

Mémoire présenté devant l'Université de Paris-Dauphine
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine
et l'admission à l'Institut des Actuaires

le

Par : Charles GRANIER

Titre : Intérêt du modèle LMM-SABR pour la modélisation des taux d'intérêt en assurance-vie

Confidentialité : Non Oui (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaires :*

Entreprise :
Nom : Exiom Partners
Signature :

*Membres présents du Jury du Certificat
d'Actuaire de Paris-Dauphine :*

Directeur de Mémoire en entreprise :
Nom : de VANDIERE Elisabeth
Signature :

*Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise

Bibliothèque :

Signature du candidat

Résumé

Le cadre réglementaire de l'assurance impose la *market consistency* des grandeurs financières impactant la gestion du risque des assureurs. Ceci conduit à la recherche de modèles offrant la représentation la plus précise possible, et jusqu'à présent, le modèle LMM+ semblait répondre le mieux à ces exigences. Cependant, il n'est pas exempt de critiques, notamment en ce qui concerne sa calibration, qui est souvent qualifiée de longue, coûteuse et sujette à l'instabilité. L'année 2022 a de plus été marqué par une remontée brutale des taux, événement d'autant plus notable qu'il est survenu après une période prolongée de baisse. Cette transformation majeure a suscité des interrogations sur les limites du modèle LMM+, étant alors contrebalancées par une calibration que relativement peu satisfaisante.

Cette étude se penche sur une approche alternative basée sur le modèle LMM-SABR dans le contexte de remontée des taux. Ce dernier est basé sur le SABR, modèle très réputé en finance. Le cadre théorique de ces modèles est alors précisément examiné afin d'objectivement évaluer leur calibration respective. La mise en œuvre de ces modèles, associée à une validation rigoureuse, garantit la qualité de cette démarche.

Sur le plan de la qualité du modèle, une plus grande flexibilité du LMM-SABR est déterminée au 31/12/2022. À cela s'ajoute une interprétabilité des paramètres plus importante. Cette dernière évaluation permet de donner une représentation plus générale du potentiel des différents modèles, sans se cantonner à un historique précis. Enfin, l'impact de l'utilisation du modèle est évalué à travers la modélisation du *BE* d'une compagnie d'assurance-vie fictive, et il est jugé suffisamment faible pour ne pas constituer un obstacle à l'adoption de cette approche alternative.

Mots-clés : SABR, LMM-SABR, LMM+, taux d'intérêt.

Abstract

The regulatory framework of insurance requires market consistency in financial metrics impacting insurers' risk management. This drives the search for models offering the most accurate representation possible, and so far, the LMM+ model has seemed to best meet these requirements. However, it is not without criticism, particularly regarding its calibration, which is often described as lengthy, costly, and prone to instability. The year 2022 was further marked by a sharp rise in interest rates, a noteworthy event given its occurrence after a prolonged period of decline. This significant shift raised questions about the limitations of the LMM+ model, which were then offset by a relatively unsatisfactory calibration.

This study explores an alternative approach based on the LMM-SABR model in the context of rising interest rates. The latter is based on the SABR model, highly regarded in finance. The theoretical framework of these models is therefore carefully examined to objectively evaluate their respective calibration. The implementation of these models, combined with rigorous validation, ensures the quality of this approach.

In terms of model quality, greater flexibility of the LMM-SABR is determined as of 31/12/2022. This is accompanied by a higher interpretability of the parameters. This latest assessment provides a more general representation of the potential of the different models, without being confined to a specific historical period. Lastly, the impact of using the model is evaluated through modeling the BE of a fictitious life insurance company, and it is deemed sufficiently low to not pose an obstacle to the adoption of this alternative approach.

