et du niveau des actifs de couverture. En pratique, l'employeur a souvent tendance à couvrir ses engagements, soit en externalisant son engagement, soit à l'aide d'actifs de couverture. Il est toutefois important de noter que selon le type de plan considéré, l'employeur peut être légalement contraint à préfinancer le plan, c'est-à-dire à souscrire un contrat afin d'externaliser ses engagements auprès d'un assureur. Le provisionnement

en interne nécessite le recours à la méthode des unités de crédits projetées (*Projected Unit Credit*) pour être en conformité avec la norme IAS 19. Cette méthode étant générale et applicable à plusieurs types de plans, elle sera l'objet d'un paragraphe par la suite.

À la différence des régimes à cotisations définies, la charge reconnue pour une période donnée ne correspond pas au montant de cotisations versé à un assureur. La norme IAS 19 impose l'utilisation d'une méthode reposant sur la reconnaissance progressive des engagements au fur et à mesure des « services rendus ».

Une entreprise mettant en place ce type de plans va donc avoir recours à des calculs actuariels pour déterminer le montant de sa provision. L'utilisation de méthodes actuarielles nécessite de nombreuses hypothèses devant refléter les spécificités de chaque entreprise. Les entreprises font donc fréquemment appel à des actuaires prestataires afin de réaliser ces calculs. Les résultats et les hypothèses doivent être communiqués en annexe des documents de référence. Les informations sont nombreuses et très détaillées afin de faciliter la revue d'auditeurs, de renseigner des investisseurs ou les autorités (Autorité des Marchés Financiers - AMF...).

### **Les indemnités de fin de contrat de travail**

Les indemnités de fin de contrat de travail correspondent à l'ensemble des avantages accordés pour une rupture de contrat de travail antérieure à l'âge de départ à la retraite théorique.

Elles sont dues lors de la résiliation du contrat de travail par l'entreprise ou lors du départ volontaire de l'employé (dans le cadre d'un plan social par exemple).

Ce sont des engagements auprès des salariés. Les indemnités de fin de contrat de travail sont donc comptabilisées dans le passif du bilan et en tant que charge en compte de résultat. Dans le cas où le paiement a lieu plus de douze mois après l'acquisition des droits, un taux d'actualisation doit être utilisé lors du calcul de la provision.

### **Les autres avantages à long terme**

Ils correspondent aux avantages autres que les trois types d'avantages cités précédemment. Ils regroupent notamment :

- les congés liés à l'ancienneté ;
- les gratifications pour ancienneté (exemple : médailles du travail) ;
- les indemnités d'incapacité de longue durée ;
- les primes et rémunérations différées.

L'évaluation de leur provision est réalisée de la même manière que pour les avantages postérieurs à l'emploi. La méthode d'évaluation par unités de crédit projetées est utilisée. Toutefois, ce type de plan se distingue des avantages postérieurs à l'emploi de par sa méthode de comptabilisation des écarts actuariels : ils sont directement intégrés au compte de résultat (cf. chapitre 4).

### 1.2.1.2 La méthode des unités de crédit projetées (PUC)

La norme *IAS 19* impose l'utilisation de la méthode des unités de crédit projetées pour l'évaluation de la provision. La méthode des unités de crédit repose sur la reconnaissance graduelle des droits des individus au fur et à mesure de leurs services rendus. Une unité de crédit va être reconnue pour chaque année de service. La méthode imposée par *IAS 19* est dite projetée car les éléments nécessaires aux calculs sont projetés à l'âge de versement de la prestation à l'aide d'hypothèses actuarielles. Notons toutefois qu'une actualisation est appliquée et que la dette actuarielle calculée (cf. méthodologie de calcul) est bien exprimée à la date d'évaluation.

Le recours à cette méthode peut s'expliquer par le fait qu'il facilite la réconciliation comptable ainsi que la relecture et la compréhension des comptes par un tiers. De plus, la méthode *PUC* présente l'avantage d'avoir une charge relativement stable d'un exercice à un autre. Ceci permet alors aux entreprises de lisser leurs dépenses liées à leurs régimes d'avantages du personnel.

Dans un cas particulier, la norme *IAS 19* accepte une variante à la méthode *PUC*. Si la formule de calcul des droits attribue une grande partie des droits à la fin de carrière, il est possible d'avoir recours à la méthode *PUC* dite « proratisée ». Cette méthode consiste à étaler linéairement l'acquisition des droits entre la date de début d'acquisition des droits et la date de fin d'acquisition des droits. Appliquée à ce cas particulier, cette méthode permet encore une fois à l'entreprise de lisser ses dépenses liées aux régimes d'avantages du personnel.

Par ailleurs, cette méthode permet aux entreprises de projeter une provision théorique sur plusieurs exercices. Cette dernière correspond à la provision obtenue si les variables déterminant la dette actuarielle avaient évolué selon les hypothèses actuarielles. Cette propriété permet de ne pas avoir à effectuer de nouvelle évaluation à chaque exercice. La norme *IAS 19* n'interdit pas cette pratique, dans la mesure où aucun événement significatif n'a eu lieu sur la période considérée. En pratique, les actuaires considèrent qu'au minimum une évaluation tous les trois ans est nécessaire. Bien entendu, cette règle dépend du plan et de l'entreprise considérés.

#### Méthodologie de calcul

La méthode d'évaluation de la dette actuarielle par *PUC* consiste en cinq principales étapes :

1. calcul de la Valeur Actuelle des Prestations Futures (VAPF) :

$$VAPF_N = Flux \times \frac{1}{(1+i)^{Dr}} \times P_{versement} ; \quad (1.2)$$

avec :

- *Flux* le montant estimé de la prestation versée ;
- *i* le taux d'actualisation ;
- *Dr* la durée séparant la date d'évaluation de la date de versement ;
- *P<sub>versement</sub>* la probabilité que le flux soit versé ;

2. calcul de l'engagement (ie. la dette actuarielle) :

$$Engagement_N = \frac{A_t}{A_T} \times VAPF ; \quad (1.3)$$

avec :

- $A_t$  l'ancienneté à la date d'évaluation ;
- $A_T$  l'ancienneté à la date de versement de la prestation ;

3. calcul du coût des services rendus (*Service Cost*) :

$$\begin{aligned} \text{Service Cost}_{N+1} &= \frac{VAPF}{A_T} \times (1+i) \\ &= \text{Normal Cost} \times (1+i) ; \end{aligned} \quad (1.4)$$

Le coût normal (*Normal Cost*) est une notion similaire au coût des services rendus, leur seule différence étant que leur valeur n'est pas exprimée dans le même horizon temporel.

4. calcul du coût des intérêts (*Interest Cost*) :

$$\begin{aligned} \text{Interest Cost}_{N+1} &= (\text{Engagement}_N - \text{Flux}_{\text{vers } N}) \times i \\ &\approx (\text{Engagement}_N - \frac{\text{Flux}_{\text{probable}}}{2}) \times i ; \end{aligned} \quad (1.5)$$

avec :

- $\text{Flux}_{\text{probable}}$  le montant de la prestation de l'année à venir estimé ;
- $\text{Flux}_{\text{vers } N}$  la somme des flux versés au cours de l'année exprimée en N ;

5. calcul d'engagement projeté :

$$\begin{aligned} \text{Engagement}_{N+1} &= \text{Engagement}_N + \text{Service Cost} \\ &\quad + \text{Interest Cost} - \text{Flux}_{\text{vers}} ; \end{aligned} \quad (1.6)$$

avec :

- $\text{Flux}_{\text{vers}}$  le montant de prestations versé au cours de l'exercice.

### Interprétation des éléments de calcul

La PUCM (*Projected Unit Credit Method*) présente l'avantage d'être facilement interprétable. Chacune des composantes de la charge a un sens qu'il convient de préciser dans ce paragraphe :

1. la *VAPF* doit être interprétée dans le contexte de la science actuarielle. Elle correspond au montant qui, s'il est détenu à l'instant  $N$ , permettra, en moyenne d'assurer la prestation à la date de versement. Cette valeur est fondée sur plusieurs hypothèses qui dépendent du régime, notamment :

- le taux d'actualisation  $i$ , qui correspond à une anticipation des rendements futurs du marché ;
- $P_{\text{versement}}$  qui prend en compte plusieurs éléments comme :
  - la probabilité de survie qui, selon la norme *IAS 19*, doit être fondée sur des tables de mortalité proposant les taux de mortalité les plus proches de ceux des bénéficiaires du régime considéré. En pratique, des tables telles que les tables TGH 05 - TGF 05 ou TH TF 00-02 décalée sont utilisées ;

- la probabilité de quitter l'entreprise (rotation du personnel, taux de *turnover*). Cet élément est fondé sur une étude statistique réalisée au sein de l'entreprise, ou à défaut sur des données du secteur d'activité ;
- 2. l'engagement en  $N$  correspond à une fonction linéaire de l'ancienneté à la date d'évaluation. C'est cette propriété qui procure à la PUCM, si les hypothèses sont vérifiées, l'avantage de reconnaître des coûts linéaires au fil des années.
- 3. le coût des services rendus correspond à l'incrément de droit lié aux services rendus sur une année supplémentaire. Il y a un lien évident avec la formule de calcul de l'engagement en  $N$  : le numérateur est incrémenté du prorata d'ancienneté d'une année supplémentaire. De plus, selon l'entreprise, cette valeur peut être ensuite capitalisée d'une année car elle s'exprime un an plus tard, c'est-à-dire dans l'exercice comptable  $N + 1$  ;
- 4. le coût des intérêts correspond à l'augmentation de l'engagement lié aux intérêts financiers. La formule 1.5, qui est utilisée en pratique, retranche à l'engagement les versements probables divisés par deux. Ceci est une simplification : l'hypothèse que les versements sont effectués en milieu d'année est faite et un développement limité en 0 à l'ordre 1 ( $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$  si  $x \approx 0$ ) est ensuite appliqué.

### 1.2.2 Construction d'une courbe des taux d'actualisation selon la norme IAS 19

Les paragraphes 83 et 86 de la norme IAS 19 précisent la démarche à adopter pour la construction du taux d'actualisation.

« Le taux à appliquer pour actualiser les obligations au titre des avantages postérieurs à l'emploi (qu'il s'agisse de régimes capitalisés ou non) doit être déterminé par référence aux taux de rendement, à la fin de la période de présentation de l'information financière, du marché des obligations d'entreprise de haute qualité. Dans le cas d'une monnaie pour laquelle il n'existe pas de marché large pour ce type d'obligations, il faut se référer aux taux de rendement (à la fin de la période de présentation de l'information financière) du marché des obligations d'État libellées dans cette monnaie. La monnaie et la durée de ces obligations d'entreprise ou de ces obligations d'État doivent correspondre à la monnaie et à la durée estimée des obligations au titre des avantages postérieurs à l'emploi. »

#### §83 IAS 19

Le taux d'actualisation doit donc, si le marché le permet, être déterminé à partir d'obligations d'entreprises de très bonne qualité. De plus, les maturités des obligations d'entreprises doivent correspondre aux maturités estimées des obligations au titre des avantages postérieurs à l'emploi. Si cela n'est pas le cas, il est possible de construire le taux d'actualisation à partir d'obligations d'États. Pour les grandes maturités, la courbe des taux d'actualisation construite dans ce mémoire sera fondée sur des obligations d'États.

En pratique, un taux d'actualisation unique (dit « équivalent ») est appliqué pour toutes les obligations du plan, c'est-à-dire pour chaque avantage individuel. Pour ce faire, l'actuaire calcule la durée du plan et applique un taux d'actualisation équivalent correspondant sur l'ensemble du plan.

### 1.3. CONTEXTE ÉCONOMIQUE ET CONSÉQUENCES SUR L'ANCIENNE MÉTHODE

---

En outre, la norme *IAS 19* précise le point suivant concernant la construction de la courbe des taux d'actualisation.

« Dans certains cas, il se peut qu'il n'existe pas de marché large des obligations à échéance suffisamment longue pour correspondre à l'échéance estimée de tous les versements de prestations. En pareil cas, l'entité utilise les taux d'intérêt actuels du marché correspondant à l'échéance appropriée pour actualiser les paiements à court terme et estime le taux d'actualisation pour les échéances plus lointaines par extrapolation des taux d'intérêt actuels du marché à l'aide de la courbe des taux. Il est peu probable que la valeur actualisée totale d'une obligation au titre des prestations définies soit particulièrement sensible au taux d'actualisation appliqué à la fraction des prestations payable au-delà des dates d'échéance les plus lointaines des obligations d'entreprise ou des obligations d'État. »

§86 *IAS 19*

Ainsi, s'il n'est pas possible de trouver des obligations ayant une échéance suffisamment longue, il est possible d'avoir recours à de l'extrapolation. Dans ce cas de figure, il est possible d'extrapoler des taux d'intérêts d'obligations d'entreprises de maturités courtes afin de construire des taux d'actualisation pour des maturités plus longues.

Dans chacun de ces deux paragraphes, aucune méthodologie précise n'est citée. C'est pour cette raison que ce mémoire proposera et comparera plusieurs méthodes de construction de la courbe des taux.

## 1.3 Contexte économique et conséquences sur l'ancienne méthode

### 1.3.1 Contexte économique

La volonté de proposer une nouvelle méthode de construction de la courbe des taux au sein du cabinet Deloitte France s'explique en grande partie par le contexte économique de taux bas. En effet, la tendance de l'évolution des taux de rendement actuariel des obligations du marché financier sont à la baisse. La norme *IAS 19* précise que la courbe des taux doit être fondée sur des obligations d'entreprises de haute qualité ainsi que dans certains cas sur des obligations d'États (cf. 1.2.2). La baisse des taux est générale et affecte donc les deux types d'obligations potentiellement utilisées dans la construction de la courbe des taux. Les graphiques ci-dessous illustrent bien cette tendance.

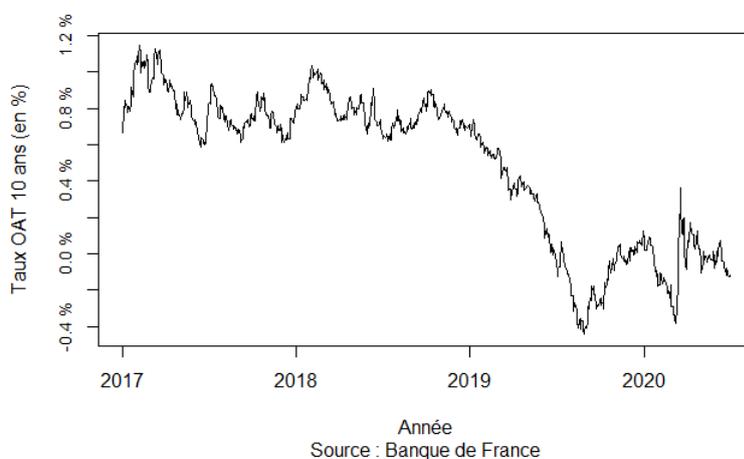
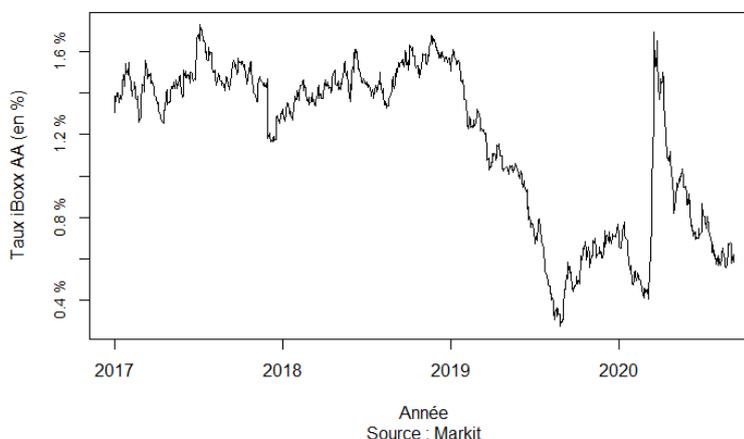


FIGURE 1.2 – Évolution des taux des OAT 10 ans de 2017 à 2020

Les taux de coupon des Obligations Assimilables du Trésor (OAT) de maturité 10 ans ont une tendance à la baisse. En pratique, les taux OAT sont utilisés dans la construction des courbes des taux d'actualisation des sociétés françaises. Elles y ont un poids important. Les OAT ne sont donc pas exhaustives mais constituent un bon élément pour résumer la conséquence de la baisse des taux d'États pour des sociétés françaises sur leurs engagements *IAS 19*. Par ailleurs, une augmentation très forte des taux est observable au cours du mois de mars 2020. Ceci s'explique par la crise de la Covid-19. Le panier *iBoxx € Corporates AA* s'est ensuite rééquilibré et les taux ont progressivement atteint un niveau proche de celui précédent la crise.

Il convient également d'étudier l'évolution des rendements des obligations d'entreprises, illustrée par le graphique ci-dessous.

FIGURE 1.3 – Évolution du taux *iBoxx € Corporates AA 10+*

De la même manière que pour le taux des OAT 10 ans, depuis 2019, le taux de l'*iBoxx € Corpo-*

### 1.3. CONTEXTE ÉCONOMIQUE ET CONSÉQUENCES SUR L'ANCIENNE MÉTHODE

---

rates AA 10+ a fortement baissé. Deloitte France utilisait historiquement le portefeuille de l'*iBoxx € Corporates AA 10+* pour construire sa courbe des taux. La forte baisse de ces taux a donc directement impacté leur référentiel de taux.

#### 1.3.2 Impact sur l'ancienne méthode

L'ancienne méthode de construction de la courbe des taux Deloitte France consistait en quatre principales étapes :

1. Construction de la courbe des taux fondée sur des obligations d'entreprises ;
2. Construction de la courbe des taux fondée sur des obligations d'États ;
3. Interpolation de Nelson-Siegel ;
4. Calcul des taux équivalents.

Ces différentes étapes seront développées dans le chapitre suivant, dans la mesure où l'ensemble des éléments théoriques requis auront été exposés. Cette section présentera les impacts du contexte économique sur le résultat obtenu par cette méthode. Elle exposera également plusieurs de ses limites.

Deux sources de données alimentent l'ancien outil de construction de la courbe des taux :

- des données fondées sur des obligations d'entreprise ;
- des données fondées sur des obligations d'États.

##### 1.3.2.1 Données fondées sur des obligations d'entreprise

La sélection des données d'entreprise correspondait au panel d'entreprises présent dans l'indice *iBoxx Corporate € AA*, soit plus de 200 entreprises. L'outil utilisait des taux synthétiques fournis par *Markit*. Ces taux correspondent aux taux de rendements actuariels obligataires moyens proposés par les entreprises de l'indice *iBoxx Corporates AA* en fonction de la maturité des obligations. Ils étaient les suivants :

- *iBoxx € Corporates AA 1-3* ;
- *iBoxx € Corporates AA 3-5* ;
- *iBoxx € Corporates AA 5-7* ;
- *iBoxx € Corporates AA 7-10* ;
- *iBoxx € Corporates AA 10+*.

Plusieurs éléments peuvent être ici critiqués. Premièrement, la courbe des taux d'entreprise est entièrement fondée sur cinq taux pour cinq maturités distinctes. Les données sont donc très limitées. Les cinq taux utilisés sont des moyennes arithmétiques. Fonder la construction d'une courbe des taux sur si peu d'éléments ne permet pas de capturer la forme de la courbe des taux de façon optimale.

De plus, d'un point de vue plus statistique, la courbe obtenue est critiquable dans la mesure où elle est fondée sur l'extrapolation d'une synthèse. Il serait plus convenable de construire la courbe

à partir de données individuelles. L'approche pourrait ainsi être améliorée en considérant des données d'entreprises non synthétiques et en considérant les obligations de chaque entreprise du portefeuille une à une.

Enfin, la conjoncture a directement un impact sur les taux d'entreprises et ainsi sur la courbe des taux d'entreprise obtenue. Les variations des différents taux *iBoxx € Corporate AA* pour les maturités citées sont observable dans le graphique ci-dessous. Les courbes ont été réalisées en joignant les points à l'aide de *splines* cubiques.

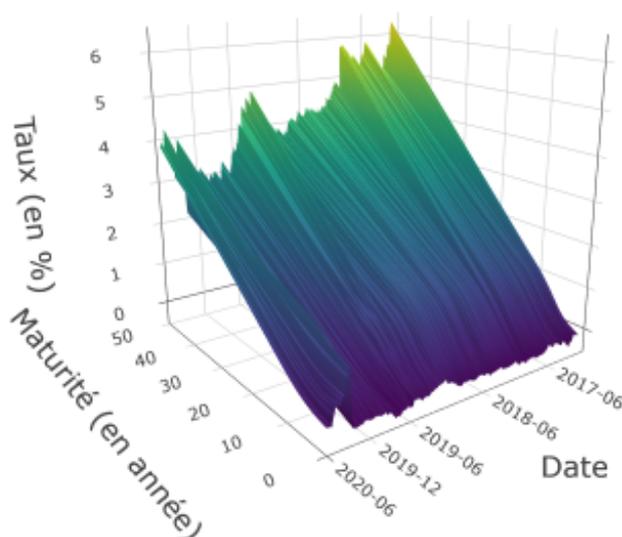


FIGURE 1.4 – Évolution du taux *iBoxx € Corporates AA* selon la maturité

Les taux affichés sur le graphique ci-dessus sont des interpolations de taux synthétiques. Les courbes des taux obtenues pour chacune des maturités présentées seraient donc différentes. Toutefois, cette figure illustre bien les évolutions de la courbe des taux à chacune de ces maturités. Depuis automne 2019, les taux ont fortement baissé. Ceci s'explique notamment par la politique de la Banque Centrale Européenne (taux de refinancement des banques commerciales faibles) et de la présence de nombreuses liquidités sur le marché européen.

### 1.3.2.2 Données fondées sur des obligations d'États

L'ancienne méthode avait recours à des données communiquées par la Banque Centrale Européenne (BCE). Les données récupérées correspondaient à la courbe des rendements obligataires par les pays de la zone euro notés AAA.

Les taux au 30 juin 2019 sont présentés par la figure 1.5. Ils y sont particulièrement bas, même à de grandes maturités. Les taux obligataires des pays de la zone euro notés AAA sont mécaniquement bas. En effet, ils sont comparables à des taux sans risque et sont en pratique utilisés en tant que tels.

### 1.3. CONTEXTE ÉCONOMIQUE ET CONSÉQUENCES SUR L'ANCIENNE MÉTHODE

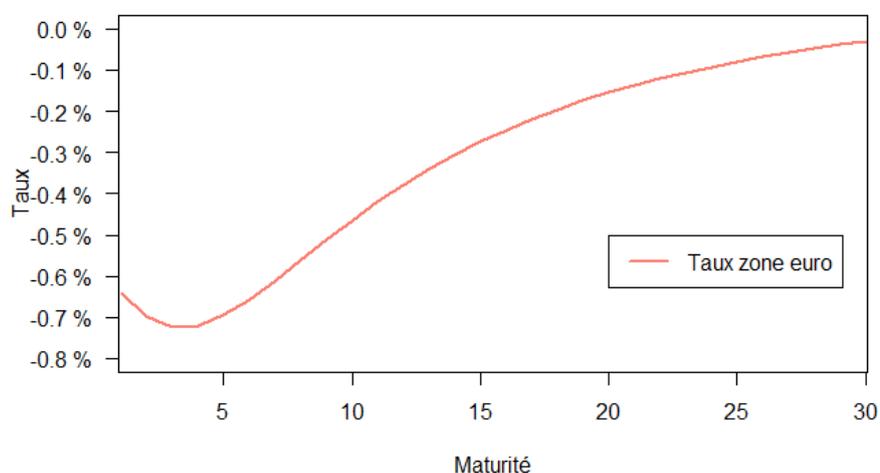


FIGURE 1.5 – Courbe des taux des pays de la zone euro notés AAA au 30 juin 2020 - BCE

Les taux fondés sur des obligations d'États sont historiquement bas (cf. 1.6). C'est une des motivations de la recherche d'une nouvelle méthode de construction de courbe des taux.

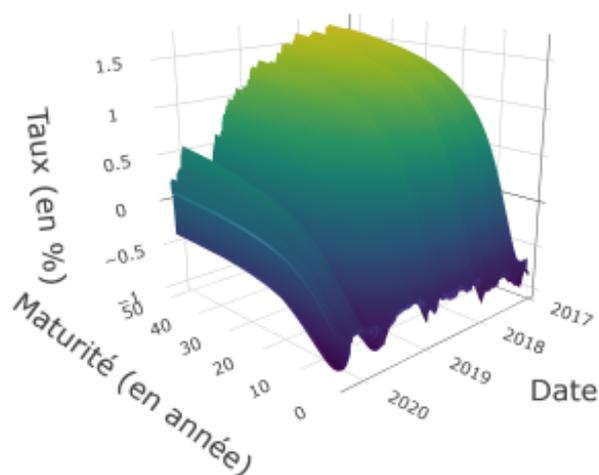


FIGURE 1.6 – Évolution de la courbe des rendements obligataires de la BCE jusqu'au 30/06/2020

Comme attendu, les évolutions des taux d'États sont très proches de celles des taux d'entreprises. Finalement, la nouvelle méthode de construction de la courbe des taux devra donc proposer une nouvelle approche tant au niveau des taux d'entreprises qu'au niveau des taux d'États tout en respectant le cadre de la norme *IAS 19* qui exige l'utilisation d'obligations de haute qualité.

## Chapitre 2

# Notions financières et ancienne méthode

### 2.1 Notions financières

#### 2.1.1 Obligation zéro-coupon

Les résultats de ce mémoire seront fondés sur des obligations zéro-coupon, qui serviront à l'ajustement des modèles utilisés. Il convient donc de définir ces instruments financiers.

**Définition 2.1.1. Obligation zéro-coupon**

Une obligation zéro-coupon (sans risque de défaut) de maturité  $T$  est un titre de créance garantissant le versement d'une unité monétaire en  $T$ . Son prix  $P(t, T)$  est défini de la manière suivante :

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}; \quad (2.1)$$

avec  $R(t, T)$  le taux de rendement actuariel à la date  $t$  de l'obligation zéro-coupon de maturité  $T$ .

Graphiquement, il est possible de représenter cet instrument financier avec le diagramme de flux ci-dessous.



FIGURE 2.1 – Diagramme de flux d'une obligation zéro-coupon

#### 2.1.2 Obligation à coupons

**Définition 2.1.2. Obligation à coupons**

Une obligation à coupons (ou couponnée) repose sur un principe similaire à celui des obligations

zéro-coupon. Les deux types d'obligations se distinguent par le fait qu'une obligation couponnée verse des coupons entre la date d'évaluation  $t$  et la date de maturité  $T$ .

Sachant cela, il est possible de définir le prix d'une obligation couponnée de la manière suivante :

$$O(t, T) = \sum_{i=1}^n NC\delta_i e^{-R(t, t_i)(t_i - t)} + Ne^{-R(t, T)(T - t)}; \quad (2.2)$$

avec :

- $t_i$  la date de versement du coupon  $i$  ;
- $t_n = T$  ;
- $t$  la date de calcul ;
- $T$  la date de maturité de l'obligation ;
- $N$  le nominal de l'obligation ;
- $C$  le taux de coupon annuel ;
- $\delta_i$  un coefficient fonction du temps séparant le versement du coupon  $i$  avec le coupon  $i - 1$ . Il permet d'obtenir le taux de coupon d'un versement précis. En pratique,  $\delta_i$  est généralement fixe pour tout  $i$ .

La seconde partie de l'équation correspond au prix d'une obligation zéro-coupon en  $t$  de maturité  $T$  de nominal  $N$ .

Dans cette formule, la convention de taux continus est utilisée. Ceci est une notation usuelle dans la littérature en finance, dans la mesure où le recours à la fonction exponentielle peut simplifier les calculs. Dans le cas particulier d'obligations à versement de coupons annuels, la convention de taux composés est préférable. En effet, ces versements sont bien effectués de manière discrète et non continue. Il est alors possible de réécrire le prix d'une obligation couponnée de la manière suivante :

$$O(t, T) = \sum_{i=1}^n \frac{NC\delta_i}{(1 + R(t, t_i))^{t_i - t}} + \frac{N}{(1 + R(t, T))^{T - t}}. \quad (2.3)$$

Graphiquement, il est possible de représenter cet instrument financier avec le diagramme de flux ci-dessous (en supposant  $\delta_i = \delta$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ).

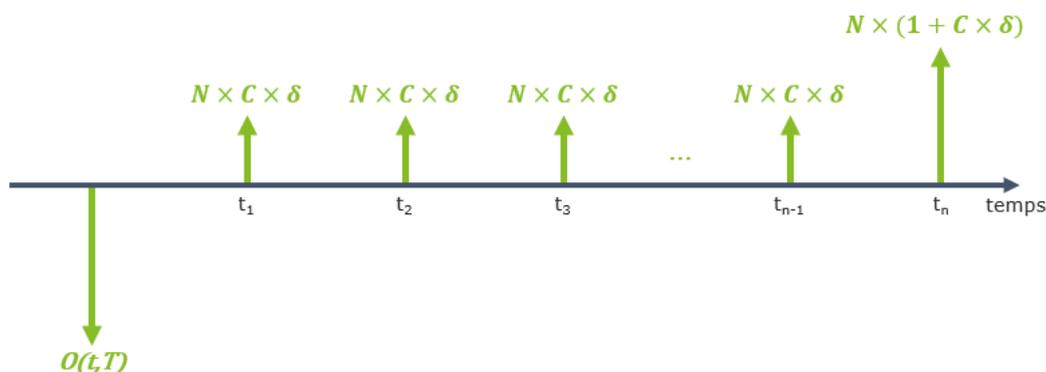


FIGURE 2.2 – Diagramme de flux d'une obligation à coupons

**Définition 2.1.3. Le coupon couru**

Le coupon couru d'une obligation correspond à la part du prochain coupon versé acquise.