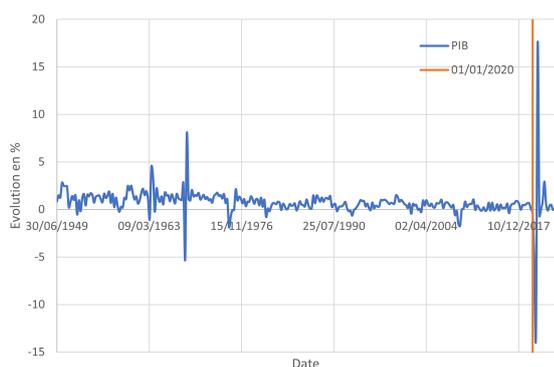
Keywords : SABR, LMM-SABR, LMM+, interest rate.

Note de Synthèse

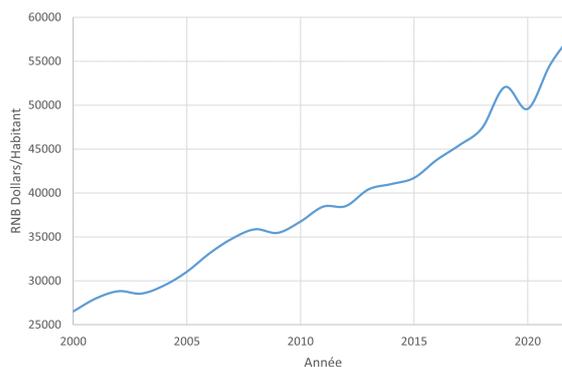
Contexte

Le SABR est un modèle de taux d'intérêt très populaire en finance (CHOI et WU, 2021), mais complètement inexistant en assurance. Une des raisons derrière cela est qu'il ne diffuse qu'un seul taux *forward*, tandis que les assureurs ont besoin de projeter l'ensemble de la structure des taux de manière cohérente. Le SABR répond à des besoins de modélisation très financiers en étant très pratique, flexible et sans pour autant présenter de problème théorique. De telles qualités pourraient avoir un intérêt en assurance en admettant qu'une adaptation aux besoins du domaine soit effectuée. Une telle adaptation existe sous la forme du LMM-SABR qui est une extension du SABR pour la modélisation d'une structure de taux.

La période de 2019 à 2022 a d'autre part mis l'économie française à l'épreuve, en témoignent les graphiques 1a et 1b qui représentent respectivement la variation trimestrielle du PIB* et l'évolution du RNB† de la France. Ce genre d'évènement est alors une occasion optimale pour s'intéresser dans le détail au fonctionnement des modèles, de leur limitation et de leur éventuelle remise en cause. Dans un tel contexte, il s'agirait de comparer l'utilisation d'un LMM-SABR à celle d'un modèle similaire dont la réputation en assurance est déjà admise et le candidat idéal à ce sujet serait un LMM+. Les LMM+ font en effet aujourd'hui partis des modèles classiques dans la modélisation des taux en assurance. En termes de similitudes, les deux modèles ont des équations de diffusions assez proches au point que certains LMM-SABR peuvent être considérés comme des LMM+‡.



(a) Variation du PIB



(b) Évolution du RNB

FIGURE 1 : Étude d'indicateurs économiques

La caractérisation d'un modèle LMM+ est assez générale, ce qui rend difficile une comparaison efficace avec d'autres modèles. Pour remédier à cette limitation, il a été décidé de se concentrer sur un

*Données : [INSEE](#)

†Données : [OCDE](#)

‡Si les paramètres β des SABR sont fixés à 1, c'est un LMM+

modèle spécifiquement reconnu en assurance (ANDRES et al., 2020) , qui servira de représentant pour la catégorie des LMM+.

Les besoins en modélisation des taux

Pour caractériser efficacement un modèle, il est essentiel de commencer par définir son champ d'application et les besoins qu'il vise à satisfaire. En assurance, l'aléa lié aux taux d'intérêt est souvent représenté sous la forme de tables de scénarios. La table 1 de taille $N \times (N + 1)$ est un exemple typique pour un scénario i et un horizon N . Les $ZCB(T_1, T_2)$ représentent les prix zéro-coupon entre T_1 et T_2 . Par définition, un prix zéro-coupon est la valeur à prêter sans risque en T_1 pour avoir un remboursement d'une valeur unitaire en T_2 . Le concept de structure de taux prend alors tout son sens de par la double indexation du prix zéro-coupon.