À l'instant  $\frac{t_1 + t_2}{2}$ , 50 % du temps séparant la date de versement du précédent coupon et la date de versement du prochain coupon s'est écoulé. Le détenteur de l'obligation a donc, d'une certaine manière, déjà acquis 50 % du prochain coupon versé.

Cette situation est décrite dans le schéma suivant :

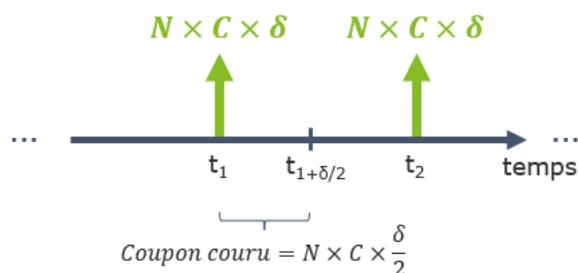


FIGURE 2.3 – Coupon couru d'une obligation

Il est donc possible de considérer que 50 % du prochain coupon versé a été acquis. Cet exemple peut être généralisé. Le coupon couru peut être calculé à toute date présente entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$ .

En pratique, afin d'éviter les opportunités d'arbitrage liées au fait que les coupons sont versés de manière discrète, les obligations vont être échangées en réintégrant la valeur du coupon couru (*dirty price*). Pourtant, les marchés financiers communiquent le plus souvent le prix d'obligation "pied de coupon" (*clean price*) afin de pouvoir comparer plus facilement les obligations. Les modèles utilisés dans ce mémoire se fonderont sur le prix d'obligations avec intégration du coupon couru. Il sera ainsi nécessaire de s'assurer de la bonne conformité des données utilisées.

**2.1.3 Le taux spot**

Ce mémoire présente plusieurs méthodes de modélisation de courbes des taux d'actualisation. Ces courbes sont composées d'une multitude de taux dits « spot » de différentes maturités. Il convient donc de définir la notion de taux *spot*.

**Définition 2.1.4. Le taux spot**

Le taux *spot*,  $R(t, T)$  est le taux de rendement actuariel en  $t$  d'une obligation zéro-coupon de maturité  $T$ . L'équation 2.1 implique que :

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t}. \quad (2.4)$$

Il est également possible de définir la limite du taux *spot* lorsque l'intervalle de temps considéré tend vers zéro.

**Définition 2.1.5. Le taux spot instantané**

Le taux *spot* instantané, ou taux *spot* infinitésimal  $r_t$  est le taux de rendement actuariel en  $t$  d'une

obligation zéro-coupon de maturité  $T$  quand  $T \rightarrow t$  :

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T). \quad (2.5)$$

### Définition 2.1.6. Le taux de rendement actuariel

Le taux de rendement actuariel en  $t$  est défini par une relation mathématique. Il correspond au taux équivalent (unique) permettant d'égaliser la valeur en  $t$  d'un titre financier avec son prix. Il s'agit du rendement de l'obligation si elle était conservée jusqu'à sa maturité. En reprenant la définition du prix d'une obligation couponnée précédemment citée et sous la convention de taux composés annuellement, il en découle que  $YTM$  (*Yield To Maturity*) est tel que :

$$O(t, T) = \sum_{i=1}^n F_i \times \frac{1}{(1 + YTM)^{t_i - t}}; \quad (2.6)$$

avec :

- $F_i$  le flux versé en  $i$ ;
- $t_i$  la date de versement du  $i$ -ième flux;
- $YTM$  est le taux de rendement actuariel.

Le taux  $YTM(t, t_i)$  varie selon la convention de taux utilisée. En finance, la convention continue est souvent utilisée. Sous cette convention,  $YTM$  est tel que :

$$O(t, T) = \sum_{i=1}^n F_i e^{-YTM(t_i - t)}. \quad (2.7)$$

Dans le cas d'une obligation zéro-coupon de nominal égal à une unité monétaire et de maturité  $T$ , les équations 2.7 et 2.1 sont bien équivalentes.

### 2.1.4 Calcul du prix d'une obligation zéro-coupon par la méthode du *bootstrap*

En pratique, les obligations zéro-coupon sont peu présentes sur les marchés financiers. Pourtant, la plupart des modèles de taux sont fondés sur ces données. À partir d'une obligation à coupon, il est possible de déduire le prix d'obligations zéro-coupon. C'est ce en quoi consiste la méthode du *bootstrap* [Portrait et Poncet, 2014].

La plupart des obligations présentes sur les marchés financiers ont des détachements de coupons annuels. La méthode du *bootstrap* sera ainsi présentée avec la convention de calcul des intérêts composés annuellement. Soit une obligation de nominal 1, de maturité  $T$  et ayant des versements de coupons annuels. Le prix en  $t$  d'une telle obligation peut être représenté par une somme d'obligations zéro-coupon de nominal 1 de la manière suivante :

$$O(t, T) = C \sum_{i=1}^T P(t, t_i) + P(t, T). \quad (2.8)$$

De plus, la formule 2.6 implique que le taux de rendement actuariel d'une telle obligation est défini de la manière suivante :

$$O(t, T) = \sum_{i=1}^T \frac{C}{(1 + YTM)^{t_i - t}} + \frac{1}{(1 + YTM)^{T - t}}. \quad (2.9)$$

Plusieurs approches sont possibles dans la méthode du *bootstrap*. Dans ce mémoire, l'hypothèse suivante sera considérée :

$$C = YTM. \quad (2.10)$$

Cette hypothèse implique que le prix en  $t$  de l'obligation décrite précédemment est égal à une unité monétaire. En effet, en reprenant l'équation 2.9, il est possible d'obtenir la relation suivante :

$$\begin{aligned} O(t, T) &= \sum_{i=1}^T \frac{YTM}{(1+YTM)^i} + \frac{1}{(1+YTM)^T} \\ &= YTM \times \left( \frac{1}{1+YTM} \times \frac{1 - \frac{1}{(1+YTM)^T}}{1 - \frac{1}{1+YTM}} \right) + \frac{1}{(1+YTM)^T} \\ &= YTM \times \frac{1 - \frac{1}{(1+YTM)^T}}{YTM} + \frac{1}{(1+YTM)^T} \\ O(t, T) &= 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ainsi, en combinant les équations 2.8 et 2.11, il est possible d'obtenir la relation suivante :

$$1 = YTM \sum_{i=1}^T P(t, i) + P(t, T) \quad (2.12)$$

$$\Leftrightarrow P(t, T) = \frac{1 - YTM_T \sum_{i=1}^{T-1} P(t, i)}{1 - YTM_T}; \quad (2.13)$$

avec  $YTM_T$  le taux de rendement actuariel d'une obligation de maturité  $T$ .

Or, d'après l'équation 2.12 :

$$P(t, T) = \frac{1 - \frac{YTM_T}{YTM_{T-1}} (1 - P(t, T-1))}{1 - YTM_T} \quad (2.14)$$

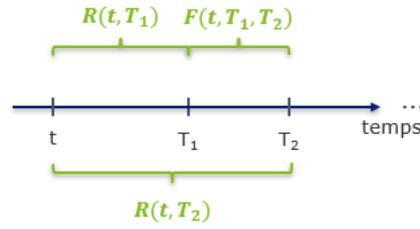
Cette dernière équation permet, par récurrence, de calculer le prix théorique d'obligations zéro-coupon à partir d'une obligation à coupons. En effet, la première itération est possible car l'hypothèse que le taux de rendement actuariel de maturité 1 respecte la relation  $P(t, 1) = e^{-YTM_1}$  est appliquée.

### 2.1.5 Le taux *forward*

Le taux *forward* en  $t$  peut être perçu comme une généralisation du taux *spot*. Il établit un lien entre deux maturités  $T_1$  et  $T_2$  avec  $T_2 \geq T_1 \geq t$  et non plus entre  $t$  et  $T$  avec  $T \geq t$ .

#### Définition 2.1.7. Le taux *forward*

Le taux *forward*  $F(t, T_1, T_2)$  est le taux d'intérêt en  $t$  d'un emprunt entre  $T_1$  et  $T_2$ . Il est possible de le représenter schématiquement à travers le schéma ci-dessous :


 FIGURE 2.4 – Schéma du taux *forward*

Ainsi, en absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), il est possible de déduire de ce schéma l'équation définissant un tel taux :

- en intérêts composés annuellement :

$$\begin{aligned} (1 + R(t, T_2))^{T_2-t} &= (1 + R(t, T_1))^{T_1-t} (1 + F(t, T_1, T_2))^{T_2-T_1} \\ \implies F(t, T_1, T_2) &= \left( \frac{(1 + R(t, T_2))^{T_2-t}}{(1 + R(t, T_1))^{T_1-t}} \right)^{\frac{1}{T_2-T_1}} - 1 ; \end{aligned} \quad (2.15)$$

- en intérêts continus :

$$\begin{aligned} e^{-(T_2-t)R(t, T_2)} &= e^{-(T_1-t)R(t, T_1)} \times e^{-(T_2-T_1)F(t, T_1, T_2)} \\ \implies F(t, T_1, T_2) &= \frac{1}{T_2 - T_1} (R(t, T_2)(T_2 - t) - R(t, T_1)(T_1 - t)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\implies F(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \ln \left( \frac{P(t, T_1)}{P(t, T_2)} \right). \quad (2.17)$$

Il est également possible de définir la notion de taux *forward* instantané.

#### Définition 2.1.8. Le taux *forward* instantané

Le taux *forward* instantané est le taux d'intérêt en \$t\$ d'un emprunt entre \$T\$ et \$T'\$ (\$T' \geq T\$) lorsque \$T' \rightarrow T\$ :

$$f(t, T) = \lim_{T' \rightarrow T} F(t, T, T'). \quad (2.18)$$

Ceci implique que :

$$\begin{aligned} f(t, T) &= \lim_{T' \rightarrow T} \frac{R(t, T')(T' - t) - R(t, T)(T - t)}{T' - T} \\ &= \frac{\partial}{\partial T} (R(t, T)(T - t)). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Il a déjà été dit que la structure par terme des obligations zéro-coupon pouvait être représentée sous la forme de prix d'obligations zéro-coupon mais aussi sous la forme de taux *spot*. Il est également possible d'exprimer cette notion à partir de taux *forward* instantanés [DIEBOLD et LI, 2006]. Ceci peut être déduit de l'équation 2.4 :

$$\begin{aligned}
 R(t, T) &= -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t} \\
 \Leftrightarrow R(t, T)(T - t) &= -\ln P(t, T) \text{ par dérivation} \\
 \Leftrightarrow f(t, T) &= -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T) \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, x) dx} \tag{2.21}$$

Ainsi, prix d'une obligation zéro-coupon et taux *forward* sont directement liés.

La courbe des taux *spot* peut être exprimée à partir des taux *forward* instantanés :

$$\begin{aligned}
 f(t, T) &= -\frac{\partial}{\partial T} (\ln P(t, T)) \\
 \Leftrightarrow f(t, T) &= \frac{\partial}{\partial T} (R(t, T)(T - t)) \\
 \Leftrightarrow R(t, T) &= \frac{1}{T - t} \int_t^T f(t, x) dx \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Il est équivalent d'exprimer la structure par terme des obligations zéro-coupon sous la forme de :

- prix des obligations zéro-coupon ;
- taux *spot* ;
- taux *forward*.

Ce mémoire présentera des résultats sur la forme de taux *spot*, car ce format permet plus aisément d'actualiser des flux d'un plan d'avantages du personnel. Il est couramment utilisé en actuariat pour actualiser des flux.

## 2.1.6 Les options incorporées

### Définition 2.1.9. Obligation à option incorporée

Une obligation est dite à option incorporée lorsqu'il n'est pas possible de la séparer d'une option. Les options incorporées peuvent prendre diverses formes : *callable*, *puttable*, *convertible*... Toutefois, les obligations à options de rachat anticipé (*callable*) sont de loin les plus présentes sur le marché.

La littérature propose plusieurs méthodes d'évaluation des options incorporées. Ces méthodes sont complexes et se fondent sur un ensemble d'hypothèses. Ces modèles d'évaluation ne seront pas présentés dans ce mémoire. Néanmoins, plusieurs des modèles de construction de la courbe des taux présentés tâcheront de tenir compte du caractère *callable* de certaines obligations à l'aide d'une approche simplificatrice (cf. 3.4).

### 2.1.7 Calcul du taux équivalent

Lors d'une évaluation actuarielle à l'aide d'une courbe des taux, chaque flux futur est actualisé avec un taux de même maturité. Il est possible de déduire un taux unique, permettant d'obtenir le même engagement qu'avec l'application de la courbe des taux. Ce taux est usuellement appelé taux équivalent. Ainsi, une fois les engagements au titre des prestations futures de chaque bénéficiaire d'un plan déterminés, il est possible de calculer un taux équivalent.

Chaque prestation future peut être assimilée à une obligation. L'obligation peut alors être à coupons ou zéro-coupon, selon le type de prestation considéré. Dans le cadre de ce mémoire, seul le cas d'un versement d'une prestation unique sera étudié. Ainsi, les prestations futures seront assimilées à des obligations zéro-coupon. Sous ces conditions, l'ensemble de l'engagement lié à un régime d'avantages du personnel peut être formulé de la manière suivante :

$$\sum_{j=1}^N \frac{K}{(1 + R(0, M_j))^{M_j}} = \sum_{j=1}^N \frac{K}{(1 + R^*)^{M_j}}, \quad (2.23)$$

avec :

- $N$  le nombre de bénéficiaires du plan ;
- $M_j$  le nombre d'années séparant la date d'évaluation et la date de versement de la prestation du  $j$ -ième bénéficiaire ;
- $K$  le montant de la prestation versée ;
- $R(0, M_j)$  le taux d'actualisation de maturité  $M_j$  ;
- $R^*$  le taux équivalent.

## 2.2 La méthode de Nelson-Siegel

Présenté en 1987 dans le *Journal of Science*, le modèle de Nelson-Siegel constitue l'un des modèles de taux non stochastiques les plus utilisés [Nelson et Siegel, 1987]. Ce modèle se situe dans la catégorie des méthodes fondées sur des classes de fonctions spécifiques. Il constitue également le modèle précédemment utilisé au sein de Deloitte France. Il occupera de ce fait un rôle important dans ce mémoire.

### 2.2.1 Modélisation

La modèle de Nelson-Siegel suppose que le taux *forward* instantané  $f(t, T)$  est solution d'une équation différentielle ordinaire du second ordre dans le cas d'une racine double [RONCALLI, 1998]. Le taux *forward* instantané en  $f(t, T)$  est donné par l'équation suivante :

$$f(t, T) = \mu_1 + \mu_2 \exp\left(-\frac{T-t}{\tau}\right) + \mu_3 \frac{T-t}{\tau} \exp\left(-\frac{T-t}{\tau}\right). \quad (2.24)$$

Dans l'article original, Nelson et Siegel considéraient la courbe des taux comme vue à l'instant  $t = 0$ , c'est également l'instant de référence de ce mémoire. Par la suite,  $t$  ne sera plus un paramètre et sera fixé à  $t = 0$ . L'équation 2.24 peut donc être réécrite de la manière suivante :

$$f_{t=0}(T) = \mu_1 + \mu_2 \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) + \mu_3 \frac{T}{\tau} \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right). \quad (2.25)$$

Il est possible d'obtenir le taux *spot* correspondant, à l'aide de la formule 2.22. D'où :

$$R_{t=0}(T) = \mu_1 + \mu_2 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)}{\frac{T}{\tau}} \right] + \mu_3 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)}{\frac{T}{\tau}} - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) \right]. \quad (2.26)$$

Le modèle de Nelson-Siegel dispose donc de quatre paramètres :

- $\mu_1$  ;
- $\mu_2$  ;
- $\mu_3$  ;
- $\tau$ .

Plusieurs propriétés notables peuvent être déduites de l'équation 2.26 en étudiant les valeurs de  $R_{t=0}(T)$  quand  $T$  prend certaines valeurs spécifiques.

Quand  $T = 0$  :

$$\lim_{T \rightarrow 0} R_{t=0}(T) = \lim_{T \rightarrow 0} \mu_1 + \mu_2 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)}{\frac{T}{\tau}} \right] + \mu_3 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)}{\frac{T}{\tau}} - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) \right];$$

or, comme :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \left(1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)}{x} = 1 \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow 0} o(x^4) = 0;$$

et puisque  $R_t(T)$  est continue, l'équation devient :

$$\lim_{T \rightarrow 0} R_{t=0}(T) = R_{t=0}(0) = \mu_1 + \mu_2. \quad (2.27)$$

Quand  $T \rightarrow +\infty$  :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R_{t=0}(T) = \mu_1. \quad (2.28)$$

Ces propriétés permettent plusieurs interprétations économiques qui seront exposées dans la sous-section suivante.

### 2.2.2 Interprétation des paramètres du modèle

Une des raisons justifiant la popularité du modèle de Nelson-Siegel est le sens qu'il attribue à ses paramètres. Deux approches seront considérées afin de mettre en lumière le sens de ces paramètres :

- une approche par les taux *forward* instantanés ;
- une approche par les taux *spot*.

### 2.2.2.1 Impact des paramètres sur les taux *forward* instantanés

L'équation 2.25 met en évidence trois composantes, fonctions de  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ ,  $\tau$  et de  $T$ . Il est donc possible de définir trois fonctions distinctes, qu'il convient d'étudier afin de mieux comprendre l'impact des paramètres du modèle sur le taux *forward* instantané. Les rôles de  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  et  $\mu_3$  seront étudiés et  $\tau$  sera fixé. Dans le cadre des taux *forward* instantanés, les fonctions suivantes vont être étudiées :

- $a(T) = 1$  ;
- $b(T) = \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$  ;
- $c(T) = \frac{T}{\tau} \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$ .

Ainsi, l'équation 2.25 peut se réécrire de la manière suivante :

$$f_{t=0}(T) = \mu_1 a(T) + \mu_2 b(T) + \mu_3 c(T). \quad (2.29)$$

Ainsi, si  $\tau = 1$ , il est possible d'étudier les évolutions de ces fonctions en fonction de  $T$ .

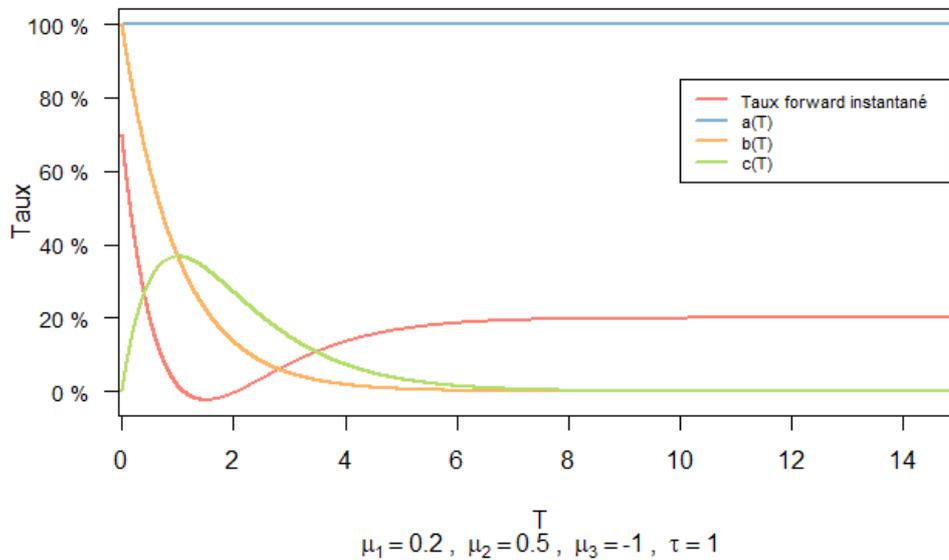


FIGURE 2.5 – Impact des paramètres sur les taux *forward* instantanés du modèle de Nelson-Siegel

Ce graphique a permis à Nelson et Siegel de justifier leur interprétation des paramètres de leur modèle. Les trois composantes du modèle ont une influence à des horizons temporels différents. En effet :

- $\mu_1$  : la fonction  $a(T)$  est dite de « long terme ». Son rôle est particulièrement important dans cet horizon. Ce rôle est mis en évidence par la propriété asymptotique donnée par l'équation 2.28.

- $\mu_2$  : la fonction  $b(T)$  est dite de « court terme ». Comme l'indique le graphique 2.5, son influence sur les taux *forward* prédits est particulièrement importante pour les premières maturités de taux. Ce rôle s'efface ensuite à mesure que l'horizon temporel augmente.
- $\mu_3$  : la fonction  $c(T)$  est dite de « moyen terme ». Ses valeurs sont en effet très faibles pour les premières maturités et elles décroissent rapidement pour tendre vers zéro à mesure que l'horizon temporel augmente.

Il convient maintenant de présenter le rôle du paramètre  $\tau$ . Pour cela, les paramètres  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  et  $\mu_3$  seront fixés afin de pouvoir observer les évolutions des courbes des taux *forward* en fonction de  $\tau$ . Deux vecteurs de paramètres vont être considérés pour  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  et  $\mu_3$  :

$$P_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix}; \quad (2.30)$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,5 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Graphiquement, les évolutions de la courbe des taux *forward* en fonction de  $\tau$  sont observables dans les figures 2.6 et 2.7.

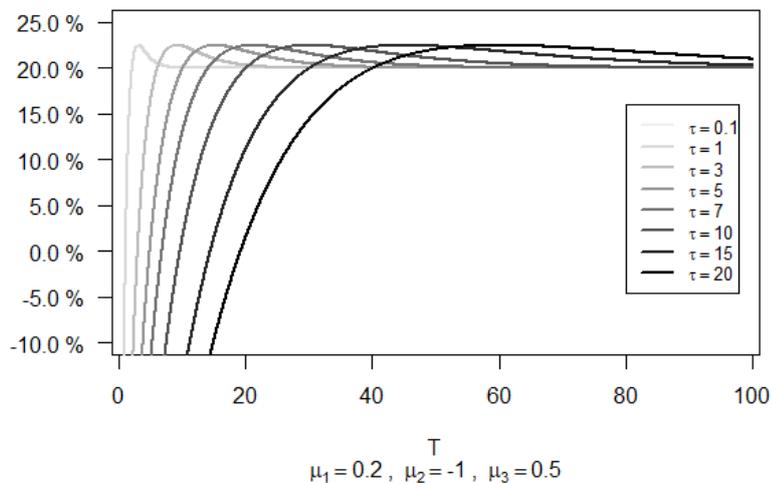


FIGURE 2.6 – Évolution du taux *forward* en fonction de  $\tau$  avec le vecteur de paramètre  $P_1$

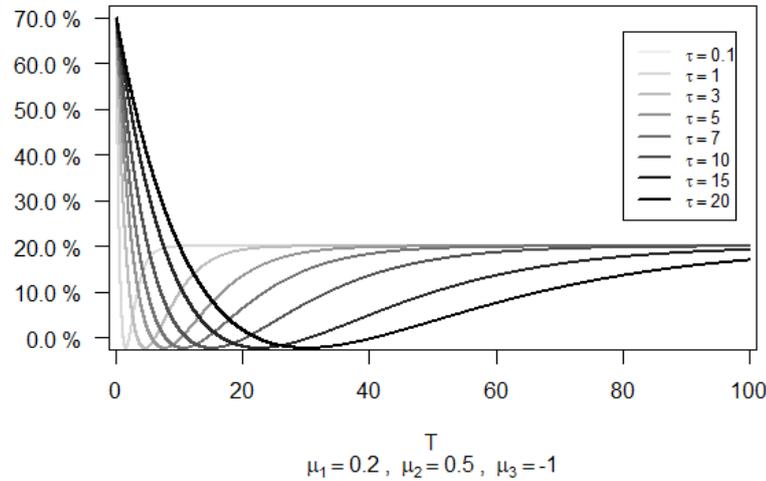


FIGURE 2.7 – Évolution du taux *forward* en fonction de  $\tau$  avec le vecteur de paramètre  $P_2$

Il est possible de déduire plusieurs éléments d'interprétation de ces deux graphiques :

- le paramètre  $\tau$  a une influence sur la courbure de la courbe des taux. Plus  $\tau$  est élevé, plus la courbe aura tendance à changer de sens de variation tardivement ;
- à mesure que  $\tau$  augmente, les variations de taux semblent être de plus en plus stables. Plus  $\tau$  est élevé, plus la courbe va être régulière et voir son changement de variation opérer de manière plus lente.

### 2.2.2.2 Impact des paramètres sur les taux *spot*

Les taux *spot* étant définis comme des moyennes continues des taux *forward*, leurs évolutions selon les variations des paramètres devraient être proches de ce qui a été vu précédemment. Il convient toutefois de vérifier cette anticipation. Comme précédemment, l'étude se fera en deux temps :

- étude des variations liées à  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  ;
- étude des variations liées à  $\tau$ .

Soit les trois composantes du taux *spot* dans le modèle de Nelson-Siegel :

- $a(T) = 1$  ;
- $b(T) = \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)}{\frac{T}{\tau}}$  ;
- $c(T) = \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)}{\frac{T}{\tau}} - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$ .

Ainsi, l'équation 2.26 peut se réécrire de la manière suivante :

$$f_{t=0}(T) = \mu_1 a(T) + \mu_2 b(T) + \mu_3 c(T). \quad (2.32)$$

Si  $\tau = 1$

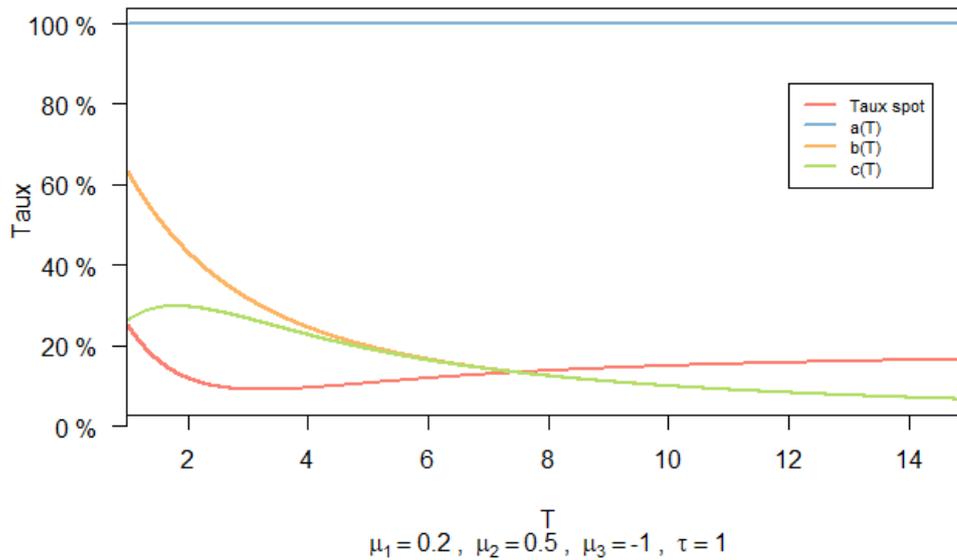


FIGURE 2.8 – Impact des paramètres sur les taux *spot* du modèle de Nelson-Siegel

De la même manière que précédemment, les fonctions  $a$ ,  $b$ ,  $c$  semblent jouer des rôles dans des horizons temporels différents :

- $a$  est la fonction de long terme. Elle est strictement égale à la fonction de long terme du taux *forward* instantané ;
- $b$  et  $c$  interviennent à court et à moyen terme. Pour tout  $T$  réel positif, l'inégalité  $b(T) \geq c(T)$  est vérifiée. De plus,  $b(T)$  est monotone alors que  $c(T)$  ne l'est pas. Cette propriété de  $b(T)$  permet à la courbe des taux *spot* d'être plus flexible pour les premières maturités.

Pour étudier l'influence de  $\tau$  sur la courbe des taux *spot*, les vecteurs de paramètres  $P_1$  et  $P_2$  précédemment utilisés seront réutilisés (cf. équations 2.30 et 2.31). Les évolutions des courbes des taux *spot* en fonction de  $\tau$  sont observables dans les figures 2.9 et 2.10.

## 2.3. PRÉSENTATION DE L'ANCIENNE MÉTHODE DE CONSTRUCTION DE LA COURBE DES TAUX

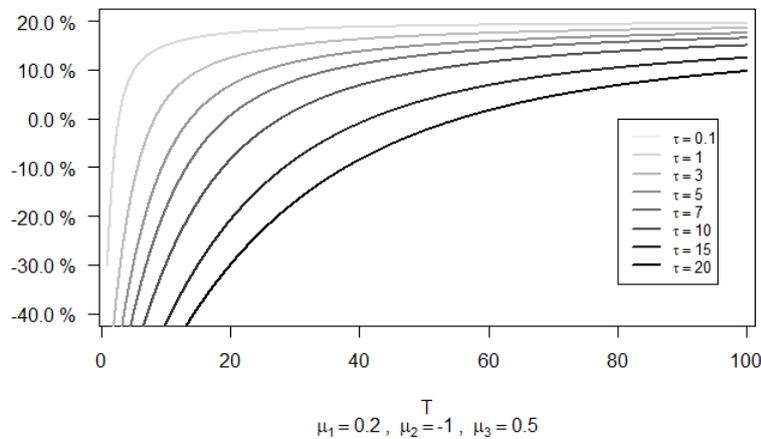


FIGURE 2.9 – Évolution du taux *spot* en fonction de  $\tau$  avec le vecteur de paramètre  $P_1$

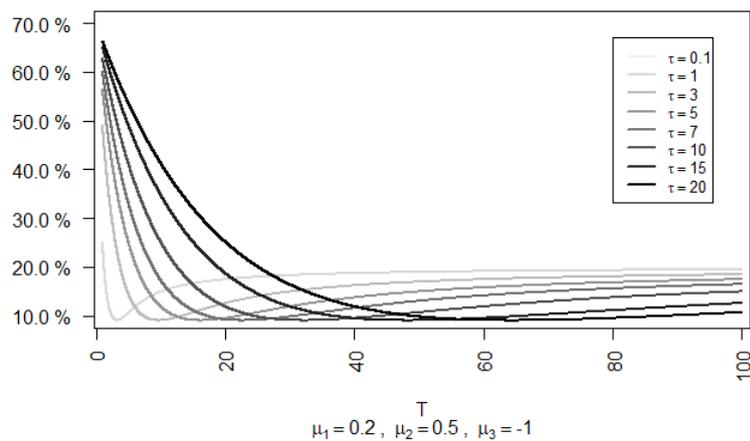


FIGURE 2.10 – Évolution du taux *spot* en fonction de  $\tau$  avec le vecteur de paramètre  $P_2$

Ces deux derniers graphiques mettent en évidence le fait que  $\tau$  semble influencer les taux *spot* de la même manière qu'il influence les taux *forward* instantanés.

### 2.3 Présentation de l'ancienne méthode de construction de la courbe des taux

À ce stade, l'ensemble des éléments théoriques nécessaires à la bonne compréhension de l'ancienne méthode de construction de la courbe des taux a été présenté. Cette section sera dédiée à la présentation de cette ancienne méthode. Il sera alors possible de mieux appréhender ses limites et ainsi de justifier la recherche d'une nouvelle méthode.

La section 1.3 a présenté les données servant à la construction de la courbe des taux avec l'ancienne méthode de Deloitte France. Maintenant que les éléments théoriques utilisés ont été présentés, il convient d'expliquer la méthode anciennement mise en place.

Pour rappel, les quatre principales étapes étaient les suivantes :

1. Construction de la courbe des taux d'entreprises ;
2. Construction de la courbe des taux d'États ;
3. Interpolation de Nelson-Siegel ;
4. Calcul des taux équivalents.

Afin de pouvoir comparer les méthodes entre elles et parce qu'il s'agit d'une date importante en comptabilité, les éléments considérés et les taux calculés dans cette section dateront du 30 juin 2020. L'ensemble des calculs et des résultats présentés dans ce mémoire dateront également du 30 juin 2020.

L'outil utilisé pour la construction de la courbe des taux à l'aide de l'ancienne méthode a été réalisé à l'aide du logiciel Excel.

### 2.3.1 Construction de la courbe des taux d'entreprises

Une interpolation par *splines* cubiques était réalisée sur les cinq taux synthétiques fournis par *Markit* (cf. 2.1).

| Maturité | Taux iBoxx € Corporates AA | Nom de l'indice            |
|----------|----------------------------|----------------------------|
| 2,0 ans  | 0,04 %                     | iBoxx € Corporates AA 1-3  |
| 3,9 ans  | 0,07 %                     | iBoxx € Corporates AA 3-5  |
| 6,0 ans  | 0,17 %                     | iBoxx € Corporates AA 5-7  |
| 8,3 ans  | 0,30 %                     | iBoxx € Corporates AA 7-10 |
| 13,7 ans | 0,74 %                     | iBoxx € Corporates AA 10+  |

TABLE 2.1 – Taux synthétiques iBoxx € AA au 30/06/2020

Le choix d'avoir recours à des *splines* cubiques s'est justifié par le fait que :

- cette méthode permet à l'interpolation de passer par chacun des points entrés en paramètre ;
- le résultat obtenu est une courbe lisse et relativement stable dans ses variations.

Ainsi, la courbe des taux d'entreprises, une fois interpolée par *splines* cubiques, était telle qu'il est possible de la voir dans la figure 2.11 ci-dessous.

## 2.3. PRÉSENTATION DE L'ANCIENNE MÉTHODE DE CONSTRUCTION DE LA COURBE DES TAUX

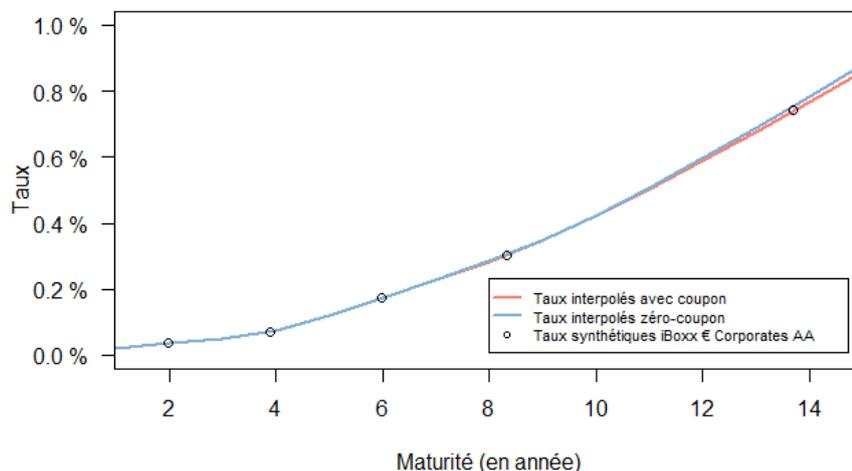


FIGURE 2.11 – Interpolation des taux synthétiques *iBoxx € Corporates AA* au 30/06/2020

Les taux zéro-coupon ont été calculés à l'aide de la méthode du *bootstrap* présentée dans la sous-section 2.1.4. L'écart entre taux zéro-coupon et taux avec coupon augmente avec la maturité. Il reste toutefois très faible, même pour la quinzième maturité.

### 2.3.2 Construction de la courbe des taux d'États

Pour déterminer la courbe des taux d'États, il a été décidé de retenir une courbe proposée par la BCE. Cette dernière est fondée sur les obligations d'États de la zone euro notées AAA. Cette courbe n'était donc pas calculée au sein de Deloitte France. Sa construction se fonde sur un modèle qui sera présenté dans ce mémoire : le modèle de Svensson (cf. 3.2.1). La courbe proposée par la BCE au 30/06/2020 est observable dans la figure 1.5.

### 2.3.3 Accrochage des deux courbes et ajustement de la fonction de Nelson-Siegel

La norme *IAS 19* précise que lorsque le marché n'est plus suffisamment large pour une échéance relativement longue, il est possible de construire la courbe des taux par extrapolation. En d'autres termes, si la quantité d'obligations pour une maturité donnée est faible, il faut envisager d'avoir recours à l'extrapolation.

Pour l'ancienne méthode, il a été décidé de déterminer la date du passage à l'extrapolation non pas sur la base de la quantité d'obligations disponible pour une maturité donnée mais simplement en retenant l'arrondi supérieur de la plus grande maturité des obligations synthétiques fournies par *Markit*. Cette maturité reste toutefois une approximation de la date qui aurait été choisie en considérant l'ensemble des obligations.

Ensuite, un *spread* constant était calculé. Il était déterminé sur la base de l'écart entre les deux courbes des taux à la date obtenue précédemment. L'objectif était de pouvoir "accrocher" la courbe des taux d'États à la courbe des taux d'entreprises en y appliquant ce *spread* constant.

Enfin, la fonction de Nelson-Siegel était ajustée sur cette courbe afin de pouvoir produire des taux à chaque maturité et d'en déduire plusieurs propriétés économiques (ie. le taux long-terme...) et surtout de lisser la courbe. Cette application de la fonction de Nelson-Siegel ne suit pas son objectif. Elle est, en toute théorie, censée être utilisée sur un portefeuille d'obligations afin d'en déduire une tendance de taux générale. Ici, cette fonction est appliquée d'une part sur cinq points interpolés (ce qui est très faible) et sur une courbe des taux correspondant à un autre modèle de taux. Ceci constitue une importante limite à l'ancienne méthodologie et c'est une des raisons pour lesquelles ce mémoire tâche d'en déterminer une nouvelle.

La courbe des taux finalement obtenue est observable dans le graphique 2.12. L'ensemble des valeurs est disponible en annexe C.

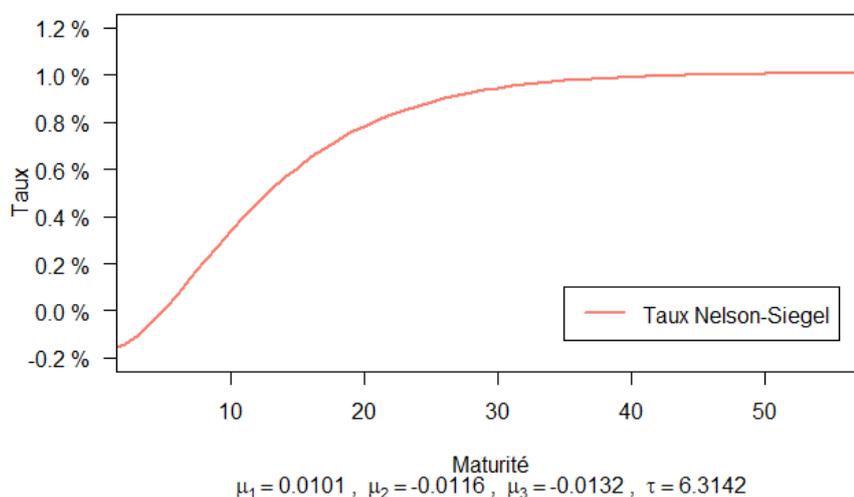


FIGURE 2.12 – Courbe des taux déterminée selon l'ancienne méthode au 30/06/2020

## Chapitre 3

# Production de la courbe des taux

Ce chapitre a pour objectif de proposer une nouvelle courbe des taux à retenir pour les évaluations actuarielles au 30 juin 2020. Il commencera par présenter les nouvelles méthodes envisagées. Il comparera ensuite les différentes méthodes mises en place afin de construire la nouvelle courbe des taux de Deloitte France. Ces méthodes seront comparées et le choix effectué sera justifié à l'aide d'indicateurs de la qualité de l'ajustement.

### 3.1 Présentation des méthodes

La sous-section 1.1.2 a présenté une classification des méthodes d'estimation de la courbe des taux. Ce mémoire tâchera d'implémenter des modèles appartenant à deux des trois types de méthodes de construction de la courbe des taux. Ainsi, il proposera la méthode de Nelson-Siegel (1987) et ses extensions (ie. Svensson et Björk & Christensen) qui sont des méthodes fondées sur des classes de fonctions spécifiques. Il exposera ensuite la méthode de Vasicek et Fong (1982) qui est une méthode fondée sur des *splines*.

La méthode de Nelson-Siegel ayant déjà été présentée en section 2.2, ce chapitre ne présentera que ses extensions.

### 3.2 Extensions du modèle de Nelson-Siegel

Les modèles présentés dans cette section constituent des modèles fondés sur celui de Nelson-Siegel. Ils proposent des modélisations du taux *spot* permettant une meilleure flexibilité de la courbe des taux tout en conservant le principal avantage de la méthode de Nelson-Siegel : l'interprétation économique de ses paramètres.

### 3.2.1 La méthode de Svensson (1994)

#### 3.2.1.1 Présentation du modèle

Le modèle de Svensson reprend la formule du modèle de Nelson-Siegel en y ajoutant un quatrième terme [SVENSSON, 1994] :

$$\mu_4 \left( \frac{T}{\tau_2} \right) \exp \left( -\frac{T}{\tau_2} \right). \quad (3.1)$$

Deux paramètres apparaissent :

- $\mu_4$  ;
- $\tau_2$  : un second paramètre de forme avec  $\tau_2 > 0$ .

Ainsi, la formule du taux *forward* instantané est la suivante :

$$f_{t=0}(T) = \mu_1 + \mu_2 \exp \left( -\frac{T}{\tau_1} \right) + \mu_3 \left( \frac{T}{\tau_1} \right) \exp \left( -\frac{T}{\tau_1} \right) + \mu_4 \left( \frac{T}{\tau_2} \right) \exp \left( -\frac{T}{\tau_2} \right). \quad (3.2)$$

En appliquant la formule 2.22 à l'équation précédente, il en découle que :

$$R_{t=0}(T) = \mu_1 + \mu_2 \left[ \frac{1 - \exp \left( -\frac{T}{\tau_1} \right)}{\frac{T}{\tau_1}} \right] + \mu_3 \left[ \frac{1 - \exp \left( -\frac{T}{\tau_1} \right)}{\frac{T}{\tau_1}} - \exp \left( -\frac{T}{\tau_1} \right) \right] + \mu_4 \left[ \frac{1 - \exp \left( -\frac{T}{\tau_2} \right)}{\frac{T}{\tau_2}} - \exp \left( -\frac{T}{\tau_2} \right) \right]. \quad (3.3)$$

#### 3.2.1.2 Interprétation des paramètres

Le modèle de Svensson étant une extension du modèle de Nelson-Siegel, l'interprétation économique de leurs paramètres communs est similaire. Toutefois, deux nouveaux paramètres,  $\mu_4$  et  $\tau_2$  formant une nouvelle composante (cf. 3.1) sont présents. Cette composante a la même forme que la fonction  $c(T)$  précédemment définie pour les taux *spot* dans le modèle de Nelson-Siegel (cf. 2.2.2.2) et a un rôle similaire. Deux composantes ayant une forme identiques, mais des paramètres différents sont ainsi présents dans le modèle de Svensson. Ceci permet au modèle d'avoir une meilleure flexibilité.

De plus, tout comme pour le modèle de Nelson-Siegel, les limites suivantes sont respectées :

- $\lim_{T \rightarrow +\infty} R_{t=0}(T) = \mu_1$  ;
- $\lim_{T \rightarrow 0} (R_{t=0}(T) - \mu_1) = \mu_2$ .

### 3.2.2 La méthode de Björk & Christensen

#### 3.2.2.1 Présentation du modèle

Le modèle de Björk & Christensen cherche également à augmenter la flexibilité du modèle de Nelson-Siegel en y ajoutant une composante supplémentaire à son équation du taux *forward* instantané :

$$\mu_4 \exp \left( -\frac{2T}{\tau} \right). \quad (3.4)$$

Ainsi, l'équation du taux *forward* dans le modèle de Björk & Christensen est la suivante :

$$f_{t=0}(T) = \mu_1 + \mu_2 \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) + \mu_3 \left(\frac{T}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) + \mu_4 \exp\left(-\frac{2T}{\tau}\right). \quad (3.5)$$

En appliquant la formule 2.22 à l'équation précédente, il en découle que :

$$R_{t=0}(T) = \mu_1 + \mu_2 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)}{\frac{T}{\tau}} \right] + \mu_3 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)}{\frac{T}{\tau}} - \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) \right] + \mu_4 \left[ \frac{1 - \exp\left(-\frac{2T}{\tau}\right)}{\frac{T}{\tau}} \right]. \quad (3.6)$$

Contrairement au modèle de Svensson, la nouvelle composante n'est pas fonction d'une nouvelle variable de forme. Björk et Christensen ont jugé qu'un paramètre d'échelle  $\tau$  unique était plus pertinent.

### 3.2.2.2 Interprétation des paramètres

L'interprétation économique des paramètres communs aux modèles de Nelson-Siegel et de Björk & Christensen est similaire. Le rôle du quatrième terme ajouté par Björk & Christensen est comparable à celui du deuxième. Il permet au modèle d'être plus flexible tout en conservant l'interprétation économique intéressante fournie par le modèle de Nelson-Siegel.

L'apport d'un nouveau terme dans le modèle a un impact sur la différence entre le taux court et le taux long :

- $\lim_{T \rightarrow +\infty} R_{t=0}(T) = \mu_1$  ;
- $\lim_{T \rightarrow 0} (R_{t=0}(T) - \mu_1) = \mu_2 + \mu_4$ .

## 3.3 Le modèle de Vasicek & Fong (1982)

Le modèle de Vasicek & Fong [VASICEK et FONG, 1982] propose une approche alternative. Il se classe parmi les méthodes dont la modélisation se fonde sur des *splines*. Vasicek et Fong ont proposé le modèle suivant :

$$P_k + A_k = D(T_k) + \sum_{j=1}^{L_k} C_k D(T_k - j + 1) - Q_k - W_k + \varepsilon_k; \quad (3.7)$$

avec :

- $k \in \llbracket 1 : n \rrbracket$ , l'indice de l'obligation considérée ;
- $T_k$  la maturité de la k-ième obligation ;
- $P_k$  le prix de l'obligation, exprimé en pourcentage de son nominal ;
- $A_k$  le coupon couru de l'obligation, exprimé en pourcentage de son nominal ;
- $D(T_k)$  le facteur d'actualisation pour une maturité  $T_k$ . L'équation étant fondée sur une obligation de nominal égal à 1, cet élément correspond à la valeur actualisée du remboursement du nominal en  $T_k$  ;

- $\sum_{j=1}^{L_k} C_k D(T_k - j + 1)$  la somme des  $L_k$  versements de coupons actualisés ;
- $Q_k$  est la réduction de prix liée aux taxes ;
- $W_k$  correspond à l'effet de la possibilité de remboursement anticipé de l'obligation. En effet, l'impact du caractère *callable* d'une obligation, c'est-à-dire une obligation pouvant être rachetée avant sa date de maturité, pourrait être pris en compte ;
- $\varepsilon_k$  l'erreur résiduelle : le modèle fait l'hypothèse que  $\mathbb{E}[\varepsilon_k] = 0$ .

L'équation 3.3 constitue l'équation de départ du modèle de Vasicek & Fong. Les auteurs ont ensuite proposé des modélisations des éléments de l'équation :

- $\forall k, j \in \llbracket 1 : n \rrbracket^2$ ,

$$\mathbb{E}[\varepsilon_k \varepsilon_j] = \begin{cases} \sigma^2 \omega_k & \text{avec } \omega_k = \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)_k^2 \text{ si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases} \quad (3.8)$$

- $\forall k \in \llbracket 1 : n \rrbracket W_k = w I_k$  avec  $I_k$  une indicatrice valant 1 quand l'obligation est *callable* et 0 sinon. Un choix de simplification a été fait ici. Ce choix avait été fait dans la mesure où ses résultats fonctionnaient bien avec les données considérées par Vasicek & Fong en 1982. Dans ce mémoire, cette approche sera comparée à une approche sans prise en compte explicite du caractère *callable* des obligations considérées.
- l'effet des taxes en  $k$  est proportionnel au rendement en  $k$ . Ainsi  $\forall k \in \llbracket 1 : n \rrbracket$ ,

$$Q_k = q \frac{C_k}{P_k} \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)_k \quad (3.9)$$

- $\forall t \in \llbracket 1 : L_k \rrbracket, D(t) \approx e^{-R(t)t}$  avec  $R(t)$  le taux d'actualisation de maturité  $t$ .

Enfin, Vasicek & Fong ont décidé d'approcher la fonction  $D(t)$  à l'aide de *splines*. Le modèle fait l'hypothèse (usuelle) que la fonction d'actualisation est de forme exponentielle. Les fonctions *splines* polynomiales peinent à correctement s'ajuster à des fonctions exponentielles. Afin de pallier cela, le problème a été réécrit comme suit :

$$t = \frac{1}{\alpha} \ln(1 - x), \quad \forall x \in [0; 1[. \quad (3.10)$$

La fonction  $G$  est ainsi définie de la manière suivante :

$$D(t) = D\left(\frac{1}{\alpha} \ln(1 - x)\right) = G(x), \quad \forall t \in [0; +\infty[. \quad (3.11)$$

Or,  $D(t)$  est approximativement exponentielle (cf. équation 3.3), donc :

$$G(x) \approx (1 - x)^{\frac{R(t)}{\alpha}}. \quad (3.12)$$

Il est ensuite possible d'approcher la fonction  $G$  à l'aide d'une base de *splines* polynomiales.

Le modèle de Vasicek et Fong a été présenté en 1982. Il a ainsi été pensé avec les méthodes d'optimisation usuelles de cette époque. Les auteurs avaient ainsi opté pour un ajustement des *splines* à l'aide de la méthode des moindres carrés généralisés. Cette méthode nécessite d'inverser la matrice de régression (cf. Annexe D). La base de *splines* doit être suffisamment proche de l'orthogonale afin d'obtenir une bonne estimation de l'inverse de la matrice de régression. Ceci implique que la construction de la courbe des taux par cette méthode est potentiellement moins rapide qu'avec des méthodes d'optimisation plus modernes. En effet, à chaque mise à jour de la courbe des taux il pourrait être nécessaire de résoudre des problèmes d'inversion de matrices. Ceci nécessiterait donc une étude plus approfondie des sources des problèmes. L'objectif de ce mémoire est de proposer un outil permettant de rapidement produire une courbe des taux. De plus, l'outil est pensé avec la volonté d'être relativement accessible. Ainsi, l'approche initiale du modèle de Vasicek & Fong ne sera pas retenue, ce mémoire présentera des adaptations plus récentes, permettant une résolution du problème d'optimisation par des méthodes autre que la méthode des moindres carrés généralisés.

### 3.3.1 Approche du modèle de Vasicek & Fong choisie

Des méthodes plus modernes, telles que celles proposées par F. Gbongue et F. Planchet [GBONGUE et PLANCHET, 2015] ou par l'Institut des Actuaire [Institut des Actuaire, 2001] proposent des bases de *splines* plus simples que celle initialement choisie par Vasicek et Fong et fondent leur ajustement sur des algorithmes d'optimisation. Ce mémoire tâchera d'implémenter la méthode proposée par F. Gbongue et F. Planchet. En effet, bien que l'approche de l'Institut des Actuaire propose un modèle plus flexible (car constitué de deux *splines*), la méthode de F. Gbongue et F. Planchet est plus adaptée à l'outil développé dans ce mémoire.

L'Institut des Actuaire a remarqué qu'à compter d'une certaine maturité, moins de flux sont observables sur le marché [Institut des Actuaire, 2001]. Ainsi, la fonction d'approximation de la fonction  $G$  est composée de deux *splines* : l'un polynomial de degré 3 et l'autre polynomial de degré 5. Le passage du premier *spline* au second se fait à la date à compter de laquelle moins de flux sont observés. Cette flexibilité n'est pas nécessaire pour la construction d'une courbe des taux soumise à la norme *IAS 19*. La norme propose en effet une autre méthode afin de palier la diminution du nombre d'obligations échangées dans le marché à compter d'une certaine date. C'est la raison pour laquelle les courbes des taux construites dans ce mémoire seront fondées sur des obligations d'entreprises pour les premières maturités puis à partir d'obligations d'États pour les maturités plus longues.

F. Gbongue et F. Planchet ont ainsi proposé d'estimer la fonction  $G$  de la manière suivante :

$$\hat{G}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (3.13)$$

$\hat{G}$  correspond à un cas simplifié choix de la base de *splines* utilisée pour estimer  $G$  dans la mesure où le *spline* est unique.

La fonction  $G$  est supposée être croissante et ayant comme limites :

- $\lim_{t \rightarrow 0} G(t) = 1$  ;
- $\lim_{t \rightarrow 1} G(t) = 0$ .

Ces hypothèses sont cohérentes d'un point de vue théorique. En effet, les relations suivantes sont respectées :

- $\lim_{t \rightarrow 0} G(t) = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 1$  ;
- $\lim_{t \rightarrow 1} G(t) = 0 \implies \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$ .

En d'autres termes, la fonction d'actualisation vaut 1 en  $t = 1$  : l'actualisation d'une valeur actuelle est nulle. De plus, toute valeur exprimée à horizon infinie aura une valeur actuelle nulle. En pratique, les marchés financiers ne respectent pas nécessairement ces hypothèses. Pour les premières maturités, la courbe des taux n'est pas croissante (cf. figure 1.5).

Ainsi, l'ajustement de la fonction  $\hat{G}$  se fera sous contraintes, de sorte qu'elle respecte bien les limites théoriques de  $G$ . Notons que la forme relativement simple de la fonction  $\hat{G}$  constitue ici un avantage. L'ajustement peut être réalisé rapidement et sans difficulté particulière. Si la base de *splines* considérée pour l'estimation de  $G$  avait été constituée de plusieurs *splines*, les algorithmes d'optimisation auraient plus peiné à estimer  $G$  tout en respectant ses limites théoriques.

### 3.3.2 Interprétation des paramètres du modèle

Deux points sont à noter concernant les paramètres du modèle. Premièrement, le paramètre  $a_0$  vaut nécessairement 1 afin de respecter la limite en 0 de la fonction  $G$ . Ainsi, la relation suivante est respectée :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \hat{G}(t) = a_0 = 1. \quad (3.14)$$

Ensuite, le paramètre  $\alpha$  correspond à la limite du taux forward, ou encore au taux d'actualisation à horizon infinie. En effet, si  $G'(1) \neq 0$  et en appliquant un développement limité, le raisonnement suivant est possible :

$$\begin{aligned} G(x) &\approx -G(1)(1-x) && x \approx 1 \\ \implies D(t) &\approx -G(1)(\exp^{-\alpha t}) && t \rightarrow +\infty \\ \implies -\ln(D(t)) &\approx -\ln(-G'(1)\exp^{-\alpha t}) && t \rightarrow +\infty \\ \implies -\ln(D(t)) &\approx -\ln(-G'(1)) + \alpha t && t \rightarrow +\infty \\ \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\partial}{\partial t} (-\ln(D(t))) &= \alpha && (3.15) \end{aligned}$$

Les méthodes utilisées pour la construction de la nouvelle courbe des taux ayant été présentées, il convient maintenant de s'intéresser à leur mise en place et à leur ajustement.

## 3.4 Implémentation des méthodes

Cette section sera dédiée à la présentation de l'implémentation des différentes méthodes comparées pour construire la nouvelle courbe des taux. L'outil a été réalisé à l'aide de langage de programmation R 3.6.3.

Les modèles proposés dans ce mémoire fondent tous leur ajustement sur une fonction d'optimisation similaire. Chacune de ces méthodes ajuste les paramètres du modèle en cherchant à minimiser l'erreur d'estimation au carré [GBONGUE et PLANCHET, 2015]. L'objectif est alors de minimiser une fonction de la forme :

$$H(\hat{\Omega}) = \sum_{k=1}^N (P_k(t, \Omega) - \hat{P}_k(t, \hat{\Omega}))^2 \quad (3.16)$$

avec :

- $P_k$  le prix observé de l'obligation  $k$  ;
- $\hat{P}_k$  l'estimation du prix de l'obligation  $k$  ;
- $\hat{\Omega}$  l'estimation du vecteur de paramètres du modèle ;
- $t$  la maturité de l'obligation  $k$ .

Il est parfois possible de considérer la fonction à minimiser suivante :

$$H_2(\hat{\Omega}) = \sum_{k=1}^N (R_k(t, \Omega) - \hat{R}_k(t, \hat{\Omega}))^2. \quad (3.17)$$

Ceci n'est toutefois possible que si seules des obligations zéro-coupon sont considérées. Ce mémoire fonde ses méthodes de construction de courbes des taux sur des taux d'entreprises et des taux d'États. Les méthodes proposées doivent être représentatives du marché des obligations de haute qualité. La plupart des obligations proposées sur ces marchés sont à coupons. Il a donc été décidé de considérer  $H$  comme fonction d'erreurs à minimiser. Elle permet en effet d'inclure des obligations à coupons dans nos modèles ce qui a un double intérêt :

- d'un point de vue statistique, nos résultats sont plus fiables car ils sont fondés sur un plus grand jeu de données ;
- nos résultats sont plus représentatifs du marché dans la mesure où ils sont fondés sur plus d'obligations.

Il est possible de considérer des variations de la fonction  $H$ . Un poids plus grand dans l'ajustement peut être accordé à certaines obligations. Dans le cadre de ce mémoire, une pondération selon la valeur marché du titre dans le marché financier et/ou selon la durée sera mise en place. La pondération selon la valeur marché présente plusieurs arguments : elle tient directement compte de la valeur à laquelle le titre va être acheté, ce qui constitue un élément de décision essentiel pour des investisseurs. De plus, un prix élevé peut s'expliquer par une forte demande, ce qui signifie que l'obligation considérée est sujette à de nombreuses transactions. Ainsi cette pondération permet de considérer indirectement un critère de liquidité. Les poids de chaque obligation sont calculés de la manière suivante :

$$Poids = \frac{\text{Valeur marché de l'obligation}}{\text{Somme des valeurs marché des obligations}} \quad (3.18)$$

La fonction objectif devient alors :

$$H_{poids}(\hat{\Omega}) = \sum_{k=1}^N Poids_k \times (P_k(t, \Omega) - \hat{P}_k(t, \hat{\Omega}))^2, \quad (3.19)$$

avec  $Poids_k$  le poids associé à l'obligation  $k$ .

Les méthodes de construction de courbes des taux présentées dans ce mémoire n'incluront pas d'effet taxes. Ce choix se justifie par le fait qu'inclure explicitement un effet des taxes sur le prix des obligations n'est pertinent que lorsque le portefeuille d'obligations considérées est composé d'obligations soumises à des taxes et d'obligations exemptes de taxes [FISHER, 2001].