SCÉNARIO N° i	$Tenor = 1$	$Tenor = 2$...	$Tenor = N$
$T_1 = 0$	$ZCB(0, 1)$	$ZCB(0, 2)$...	$ZCB(0, N + 1)$
$T_1 = 1$	$ZCB(1, 2)$	$ZCB(1, 3)$...	$ZCB(1, N + 2)$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
$T_1 = N$	$ZCB(N, N + 1)$	$ZCB(N, N + 2)$...	$ZCB(N, 2N)$

TABLE 1 : Exemple de table de scénario de taux

Un zéro-coupon n'est pas échangé sur le marché et n'est en général pas modélisé directement. Toutefois, ils peuvent être exprimés en fonction d'autres variables telles que le taux court avec

$$ZCB(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t \right],$$

le taux *forward* instantané avec

$$ZCB(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du},$$

ou bien le taux forward avec

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \left(\frac{ZCB(t, T_1)}{ZCB(t, T_2)} - 1 \right),$$

qui peut être exprimé plus synthétiquement avec

$$F_k(t) = F(t, (k - 1) \times \tau, k \times \tau),$$

si le *tenor* τ est bien précisé. Dans le cas d'un modèle de marché, ce sont les $(F_k(t))_k$ qui sont modélisés et la table de zéro-coupon est obtenu de proche en proche.

Il convient de noter que les exigences en matière de modélisation ne sont pas identiques entre l'assurance et la finance. Par exemple, pour un *trader* cherchant à valoriser une option sur un taux *forward*, la configuration globale des taux peut être de moindre importance. Seule l'évolution du taux *forward* spécifique est pertinente, ce qui explique pourquoi un modèle comme le SABR peut être plus largement utilisé que le LMM+.

L'importance du LMM+

Un modèle peut être défini comme une représentation concise, précise et normée d'un sujet d'étude donné, structuré selon un format prédéfini. Pour un domaine tel que les taux, cela entraîne une

évolution significative dans leur modélisation et revêt une importance cruciale dans le contexte historique. En effet, un modèle développé dans un contexte économique précis risque d'être inutilisable aujourd'hui même en ayant pris en compte le caractère stochastique du sujet d'étude. Le graphique 2 illustre à ce sujet le taux d'intérêt payé par la France sur ses obligations souveraines. Ce taux reflète les fluctuations des coûts d'emprunt à long terme pour le gouvernement français, ce qui en fait l'un des taux d'intérêt les plus stables.



FIGURE 2 : Évolution du taux d'intérêt phare 10 ans pour la France

Un exemple parlant des évolutions qu'une telle modélisation peut subir concerne la considération de la positivité des taux d'intérêt. Dans les années 80, il était généralement supposé que les taux étaient positifs, ce qui a conduit à des recherches visant à développer des modèles garantissant cette positivité. Aujourd'hui, cependant, il est largement reconnu que les taux d'intérêt peuvent être négatifs. Par conséquent, un modèle qui impose des taux positifs exclusivement n'est plus satisfaisant, ce qui a entraîné un changement dans la spécification des modèles. Historiquement, en s'inspirant de l'introduction de REBONATO (2012), plusieurs grandes périodes peuvent être identifiées à propos de la modélisation des taux.