La forme usuelle de la fonction du prix est donnée par l'équation 2.2. Il est toutefois possible d'envisager des formes permettant de tenir explicitement compte du caractère *callable* des obligations considérées. Vasicek & Fong ont par exemple proposé une telle fonction de prix. Ils ont en effet inclus à leur fonction de prix une variable indicatrice nulle pour une obligation sans options incorporée et valant 1 pour une obligation *callable*. Cette indicatrice est ensuite multipliée par un paramètre qui sera déterminé lors de l'ajustement du modèle. Cette approche sera reprise et étendue à l'ensemble des modèles considérés dans ce mémoire (hormis la méthode du *bootstrap*). Cette approche est une simplification. Elle attribue une valeur unique pour toutes les options de remboursement anticipé. Elle se justifie par le fait que la valeur d'une telle option est en général faible. De plus, seules les obligations *callable* sont traitées différemment. Il aurait été possible de considérer différemment plus d'obligations à options incorporées. Toutefois, les obligations *callable* constituent la majorité des obligations à options incorporées du marché.

Ces méthodes seront comparées à des méthodes alternatives qui ne fondent pas leurs résultats sur des portefeuilles obligataires incluant des obligations à options incorporées.

La méthode de construction de courbe des taux proposée dans ce mémoire se fonde sur deux principales étapes : la construction d'une courbe des taux fondée sur des obligations d'entreprises et la construction d'une courbe des taux fondée sur des obligations d'États. Les deux sous-sections qui suivent tâcheront d'exposer le raisonnement employé lors de ces deux étapes.

### 3.4.1 Construction de la courbe des taux fondée sur des obligations d'entreprises

Plusieurs méthodes de construction de courbes des taux vont être comparées dans cette sous-section. Les modèles suivants seront comparés :

- le modèle de Nelson-Siegel ;
- le modèle de Björk & Christensen ;
- le modèle de Svensson ;
- l'approche de F. Gbongue et F. Planchet du modèle de Vasicek-Fong ;
- la méthode du *bootstrap*.

Ces modèles (hormis la méthode du *bootstrap*) seront ajustés sur deux jeux de données et comparés.

#### 3.4.1.1 Sélection des jeux de données

La norme *IAS 19* impose l'utilisation d'obligations de haute qualité pour la construction de la courbe des taux. La position de la place est de supposer que ce qualificatif signifie une notation AA pour au moins une agence de notation. Ainsi, il a été décidé de considérer des obligations

notées AA par au moins une agence de notation parmi *Moody's*, *Standard & Poor's* et *Fitch Ratings*. Pour ce faire, des données liées aux portefeuilles obligataires de *Markit* ont été extraites. Au 30 juin 2020, tout le portefeuille de *iBoxx € Corporates AA* ainsi que les obligations du portefeuille de *iBoxx € Corporates A* étant notés AA par au moins une agence citée précédemment ont été utilisés pour réaliser l'ajustement des modèles de courbes des taux.

Le second portefeuille considéré est contenu par le premier portefeuille. Ce nouveau portefeuille exclut les obligations à options de rachat anticipé incorporées. Le portefeuille précédemment construit inclut en effet un ensemble non négligeable d'obligations à options de rachat anticipé incorporées. Ces options réduisent le prix des obligations auxquelles elles sont rattachées. Elles ont donc une influence dans l'ajustement des modèles et peuvent donc générer un léger biais. Il a été décidé de comparer les ajustements des modèles de construction de la courbe des taux fondée sur des obligations d'entreprises réalisés sur ces deux bases de données. Les fonctions de calcul du prix des obligations utilisées dans ces deux approches ne seront pas les mêmes. Dans le cas où le portefeuille considéré contient des obligations à options incorporées, la fonction des prix tiendra explicitement compte du prix des options incorporées aux obligations.

Les bases de données utilisées fournissent un ensemble d'informations qu'il convient de préciser :

- l'ISIN : il correspond à l'identifiant de l'obligation ;
- la maturité ;
- le rendement actuariel ;
- le taux de coupon ;
- le prix coupon couru (ou *dirty price*) : cette valeur correspond à l'ensemble des flux actualisés qu'engendrera une obligation ;
- la *Base Market Value* : elle reflète le poids de l'obligation dans le marché.

Les principales statistiques des deux bases de données sont résumées dans les tableaux ci-dessous.

| <b>Obligations corporate</b><br>Portefeuille 1 |        |
|--|--------|
| <b>Quantité</b>                                | 468    |
| <i>dont non callable</i>                       | 311    |
| <i>dont callable</i>                           | 157    |
| <b>Maturité moyenne</b>                        | 5,34   |
| <b>Rendement actuariel moyen</b>               | 0,39%  |
| <b>Taux de coupon moyen</b>                    | 1,36%  |
| <b>Prix coupon couru moyen</b>                 | 104,95 |

TABLE 3.1 – Statistiques du portefeuille d'obligations d'entreprises avec obligations *callable*

| <b>Obligations corporate</b><br>Portefeuille 2 |        |
|--|--------|
| <b>Quantité</b>                                | 311    |
| <i>dont non callable</i>                       | 311    |
| <i>dont callable</i>                           | 0      |
| <b>Maturité moyenne</b>                        | 4,54   |
| <b>Rendement actuariel moyen</b>               | 0,26%  |
| <b>Taux de coupon moyen</b>                    | 1,29%  |
| <b>Prix coupon couru moyen</b>                 | 104,56 |

TABLE 3.2 – Statistiques du portefeuille d'obligations d'entreprises sans obligations *callable*

Les obligations à option de remboursement anticipé incorporées représentent environ un tiers du premier portefeuille. Ainsi, le passage du premier au second portefeuille d'obligations d'entreprises a un impact sur les statistiques du portefeuille. Les obligations du second portefeuille sont en moyenne de maturité plus courte et leurs rendements actuariels sont en moyenne plus faibles.

Un retraitement de ces deux bases de données est effectué avant l'ajustement. Le prix de chaque obligation des portefeuilles est recalculé à l'aide du taux de coupon, du taux de rendement actuariel et de la maturité. Les prix obtenus sont ensuite comparés aux prix communiqués par *Markit*. Si l'écart de prix est supérieur, en valeur absolue, à plus de un centime, l'obligation n'est pas retenue. Au total, 38 obligations ont été exclues des deux bases de données.

### Sélection des obligations des indices iBoxx EUR

*Markit* met à disposition sa méthodologie de construction des indices iBoxx EUR [IHS Markit, 2020]. Quatre principaux types de critères sont précisés. Il portent sur :

- la nature des obligations,
- la notation liée aux obligations,
- la maturité des obligations,
- la valeur marché des obligations.

#### La nature des obligations :

Seules des obligations à taux fixes dont les flux futurs peuvent être déterminés à l'avance sont éligibles pour les indices iBoxx EUR. Les obligations doivent être libellées en euros (ou en anciennes monnaies converties en euros) pour être retenues. Enfin, *Markit* fixe également des critères sur la nature des obligations. Bien que la majorité des obligations retenues soient des obligations à coupon fixe (*vanilla*) ou zéro-coupon, les indices iBoxx EUR peuvent être fondés en partie sur des obligations à option de rachat incorporée (*callable*) ou encore à taux accélérateur (*step-up*).

#### Notation liée aux obligations :

*Markit* considère les notations provenant des agences suivantes :

- *Fitch Ratings*,
- *Moody's Investor Service*,

- *S&P Global Ratings.*

Lorsqu'une obligation est notée par plus d'une de ces trois agences, une note moyenne est déterminée et convertie en la note la plus proche.

#### Maturité des obligations :

Toutes les obligations doivent avoir une maturité supérieure ou égale à un an à la date de rebalancement du portefeuille. La maturité est déterminée selon de la convention de décompte des jours de l'obligation. Elle est calculée à partir de la date de rebalancement et de la date d'exercice de l'obligation. La date d'exercice de l'obligation est fondée sur des éléments différents selon le type d'obligation considéré. Pour des obligations *vanilla*, la date d'exercice de l'obligation correspond à la date de maturité alors que pour des obligations à option de rachat anticipé incorporé, la date considérée correspond à la première date de rachat possible.

#### Valeur marché des obligations :

Les obligations considérées dans les portefeuilles des indices iBoxx EUR doivent toutes respecter un critère minimum de valeur marché. Pour les obligation souveraines, il est de un milliard d'euros alors que pour les obligations d'entreprises, il est de 500 millions pour les obligations libellée en euros et de un milliard pour les obligations libellées en ancienne devise.

#### **3.4.1.2 Ajustement des modèles sur le portefeuille 1**

Quatre modèles ont été retenus pour construire les courbes des taux fondées sur les obligations d'entreprises du portefeuille 1. La méthode du *bootstrap* n'a pas été retenue dans la mesure où elle ne permet pas la prise en compte explicite du caractère *callable* d'une obligation.

Une pondération de l'écart au carré entre le prix réel et le prix estimé a été mise en place. Elle a été faite à l'aide de la variable *Base Market value*. Ainsi, plus une variable occupe un poids important dans le marché, plus son influence sur l'ajustement sera grande.

L'ajustement des paramètres des modèles a été réalisé à l'aide la méthode BFGS pour la méthode de Nelson-Siegel et ses déclinaisons. L'ajustement du modèle de Vasicek & Fong a été fait en s'assurant du respect des limites théoriques de la fonction d'actualisation. Pour ce faire, la valeur de la fonction  $H$  a été augmentée lorsque la fonction d'actualisation estimée ne respectait pas ses limites théoriques. En effet, la fonction  $H$  était alors augmentée d'une valeur égale à la différence entre la limite théorique et la valeur de l'ajustement. L'ajustement a été réalisé à l'aide de la méthode L-BFGS-B qui permet d'indiquer les intervalles dans lesquels rechercher les valeurs optimales des paramètres.

Après ajustement, la courbe du facteur d'actualisation du modèle de Vasicek & Fong est donnée par le graphique suivant.

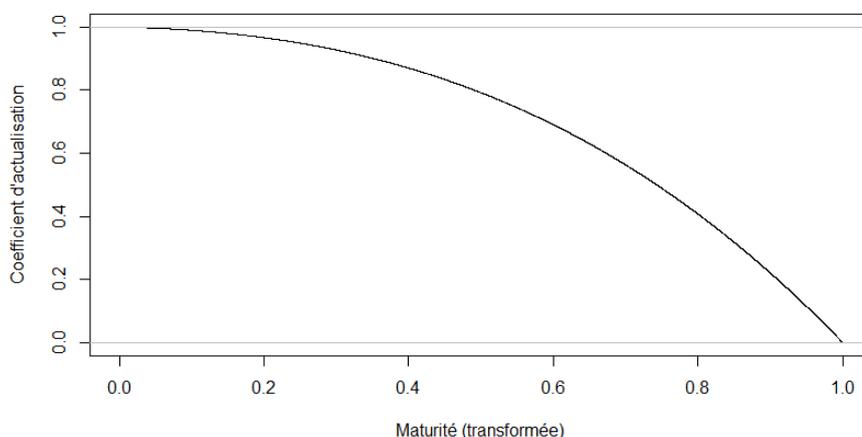


FIGURE 3.1 – Portefeuille 1 : facteur d'actualisation du modèle de Vasicek & Fong

La fonction est bien décroissante et ses limites théoriques sont respectées. L'ajustement du modèle de Vasicek & Fong semble cohérent.

L'ajustement des modèles se fait par les prix. Il convient ainsi d'observer graphiquement la qualité de prédiction des prix par les quatre modèles précédemment ajustés, pour ce faire, les résidus au carrés ont été calculés.

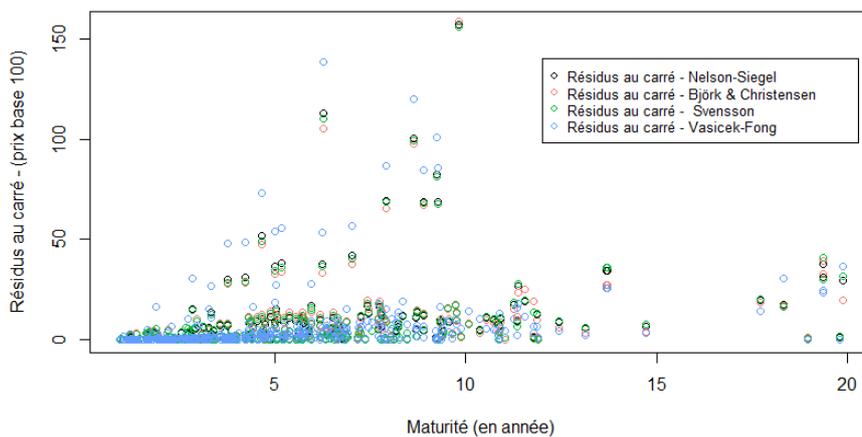


FIGURE 3.2 – Portefeuille 1 : résidus au carré

Graphiquement, deux groupes semblent se distinguer : le modèle de Nelson-Siegel et ses déclinaisons d'une part et d'autre part le modèle de Vasicek & Fong. Cette hypothèse sera confirmée ou non par la suite à l'aide d'indicateurs statistiques.

Enfin, les courbes générées par les quatre modèles sont affichées dans le graphique ci-dessous.

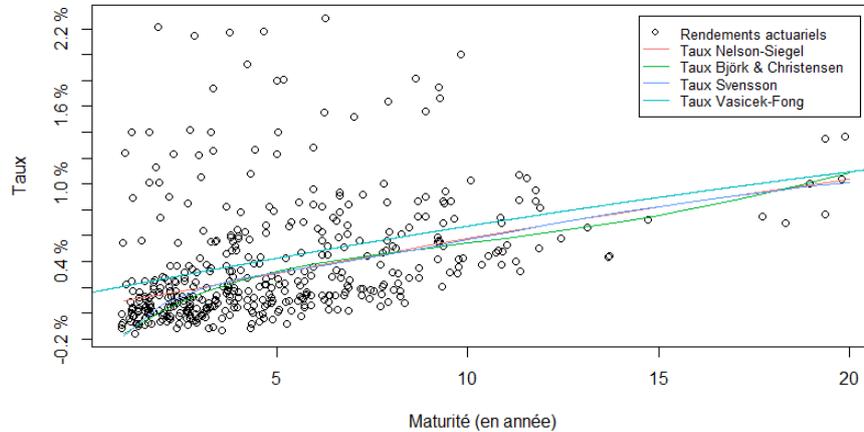


FIGURE 3.3 – Portefeuille 1 : courbes des taux d'actualisation et taux de rendement actuariels

Le graphique ci-dessus affiche les taux de rendements actuariel des obligations sur lesquelles se sont fondés les ajustements. L'ajustement se fait sur les prix et les taux de rendements actuariels sont des taux liés à des obligations couponnées. Les courbes des taux obtenues sont liés aux taux de rendement actuariels. Toutefois, les courbes obtenues ne correspondent pas à des régressions sur les taux de rendement actuariels. Ces deux éléments doivent donc être comparés avec précaution.

Graphiquement, les taux obtenus sont proches. Le modèle de Vasicek-Fong semble toutefois se distinguer et proposer des taux légèrement supérieurs à ceux des autres modèles.

### 3.4.1.3 Ajustement des modèles sur le portefeuille 2

Cinq modèles ont été retenus pour construire les courbes des taux fondés sur les obligations d'entreprises du portefeuille 2. La méthode du *bootstrap* a cette fois-ci été retenue dans la mesure où aucune obligation à option de rachat anticipé n'est présente dans le portefeuille.

Une pondération selon le poids de l'obligation dans le marché a été appliquée.

L'ajustement des paramètres des modèles a été réalisé à l'aide la méthode BFGS pour la méthode de Nelson-Siegel et ses déclinaisons. L'ajustement du modèle de Vasicek & Fong a été fait en s'assurant du respect des limites théoriques de la fonction d'actualisation. L'ajustement a été réalisé à l'aide de la méthode L-BFGS-B.

Après ajustement, la courbe du facteur d'actualisation du modèle de Vasicek & Fong est donnée par le graphique suivant.

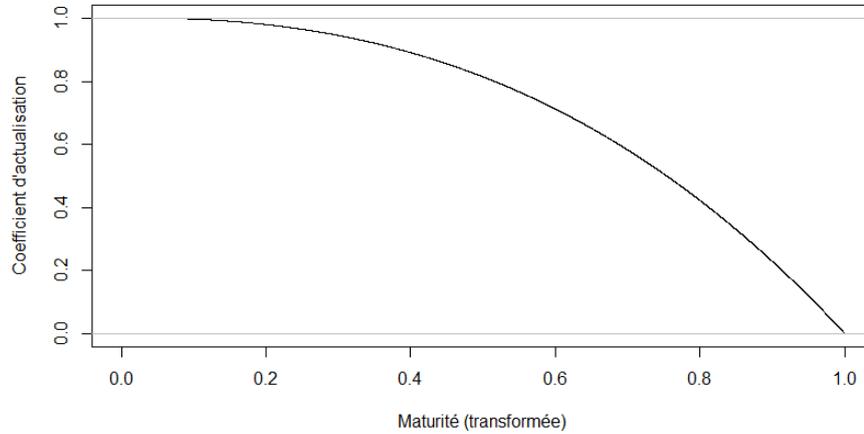


FIGURE 3.4 – Portefeuille 2 : facteur d’actualisation du modèle de Vasicek & Fong

L’ajustement du modèle semble s’être correctement réalisé. La fonction du facteur d’actualisation est décroissante et ses limites théoriques sont respectées.

Les résidus au carré des modèles sont données par le graphique suivant.

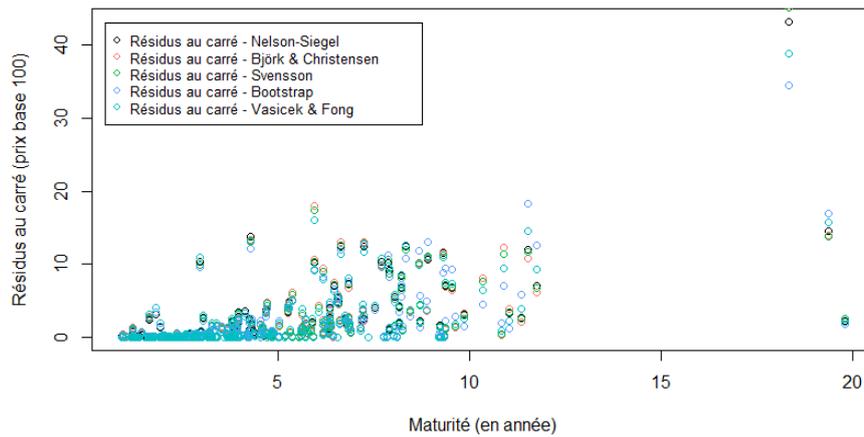


FIGURE 3.5 – Portefeuille 2 : résidus au carré

Graphiquement, les modèles semblent fournir des résultats similaires et il est difficile d’affirmer qu’un modèle se distingue des autres.

Les courbes des taux obtenues à partir du portefeuille 2 sont données par le graphique suivant.

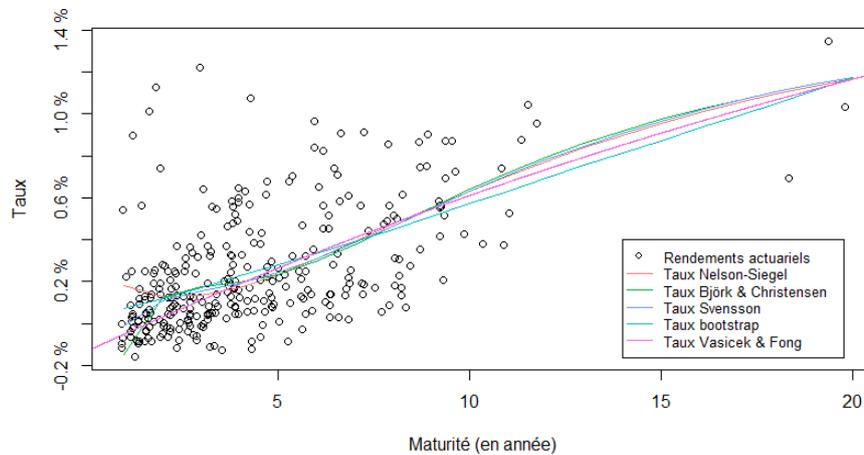


FIGURE 3.6 – Portefeuille 2 : courbes des taux d'actualisation et taux de rendement actuariels

Les taux proposés par le modèle de Vasicek & Fong semblent cette fois-ci être inférieurs aux taux proposés par le modèle de Nelson-Siegel et ses déclinaisons. De plus, les taux obtenus par la méthode du bootstrap semblent cohérents, bien que légèrement plus faibles que les taux obtenus par les autres méthodes.

Il convient maintenant de comparer les régressions réalisées sur les portefeuilles 1 et 2 à l'aide d'indicateurs statistiques afin de sélectionner la méthode à retenir pour construire la courbe des taux fondée sur des obligations d'entreprises.

#### 3.4.1.4 Comparaison et sélection de la méthode à retenir

Les modèles présentés précédemment vont être comparés dans un intervalle de temps qui doit encore être défini. En effet, la maturité de passage de la courbe des taux fondée sur des obligations d'entreprises à la courbe des taux fondée sur des obligations d'état doit encore être déterminée. La norme *IAS 19* ne précise pas de méthodologie particulière afin de déterminer cette maturité. La méthode retenue par ce mémoire sera d'analyser la répartition des obligations selon leurs maturités à l'aide de quantiles empiriques. Pour ce faire, il convient d'étudier les fonctions de répartition empiriques des maturités des deux portefeuilles considérés.

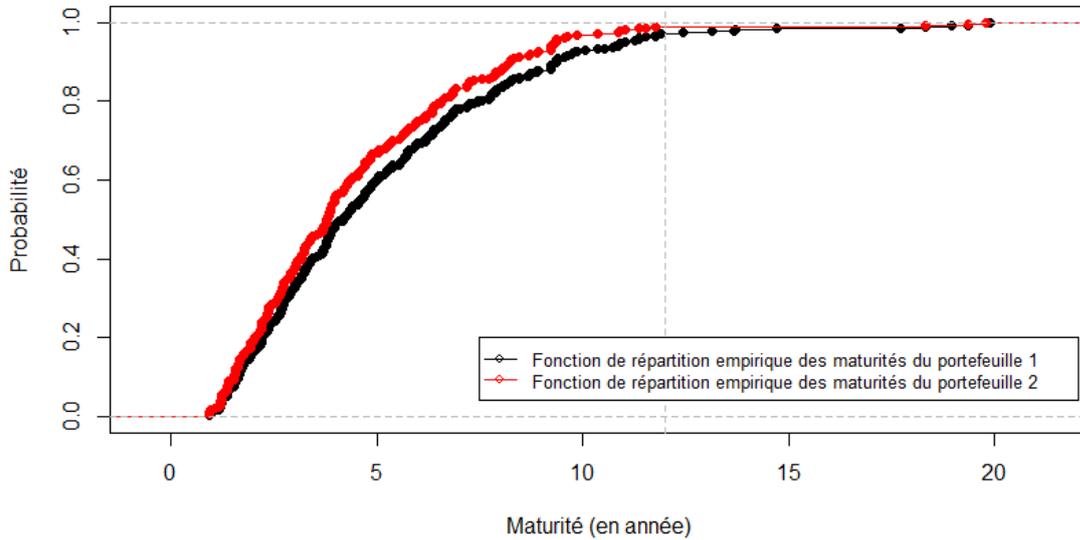


FIGURE 3.7 – Fonctions de répartition empiriques des maturités

À compter de douze ans, les flux sont bien plus faibles dans les deux portefeuilles. D'un point de vue statistique, cette maturité correspond environ aux quantiles à 98 % pour le portefeuille 1 et à 99 % pour le portefeuille 2. Cette maturité sera retenue comme le moment de transition entre la courbe des taux fondée sur des obligations d'entreprises et la courbe des taux fondée sur des obligations d'États. Ainsi, les modèles de construction de la courbe des taux fondée sur des obligations d'entreprises seront comparés pour des maturités allant de 0 à 12 ans.

Trois statistiques seront retenues afin de comparer les méthodes dans ce mémoire :

- le coefficient de détermination  $R^2$  :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}; \quad (3.20)$$

- l'erreur au carré moyenne  $MSE$  ;

$$\frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2; \quad (3.21)$$

- l'erreur absolue moyenne  $MAE$

$$\frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|; \quad (3.22)$$

avec :

- $n$  le nombre d'obligations dans le portefeuille considéré ;

- $y_i$  le prix de l'obligation  $i$ ;
- $\hat{y}_i$  le prix estimé de l'obligation  $i$ ;
- $\bar{y} = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n y_i$  le prix moyen.

Le Critère d'Information d'Akaike (AIC) et le Critère d'Information Bayésien (BIC) ne seront pas utilisés dans ce mémoire dans la mesure où seul le modèle de Vasicek-Fong propose une approche probabiliste. Aucune hypothèse sur la répartition des résidus n'est faite pour la méthode de Nelson-Siegel et ses déclinaisons.

Les valeurs des éléments de comparaisons décrits précédemment pour les ajustement réalisés sur les portefeuilles 1 et 2 sont donnés par le tableau ci-dessous. Ces valeurs ont été calculées pour les obligations de maturités comprises entre 0 et 12 ans.

|                       |                     | <b>MSE</b> | <b>MAE</b> | <b>R2</b> |
|-----------------------|---------------------|------------|------------|-----------|
| <b>Portefeuille 1</b> | Nelson-Siegel       | 4,8655     | 1,4274     | 83,52%    |
|                       | Björk & Christensen | 4,9094     | 1,4399     | 83,37%    |
|                       | Svensson            | 4,8758     | 1,4300     | 83,48%    |
|                       | VF - Planchet       | 5,5346     | 1,5201     | 81,25%    |
| <b>Portefeuille 2</b> | Nelson-Siegel       | 1,5029     | 0,8311     | 95,31%    |
|                       | Björk & Christensen | 1,4883     | 0,8270     | 95,35%    |
|                       | Svensson            | 1,4870     | 0,8237     | 95,36%    |
|                       | VF - Planchet       | 1,5259     | 0,8316     | 95,23%    |
|                       | Bootstrap           | 1,5173     | 0,8482     | 95,26%    |

TABLE 3.3 – Statistiques comparatives des courbes des taux fondées sur des obligations d'entreprises

Selon ces statistiques, le modèle le plus performant est le modèle de Svensson ajusté sur les données du portefeuille 2. Les modèles ajustés sur le portefeuille 1, incluant des obligations *callable* sont moins performants. Le modèle retenu pour la construction de la courbe des taux fondée sur des obligations d'entreprise est donc le modèle de Svensson. La courbe des taux obtenue est ainsi la suivante.

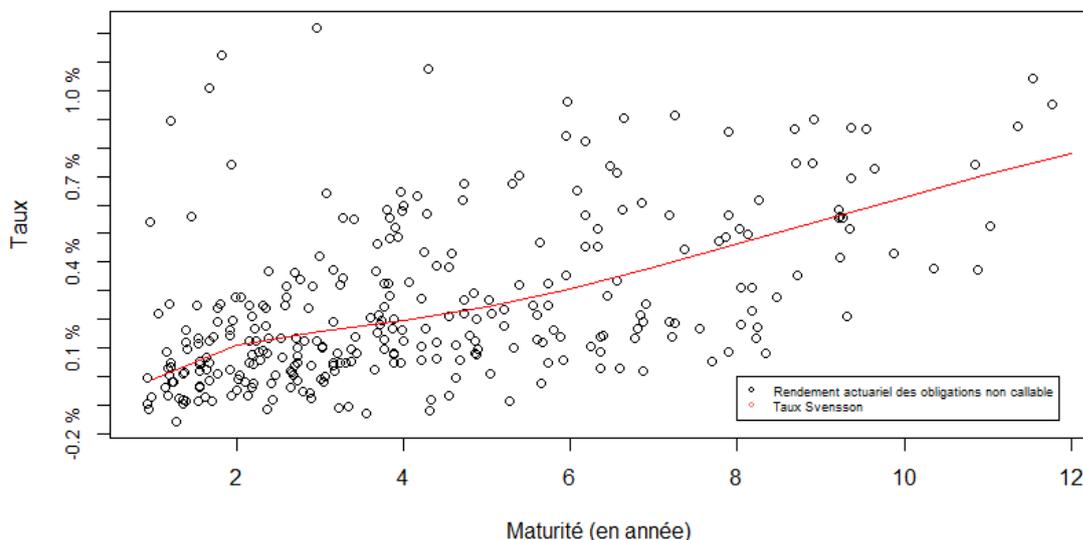


FIGURE 3.8 – Courbe des taux fondée sur des obligations d'entreprises

La première partie de la courbe des taux proposée par ce mémoire a donc été réalisée. La sous-section suivante présentera la méthode de construction de la courbe des taux fondée sur des obligations d'états.

### 3.4.2 Construction de la courbe des taux fondée sur des obligations d'États

Les méthodes de construction de courbes des taux suivantes vont être comparées dans cette sous-section :

- le modèle de Nelson-Siegel ;
- le modèle de Björk & Christensen ;
- le modèle de Svensson ;
- l'approche de F. Gbongue et F. Planchet du modèle de Vasicek-Fong ;
- la méthode du *bootstrap*.