La première période succède à la publication de l'article de BLACK et SCHOLES (1973), qui a largement popularisé l'utilisation de leur formule. Bien que pratique, cette dernière ne repose pas sur un fondement théorique généralisable au marché des taux. Cependant, cela n'a pas empêché son utilisation, tout comme celle de BACHELIER (1900), également pratique. Cela a créé une fracture entre le monde académique, à la recherche d'alternatives théoriquement solides, et le monde de l'industrie, qui privilégie la praticité pour répondre aux besoins du marché. Les formules de Black-Scholes et de Bachelier permettent en effet de lier le prix des options à un ensemble de paramètres, simplifiant ainsi considérablement la valorisation de certains instruments financiers. Il est aujourd'hui courant, par exemple, de parler en termes de volatilité implicite sur les marchés. Cette dernière représente la valeur σ à utiliser pour obtenir le prix de l'option, étant donné un ensemble fixe de paramètres. Par exemple avec la formule de Black-Scholes c'est la valeur de σ qui permet d'obtenir

$$\text{Prix}^{\text{Black-Scholes}}(S_t, K, \sigma, T, t, r),$$

pour un ensemble de paramètres $(S_t, K, T, t, r)^*$ fixé. Mais si cette dernière a un sens lorsque $(S_t)_t$ représente une action suivant une dynamique log-normale, ce n'est pas directement vrai pour taux *forward*.

*pour une action $(S_t)_t$, un *strike* K , une maturité T évalué en t avec un taux sans risque r

Par la suite, l'article de VASICEK (1977) marque le début d'une seconde période en mettant en avant le modèle de Merton*, considéré comme le premier modèle de taux court. C'est le début d'une évolution significative dans la représentation des taux, bien que leur prédéfinition reste inchangée. Des problèmes importants† avec les modèles de taux court poussent néanmoins à la recherche d'alternatives. La publication de l'article de HEATH et al. (1990) marque alors une autre troisième phase majeure, modifiant considérablement la manière dont la modélisation était envisagée. Cet article est largement considéré comme fondamental car il fournit une structure théorique complète pour l'étude de la modélisation de la structure des taux dans son ensemble. Il propose une modélisation des taux *forward* instantanés, plus ambitieuse que celle des taux courts, mais ne résolvant pas le problème de divergence avec les pratiques de marché.

Il faut alors attendre le modèle BGM‡ (BRACE et al., 1997) pour commencer à régler ce problème. Ce modèle peut être considéré comme le premier modèle de marché et constitue donc un pilier fondamental de cette quatrième et dernière période. Il modélise l'ensemble des taux LIBOR avec un comportement log-normal. Avec un tel modèle, l'utilisation de la formule de Black-Scholes retrouve sa pertinence, et une coexistence harmonieuse entre la théorie et la pratique devient envisageable. Cet argument doit être rapproché de la question de la *market consistency* imposée par Solvabilité 2. En effet, un actif doit être valorisé à son prix d'échange, et un modèle qui ne reflète pas les pratiques courantes des acteurs du marché risque de ne pas fournir une valorisation cohérente.

Bien que très important, le modèle BGM n'est pas sans faille. Ses défauts majeurs sont l'incapacité à modéliser des taux négatifs (ce qui pose problème à la vue du graphique 2), et sa volatilité déterministe (cf. ANDERSEN et BROTHERTON-RATCLIFFE (2001) à ce sujet). Le LMM+ (JOSHI et REBONATO, 2001) est une extension qui résout ces deux problèmes en diffusant une structure de taux. C'est un modèle doté d'une base théorique solide, conforme aux pratiques effectives du marché et répondant aux besoins spécifiques de modélisation de l'industrie de l'assurance. En revanche, le SABR partage les deux premiers points mentionnés, mais ses exigences ne sont pas liées à la modélisation d'une structure complète; elles se concentrent plutôt sur la modélisation précise des taux individuels. Ils partagent une histoire semblable mais poursuivent des objectifs distincts.