#### 3.4.2.1 Sélection des jeux de données

La sélection du jeu de données des obligations d'États est similaire à la sélection du jeu de données des obligations d'entreprises. Ainsi, des obligations d'États de haute qualité ont été sélectionnées. Pour cela, des données ont été extraites de *Markit*. Les données du portefeuille obligataire *Iboxx € Eurozone* ont été extraites. Les pays appartenant à ce portefeuille et dont la dette souveraine est notée AA par au moins une grande agence de notation ont été retenus. Ainsi, les obligations émises par les pays suivants ont été utilisées afin de construire la courbe des taux fondée sur des obligations d'États :

- la France ;
- l'Allemagne ;
- l'Irlande ;
- l'Autriche ;
- la Belgique ;
- la Finlande ;
- le Luxembourg ;
- les Pays-bas ;
- la Slovénie.

Deux portefeuilles ont été formés à partir de cette extractions de données :

- le portefeuille 3, correspondant à toutes les obligations des États listés ci-dessus ;
- le portefeuille 4, correspondant aux obligations des États listés ci-dessus n'étant pas *callable*

Les données extraites sont les mêmes que pour les portefeuilles d'obligations d'entreprises à la différence que les bases de données d'obligations d'États informent également de la durée de chaque obligation.

Les principales statistiques des deux bases de données d'obligations d'États sont données par les deux tableaux ci-dessous.

| <b>Obligations d'États</b><br>Portefeuille 3 |         |
|--|---------|
| <b>Quantité</b>                              | 219     |
| <i>dont non callable</i>                     | 206     |
| <i>dont callable</i>                         | 13      |
| <b>Maturité moyenne</b>                      | 10,45   |
| <b>Rendement actuariel moyen</b>             | -0,23 % |
| <b>Taux de coupon moyen</b>                  | 1,98 %  |
| <b>Prix coupon couru moyen</b>               | 121,75  |
| <b>Duration moyenne</b>                      | 8,90    |

TABLE 3.4 – Statistiques portefeuille d'obligations d'États avec obligations *callable*

| <b>Obligations d'États</b><br>Portefeuille 4 |         |
|--|---------|
| <b>Quantité</b>                              | 206     |
| <i>dont non callable</i>                     | 206     |
| <i>dont callable</i>                         | 0       |
| <b>Maturité moyenne</b>                      | 10,51   |
| <b>Rendement actuariel moyen</b>             | -0,28 % |
| <b>Taux de coupon moyen</b>                  | 1,96 %  |
| <b>Prix coupon couru moyen</b>               | 122,41  |
| <b>Duration moyenne</b>                      | 8,94    |

TABLE 3.5 – Statistiques portefeuille d'obligations d'États sans obligations *callable*

Le portefeuille d'obligations d'États avec obligations *callable* est bien plus restreint que le portefeuille d'obligations d'entreprises avec obligation *callable*. Toutefois, seulement 13 obligations du portefeuille 3 sont *callable*. Ces 13 obligations correspondent aux obligations émises par la Slovénie.

Comme attendu, les rendements actuariel des portefeuilles d'obligations d'États sont bien plus faibles que ceux des portefeuilles d'obligations d'entreprises. Par ailleurs, les maturités moyennes des portefeuille 3 et 4 sont bien plus élevées que celles des portefeuilles 1 et 2. Les États ont en effet tendance à émettre des obligations avec de plus grandes maturités que les entreprises. Ceci est la raison qui a motivé le choix de passage d'obligations d'entreprises à des obligations d'États pour la construction de la courbe des taux à partir d'une certaine maturité (norme IAS 19).

De la même manière que pour les portefeuilles 1 et 2, un retraitement des portefeuilles 3 et 4 a été effectué avant l'ajustement. Le prix de chaque obligation a été recalculé à partir des données fournies par *Markit*. Si l'écart entre le prix recalculé et le prix fourni par *Markit* était supérieur, en valeur absolue, à plus d'un centime d'euros, l'obligation n'était pas retenue. Au total, quatre obligations ont été exclues des deux portefeuilles.

### 3.4.2.2 Ajustement des modèles sur le portefeuille 3

Huit régressions, fondées sur 4 différents modèles, ont été réalisées pour construire les courbe des taux fondés sur les obligations d'États du portefeuille 3. Les modèles utilisés correspondent aux modèles listés au début de la section 3.4.2 à l'exception de la méthode du *bootstrap*. Chaque modèle considéré traitera les obligations *callable* de manière différente comme vu en section 3.4. Ainsi, une valeur unique sera considérée pour chacune des options incorporées.

Chaque modèle a été ajusté avec deux versions de la fonction objectif : une version avec une pondération selon le poids dans le marché et une version avec une pondération selon le poids dans le marché et la duration. En effet, le choix de la pondération par la duration se justifie par le fait que l'objectif de la courbe des taux fondées sur des obligations d'États est de prédire des taux à long terme. Il est donc préférable que la courbe des taux s'ajuste mieux aux obligations ayant des durations élevées plutôt qu'à des obligations ayant des durations faibles.

L'ajustement des modèles a été effectué à l'aide de la méthode BFGS. Bien que cette méthode ne permette pas d'indiquer des intervalles de recherche des paramètres optimaux, elle est plus stable et gère mieux les erreurs. De plus, il n'a pas été nécessaire d'avoir recours à la méthode L-BFGS-B car les paramètres obtenus à l'aide de la méthode BFGS respectaient les limites théoriques des modèles (notamment du modèle de Vasicek & Fong).

La courbe du facteur d'actualisation obtenue après ajustement du modèle de Vasicek & Fong est donnée par le graphique suivant :

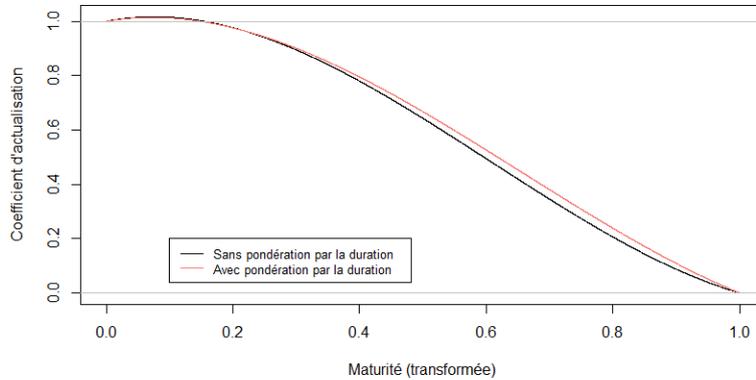


FIGURE 3.9 – Portefeuille 3 : facteur d’actualisation du modèle de Vasicek & Fong

Les variations théoriques du facteur d’actualisation selon la maturité ne sont pas respectées. La courbe est dans un premier temps croissante puis dans un second temps décroissante. Ceci peut s’expliquer par plusieurs raisons. Premièrement la courbe est ajustée sous contraintes. Elle doit donc respecter ses limites et valoir 1 et 0. De plus, les taux de rendements actuariels du marché des obligations d’États sont faibles et peuvent être négatifs pour des maturités supérieures à 10 ans (cf. 3.11). Des taux négatifs impliquent un facteur d’actualisation supérieur à 1. Ainsi, le fait que les courbes soient supérieures à 1 pour plusieurs maturités peut s’expliquer par les taux du marché. Les taux négatifs n’avaient probablement pas été anticipés lors de la construction du modèle de Vasicek & Fong en 1982. Selon le modèle de Vasicek & Fong, le facteur d’actualisation ne peut pas être supérieur à 1. La méthode de Vasicek & Fong ne sera ainsi pas retenue pour l’ajustement d’une courbe des taux sur le portefeuille 3.

Les résidus au carré des modèles du modèle de Nelson-Siegel, de Björk & Christensen et de Svensson sont affichés dans le graphique ci-dessous.

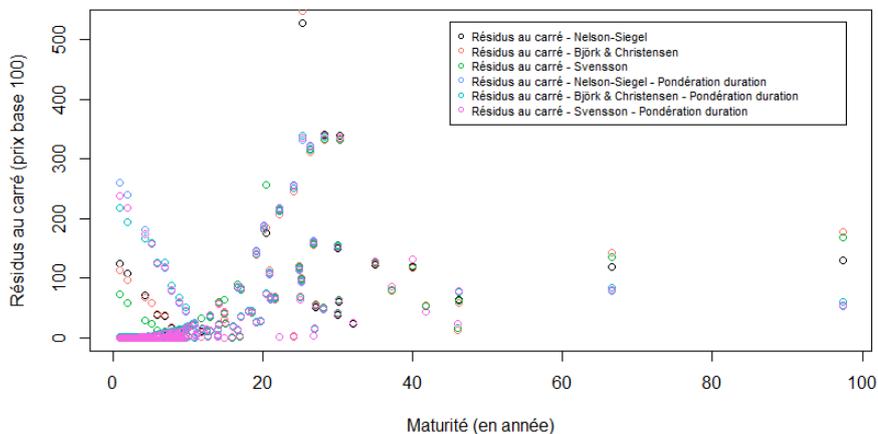


FIGURE 3.10 – Portefeuille 3 : résidus au carré

Graphiquement, il est difficile de distinguer des groupes entre les données, même s'il semble que pour certaines maturités les modèles avec pondération selon la durée se distinguent des autres modèles.

Les courbes des taux obtenues à partir du portefeuille 3 sont données par le graphique suivant :

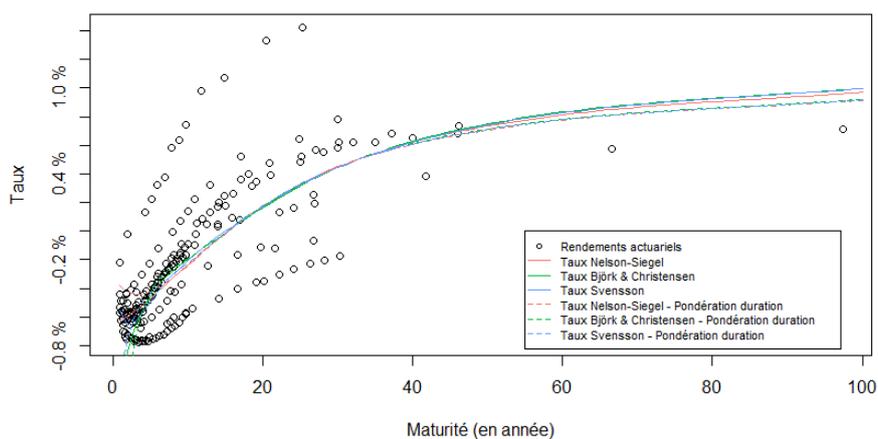


FIGURE 3.11 – Portefeuille 3 : courbes des taux d'actualisation et taux de rendement actuariels

Les courbes des taux obtenues sont très proches. La pondération par la durée a diminué les taux prédits à très long termes.

Il convient maintenant d'ajuster des courbes des taux sur le portefeuille 4 afin de pouvoir finalement comparer les approches de construction d'une courbe des taux fondée sur des obligations d'États et de choisir une méthode à retenir.

### 3.4.2.3 Ajustement des modèles sur le portefeuille 4

Neuf modèles ont été retenus pour construire les courbes des taux fondés sur les obligations d'États. Les modèles considérés seront les mêmes que pour le portefeuille 3, à l'exception de la méthode du *bootstrap* qui sera cette fois-ci considérée. Chacune des méthodes, à l'exception de la méthode du *bootstrap*, sera ajustée à l'aide de deux versions de la fonction objectif : une version avec une pondération selon le poids dans le marché et une version avec une pondération selon la durée et le poids dans le marché.

Les modèles ont été ajustés à l'aide de la méthode BFGS.

La courbe du facteur d'actualisation obtenue après ajustement du modèle de Vasicek & Fong est donnée par le graphique suivant :

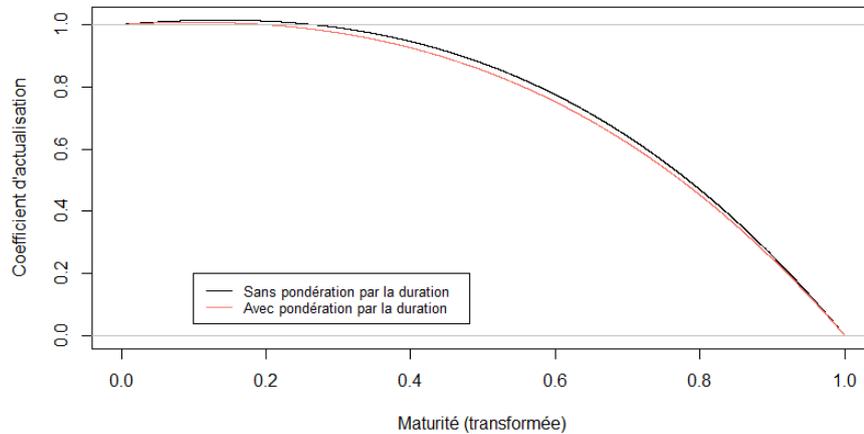


FIGURE 3.12 – Portefeuille 4 : facteur d'actualisation du modèle de Vasicek &amp; Fong

Comme attendu, pour certaines maturités, le facteur d'actualisation est supérieur à 1. Les limites théoriques du facteur d'actualisation dans le modèle de Vasicek & Fong ne sont pas respectées. La méthode de Vasicek & Fong ne sera ainsi pas retenue pour la construction d'une courbe des taux fondée sur des obligations d'États.

Les résidus au carré obtenus après ajustement des autres modèles sont observables dans le graphique suivant :

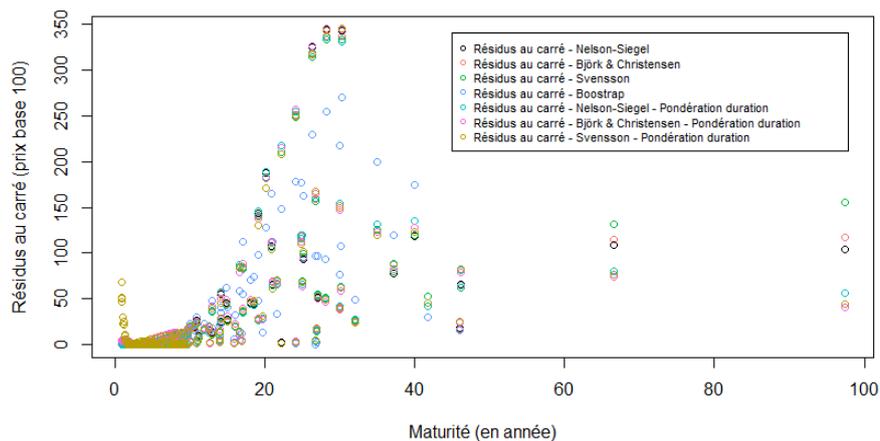


FIGURE 3.13 – Portefeuille 4 : résidus au carré

En comparant le graphique des résidus des modèles ajustés sur le portefeuille 4 au graphique des résidus des modèles ajustés sur le portefeuille 3, il semblerait que les modèles du portefeuille 3 peinent à prédire les taux des obligations *callable*. En outre, la méthode du *bootstrap* semble se distinguer des autres méthodes.

Les courbes des taux obtenus après ajustement sur le portefeuille 4 sont observables dans le graphique suivant :

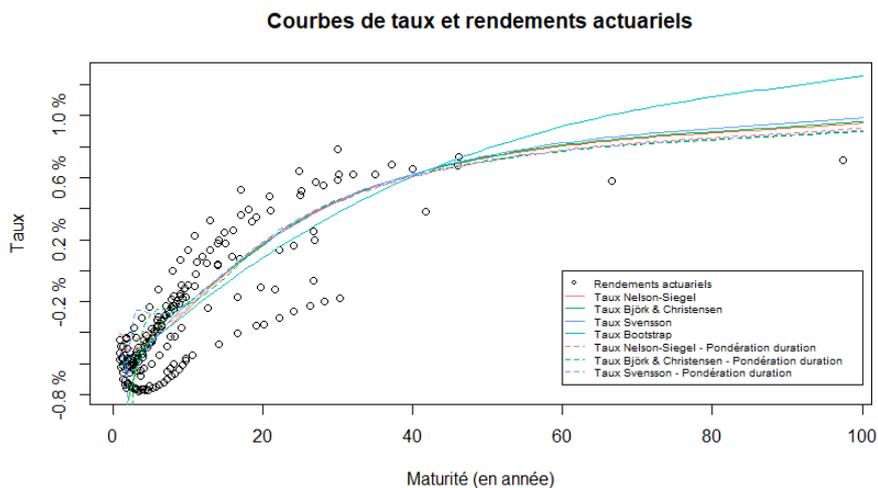


FIGURE 3.14 – Portefeuille 4 : courbes des taux d’actualisation et taux de rendement actuariels

Hormis pour la méthode du *bootstrap*, il semblerait que les taux obtenus après régression sur le portefeuille 4 sont très proches des taux obtenus après régression sur le portefeuille 3. Ceci s’explique par le fait que les deux portefeuilles soient très proches. Par ailleurs, la méthode du *bootstrap* affiche des résultats très différents des autres modèles. Il semblerait qu’elle ait tendance à surestimer les taux pour des maturités très élevées.

Il convient maintenant de comparer les courbes des taux construites à partir des portefeuilles 3 et 4 afin et de choisir une méthode à retenir pour la construction de la courbe des taux fondée sur des obligations d’États.

#### 3.4.2.4 Comparaison et sélection de la méthode à retenir

Il a été décidé d’utiliser la courbe des taux fondée sur des obligations d’États pour des maturités supérieures à 12 ans pour la construction de la courbe des taux finale. Ainsi, les modèles ajustés précédemment seront comparés sur ces maturités. Les statistiques utilisées pour la comparaison des méthodes seront les mêmes que pour la construction de la courbe des taux fondée sur des obligations d’entreprises.

|  |  | MSE      | MAE    | R2     |
|--|--|----------|--------|--------|
| <b>Portefeuille 3</b>                            | Nelson-Siegel                                    | 86,7683  | 7,9607 | 91,62% |
|  | Björk & Christensen                              | 87,9501  | 7,9990 | 91,51% |
|  | Svensson   | 91,8759  | 8,1106 | 91,13% |
|  | Vasicek & Fong - Planchet                        | 100,2556 | 8,2918 | 90,32% |
|  | Nelson-Siegel - Pondération duration             | 79,7856  | 7,6632 | 92,30% |
|  | Björk & Christensen - Pondération duration       | 79,7925  | 7,6602 | 92,30% |
|  | Svensson - Pondération duration                  | 79,8046  | 7,6627 | 92,29% |
|  | Vasicek & Fong - Planchet - Pondération duration | 96,0708  | 8,1020 | 90,72% |
| <b>Portefeuille 4</b>                            | Nelson-Siegel                                    | 77,5292  | 7,6208 | 92,36% |
|  | Björk & Christensen                              | 77,5158  | 7,6207 | 92,36% |
|  | Svensson   | 78,4129  | 7,6523 | 92,27% |
|  | Vasicek & Fong - Planchet                        | 84,6987  | 7,8560 | 91,65% |
|  | Bootstrap  | 96,0240  | 8,4077 | 90,54% |
|  | Nelson-Siegel - Pondration duration              | 76,7869  | 7,5808 | 92,43% |
|  | Björk & Christensen - Pondération duration       | 76,6240  | 7,6023 | 92,45% |
|  | Svensson - Pondération duration                  | 75,7316  | 7,5415 | 92,54% |
| Vasicek & Fong - Planchet - Pondération duration | 81,1193  | 7,6465   | 92,01% |        |

TABLE 3.6 – Statistiques comparatives des courbes des taux fondées sur des obligations d’États

Selon ces statistiques, le modèle le plus performant sur sur les maturités supérieures à 12 ans est le modèle de Svensson avec pondération par la duration ajusté sur le portefeuille 4. Il était en effet prévisible, à la vue des graphiques des résidus des différents ajustement d’anticiper que le portefeuille 4 allait être retenu, dans la mesure où les modèles s’y ajustent plus aisément. Le modèle de Svensson est la déclinaison du modèle de Nelson-Siegel ayant le plus de paramètre. Cette particularité lui a probablement permis de mieux s’ajuster aux données du portefeuille 4. Ce modèle sera ainsi le modèle retenu pour la construction de la courbe des taux fondée sur des obligations d’États. Cette dernière est observable dans le graphique ci-dessous.

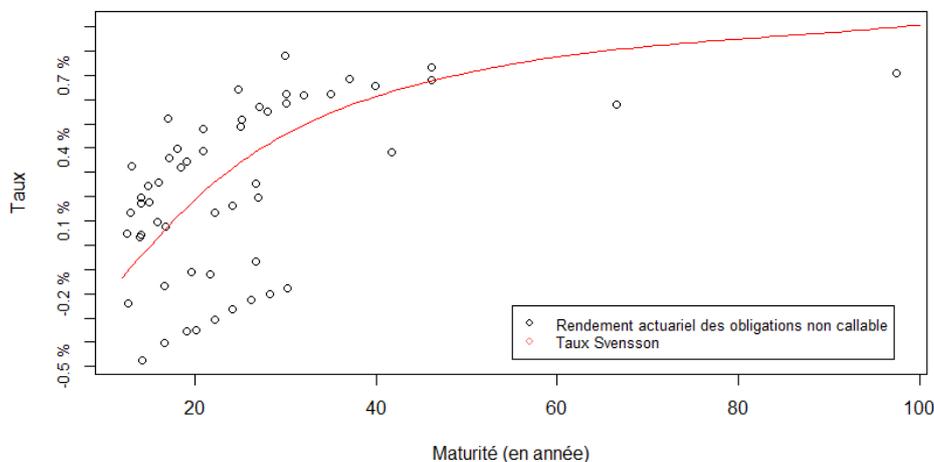


FIGURE 3.15 – Courbes des taux d’actualisation fondée sur des obligations d’États

### 3.4.3 "Accrochage" et présentation de la courbe des taux finale

Une fois la courbe des taux fondée sur des obligations d'entreprises et la courbe des taux fondée sur des obligation d'États obtenue, il est possible de construire la courbe des taux finale. Il a été décidé que la maturité « d'accrochage » des deux courbes serait 12 ans. Ainsi, à la maturité 12 ans, un *spread*  $\delta$ , c'est-à-dire un écart de taux a été calculé. Cet écart à été calculé comme la différence entre les deux courbes à cette date :

$$\delta = R^{\text{Corporate}}(0, 12, \widehat{\Omega}^{\text{Corporate}}) - R^{\text{GVT}}(0, 12, \widehat{\Omega}^{\text{GVT}}) \quad (3.23)$$

Cet écart de taux constant a ensuite été additionné aux taux fondés sur des obligations d'États de sorte d'assurer la continuité de la courbe à la maturité d'accrochage. L'objectif de cette manipulation est de pallier le manque de données des obligations d'entreprises sur le marché et de proposer une estimation de ces taux à long terme en se fondant sur des obligations d'États.

Ainsi, il est possible de comparer la courbe finalement obtenue à la courbe obtenue avec l'ancienne méthode de construction de la courbe des taux, comme dans le graphique ci-dessous. Les taux de la nouvelle courbe des taux sont consultables en annexe (cf. Annexe E).

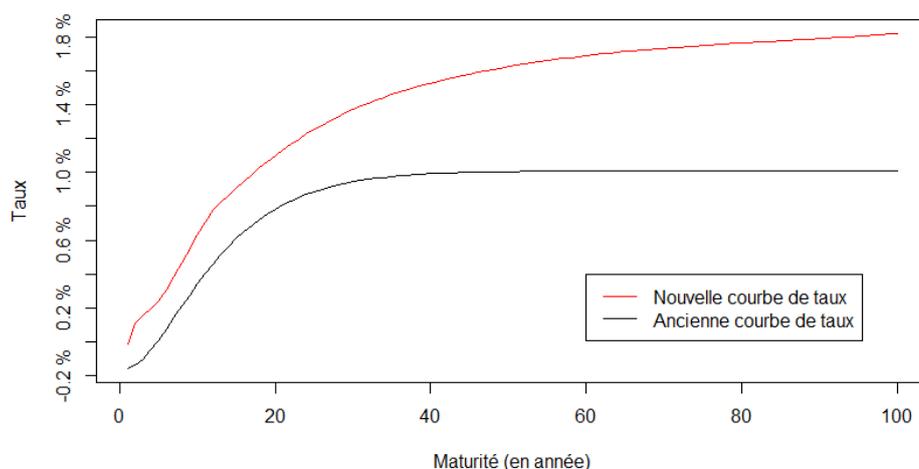


FIGURE 3.16 – Comparaison des méthodes de construction des courbes des taux au 30/06/2020

À la vue de ces deux courbes, deux remarques peuvent être faites :

- la nouvelle courbe des taux est en tout point supérieure à l'ancienne. Ceci s'explique principalement par le jeu de données considéré pour construire la nouvelle courbe. En effet, il inclut des obligations qui n'avaient pas été prises en comptes lors de la construction des taux indiciaires utilisés pour construire la courbe des taux selon l'ancienne méthode. La nouvelle méthode de construction de la courbe des taux est plus souple et inclut plus d'obligations que les taux synthétiques proposés par *Markit*. Ces nouvelles obligations vont mécaniquement augmenter les taux finaux obtenus dans la mesure elle proposent des taux plus élevés ;
- les secondes parties des deux courbes n'ont pas la même forme. La courbe des taux fondée sur des obligations d'États de la nouvelle méthode croît plus fortement que celle de

l'ancienne méthode. Ceci s'explique notamment par le fait que les obligations considérées pour construire ces courbes n'ont pas les mêmes notations. L'ancienne méthode utilisait des obligations émises par des pays de la zone euro notées AAA alors que la nouvelle méthode de construction de la courbe des taux fondée sur des obligation d'États se construit à partir d'obligations d'États de la zone euro notées au minimum AA par l'une des trois grandes agences de notation. Ainsi, les taux proposés par ces obligations sont supérieurs à ceux de l'ancienne méthode.

## Chapitre 4

# Application de la courbe à un régime de retraite supplémentaire

Ce chapitre a pour objectif de proposer un exemple d'application de la courbe des taux précédemment construite. Cette dernière sera ainsi utilisée lors de l'évaluation de la provision liée à un régime de retraite supplémentaire à prestations définies (article 39). Dans un premier temps, le plan du régime ainsi que le portefeuille d'individus considéré seront présentés. Dans un second temps, le système de retraite français pour les salariés du secteur privé sera exposé dans la mesure où sa compréhension sera nécessaire à l'évaluation de la provision. Enfin, l'évaluation de l'engagement du régime et ses résultats seront présentés.

### 4.1 Présentation du régime et de son portefeuille

Le régime considéré dans cette partie est un régime de retraite supplémentaire à prestations définies de type « article 39 ».

Le portefeuille des bénéficiaires du régime est composé d'actifs et de retraités. Il compte 88 actifs et 152 retraités. À la date du départ à la retraite des bénéficiaires du régime, l'engagement est externalisé auprès d'un assureur. La courbe des taux d'actualisation construite dans ce mémoire n'intervenant pas à cette étape, seule l'évaluation de l'engagement lié aux actifs sera présentée.

#### 4.1.1 Présentation du régime

Le régime de retraite supplémentaire à prestations définies présenté dans ce mémoire propose deux types de prestations. Le premier promet à son bénéficiaire un montant de retraite différentiel à son départ à la retraite et le second promet un niveau de retraite additionnelle. Le premier type de prestation est fondé sur le taux de remplacement de l'individu qui est défini comme suit :

$$\text{Taux de remplacement} = \frac{\text{Rente de retraite}}{\text{Salaire de référence}} \quad (4.1)$$

Ainsi, la provision de l'employeur doit lui permettre de financer l'écart entre le taux de remplacement promis et le taux de remplacement généré par la retraite légale. Le calcul de la rente

payée par l'employeur peut être résumé à l'aide de l'équation suivante :

$$\text{Rente payée par l'employeur} = \max(\tau_{promis} - \tau_{légal}, 0) \times \text{Salaire de référence}, \quad (4.2)$$

avec :

- $\tau_{promis}$  : le taux de remplacement promis ;
- $\tau_{légal}$  : le taux de remplacement obtenu par la rente liée à la retraite légale.

Le calcul de la provision liée au régime différentiel nécessite donc de connaître le taux de remplacement généré par la retraite légale, c'est pour cette raison que le système de retraite des salariés français sera présenté dans la section suivante.

Le calcul de la provision liée au régime additionnel nécessite de connaître le salaire de référence des actifs à leur date de départ à la retraite. La projection du salaire de référence sera ainsi exposée dans la section 4.3.2.

Les formules de calcul des rentes liées au régime à prestations définies seront présentées dans le paragraphe 4.1.1.2.

### 4.1.1.1 Conditions d'éligibilité

Afin d'être éligibles au régime, les salariés du groupe doivent respecter l'ensemble de conditions listées ci-dessous :

- être toujours présents au sein du groupe à leur date de départ à la retraite ;
- avoir une retraite de base à taux plein (cf. 4.2) ;
- être directeur et avoir au minimum 5 ans d'ancienneté à ce poste.

Un cas particulier est toutefois à noter : en cas de licenciement ou d'invalidité après l'âge de 55 ans, les bénéficiaires changent de statut et deviennent des « différés ». Ils peuvent alors toujours prétendre aux prestations du régime.

### 4.1.1.2 Formules de calcul des prestations définies

Les salariés de la base d'actifs et de différés sont soit éligibles au régime additionnel soit éligibles au régime chapeau (ie. au régime différentiel). Selon le cas, leur prestation n'est pas la même. Toutefois, un élément reste commun au calcul des deux types de prestations : la rémunération de référence.

Cette variable est calculée comme la moyenne des trois derniers salaires avant la retraite. Dans le cas où l'individu considéré est un différé, sa rémunération de référence est calculée sur la base de ses trois derniers salaires annuels perçus en tant qu'actif. Ce salaire est ensuite revalorisé jusqu'à son année de départ à la retraite selon les variations du PASS. De plus, un différé continue à acquérir de l'ancienneté jusqu'à sa date de départ à la retraite. L'ancienneté prise en compte dans le calcul de la rente n'est donc pas figée à la date de passage à l'état de différé.

La rente versée est à terme échu et en quatre versements annuels.

En cas de décès de l'affilié, son conjoint peut bénéficier d'une rente de réversion. Le taux de réversion est de 60 %. En d'autres termes, si l'affilié décède, son conjoint percevra 60 % de la rente qu'il aurait dû percevoir et ce jusqu'à son décès.

### Le régime chapeau

Le régime chapeau promet un taux de remplacement fonction de l'ancienneté du directeur. Il est donné par la formule suivante :

$$\tau_{promis} = \min(65\%, \max(50\%, 2\% \times \text{ancienneté})) \quad (4.3)$$

La rente du régime chapeau se calcule alors comme suit :

$$\text{Rente chapeau} = \text{Salaire de référence} \times \tau_{promis} \quad (4.4)$$

Le taux de remplacement promis est ainsi compris entre 50 % et 65 %. Il augmente avec l'ancienneté jusqu'à une limite de 65 %. Le niveau de la rente payée par l'employeur peut ensuite être déterminé à l'aide de la formule 4.2. Le calcul du taux de remplacement légal sera présenté dans la section suivante.

### Le régime additif

Les salariés du portefeuille bénéficient tous d'un régime de type article 83 externalisé auprès d'un assureur. La rente perçue au titre de l'article 83 est déduite de la rente perçue au titre du régime additif. Ainsi, si la rente de l'article 83 est supérieure à la rente du régime additif pour un individu, il ne percevra aucune rente au titre du régime de retraite à prestations définies. La rente additive perçue, avant déduction de la rente liée à l'article 83 est définie par la formule suivante :

$$\text{Rente additive}_{\text{Avant art. 83}} = (1,5\% \times \text{Tranche A} + 3\% \times \text{Tranche B}) \times \min(20, \text{ancienneté}), \quad (4.5)$$

avec :

- $\text{Tranche A} = \min(\text{Salaire de référence} - 3 \text{ PASS}^1, 5 \text{ PASS})$  ;
- $\text{Tranche B} = \max(0, \text{Salaire de référence} - 8 \text{ PASS})$

La rente est ainsi déterminée par le niveau du salaire de référence. Elle est également proportionnelle à l'ancienneté, dans une limite de 20 années.

La rente effectivement perçue par les bénéficiaires du régime additif est donnée par la formule suivante :

$$\text{Rente additive}_{\text{effective}} = \max(0, \text{Rente additive}_{\text{Avant art. 83}} - \text{Rente Art.83}) \quad (4.6)$$

Il n'est pas nécessaire de calculer la rente liée à l'article 83 dans la mesure où l'assureur en charge de sa gestion communique les informations nécessaires à chaque évaluation actuarielle de l'article 39.

Après avoir étudié le règlement du plan de retraite supplémentaire, il convient maintenant de présenter le portefeuille d'actifs considéré.

---

1. Plafond Annuel de la Sécurité Sociale

### 4.1.2 Présentation du portefeuille

Le portefeuille d'actifs compte 88 individus dont 87 bénéficiaires de la rente additive et 1 bénéficiaire de la rente différentielle. Les principales statistiques descriptives du portefeuille sont renseignées dans le tableau ci-dessous :

|                                   | Actifs  | Différés | Total          |
|-----------------------------------|---------|----------|----------------|
| <b>Nombre de femmes</b>           | 16      | 0        | <b>16</b>      |
| <b>Nombre d'hommes</b>            | 59      | 13       | <b>72</b>      |
| <b>Âge moyen</b>                  | 56,9    | 61,4     | <b>57,6</b>    |
| <b>Salaire Moyen (sans bonus)</b> | 250 704 | 215 518  | <b>242 770</b> |
| <b>Bonus moyen (en %)</b>         | 37      | 0        | <b>37</b>      |
| <b>Affiliés régime additif</b>    | 74      | 13       | <b>87</b>      |
| <b>Affiliés régime chapeau</b>    | 1       | 0        | <b>1</b>       |

TABLE 4.1 – Statistiques descriptives du portefeuille d'actifs

Les différés étant des cas atypiques, ils sont moins nombreux que les actifs. Les différés ont un salaire en moyenne plus faible que les actifs. Ceci s'explique par le fait que les salaires de référence considérés pour ces individus sont mécaniquement inférieurs aux salaires de référence qu'ils auraient perçus en restant au sein de l'entreprise jusqu'à leur retraite. De plus, les salaires des différés correspondent à leurs salaires de référence. Les salaires de références prennent en compte les bonus passés lors de leur calcul. Ceci explique le fait que les bonus des différés soient nuls.

Par ailleurs, les femmes sont bien moins présentes que les hommes (environ 20 % contre 80 %). De plus, les directeurs sont tous relativement âgés, leur âge moyen est de 57,6 ans. En moyenne, il percevront leur rente dans moins de 10 ans. Ceci est attendu dans la mesure où le régime est fermé depuis plus de 10 ans.

Pour finir, les affiliés sont pour la quasi totalité éligibles au régime additif. Ceci s'explique par le fait que le régime chapeau est plus généreux que le régime additif. Il est moins souvent attribué à des actifs.

Il convient désormais d'étudier la répartition des individus selon plusieurs critères : leur âge, leurs salaires et leur ancienneté. Cette étude sera réalisée en calculant les fonction de densité empiriques des différentes variables considérées. Cette étude sera réalisée à partir d'éléments statistiques et de graphiques. L'objectif est de mettre en évidence la présence de données atypiques et de comprendre les tendances des différentes variables considérées.

### Répartition de l'âge des actifs

L'âge des actifs peut avoir un impact important sur la dette actuarielle de l'entreprise. Il convient d'étudier leur répartition.

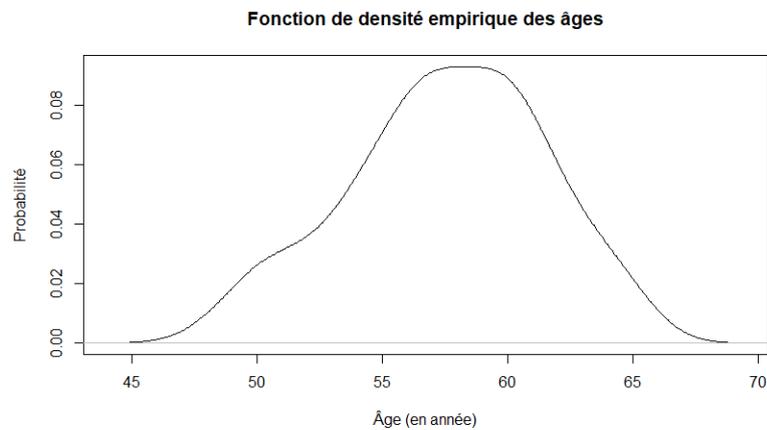


FIGURE 4.1 – Répartition des âges des actifs

| Minimum | 1er Quartile | Médiane | Moyenne | 3ème quartile | Maximum |
|---------|--------------|---------|---------|---------------|---------|
| 48,32   | 55,02        | 57,85   | 57,55   | 60,16         | 65,14   |

TABLE 4.2 – Statistiques descriptives - Âges

Les âges des actifs semblent être répartis de manière homogène. Ils sont toutefois compris dans un intervalle plutôt restreint dans la mesure où la majorité des actifs ont plus de 55 ans. Cela pourra générer des dettes actuarielles élevées lors de l'évaluation actuarielle. En effet, le prorata d'ancienneté appliqué à la VAPF va être proche de 1 (cf. 1.2.1.2).

### Répartition des salaires des actifs

La prestation perçue par salarié retraité est une fonction croissante de son salaire de référence. Il convient ainsi d'étudier la répartition des salaires des actifs.

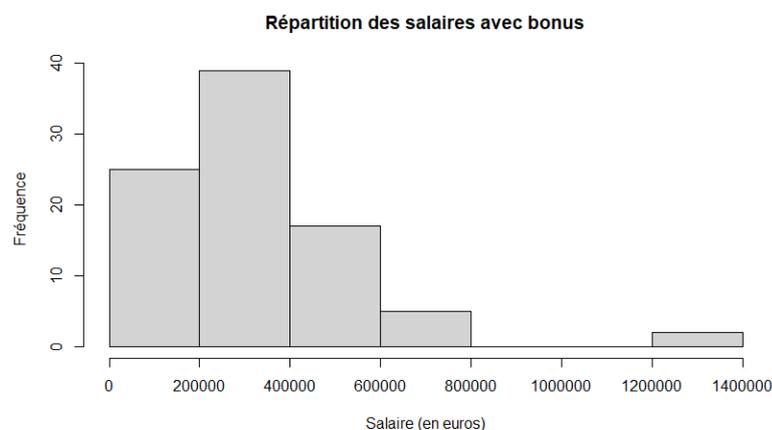


FIGURE 4.2 – Répartition des salaires des actifs

#### 4.1. PRÉSENTATION DU RÉGIME ET DE SON PORTEFEUILLE

| Minimum | 1er Quartile | Médiane | Moyenne | 3e quartile | Maximum   |
|---------|--------------|---------|---------|-------------|-----------|
| 117 128 | 194 493      | 280 294 | 336 299 | 418 951     | 1 350 000 |

TABLE 4.3 – Statistiques descriptives - Salaires

Le salaire des actifs est en majorité compris entre 200 000 et 400 000 euros par ans. Le salaire d'un bénéficiaire semble se distinguer des autres. Ceci peut s'expliquer par le fait que cet actif occupe actuellement un rôle très important dans l'entreprise.

#### Répartition des anciennetés des actifs

L'ancienneté des actifs va jouer un rôle dans le calcul de la charge actuarielle à deux niveaux. Elle va impacter le prorata d'ancienneté défini par la norme IAS 19. L'ancienneté à la date de départ à la retraite va également influencer positivement la prestation perçue. Il convient ainsi d'étudier la répartition des anciennetés.

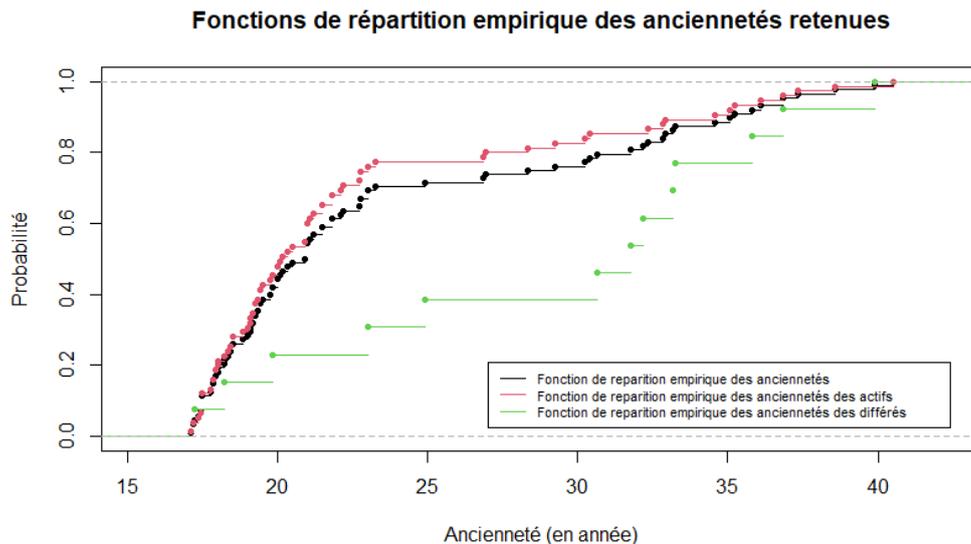


FIGURE 4.3 – Répartition de l'ancienneté des actifs

|                           | Minimum | 1er Quartile | Médiane | Moyenne | 3e quartile | Maximum |
|---------------------------|---------|--------------|---------|---------|-------------|---------|
| <b>Actifs et différés</b> | 17.10   | 18.49        | 20.96   | 23.62   | 28.56       | 40.50   |
| <b>Actifs</b>             | 17.10   | 18.45        | 20.16   | 22.70   | 22.87       | 40.50   |
| <b>Différés</b>           | 17.25   | 23.00        | 31.75   | 28.98   | 33.25       | 39.91   |

TABLE 4.4 – Statistiques descriptives - Anciennetés

Le graphique permet de remarquer une nette différence de répartition entre les actifs et les différés, bien que l'impact des différés sur la répartition globale soit faible. En effet, plus de 80 % des actifs ont moins de 25 ans d'ancienneté alors que cette proportion est d'environ 40 % chez les différés. Les différés ont en général une ancienneté supérieure à celle des actifs.

## 4.2 La retraite en France

Il est important de comprendre le fonctionnement du système de retraite afin de déterminer la provision liée au régime différentiel. En effet, ce type de régime peut promettre un niveau de retraite contractuel au départ à la retraite. L'employeur peut alors s'engager ainsi à combler le potentiel écart entre la rente de retraite légale et le taux de remplacement promis. Le calcul de la provision liée à ce type de régime à prestations définies nécessite donc de connaître la rente légale de l'individu considéré.

### 4.2.0.1 Les trois piliers de la retraite en France

Le système de retraite français se décompose en trois piliers. Son principe est résumé par le schéma ci-dessous.

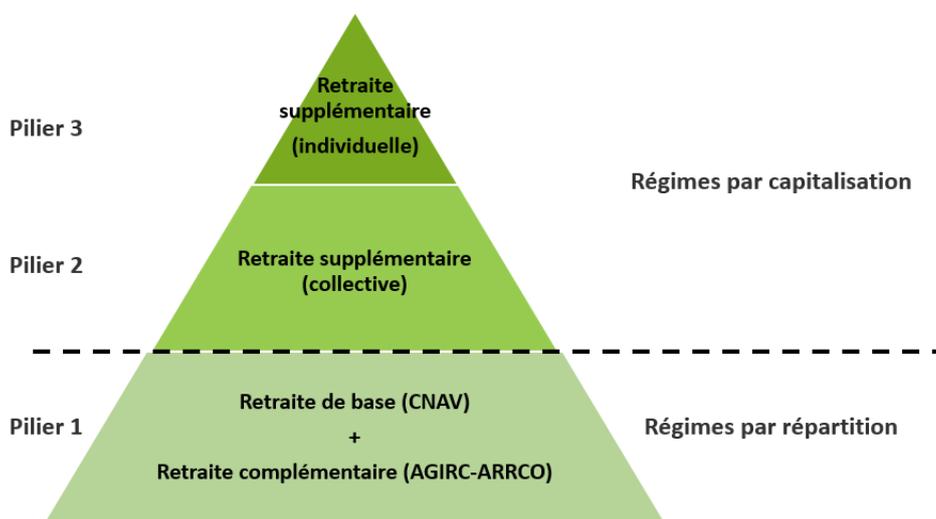


FIGURE 4.4 – Les trois piliers de la retraite française pour les salariés

De nombreux régimes existent en France. Ce mémoire tâchera de décrire les régimes auxquels peuvent prétendre les salariés. En effet, les bénéficiaires du régime de retraite supplémentaire considéré dans ce chapitre sont des salariés du secteur privé.

La lecture de ce schéma met en évidence la distinction entre régimes par capitalisation et régimes par répartition. Ces deux régimes se distinguent par leur différence de système de financement. Le régime par capitalisation finance ses dépenses par les cotisations passées. Une provision est ainsi constituée dans un premier temps. Le capital construit est en général revalorisé chaque année. Le régime par répartition ne constitue pas de provision dans la mesure où les cotisations de l'année en cours permettent de financer les dépenses de la même période. Cette méthode est ainsi nécessairement collective.

#### Pilier 1

Le premier pilier de la retraite des salariés français est composé de la retraite de base et de la retraite complémentaire.

La retraite de base des salariés français est un régime par répartition. Elle fait partie des régimes légaux. Ce régime est géré par la Caisse Nationale d'Assurance Vieillesse (CNAV), rattachée à la Sécurité sociale. La rente liée à ce régime doit être estimée lors de l'évaluation de la provision d'un régime de retraite supplémentaire à prestations définies différentiel.

La retraite complémentaire des salariés français est également financée par répartition. Historiquement, elle faisait la distinction entre retraite complémentaire des salariés cadres et des salariés non cadres. Depuis le 1<sup>er</sup> janvier 2019, la retraite complémentaire des salariés est fédérée par l'AGIRC-ARRCO (Association Générale des Institutions de Retraite des Cadres - Association des Régimes de Retraite Complémentaire). Sa gestion administrative et financière est confiée à des Instituts de retraites.

### **Pilier 2**

Le pilier 2 correspond à des régimes de retraites relevant du secteur privé. Ils peuvent être facultatif ou obligatoire selon les accords passés au sein de l'entreprise. Ils regroupent notamment les régimes de retraites supplémentaires de type article 39 (retraite chapeau, régimes additifs) et les article 83 (régime à cotisations définies).

### **Pilier 3**

Le pilier 3 regroupe les régimes à adhésion individuelle. Ils sont facultatifs. Ces régimes peuvent notamment prendre la forme d'une assurance-vie. Le rôle de ce pilier est de compléter les rentes générées par les piliers 1 et 2 afin d'assurer un certain niveau de retraite. Le recours à des régimes de retraite supplémentaires individuels intervient notamment lorsqu'un individu avait un salaire élevé lors de sa période d'activité et que son taux de remplacement sera faible.

## **4.2.1 Calcul des rentes générées par le pilier 1**

### **Calcul des rentes générées par le régime de base**

Plusieurs éléments entrent en compte dans le calcul des rentes liées au régime de base, ils peuvent être synthétisés par la liste suivante :

1. le salaire ;
2. les trimestres acquis ;
3. l'âge d'ouverture des droits et l'âge du taux plein ;
4. d'éventuelles surcotes et majorations.

Les trimestres acquis sont limités à quatre par an. Il peuvent être de trois types :

- cotisés : ils sont fonction du salaire perçu et non du temps de travail. Pour l'année 2020, le salaire brut perçu doit être supérieur à 1 522,50 € ;
- assimilés : ils sont perçus en cas de chômage, de maladie, d'invalidité, de congé maternité, de service militaire, etc. ;
- accordés : ils sont perçus si l'individu considéré a eu un ou plusieurs enfants, en cas de prise en charge d'un adulte handicapé, etc.

La prestation est conditionnée par l'atteinte de l'âge d'ouverture des droits (donné en annexe F). Il est de 62 ans pour les individus nés à partir de 1955 (hors cas particulier). Si cet âge est atteint, la formule de calcul de la rente liée au régime de base est donnée par la formule suivante :

$$\text{Rente} = \text{SAM} \times \text{Taux} \times \text{Prorata}_{\text{CNAV}} \times \text{Surcote} \times \text{Majoration} \quad (4.7)$$

Le Salaire Annuel Moyen (SAM) correspond à la moyenne des 25 meilleurs salaires bruts plafonnés au Plafond Annuel de la Sécurité Social (PASS<sup>2</sup>) et revalorisés. Les coefficients de revalorisations des salaires passés sont communiqués par la CNAV.

Le taux est compris entre 25 et 50 %. Il est déterminé par le nombre de trimestres acquis. Il est donné par la formule suivante :

$$\text{Taux} = \max(50\% - \text{malus} \times t_{\text{manquants}}), \quad (4.8)$$

avec :

- *malus* : le pourcentage retranché au taux pour chaque trimestre manquant. Il est fonction de l'année de naissance. Il est égal à 0,625 % pour les individus nés après 1952.
- *t<sub>manquants</sub>* : le nombre de trimestres manquants pour atteindre le taux plein. Il est nul si l'âge de taux plein a été atteint (67 ans pour les individus nés à partir de 1955). Le nombre de trimestres nécessaires pour l'atteinte du taux plein est donné par le tableau présent en annexe F.

Le coefficient  $\text{Prorata}_{\text{CNAV}}$  permet de réduire la rente acquise si l'individu n'a pas cotisé tous ses trimestres auprès de la CNAV. Ce coefficient est donné par la formule suivante :

$$\text{Prorata}_{\text{CNAV}} = \frac{\min(t_{\text{CNAV}}, t_{\text{totaux}})}{t_{\text{totaux}}}, \quad (4.9)$$

avec :

- $t_{\text{CNAV}}$  : le nombre de trimestres cotisés auprès de la CNAV ;
- $t_{\text{totaux}}$  : le nombre de trimestres cotisés.

Une surcote est octroyée à l'affilié s'il a un taux de 50 % mais n'a pas atteint son âge de départ de taux plein : une surcote de 1,25 % de la rente est alors attribuée pour tout trimestre supplémentaire cotisé.

Une majoration de la rente de 10 % est octroyée pour tout salarié ayant eu et élevé 3 enfants ou plus.

#### 4.2.2 Calcul des rentes générées par le régime de retraite complémentaire

Le régime de l'AGIRC-ARRCO est un régime par point. Chaque année, les salariés cotisent et obtiennent un nombre de points qu'ils vont liquider à leur départ en retraite. La rente annuelle brute perçue à la date de départ à la retraite est ainsi donnée par la formule suivante :

$$\text{Rente}_{\text{AGIRC-ARRCO}} = N_{\text{points}} \times V_{\text{point}} \times \text{Coef}_{\text{Minoration}} \times \text{Coef}_{\text{Famille}}, \quad (4.10)$$

2. En 2020, le PASS était de 41 136 €.

avec :

- $N_{points}$  : le nombre de points acquis à la date de départ à la retraite ;
- $V_{points}$  : la valeur du point à la date de départ à la retraite de l'individu ;
- $Coeff_{Minoration}$  : le coefficient de minoration obtenu déterminé selon l'âge de départ et le nombre de trimestres manquants pour le taux plein ;
- $Coeff_{Famille}$  : le coefficient de majoration visant à accroître la rente perçue par les individus ayant des enfants à charge ou étant parents/ayant élevé des enfants. Cette majoration intervient à partir de 3 enfants. Ce coefficient sera considéré comme nul dans l'évaluation dans la mesure où les bénéficiaires du plan ne sont pas concernés.

### Calcul du nombre de points

Seuls les taux servant au calcul des droits des employés seront présentés dans ce mémoire. En effet, l'objectif est simplement de connaître le taux de remplacement des salariés. Les taux de cotisation s'appliquent sur la base de deux assiettes. Ces dernières sont déterminées selon le PASS de la manière suivante :



FIGURE 4.5 – Tranches AGIRC-ARRCO

Comme cela a été abordé dans la sous-section 4.1.2, tous les individus du portefeuille ont un salaire donnant lieu à une cotisation calculée sur la base de la tranche 1 et 2. Les taux appliqués à ces tranches de salaire sont donnés par le tableaux suivant :

| Tranche | Taux supporté par le salarié | Taux supporté par l'employeur | Total   | Taux contractuel |
|---------|------------------------------|-------------------------------|---------|------------------|
| T1      | 3,15 %                       | 4,72 %                        | 7,87 %  | 6,20 %           |
| T2      | 8,64 %                       | 12,95 %                       | 21,59 % | 17,00 %          |

TABLE 4.5 – Taux de cotisation AGIRC-ARRCO

Le taux considéré sera le taux contractuel dans la mesure où il ne tient pas compte du taux d'appel dont le paiement ne procure aucun droit. De plus, aucune distinction ne sera faite entre les cotisations de l'employeur et celles des salariés.

A titre d'exemple, si un individu percevait une rémunération brute de 200 000 € en 2020, il aurait acquis le nombre de points suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{Points acquis} &= \frac{6.2\% \times \text{Salaire T1} + 17\% \times \text{Salaire T2}}{\text{Valeur d'achat du point}} & (4.11) \\
 &= \frac{6,20\% \times 41\,136 + 17\% \times (200\,000 - 41\,136)}{17,3982} \\
 &= 1\,698.
 \end{aligned}$$

### La valeur du point AGIRC-ARRCO

La valeur du point est donnée par l'AGIRC-ARRCO, elle est à considérer comme un paramètre. Au 30 juin 2020, la valeur du point était de 1,2714 €.

### Le coefficient de minoration

Le coefficient de minoration est déterminé à partir d'une grille communiquée par l'AGIRC-ARRCO (cf. Annexe F). Ce coefficient permet d'intégrer la notion de taux plein à la pension de l'AGIRC-ARRCO. Lorsque le taux plein est atteint, il est nul, autrement, trois éléments sont nécessaires pour le définir :

- l'âge au départ à la retraite ;
- l'âge de taux plein ;
- le nombre de trimestres manquants pour obtenir le taux plein ;

Le tableau en annexe G indique un coefficient de minoration pour chaque âge au moment du départ à la retraite et pour différents niveaux de trimestres manquants pour atteindre le taux plein. Le coefficient à retenir pour le calcul de la pension de retraite de l'AGIRC-ARRCO est défini comme le maximum entre ces deux coefficients.

A titre d'exemple, pour un individu partant à la retraite à 64 ans, avec un âge de taux plein de 67 ans et à qui il manque 8 trimestre, le coefficient sera déterminé selon la formule suivante (cf. annexe G) :

$$Coef_{Minoration} = \max(88\%, 92\%) = 92\%. \quad (4.12)$$

L'ensemble des prérequis pour l'évaluation du régime de retraite supplémentaire ayant été présentés, il convient maintenant d'exposer la méthode d'évaluation du plan.

## 4.3 Évaluation de la provision du régime de retraite supplémentaire

Cette section comportera quatre sous-sections. La première présentera l'ensemble des hypothèses utilisées lors de l'évaluation tandis que les trois suivantes traiteront des trois principales étapes de l'évaluation actuarielle, c'est-à-dire :

- la reconstitution de la carrière ;
- la reconstitution de la retraite ;
- l'évaluation de la provision actuarielle sous *IAS 19*.

### 4.3.1 Hypothèses actuarielles

La norme *IAS 19* définit deux types d'hypothèses actuarielles : les hypothèses démographiques et les hypothèses économiques.

Les hypothèses démographiques regroupent habituellement les taux de rotation du personnel, les taux de mortalité, les âges de début et de fin de carrière... L'évaluation du régime présenté dans ce mémoire nécessite des hypothèses supplémentaires qui seront également présentées.

### 4.3. ÉVALUATION DE LA PROVISION DU RÉGIME DE RETRAITE SUPPLÉMENTAIRE

Les hypothèses financières regroupent habituellement les taux d'actualisation, les taux d'inflation, le taux technique... Des hypothèses spécifiques aux plans considérés seront également présentées.

De la même manière que pour la courbe des taux d'actualisation présentée dans les chapitres précédents de ce mémoire, les autres hypothèses doivent être cohérentes avec la réalité et ne pas être trop ambitieuses. La norme *IAS 19* précise que ces hypothèses doivent correspondre aux « meilleures estimations ». Des hypothèses actuarielles correctement définies facilitent une meilleure gestion du plan dans la mesure où elles permettent une bonne anticipation des flux.

L'ensemble des hypothèses actuarielles présentées dans cette sous-section est consultable dans un tableau synthétique en annexe H.

#### 4.3.1.1 Les hypothèses démographiques

##### Le taux de sortie

Le taux de sortie correspond à la probabilité pour un âge donné de quitter les effectifs après un temps donné. Cette hypothèse a été définie par le groupe. Elle est décroissante et le taux de sortie devient nul à partir de 55 ans.

Les taux ont été définis par groupes d'âge de la manière suivante :

$$\text{Taux de sortie} = \frac{\text{Nombre de démissions au cours de l'année}}{\text{Effectifs de l'année}} \quad (4.13)$$

Les prestations perçues par les régimes de type article 39 sont conditionnées par la présence du bénéficiaire dans l'entreprise à sa date de départ à la retraite. Ainsi, l'hypothèse de taux de sortie peut avoir un impact très important sur la provision. Toutefois, les actifs du portefeuille sont relativement âgés et seulement 25 % d'entre-eux ont moins de 55 ans. Seuls ces individus auront une probabilité de sortie non nulle.

##### Le taux de mortalité

Selon *IAS 19*, les taux de mortalités choisis doivent correspondre au mieux aux taux de mortalité des participants au régime. Toutefois, la construction d'une table de mortalité n'est techniquement pas réalisable sur un portefeuille si restreint. Il a donc été décidé d'avoir recours aux tables de mortalité générationnelles TGH-05 et TGF-05. Ces tables étant générationnelles, elles proposent pour chaque génération des taux de mortalité qui lui sont propres. Ceci permet de proposer des taux de mortalité plus proche de la réalité pour chaque individu.

##### Âge de début de carrière

Il peut être nécessaire de connaître l'âge de début de carrière d'un individu pour évaluer la provision liée à la rente qu'il pourrait percevoir. En effet, pour calculer la rente liée à une retraite de type régime chapeau, il est nécessaire de connaître la rente qu'il percevra au titre des régimes légaux. Cette information n'étant pas disponible, il a été décidé de faire une hypothèse.

Les individus du portefeuille considéré sont tous des cadres supérieurs. Il a été supposé qu'ils avaient tous fait des études et qu'ils avaient débuté leur carrière à l'âge de 25 ans.