La théorie du LMM+

Le LMM+ de ANDRES et al. (2020) est définie tel que

$$\begin{cases} dF_1(t) &= (F_1(t) + \delta) \left(\sqrt{V(t)} \gamma_1(t) dW_1(t) - \sigma_1(t) dt \right), \\ &\vdots \\ dF_N(t) &= (F_N(t) + \delta) \left(\sqrt{V(t)} \gamma_N(t) dW_N(t) - \sigma_N(t) dt \right), \\ dV(t) &= \kappa(\theta - V(t)) dt + \epsilon \sqrt{V(t)} dW_{N+1}(t), \end{cases}$$

où $\gamma_k(t) \sqrt{V(t)}$ représente la volatilité, $(V(t))_t$ suit un modèle CIR imposant $2\kappa\theta \geq \epsilon^2 \S$, $\gamma_k(t)$ représente une fonction déterministe et $(\sigma_k(t))_t$ est le changement de mesure adapté. A cela s'ajoute une matrice de corrélation de taille $(N+1) \times (N+1)$, composée d'une sous-matrice de taille $(N \times N)$ représentant la corrélation des *forwards* comme dans le modèle BGM classique et d'un vecteur supplémentaire représentant la corrélation *forward-volatilité*.

Un tel modèle est relativement simple, mais peut être assez lourd à diffuser, surtout dans un contexte d'assurance. Une technique classique de réduction de la dimension du mouvement brownien, comme celle proposée par WU et ZHANG (2006), permet par exemple de réduire le nombre de facteurs à

*Aujourd'hui largement désigné comme le modèle de Vasicek

†Calibration exacte et expression de la covariance entre autre

‡Aujourd'hui souvent appelé LMM

§Il peut être remarqué qu'une telle condition s'est trouvée être restreignante dans le contexte de remontée des taux

$N = 2$ sans trop de perte d'information, bien que cela complexifie le modèle. Dans ce cas, la corrélation entre les taux forward et la volatilité peut être définie pour $j = 1, 2$ comme suit :

$$\rho_j(t)dt = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{1}{\|\gamma_j(t)\|} \gamma_j(t)^\top \times \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix} \right) \cdot dW_3(t) \right].$$

La calibration d'un tel modèle se fait sur des *swaptions*, mais n'est pas directe. Elle repose sur une expression astucieuse du prix de swaption, permettant de mettre en évidence une variable aléatoire pouvant être approchée par une série de Gram-Charlier. Cela conduit à une expression analytique du prix de swaption, mais implique une calibration très coûteuse (cf. annexe A de ANDRES et al. (2020) qui explicite les résultats intermédiaires les plus immédiats). Le LMM+ de cette étude provient d'études antérieures (à savoir celles de de VANDIÈRE (2021) et de VIALARD (2022)), et sa validation n'a donc pas été l'objet d'études supplémentaires.

La théorie du LMM-SABR

Le SABR

Le SABR (HAGAN et al., 2002) modélise un taux *forward* tel que

$$\begin{cases} dF_k(t) &= \alpha_k(t)F_k(t)^{\beta_k}dW_{F_k}(t), \\ d\alpha_k(t) &= \nu_k\alpha_k(t)dW_{\alpha_k}(t), \end{cases}$$

où α , β , ν représentent des paramètres du modèle, et ρ représente la corrélation *forward*-volatilité.

Pour comprendre sa popularité en finance, il est instructif de le comparer au BGM. Ce que le modèle SABR offre, c'est une solide structure théorique assortie d'une formule relativement simple et hautement pratique pour exprimer la volatilité implicite d'une option. Cette dernière prend la forme