### **Âge de fin de carrière**

Il est nécessaire d'anticiper l'âge de fin de carrière de chaque bénéficiaire du plan afin de connaître sa durée de cotisation et d'activité et pouvoir estimer la prestation à laquelle il pourrait prétendre.

Par ailleurs, la prestation du régime est conditionnée par le départ à la retraite à taux plein. Les actifs du portefeuille sont supposés partir à la retraite entre 62 et 67 ans. En effet, 62 ans correspond à leur âge d'ouverture des droits et 67 ans correspond à leur âge de taux plein. Il est possible de partir à la retraite en bénéficiant du taux plein avant 67 ans si le nombre de trimestres requis est atteint (cf. annexe F). Pour la base de donnée considérée, le nombre de trimestre requis pour obtenir le taux plein est compris entre 166 et 171 trimestres.

### **Les hypothèses liées à la réversion**

Le plan prévoit une rente de réversion de 60 % pour le conjoint de l'affilié en cas de décès de celui-ci.

Par ailleurs, la base de données utilisée pour l'évaluation n'a fourni aucune information sur le statut marital des actifs. Ainsi, il a été décidé, sur la base de statistiques du groupe, de faire l'hypothèse d'un taux de nuptialité de 80 % chez les actifs.

Enfin, l'âge du conjoint n'est pas renseigné. Il est pourtant nécessaire à l'évaluation d'une rente de réversion. Une hypothèse prudente a été faite. Dans le couple, il est considéré que la femme est systématiquement âgée de trois ans de moins que son mari. Ce choix d'hypothèse est également justifié par la tendance d'écart d'âge au sein des couples des générations concernées par le régime.

### **Taux d'atteinte du bonus**

Le salaire des directeurs présents dans le portefeuille contient une part variable. Sur la base de l'historique des salaires variables, il a été décidé de faire l'hypothèse que le taux d'atteinte de ce bonus sera de 75 % pour les années futures.

### **Proportion de trimestres cotisés auprès de la CNAV**

À la vue des données disponibles pour l'évaluation, il n'est pas possible de déterminer la proportion de trimestres cotisés auprès de la CNAV pour chaque individu. Il a ainsi été décidé, par simplification, de supposer ce taux est égal à 100 %.

#### **4.3.1.2 Les hypothèses financières**

##### **Le taux d'actualisation**

Deux approches sont possibles concernant l'application d'une courbe des taux : il est possible d'en déduire un taux d'actualisation unique, compte tenu de la durée du plan considéré ou d'utiliser la courbe dans son ensemble. Bien que la norme *IAS 19* autorise les deux approches, du

### 4.3. ÉVALUATION DE LA PROVISION DU RÉGIME DE RETRAITE SUPPLÉMENTAIRE

point de vue théorique, l'application d'une courbe des taux est plus justifiée. En effet, cela équivaut à appliquer un taux d'actualisation différent pour chaque flux selon sa maturité. L'utilisation d'un taux unique s'explique par un souci de simplicité. L'objectif d'une telle approche est de se rapprocher du résultat obtenu avec l'application d'une courbe des taux tout en appliquant un taux unique. De plus, un taux unique est un élément plus facilement interprétable et donc plus facile à communiquer dans une optique de conseil.

Dans ce mémoire, une courbe des taux sera utilisée pour l'actualisation des flux jusqu'à la retraite (cf. Annexe E).

#### Le taux technique

Les rentes des bénéficiaires du régime de retraite supplémentaire présenté dans ce mémoire ont vocation à être externalisées auprès d'une société d'assurance lors du départ des actifs à la retraite. De ce fait, l'employeur se libère de tout engagement à cette date. Les sociétés d'assurance sont tenues d'actualiser leurs flux futurs à l'aide du taux technique à date du début de la rente. Le taux technique est défini aux articles A132-1 et A132-1-1 du Code des assurances. Il est actuellement de 0 % et ne peut pas être négatif. De ce fait, l'hypothèse de taux technique considérée sera 0 % pour les rentes futures.

#### Le taux d'inflation

L'objectif de la BCE est d'atteindre, à moyen terme, un taux d'inflation inférieur et proche de 2 %. De ce fait, l'hypothèse choisie doit être proche de cette valeur. Par ailleurs, comme il est possible de le constater sur le graphique suivant, le taux d'inflation de la zone euro est, depuis 10 ans, en moyenne, plus faible que 2 %.

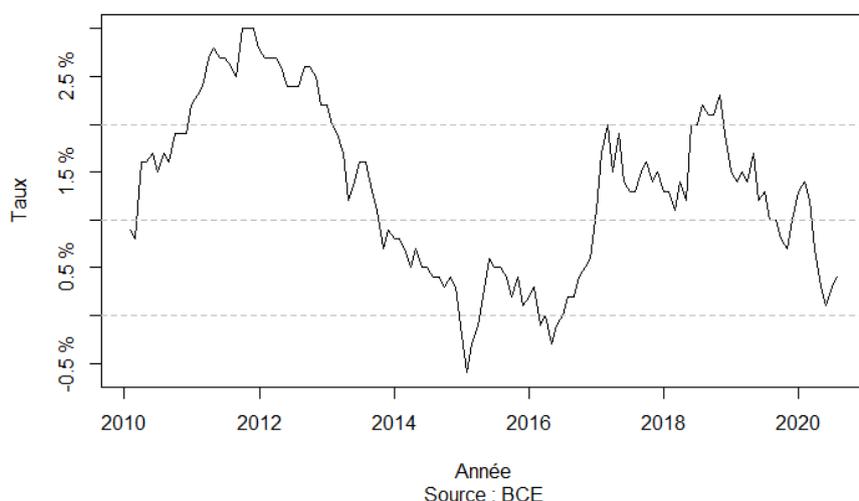


FIGURE 4.6 – Historique de l'inflation de la zone euro

Au 30 juin 2020, le taux d'inflation de la zone euro était de 0,3 %. Ce taux fait partie des plus

faibles observés. Le taux a subitement chuté en mars 2020. Ce phénomène a très probablement été causé par la crise de la Covid-19. Le plan est évalué sur plusieurs années, c'est un plan de moyen terme et il serait adéquat de considérer un taux d'inflation à moyen terme plutôt qu'un taux d'inflation calculé sur des données actuelles. Il a ainsi été décidé de retenir un taux d'inflation de 1,75 % et ce pour plusieurs raisons :

- ce taux est plus représentatifs des objectifs à moyens terme de la BCE. Il correspond mieux à l'horizon temporel du plan considéré ;
- un taux plus élevé s'avère plus prudent.

Le taux d'inflation n'est pas directement utilisé dans l'évaluation. Il va servir à déterminer des hypothèses de revalorisation.

### **Le taux d'augmentation des salaires**

Selon la norme *IAS 19*, le taux d'augmentation des salaires doit tenir compte d'éléments comme l'inflation, l'ancienneté, les promotions, l'offre et la demande sur le marché du travail. Il a été fixé à 3 % pour le plan évalué dans ce mémoire. Cette valeur a été déterminée à partir de l'inflation de la zone euro et de données spécifiques à l'entreprise considérée.

### **Le salaire de début de carrière**

Il est nécessaire de faire une hypothèse concernant le salaire de début de carrière afin de pouvoir estimer les salaires passés des actifs du plan. Dans la mesure où les individus du portefeuille sont tous des cadres supérieurs, il a été décidé de faire l'hypothèse d'un salaire de début de carrière égal à 130 % du PASS à date.

### **Taux de revalorisation des rentes**

L'hypothèse de taux de revalorisation des rentes de l'AGIRC-ARRCO a été déterminée sur la base de l'historique de la valeur des points. En moyenne, les points de l'AGIRC et de l'ARRCO ont été revalorisés d'environ 1 % chaque année depuis 2000. L'hypothèse d'un taux de revalorisation des rentes de l'AGIRC-ARRCO de 1 % a ainsi été retenue.

Par ailleurs, selon le plan du régime, le taux de revalorisation des rentes du régime de retraite supplémentaire doit être proche du taux de l'AGIRC-ARRCO. Il a ainsi été décidé de faire l'hypothèse qu'il serait également de 1 %.

### **Taux de revalorisation du salaire de référence de l'AGIRC-ARRCO**

L'hypothèse de taux de revalorisation du salaire de référence de l'AGIRC-ARRCO a été déterminée sur la base de l'historique des revalorisation des salaires de référence de l'AGIRC et de l'ARRCO depuis 2000. En moyenne, leur revalorisation était d'environ 2 % par an. Il a donc été décidé de choisir 2 % comme hypothèse.

##### **Taux de revalorisation du PASS**

L'hypothèse du taux de revalorisation du PASS a été fondée sur la base de l'historiques des PASS depuis 2000. En moyenne, le PASS a été revalorisé de 2 % par année. Il a ainsi été décidé de fixer l'hypothèse à 2 %.

##### **4.3.2 Reconstitution de la carrière**

Les institutions en charge du calcul des rentes légales ont à leur disposition l'ensemble des éléments nécessaires à un calcul précis de la rente des bénéficiaires du régime de la Sécurité sociale et de l'AGIRC-ARRCO. Toutefois, il est rare d'avoir accès au même degré d'information lors de l'évaluation d'un régime de retraite supplémentaire. Il est donc souvent nécessaire d'estimer certaines des informations manquantes.

La base de données disponible dispose d'informations ne portant que sur une partie de la carrière des bénéficiaires du plan, il a été décidé d'estimer les salaires passés manquants afin de déterminer les droits relatifs aux régimes de base. Pour ce faire, une interpolation linéaire a été effectuée entre le salaire de début de carrière et le salaire connu le plus ancien. Cette méthode permet ainsi d'obtenir un historique de salaire jusqu'à la date d'évaluation.

Il est ensuite nécessaire d'estimer les salaires futurs perçus jusqu'à la date de départ à la retraite. Pour ce faire, un taux constant de revalorisation est appliqué. Le taux utilisé varie selon que l'individu considéré est un différé ou non. Si l'individu est un actif, son salaire sera supposé revalorisé selon l'hypothèse de taux d'augmentation des salaires (3 %) chaque année. Dans le cas où l'individu considéré est un différé, son salaire sera revalorisé selon l'hypothèse de revalorisation du PASS (2 %), conformément au règlement du régime.

Il est toutefois à noter que deux éléments composent le salaire : la part fixe et la part variable. La méthode de calcul suppose que la part du salaire variable future sera la même pour les années à venir. De plus, le taux de salaire variable est pondéré par un taux d'atteinte, supposé égal à 75 %.

Ainsi, à ce stade, une estimation de l'historique de salaire de chaque individu du portefeuille est disponible. Une estimation des différentes tranches de salaires servant au calcul des cotisations de retraite légales va ainsi pouvoir être utilisée pour estimer les niveaux de rentes de retraites légales des directeurs composant le portefeuille.

##### **4.3.3 Reconstitution de la retraite**

###### **4.3.3.1 Reconstitution de la rente de retraite du régime de la sécurité sociale**

Il est supposé que tous les individus du portefeuille partent à la retraite à taux plein. De ce fait, le taux appliqué dans le calcul de la rente de la CNAV est de 50 % (cf. équation 4.7). Le SAM peut être calculé à partir de l'historique de salaire construit dans la section précédente. Il n'est pas possible de déterminer le taux  $Prorata_{CNAV}$  avec les données disponibles. Il a été supposé qu'il était égal à 100 %. De ce fait, la formule de calcul de la rente de retraite de la Sécurité sociale devient :

$$\text{Rente} = \text{SAM} \times 50\%. \quad (4.14)$$

### 4.3.3.2 Reconstitution de la rente de retraite de l'AGIRC-ARRCO

L'outil dispose de l'historique des taux de cotisation et des valeurs d'achat des points de l'AGIRC, de l'ARRCO et de l'AGIRC-ARRCO (depuis 2019). Ces taux sont appliqués à leurs tranches respectives sur toute la durée de la carrière des affiliés. Ceci permet d'obtenir une estimation des points détenus par chaque individu au 30 juin 2020.

Les régimes de l'AGIRC et de l'ARRCO ont été fusionnés au 1<sup>er</sup> janvier 2019. Chaque point ARRCO détenu a été transformé en points AGIRC-ARRCO. Chaque point AGIRC a été transformé en environ 0,3478 points AGIRC-ARRCO. Cette valeur du point AGIRC en point ARRCO a été fondée sur la base du prix de ces points en 2018 :

$$\frac{\text{Prix point}_{AGIRC2018}}{\text{Prix point}_{ARRCO2018}} \approx 0,3478.$$

Les éléments préliminaires aux calculs finaux ayant été présenté, il convient maintenant de présenter la méthode de calcul de la provision liée à la rente du régime de retraite supplémentaire. Le calcul de la provision liée à la rente de l'article 39 nécessite plusieurs calculs intermédiaires. En effet, il est nécessaire de déterminer la rente, puis le capital constitutif et enfin la provision actuarielle selon la norme IAS 19.

### 4.3.4 Calcul de la rente

À ce stade, tous les éléments nécessaires au calcul de la rente sont disponibles. Ainsi, le calcul de la rente liée au régime chapeau se fait à l'aide des formules 4.3 et 4.4 et le calcul de la rente additive se fait à l'aide des formules 4.5 et 4.6.

### 4.3.5 Calcul du capital constitutif

Le plan inclut une rente de réversion. De ce fait, le capital constitutif est composé de deux parties : l'une correspondant à la charge du bénéficiaire principal et l'autre correspondant à la charge du réversataire potentiel.

Par ailleurs, le plan prévoit un versement trimestriel de la rente. La rente du plan est à terme échu.

Le capital constitutif du bénéficiaire principal est alors donné par la formule suivante :

$$a_x^{(4)} = \frac{1}{4} \times \sum_{k=1}^{\omega \times 4} {}_{\frac{k}{4}}p_x \times v^{\frac{k}{4}} \times (1 + \tau_{reval})^{\lfloor \frac{k}{4} \rfloor}, \quad (4.15)$$

avec :

- $x$  l'âge du bénéficiaire principal ;
- $\omega$  l'âge de clôture de la table de mortalité considérée ;
- ${}_{\frac{k}{4}}p_x$  la probabilité de survie pour un individu d'âge  $x$  après  $\frac{k}{4}$  années ;
- $v = \frac{1}{1+i}$  le coefficient d'actualisation ;
- $i$  le taux technique, fixé pour chaque individu à sa date de départ à la retraite ;

### 4.3. ÉVALUATION DE LA PROVISION DU RÉGIME DE RETRAITE SUPPLÉMENTAIRE

- $\tau_{reval}$  le taux de revalorisation des rentes, égal à 1 % pour tous les individus ;
- $\lfloor \cdot \rfloor$  la fonction partie entière inférieure.

Compte tenu de l'hypothèse de taux de nuptialité de 80 %, la rente de réversion entre dans le calcul de tous les capitaux constitutifs. Le capital constitutif lié à la rente de réversion, sans prise en compte du taux de réversion, est défini par la formule suivante (en supposant l'indépendance des probabilités de décès des deux individus) :

$$a_{x|y}^{(4)} = \frac{1}{4} \times \sum_{k=1}^{\omega \times 4} {}_{\frac{k}{4}}p_y \times {}_{\frac{k}{4}}q_x \times v^{\frac{k}{4}} \times (1 + \tau_{reval})^{\lfloor \frac{k}{4} \rfloor}, \quad (4.16)$$

avec :

- $x$  l'âge du bénéficiaire principal ;
- $y$  l'âge du réversataire ;
- ${}_{\frac{k}{4}}q_x$  la probabilité de décès d'un individu d'âge  $x$  après  $\frac{k}{4}$  années.

Ainsi, pour une rente donnée, le capital constitutif associé à chaque bénéficiaire est obtenu à l'aide de la formule suivante. Pour rappel, le taux de réversion est de 60 % :

$$\text{Capital constitutif} = \text{Rente} \times \left( a_x^{(4)} + \tau_{reversion} \times a_{x|y}^{(4)} \right) \quad (4.17)$$

#### 4.3.6 La cristallisation des articles 39

En 2014, à travers la directive 2014/50/UE du Parlement européen, l'Union Européenne a souhaité accroître la mobilité des travailleurs. Cette directive visait à mettre fin aux régimes de retraite supplémentaire dont la prestation était conditionnée par la présence du bénéficiaire au sein de l'entreprise à sa date de départ à la retraite. L'ordonnance n°2019-697 datant du 3 juillet 2019 fait suite à cette directive et a pour objet de cristalliser les régimes de retraite supplémentaire dont les prestations dépendent de la présence dans l'entreprise à la date du départ à la retraite.

Suite à cette ordonnance, les entreprises proposant un régime de ce type ont plusieurs choix à leur disposition :

- ils peuvent mettre fin au régime ;
- ils peuvent fermer le régime et cristalliser les droits ;
- ils peuvent convertir les droits acquis au titre du régime vers un nouveau régime article 39.

Toutefois, une exception existe : les régimes ayant été fermés au plus tard le 20 mai 2014 ne sont pas concernés par ces réformes et leurs bénéficiaires peuvent continuer à acquérir des droits. Le régime considéré dans ce mémoire a été fermé avant 2014. Les droits de ses bénéficiaires ne sont ainsi pas affectés par ce changement.

### 4.3.7 Actifs de couverture du régime

Afin de protéger les bénéficiaires de régimes de retraite supplémentaire à prestations définies contre le risque d'insolvabilité des entreprises, l'État impose aux entreprises accordant de tels plans de sécuriser leurs rentes de manière progressive. Ceci se traduit par une obligation de garantir une partie de leur engagements par des organismes habilités (mutuelles, sociétés d'assurance, institutions de prévoyance), par des fiducies ou par des actifs financiers.

L'objectif à moyen terme, en 2030, est d'atteindre un taux sécurisation de 50 % des droits acquis à la retraite. L'assiette de droits prise en compte dans le calcul est plafonnée à une fois et demi le PASS par année.

L'objectif de taux de recouvrement à la date d'évaluation du plan est de 20 %. Toutefois, dans la mesure où l'engagement est externalisé à la date de départ à la retraite des bénéficiaires du plan, il n'est pas nécessaire de constituer un actif de couverture pour ce plan.

### 4.3.8 Fiscalité des régimes à prestations définies pour l'employeur

Les régimes à prestations définies sont soumis à la taxe Fillon. Cette taxe peut prendre plusieurs formes. Selon l'article Article L. 137-11 du Code de la Sécurité sociale, l'employeur a le choix entre plusieurs options :

- une taxe de 24 % sur les cotisations ;
- une taxe de 32 % sur les rentes ;
- une taxe de 48 % soit sur les dotations aux provisions, soit sur le coût des services rendus. Dans le cas où ces éléments donnent lieu à des versements de primes auprès d'organismes habilités (société d'assurance, mutuelle, institut de prévoyance), l'employeur est exonéré de cette taxe. Bien que cette méthode permette une exonération intéressante, elle nécessite des cotisations élevées auprès d'organismes habilités afin de constituer des actifs de couverture. Cette pratique est de ce fait peu utilisée. Enfin, cette option ne concerne que les régimes créés avant le 1<sup>er</sup> janvier 2010 (ce qui est le cas du régime considéré).

L'entreprise offrant le plan présenté dans ce mémoire a décidé de choisir la taxe de 24 % sur les cotisations. Le principe de permanence des méthodes en comptabilité implique que l'option de taxation doit être conservée.

## 4.4 Présentation des résultats de l'évaluation et états comptables sous IAS 19

### 4.4.1 Présentation des résultats avec application de la nouvelle courbe des taux

Le capital constitutif calculé dans la sous-section précédente ne constitue pas l'engagement actuariel de l'employeur. En effet, l'engagement actuariel est un élément qui a été actualisé, pondéré par des probabilités et auquel un prorata d'ancienneté a été appliqué (cf. 1.2).

Ainsi, les principaux résultats de l'évaluation sont présentés dans le tableau suivant :

4.4. PRÉSENTATION DES RÉSULTATS DE L'ÉVALUATION ET ÉTATS COMPTABLES  
SOUS IAS 19

|                                       |             |
|---------------------------------------|-------------|
| <b>Dettes actuarielles 30/06/2020</b> | 229 833 192 |
| <b>Coût normal au 30/06/2020</b>      | 8 700 774   |
| <b>Coût d'intérêt au 30/06/2021</b>   | 1 336 135   |
| <b>Prestations au 30/06/2021</b>      | 2 727 714   |

TABLE 4.6 – Principaux éléments IAS 19 de l'évaluation

Un individu est parti à la retraite au cours de l'année. La valeur de la prestation aussi élevée s'explique par le fait que d'un point de vue comptable, la prestation de l'employeur correspond à l'achat d'un contrat d'assurance prenant en charge le versement des rentes du bénéficiaire. Ceci correspond ainsi au paiement d'un capital unique. La dette actuarielle liée à la prestation future de l'employé a ainsi été soldée.

Ce tableau est synthétique et par souci de simplification certains éléments ont été omis. Les écarts d'expérience, devant refléter l'écart entre les hypothèses et la réalité, n'ont pas été exposés.

L'objectif de ce chapitre est d'illustrer l'impact de la nouvelle courbe des taux construite dans les chapitres précédents. Il convient ainsi de comparer les résultats obtenus à l'évaluation effectuée avec des courbes des taux différentes (ancienne méthode et méthodes alternatives).

Le taux équivalent du plan, calculé à l'aide de la méthode présentée à la sous-section 2.1.7, est d'environ 0,69 %. Cette faible valeur illustre bien le fait que le régime est fermé depuis longtemps et que ses bénéficiaires sont globalement en fin de carrière.

Par ailleurs, il est intéressant d'étudier la répartition de la charge selon l'ancienneté des individus. Le tableau ci-dessous présente les principaux résultats de l'évaluation actuarielle selon l'ancienneté des bénéficiaires :

| <b>Nombre d'années avant la retraite</b> | <b>DBO 2020</b>    | <b>NC 2020</b>   | <b>IC total</b>  | <b>Prestations 2021</b> |
|--|--------------------|------------------|------------------|-------------------------|
| Moins de 5 ans                           | 34 737 467         | 751 475          | 54 014           | 2 727 714               |
| Entre 5 et 10 ans                        | 75 037 849         | 2 572 545        | 326 807          | 0                       |
| Entre 10 et 15 ans                       | 101 148 655        | 4 396 040        | 770 131          | 0                       |
| Entre 15 et 20 ans                       | 18 803 038         | 980 714          | 184 513          | 0                       |
| <b>Total</b>                             | <b>229 727 009</b> | <b>8 700 774</b> | <b>1 335 467</b> | <b>2 727 714</b>        |

TABLE 4.7 – Principaux éléments IAS 19 de l'évaluation selon l'ancienneté

La majorité de l'engagement est lié à des bénéficiaires partant à la retraite dans 5 à 15 ans. Cela était attendu, l'étude de la répartition des âges des actifs effectuée dans la sous-section 4.1 a en effet mis en évidence le fait que la majorité des directeurs avaient entre 55 et 60 ans.

#### 4.4.2 Comparaison des résultats selon la courbe des taux utilisée

##### 4.4.2.1 Comparaison des résultats avec la courbe des taux de l'ancienne méthode

Les principaux résultats de l'évaluation à l'aide de la courbe issue de l'ancienne méthode sont présentés dans le tableau ci-dessous.

|                                       |             |
|---------------------------------------|-------------|
| <b>Dettes actuarielles 30/06/2020</b> | 236 111 964 |
| <b>Coût normal au 30/06/2020</b>      | 8 968 601   |
| <b>Coût d'intérêt au 30/06/2021</b>   | 727 523     |
| <b>Prestations au 30/06/2021</b>      | 2 727 714   |
| <b>Taux équivalent</b>                | 0,41 %      |

TABLE 4.8 – Principaux éléments IAS 19 de l'évaluation effectuée à l'aide de l'ancienne courbe des taux

Comme attendu, la dette actuarielle et le coût normal sont supérieurs aux résultats obtenus à l'aide de la nouvelle courbe des taux. Ceci s'explique par le fait que cette courbe est supérieure en tout point à l'ancienne courbe. Lors du passage à la nouvelle courbe des taux, la dette actuarielle et le coût des services rendus ont respectivement baissé de 2,70 % et 2,99 %.

Par ailleurs, les prestations des deux évaluations sont identiques. Ceci s'explique par le fait que les prestations ne sont pas actualisées car elles sont considérées comme étant versées à la date d'évaluation.

De plus, le coût d'intérêt obtenu avec l'utilisation de la nouvelle courbe des taux est nettement supérieur. Il a en effet augmenté de 83,56 %. Cette forte augmentation s'explique par le fait que le coût d'intérêt représente l'augmentation de l'engagement lié à sa capitalisation au cours d'une année. Une courbe des taux plus élevée implique des rendements financiers attendus plus élevés. Le coût d'intérêt est ainsi accru.

Enfin, le taux équivalent a augmenté d'environ 70,56 %. Cette forte augmentation s'explique par l'écart important des courbes des taux, notamment pour les maturités comprises entre 5 et 15 ans. En effet, comme l'indique le tableau 4.7, la majorité de l'engagement de l'entreprise était lié à des individus partant à la retraite dans 5 à 15 ans.

#### 4.4.2.2 Comparaison des résultats avec la courbe des taux de l'ancienne méthode

La nouvelle méthode de construction de la courbe des taux sélectionne les modèles utilisés selon des critères statistiques appréciant la qualité de leurs ajustements. Toutefois, ces critères ne sont pas absolus et ils pourraient ne pas prendre en compte tous les éléments justifiant l'utilisation d'une méthode plutôt qu'une autre. Il est ainsi intéressant d'étudier les résultats obtenus si des courbes des taux alternatives avaient été considérées. Dans ce cadre, deux méthodes alternatives ont été retenues :

- la courbe alternative 1 a été obtenue à partir d'une courbe des taux fondée sur les obligations d'entreprises du portefeuille 2 et modélisée à l'aide de l'approche de F. Gbongue et F. Planchet du modèle de Vasicek & Fong. À compter de la 12<sup>ème</sup> année, les taux de cette courbe ont été fondés sur une courbe des taux ajustée sur les obligations d'États du portefeuille 4 et modélisée à l'aide du modèle de Björk & Christensen ;
- la courbe alternative 2 a été obtenue à partir d'une courbe des taux fondée sur les obligations d'entreprises du portefeuille 1 et modélisée à l'aide du modèle de Nelson et Siegel. À compter de la 12<sup>ème</sup> année, les taux de cette courbe ont été fondés sur une courbe des

taux ajustée sur les obligations d'États du portefeuille 3 et modélisée à l'aide du modèle de Nelson et Siegel.

Ces deux courbes des taux, ainsi que celle obtenue à l'aide de la nouvelle méthode proposée par ce mémoire, sont observables dans le graphique ci-dessous :

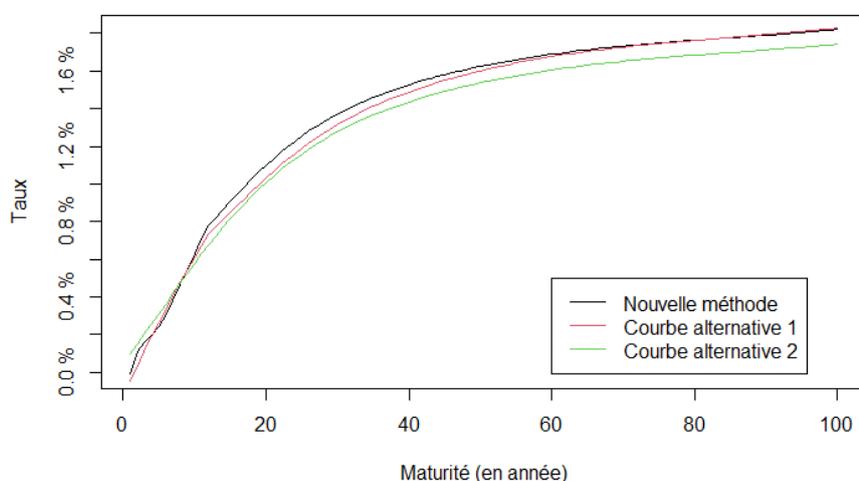


FIGURE 4.7 – Courbes des taux alternatives et courbe des taux issue de la nouvelle méthode

Les résultats obtenus suite à l'évaluation du plan à l'aide des courbes des taux alternatives sont précisés dans les tableaux ci-dessous :

| Nombre d'années avant la retraite | DBO 2020           | NC 2020          | IC total         | Prestations 2021 |
|-----------------------------------|--------------------|------------------|------------------|------------------|
| Moins de 5 ans                    | 34 759 867         | 752 203          | 42 858           | 2 727 714        |
| Entre 5 et 10 ans                 | 74 968 046         | 2 570 190        | 337 505          | 0                |
| Entre 10 et 15 ans                | 101 646 640        | 4 417 780        | 733 022          | 0                |
| Entre 15 et 20 ans                | 19 001 972         | 991 144          | 174 465          | 0                |
| <b>Total</b>                      | <b>230 376 524</b> | <b>8 731 318</b> | <b>1 287 851</b> | <b>2 727 714</b> |

TABLE 4.9 – Principaux éléments IAS 19 de l'évaluation selon l'ancienneté effectuée à l'aide de la courbe des taux alternative 1

| Nombre d'années avant la retraite | DBO 2020           | NC 2020          | IC total         | Prestations 2021 |
|-----------------------------------|--------------------|------------------|------------------|------------------|
| Moins de 5 ans                    | 34 678 073         | 750 368          | 71 359           | 2 727 714        |
| Entre 5 et 10 ans                 | 74 981 758         | 2 570 928        | 337 974          | 0                |
| Entre 10 et 15 ans                | 102 198 699        | 4 441 701        | 690 449          | 0                |
| Entre 15 et 20 ans                | 19 096 276         | 996 056          | 169 609          | 0                |
| <b>Total</b>                      | <b>230 954 806</b> | <b>8 759 054</b> | <b>1 269 391</b> | <b>2 727 714</b> |

TABLE 4.10 – Principaux éléments IAS 19 de l'évaluation selon l'ancienneté effectuée à l'aide de la courbe des taux alternative 2

Les taux équivalents liés aux évaluations effectuées à l'aide des courbes des taux alternatives 1 et 2 sont respectivement de 0,66 % et 0,64 %, soit des baisses de l'ordre de 4,27 % et 8,07 % par rapport au taux équivalent obtenu avec l'application de la nouvelle courbe des taux.

Le passage de la nouvelle courbe des taux à ces courbes des taux alternatives implique une augmentation de l'engagement de l'entreprise. Ceci s'explique par le fait que ces deux courbes sont pour la plupart des maturités inférieures à la courbe des taux issue de la nouvelle méthode. Toutefois, pour les maturités les plus courtes, les courbes alternatives sont parfois supérieures à la nouvelle courbe des taux. La méthode alternative 2 fournit notamment des taux supérieurs pour les maturités comprises entre 0 et 8 ans. Ceci explique le fait que l'engagement lié aux deux premières catégories de bénéficiaires (partant à la retraite dans 0 à 10 ans) est plus faible.

Néanmoins, le passage de la nouvelle courbe des taux aux courbes des taux issues des méthodes alternatives 1 et 2 entraîne respectivement une baisse de l'engagement de 0,28 % et 0,53 %. Cette baisse est faible et s'explique par le fait que les courbes sont très proches. Ce test de sensibilité aux méthodes choisies pour construire la courbe des taux est positif. En effet, il implique que les autres modèles fournissent des résultats cohérents, bien qu'ils semblent moins bien s'ajuster aux données.

# Conclusion

Ce mémoire a tâché de proposer une méthode de construction d'une courbe des taux soumise à *IAS 19* dans un univers de taux bas. L'objectif était de construire un outil permettant de régulièrement, et rapidement, mettre à jour la courbe des taux de référence utilisée par le cabinet Deloitte lors de ses missions de conseil et d'audit.

Le point de départ de ce mémoire était l'ancien outil de construction de la courbe des taux. Son fonctionnement et ses limites ont ainsi été présentées. L'ancienne méthode se fondait exclusivement sur des éléments issus de travaux préliminaires proposés par Markit et la Banque Centrale Européenne. Le caractère synthétique de ces éléments n'était pas nécessairement adapté à la construction d'une courbe des taux, dans la mesure où cette dernière a vocation à proposer des taux pour un large panel de maturités.

Les méthodes de construction de la courbe des taux envisagées pour la nouvelle approche ont ainsi cherché à palier cette difficulté et ont toutes été fondées sur des éléments plus bruts, correspondant aux caractéristiques de chaque obligations du portefeuille considéré. Par ailleurs, la méthode de sélection du portefeuille a été étendue et retient dorénavant des obligations notées au minimum AA par au moins une grande agence de notation. Cette approche a en partie permis d'obtenir une nouvelle courbe des taux supérieure en tout point à celle issue de l'ancienne méthode.

Dans la mesure où la nouvelle méthode fonde ses calculs directement sur les caractéristiques de chaque obligation considérée, des méthodes adaptées ont dû être envisagées. Les méthodes de *bootstrap*, de Nelson-Siegel, de Svensson, de Björk et Christensen et de Vasicek (1982) ont ainsi été comparées.

La courbe des taux proposée étant soumise à la norme *IAS 19*, a été fondée sur deux jeux de données : des obligations d'entreprises pour les premières maturités puis des obligations d'États pour des maturités plus élevées. Il a ensuite été décidé de comparer deux approches pour chacun de ces portefeuilles : une approche fondée sur des obligations sans option incorporée et une approche fondée sur un portefeuille incluant des obligations à options incorporées. Après ajustement et comparaison, il a été décidé de retenir l'approche sans option incorporée. Elle semblait en effet mieux s'ajuster aux données.

Les modèles s'ajustant sur des portefeuilles d'obligations sans option incorporée ont ensuite été comparés pour le portefeuille d'obligations d'entreprises et le portefeuille d'obligations d'États. Après comparaison de la qualité des ajustements à l'aide d'indicateurs statistiques, le modèle de Svensson a été retenu pour la construction de la courbe fondée sur des obligations d'entreprises. Deux types d'approches ont été considérées pour l'ajustement des modèles sur le portefeuille

d'obligations d'États (hors méthode du *bootstrap*). Une des deux approches accordait un poids supplémentaire à chaque obligation selon sa durée. Cette approche a permis d'accorder plus d'importance aux obligations de moyen et long termes. Cette méthode d'ajustement a été retenue dans la mesure où elle semblait de ce fait mieux s'ajuster aux données de moyen et long termes. Le modèle finalement retenu pour l'ajustement sur le portefeuille de taux d'États a été le modèle de Svensson avec pondération par la durée. Le modèle de Vasicek a été éliminé avant la construction des indicateurs statistiques car la nature des données considérées impliquait que le résultat de l'ajustement ne respectait pas les limites théoriques du modèle.

Une fois la courbe des taux fondée sur des obligations d'entreprises et la courbe des taux fondée sur des obligations d'États obtenues, la courbe des taux finale a pu être construite en « accrochant » les deux courbes. Pour cela, un écart de taux constant à ajouter aux taux issus d'obligations d'États a été considéré.

Ce mémoire a ensuite proposé une illustration de l'utilisation d'une courbe des taux lors d'une évaluation actuarielle. L'évaluation considérée portait sur la provision liée à un régime de type article 39. Le régime de retraite supplémentaire considéré proposait deux types de rentes : l'une additive et l'autre différentielle. Le calcul d'une rente différentielle nécessite de connaître la pension de retraite liée au régime de base. Ainsi, le fonctionnement de la retraite en France a été brièvement présenté afin de proposer une méthode de reconstitution de la rente légale. Les formules actuarielles utilisées lors de l'évaluation ont également été exposées et certaines spécificités du plan ont été précisées.

Les résultats obtenus avec l'application de la nouvelle courbe des taux ont été comparés aux résultats obtenus en utilisant la courbe des taux issue de l'ancienne méthode de construction. La dette actuarielle liée au plan a baissé d'environ 3 %. Enfin, un test de sensibilité sur la sélection de la méthode de construction de la courbe des taux a été effectué à l'aide de courbes alternatives. Bien que les taux d'actualisations issus de ces courbes soient différents de ceux issus de la nouvelle courbe, les résultats de l'évaluation actuarielle étaient cohérents.

La méthode proposée dans ce mémoire s'inscrit dans un cadre particulier : la norme *IAS 19*. Cette dernière ne définit pas de méthode précise pour la construction d'une courbe des taux d'actualisation. Elle impose toutefois le recours à des obligations de haute qualité. L'objectif est de proposer une courbe des taux proches des taux sans risque. Cette approche n'est pas nécessairement respectée dans d'autres cadres (Solvabilité 2, IFRS 17, etc.). Il serait ainsi intéressant d'étudier les approches et les objectifs recherchés lors de la construction d'une courbe des taux soumise à d'autres normes que *IAS 19*. Les données et les modèles utilisés pourraient varier et les taux obtenus en seraient différents.

Par ailleurs, la courbe des taux construite établit un lien entre des valeurs passées et futures. Il serait intéressant de considérer des modèles stochastiques permettant la projection de la courbe des taux (Hull & White, HJM, Vasicek, etc.). Cette approche permettrait de projeter les flux des régimes et d'étudier leurs financements. Les entreprises proposant des plans d'avantages du personnel peuvent demander une étude approfondie des financements futurs des régimes. Ceci s'explique par le fait que leur charge est souvent élevée, notamment pour des régimes à prestations définies similaires à celui présenté dans ce mémoire. Le recours à une courbe des taux projetée permettraient ainsi aux entreprises de mieux anticiper leurs dépenses futures.

# Bibliographie

BANK FOR INTERNATIONAL SETTLEMENTS (2005). Zero-coupon yield curves : technical documentation. *BIS Papers n°25*.

BJÖRK, T. et CHRISTENSEN, B. (1999). Interest rate dynamics and consistent forward rate curves. *Mathematical Finance* 9(4), 323—348.

BRIGO, D. et MERCURIO, F. (2006). *Interest Rate Models - Theory and Practice*. Springer Finance, Springer-Verlag, Berlin, seconde édition.

COUSIN, A. (2020). *Modèles financiers en actuariat*. Support de cours, Université de Strasbourg.

DEVOLDER, P. (2019). *Assurance vie 3 : Théorie actuarielle des retraites*. Support de cours, Université de Strasbourg.

DIEBOLD, F. et LI, C. (2006). Forecasting the term structure of government bond yields. *Journal of Econometrics, Elsevier, Vol. 130 (2)*.

DUMUR, C. et MANACH, C. (2019). *Gestion des fonds de pension*. Support de cours, Université de Strasbourg.

EUROPÉENNE, B. C. (2020). Qu'est-ce que l'inflation? <https://www.ecb.europa.eu/ecb/educational/hicp/html/index.fr.html>.

FISHER, M. (2001). Forces that shape the yield curve. *Federal Reserve Banks - Federal Reserve Bank of Atlanta*.

FRANCK VON LENNEP, d. d. l. s. s. (2020). Instruction interministerielle n° dss/3c/5b/2020/135 du 27 juillet 2020.

GBONGUE, F. et PLANCHET, F. (2015). Analyse comparative des modèles de construction d'un courbe des taux sans risque dans la zone cipres. *Bulletin français d'actuariat, Vol. 15, n° 30*.

IASB (2011). International accounting standards 19. <https://www.ifrs.org/>. Traduction de la norme *IAS 19* révisée.

IHS MARKIT (2020). Markit iBoxx EUR Benchmark Index Guide.

INSTITUT DES ACTUAIRES (2001). Une courbe de taux pour les assureurs. *Tribune de l'Assurance*.

KLOCK, A. (2017). *La projection du taux technique dans le cadre de la gestion d'un régime de retraite à prestations définies*. Mémoire d'actuariat, Université de Strasbourg.

NELSON, C. et SIEGEL, A. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. *Journal of Business*, 60(4).

- PORTRAIT, R. et PONCET, P. (2014). *Finance de marché*. Dalloz, Paris, quatrième édition. Instrument de base, produits dérivés, portefeuilles et risques.
- RONCALLI, T. (1998). *La structure par terme des taux zéro : Modélisation et implémentation numérique*. Thèse, Université Montesquieu-Bordeaux IV.
- SVENSSON, L. (1994). Estimating and interpreting forward interest rates : Sweden 1992-1994. *International monetary fund, IMF Working Paper, 1994/114*.
- TANGGAARD, C. (1992). Nonparametric smoothing of yield curves. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 9, pp. 251-267.
- VASICEK, O. et FONG, H. G. (1982). Term structure modeling using exponential splines. *The Journal of Finance*, 37 n°2, pp. 339-348.

## Annexe A

# Le taux d'actualisation selon la norme *IAS 19*

### Hypothèses actuarielles : taux d'actualisation

§83 - Le taux à appliquer pour actualiser les obligations au titre des avantages postérieurs à l'emploi (qu'il s'agisse de régimes capitalisés ou non) doit être déterminé par référence aux taux de rendement, à la fin de la période de présentation de l'information financière, du marché des obligations d'entreprise de haute qualité. Dans le cas d'une monnaie pour laquelle il n'existe pas de marché large pour ce type d'obligations, il faut se référer aux taux de rendement (à la fin de la période de présentation de l'information financière) du marché des obligations d'État libellées dans cette monnaie. La monnaie et la durée de ces obligations d'entreprise ou de ces obligations d'État doivent correspondre à la monnaie et à la durée estimée des obligations au titre des avantages postérieurs à l'emploi.

§84 - L'hypothèse actuarielle relative au taux d'actualisation a un effet significatif. Le taux d'actualisation reflète la valeur temps de l'argent, mais il ne reflète ni le risque actuariel ni le risque de placement. De plus, ce taux d'actualisation ne reflète pas le risque de crédit spécifique à l'entité auquel s'exposent ses créanciers ; il ne reflète pas non plus le risque que les données réelles futures diffèrent des hypothèses actuarielles.

§85 - Le taux d'actualisation reflète le calendrier estimé de versement des prestations. En pratique, les entités appliquent souvent un taux d'actualisation unique, moyen et pondéré, qui reflète ses estimations quant au calendrier et au montant des versements, ainsi que la monnaie dans laquelle les prestations doivent être versées.

§86 - Dans certains cas, il se peut qu'il n'existe pas de marché large des obligations à échéance suffisamment longue pour correspondre à l'échéance estimée de tous les versements de prestations. En pareil cas, l'entité utilise les taux d'intérêt actuels du marché correspondant à l'échéance appropriée pour actualiser les paiements à court terme et estime le taux d'actualisation pour les échéances plus lointaines par extrapolation des taux d'intérêt actuels du marché à l'aide de la courbe des taux. Il est peu probable que la valeur actualisée totale d'une obligation au titre des prestations définies soit particulièrement sensible au taux d'actualisation appliqué à la fraction des prestations payable au-delà des dates d'échéance les plus lointaines des obligations d'entreprise ou des obligations d'État.

## Annexe B

# Périmètre d'application de la norme *IAS 19*

Les extraits de la norme *IAS 19* présentés ici sont des traductions issus du texte officiel faisant foi, rédigé en anglais. Ils sont proposés par *IFRS Foundation*

### **§3 - Les avantages du personnel auxquels s'applique la présente norme comprennent notamment ceux accordés en vertu :**

a) de régimes formalisés ou autres accords formalisés passés entre une entité et des membres du personnel individuels, des groupes de salariés ou leurs représentants ;

b) de dispositions légales ou d'accords sectoriels aux termes desquels les entités sont tenues de cotiser aux régimes nationaux, régionaux, sectoriels ou autres régimes multiemployeurs ; ou

c) d'usages qui donnent lieu à une obligation implicite. Les usages donnent lieu à une obligation implicite lorsque l'entité n'a pas d'autre solution réaliste que de payer les avantages du personnel. À titre d'exemple, une obligation implicite existe lorsqu'un changement des usages de l'entité entraînerait une dégradation inacceptable de ses relations avec le personnel.

### **§4 - Les avantages du personnel comprennent :**

a) les avantages du personnel à court terme comme les salaires et les cotisations de sécurité sociale, les congés payés et les congés maladie, l'intéressement et les primes (payables dans les douze mois suivant la fin de la période) ainsi que les avantages non monétaires (comme l'assistance médicale, le logement, les voitures et les biens ou services gratuits ou subventionnés) dont bénéficient les membres du personnel en activité ;

b) les avantages postérieurs à l'emploi comme les pensions et autres prestations de retraite, l'assurance-vie postérieure à l'emploi et l'assistance médicale postérieure à l'emploi ;

c) les autres avantages à long terme, notamment les congés liés à l'ancienneté ou les congés sabbatiques, les jubilés et autres avantages liés à l'ancienneté, les indemnités pour invalidité de longue durée et, s'ils sont payables douze mois ou plus après la fin de la période, l'intéressement, les primes et les rémunérations différées ; et

---

d) les indemnités de fin de contrat de travail.

Parce que chacune des catégories identifiées aux points a) à d) ci-dessus présente des caractéristiques différentes, la présente norme établit, pour chacune, des dispositions distinctes.

## Annexe C

# Courbe des taux selon l'ancienne méthode

| Maturité | Taux    | Maturité | Taux   | Maturité | Taux   | Maturité | Taux   |
|----------|---------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|
| 1        | -0,16 % | 26       | 0,90 % | 51       | 1,01 % | 76       | 1,01 % |
| 2        | -0,14 % | 27       | 0,91 % | 52       | 1,01 % | 77       | 1,01 % |
| 3        | -0,10 % | 28       | 0,93 % | 53       | 1,01 % | 78       | 1,01 % |
| 4        | -0,05 % | 29       | 0,94 % | 54       | 1,01 % | 79       | 1,01 % |
| 5        | 0,01 %  | 30       | 0,94 % | 55       | 1,01 % | 80       | 1,01 % |
| 6        | 0,08 %  | 31       | 0,95 % | 56       | 1,01 % | 81       | 1,01 % |
| 7        | 0,14 %  | 32       | 0,96 % | 57       | 1,01 % | 82       | 1,01 % |
| 8        | 0,21 %  | 33       | 0,97 % | 58       | 1,01 % | 83       | 1,01 % |
| 9        | 0,28 %  | 34       | 0,97 % | 59       | 1,01 % | 84       | 1,01 % |
| 10       | 0,34 %  | 35       | 0,98 % | 60       | 1,01 % | 85       | 1,01 % |
| 11       | 0,40 %  | 36       | 0,98 % | 61       | 1,01 % | 86       | 1,01 % |
| 12       | 0,46 %  | 37       | 0,98 % | 62       | 1,01 % | 87       | 1,01 % |
| 13       | 0,51 %  | 38       | 0,99 % | 63       | 1,01 % | 88       | 1,01 % |
| 14       | 0,56 %  | 39       | 0,99 % | 64       | 1,01 % | 89       | 1,01 % |
| 15       | 0,61 %  | 40       | 0,99 % | 65       | 1,01 % | 90       | 1,01 % |
| 16       | 0,65 %  | 41       | 0,99 % | 66       | 1,01 % | 91       | 1,01 % |
| 17       | 0,69 %  | 42       | 1,00 % | 67       | 1,01 % | 92       | 1,01 % |
| 18       | 0,72 %  | 43       | 1,00 % | 68       | 1,01 % | 93       | 1,01 % |
| 19       | 0,76 %  | 44       | 1,00 % | 69       | 1,01 % | 94       | 1,01 % |
| 20       | 0,78 %  | 45       | 1,00 % | 70       | 1,01 % | 95       | 1,01 % |
| 21       | 0,81 %  | 46       | 1,00 % | 71       | 1,01 % | 96       | 1,01 % |
| 22       | 0,83 %  | 47       | 1,00 % | 72       | 1,01 % | 97       | 1,01 % |
| 23       | 0,85 %  | 48       | 1,00 % | 73       | 1,01 % | 98       | 1,01 % |
| 24       | 0,87 %  | 49       | 1,00 % | 74       | 1,01 % | 99       | 1,01 % |
| 25       | 0,89 %  | 50       | 1,00 % | 75       | 1,01 % | 100      | 1,01 % |

TABLE C.1 – Courbe des taux selon l'ancienne méthode au 30/06/2020



avec :

- $U_k = P_k + A_k$
- $Z_{k,i} = g_i(X_{k,1}) + \sum_{j=1}^{L_k} C_k g_i(X_{k,j})$  pour  $i \in \llbracket 1 : m \rrbracket$  avec  $X$  la matrice des maturités transformées obtenue avec la relation 3.10;
- $Z_{k,m+1} = -\frac{C_k}{P_k} \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)_k$  ;
- $Z_{k,m+2} = -I_k$

Pour calculer

$$\omega_k = \left( \frac{\partial P}{\partial Y} \right)_k^2 ; \quad (D.4)$$

on utilise le fait que  $\frac{\partial P}{\partial Y}$  correspond à la sensibilité du prix au taux d'intérêt. Cette statistique peut être exprimée à partir de la duration de l'obligation considérée. On commence donc par calculer la duration de Macaulay présentée à la formule 1.1 et on détermine la sensibilité à l'aide de la relation suivante :

$$S_k = \frac{D_k}{1 + Y_k} ; \quad (D.5)$$

avec :

- $D_k$  la *duration* de l'obligation  $k$ ;
- $Y_k$  le taux actuariel de l'obligation  $k$ .

La solution de l'équation D.3 est alors donnée par la méthode des moindres carrés généralisée et est donnée par l'équation suivante :

$$\hat{\beta} = (Z^T \Omega^{-1} Z)^{-1} Z^T \Omega^{-1} U. \quad (D.6)$$

Il est ensuite possible de calculer la somme des carrés résiduels et de déterminer  $\hat{\alpha}$  en la minimisant<sup>2</sup> :

$$\hat{\alpha} = \underset{\alpha}{\operatorname{argmin}} S(\alpha) \quad \text{avec } S(\alpha) = U^T \Omega^{-1} U - \hat{\beta}^T Z^T \Omega^{-1} U. \quad (D.7)$$

Finalement, la fonction d'actualisation  $D$ , qui est équivalente au taux d'actualisation, est alors donnée par la formule suivante :

$$\hat{D}(t) = \sum_{i=1}^m \hat{\beta}_i g_i(1 - \exp(-\hat{\alpha}t)). \quad (D.8)$$

2. Notons qu'il est nécessaire d'associer à  $\hat{\alpha}$  une valeur de départ.

## Annexe E

# Courbe des taux selon la nouvelle méthode

| Maturité | Taux    | Maturité | Taux   | Maturité | Taux   | Maturité | Taux   |
|----------|---------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|
| 1        | -0,01 % | 26       | 1,28 % | 51       | 1,63 % | 76       | 1,75 % |
| 2        | 0,11 %  | 27       | 1,30 % | 52       | 1,64 % | 77       | 1,76 % |
| 3        | 0,16 %  | 28       | 1,33 % | 53       | 1,65 % | 78       | 1,76 % |
| 4        | 0,19 %  | 29       | 1,35 % | 54       | 1,65 % | 79       | 1,76 % |
| 5        | 0,24 %  | 30       | 1,37 % | 55       | 1,66 % | 80       | 1,76 % |
| 6        | 0,31 %  | 31       | 1,39 % | 56       | 1,67 % | 81       | 1,77 % |
| 7        | 0,38 %  | 32       | 1,41 % | 57       | 1,67 % | 82       | 1,77 % |
| 8        | 0,46 %  | 33       | 1,43 % | 58       | 1,68 % | 83       | 1,77 % |
| 9        | 0,55 %  | 34       | 1,44 % | 59       | 1,68 % | 84       | 1,77 % |
| 10       | 0,63 %  | 35       | 1,46 % | 60       | 1,69 % | 85       | 1,78 % |
| 11       | 0,71 %  | 36       | 1,47 % | 61       | 1,69 % | 86       | 1,78 % |
| 12       | 0,78 %  | 37       | 1,49 % | 62       | 1,70 % | 87       | 1,78 % |
| 13       | 0,82 %  | 38       | 1,50 % | 63       | 1,70 % | 88       | 1,78 % |
| 14       | 0,86 %  | 39       | 1,51 % | 64       | 1,71 % | 89       | 1,79 % |
| 15       | 0,91 %  | 40       | 1,53 % | 65       | 1,71 % | 90       | 1,79 % |
| 16       | 0,95 %  | 41       | 1,54 % | 66       | 1,72 % | 91       | 1,79 % |
| 17       | 0,99 %  | 42       | 1,55 % | 67       | 1,72 % | 92       | 1,80 % |
| 18       | 1,03 %  | 43       | 1,56 % | 68       | 1,73 % | 93       | 1,80 % |
| 19       | 1,06 %  | 44       | 1,57 % | 69       | 1,73 % | 94       | 1,80 % |
| 20       | 1,10 %  | 45       | 1,58 % | 70       | 1,73 % | 95       | 1,80 % |
| 21       | 1,13 %  | 46       | 1,59 % | 71       | 1,74 % | 96       | 1,81 % |
| 22       | 1,17 %  | 47       | 1,60 % | 72       | 1,74 % | 97       | 1,81 % |
| 23       | 1,20 %  | 48       | 1,61 % | 73       | 1,74 % | 98       | 1,81 % |
| 24       | 1,23 %  | 49       | 1,62 % | 74       | 1,75 % | 99       | 1,82 % |
| 25       | 1,25 %  | 50       | 1,62 % | 75       | 1,75 % | 100      | 1,82 % |

TABLE E.1 – courbe des taux selon la nouvelle méthode au 30/06/2020

## Annexe F

# Hypothèses CNAV

| <b>Année de naissance</b>          | <b>Âge d'ouverture des droits</b> | <b>Âge du taux plein</b> |
|------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|
| Avant 2 <sup>e</sup> semestre 1951 | 60 ans                            | 65 ans                   |
| 2 <sup>e</sup> semestre 1951       | 60 ans et 4 mois                  | 65 ans et 4 mois         |
| 1952                               | 60 ans et 9 mois                  | 65 ans et 9 mois         |
| 1953                               | 61 ans et 2 mois                  | 66 ans et 2 mois         |
| 1954                               | 61 ans et 7 mois                  | 66 ans et 7 mois         |
| 1955 et après                      | 62 ans                            | 67 ans                   |

TABLE F.1 – CNAV : âges d'ouverture des droits et âges du taux plein

| <b>Année de naissance</b> | <b>Trimestres requis</b> |
|---------------------------|--------------------------|
| 1948                      | 160                      |
| 1949                      | 161                      |
| 1950                      | 162                      |
| 1951                      | 163                      |
| 1952                      | 164                      |
| 1953 et 1954              | 165                      |
| 1955 à 1957               | 166                      |
| 1958 à 1960               | 167                      |
| 1961 à 1963               | 168                      |
| 1964 à 1966               | 169                      |
| 1967 à 1969               | 170                      |
| 1970 à 1972               | 171                      |
| 1973 et plus              | 172                      |

TABLE F.2 – CNAV : nombre de trimestres requis par année de naissance

## Annexe G

### Paramètres - AGIRC-ARRCO

| Âge au moment du départ en retraite | Coefficient appliqué en pourcentage | Nombre de trimestres manquants pour le taux plein |
|-------------------------------------|-------------------------------------|---|
| Âge de taux plein - 5 ans           | 78,00 %                             | 20  |
| Âge de taux plein - 4,75 ans        | 79,25 %                             | 19  |
| Âge de taux plein - 4,5 ans         | 80,50 %                             | 18  |
| Âge de taux plein - 4,25 ans        | 81,75 %                             | 17  |
| Âge de taux plein - 4 ans           | 83,00 %                             | 16  |
| Âge de taux plein - 3,75 ans        | 84,25 %                             | 15  |
| Âge de taux plein - 3,5 ans         | 85,50 %                             | 14  |
| Âge de taux plein - 3,25 ans        | 86,75 %                             | 13  |
| Âge de taux plein - 3 ans           | 88,00 %                             | 12  |
| Âge de taux plein - 2,75 ans        | 89,00 %                             | 11  |
| Âge de taux plein - 2,5 ans         | 90,00 %                             | 10  |
| Âge de taux plein - 2,25 ans        | 91,00 %                             | 9   |
| Âge de taux plein - 2 ans           | 92,00 %                             | 8   |
| Âge de taux plein - 1,75 ans        | 93,00 %                             | 7   |
| Âge de taux plein - 1,5 ans         | 94,00 %                             | 6   |
| Âge de taux plein - 1,25 ans        | 95,00 %                             | 5   |
| Âge de taux plein - 1 ans           | 96,00 %                             | 4   |
| Âge de taux plein - 0,75 ans        | 97,00 %                             | 3   |
| Âge de taux plein - 0,5 ans         | 98,00 %                             | 2   |
| Âge de taux plein - 0,25 ans        | 99,00 %                             | 1   |

TABLE G.1 – Coefficient de minoration - AGIRC-ARRCO

## Annexe H

# Hypothèses du régime de retraite supplémentaire

|  |                |         |
|--|----------------|---------|
| Date d'évaluation  | 30/06/2020     |         |
| <b>I. Hypothèses démographiques</b>  |                |         |
| Taux de sortie   | 15-4 ans       | 17,87 % |
|  | 25-29 ans      | 13,64 % |
|  | 30-34 ans      | 9,97 %  |
|  | 35-39 ans      | 6,87 %  |
|  | 40-44 ans      | 4,33 %  |
|  | 45-49 ans      | 2,36 %  |
|  | 50-54 ans      | 0,95 %  |
|  | 55 ans et plus | 0,00 %  |
| Taux de mortalité femme  | TGF-05         |         |
| Taux de mortalité homme  | TGH-05         |         |
| Âge de début de carrière   | 25 ans         |         |
| Âge de fin de carrière   | 65 ans         |         |
| Taux d'atteinte du bonus   | 75 %           |         |
| <b>Hypothèses liées à la réversion</b>                                     |                |         |
| Taux de réversion pour conjoint  | 60 %           |         |
| Taux de nuptialité   | 80 %           |         |
| Différence d'âge entre les conjoints<br>(âge de l'homme - âge de la femme) | 3 ans          |         |
| <b>II. Hypothèses financières</b>  |                |         |
| Taux d'actualisation   | cf. Annexe E   |         |
| Taux technique   | 0,00 %         |         |
| Taux d'inflation   | 1,75 %         |         |
| Taux d'augmentation des salaires   | 3,00 %         |         |
| Salaires de début de carrière  | 130 % du PASS  |         |
| Taux de revalorisation des rentes AGIRC-ARRCO                              | 1,00 %         |         |
| Taux de revalorisation des rentes de l'article 39                          | 1,00 %         |         |
| Taux de revalorisation du salaire de référence de l'AGIRC-ARRCO            | 2,00 %         |         |
| Taux de revalorisation du PASS   | 2,00 %         |         |

TABLE H.1 – Tableau récapitulatif des hypothèses du régime de retraite supplémentaire