$$\sigma_k^N(\gamma) = \begin{cases} \alpha_k(\gamma F_k)^{\frac{\beta_k}{2}} \frac{1 + \frac{1}{24} \ln^2 \left(\frac{F_k}{\gamma} \right) + \frac{1}{1920} \ln^4 \left(\frac{F_k}{\gamma} \right) + \dots}{1 + \frac{(1 - \beta_k)^2}{24} \ln \left(\frac{F_k}{\gamma} \right) + \frac{(1 - \beta_k)^4}{1920} \ln^3 \left(\frac{F_k}{\gamma} \right) + \dots} \\ \times \frac{z_k}{\xi_k(z_k)} \\ \times \left(1 + \frac{-\beta_k(2 - \beta_k)}{24} \cdot \frac{\alpha_k^2 T_{k-1}}{(\gamma F_k)^{1 - \beta_k}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\alpha_k \beta_k \rho_k \nu_k T_{k-1}}{(\gamma F_k) \left(\frac{1 - \beta_k}{2} \right)} + \frac{2 - 3\rho_k^2}{24} \nu_k^2 T_{k-1} + \dots \right), \end{cases} \quad (1)$$

dans le cas du modèle de Bachelier, avec un équivalent pour celui de Black-Scholes. Cette formule peut ensuite être combinée avec la formule de Black-Scholes ou de Bachelier pour obtenir directement un prix d'options. La calibration d'un tel modèle est donc relativement simple et rapide. Cependant, il est important de noter qu'elle est initialement effectuée sur des caplets et non sur des swaptions. Cela s'explique par le fait que les caplets sont les instruments les plus simples et les plus adaptés dans ce contexte.

Le LMM-SABR

Le LMM-SABR (REBONATO, 2007) modélise une structure de taux *forward* telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} dF_1(t) = \mu_1(t)dt + \alpha_1(t)F_1(t)^{\beta_1}dW_{F_1}(t), \\ \vdots \\ dF_N(t) = \mu_N(t)dt + \alpha_N(t)F_N(t)^{\beta_N}dW_{F_N}(t), \\ d\alpha_1(t) = \eta_1(t)dt + \nu_1(t)\alpha_1(t)dW_{\alpha_1}(t), \\ \vdots \\ d\alpha_N(t) = \eta_N(t)dt + \nu_N(t)\alpha_N(t)dW_{\alpha_N}(t), \end{array} \right. \quad (2)$$

où les $(\mu_k(t))_t$ et les $(\eta_k(t))_t$ représentent des changements de mesures assurant la cohérence de la diffusion. Un LMM-SABR peut être considéré comme un ensemble de N SABR reliés de façon cohérente entre eux, la différence majeure étant alors à propos de la corrélation qui devient une matrice telle que

$$\Pi = \begin{pmatrix} \varpi & \Phi \\ \Phi^\top & \vartheta \end{pmatrix},$$

avec ϖ une sous-matrice de corrélation *forward*, ϑ une sous-matrice de corrélation de volatilité et Φ une sous-matrice de corrélation *forward*-volatilité. (REBONATO, 2007) introduit de plus des fonctions paramétriques déterministes qui permettront une calibration de la structure dans son ensemble. Ces dernières sont définies telles que

$$\begin{cases} \alpha_k(t) = g(T_{k-1} - t)s_k(t), \\ \nu_k(t) = h(T_{k-1} - t), \end{cases} \quad (3)$$

où $(s_k(t))_t$ représente le résidu de paramétrisation des $(\alpha_k(t))_t$ considéré de manière stochastique. La calibration se fait en plusieurs étapes telles que

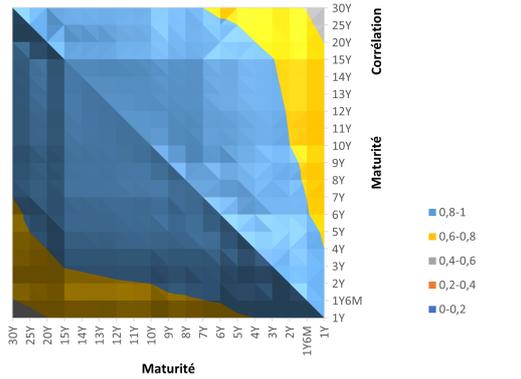
1. Calibrer les corrélations ϑ , ϖ et Φ ,
2. Calibrer les paramètres SABR (α_k) , (β_k) , (ν_k) et (ρ_k) ,
3. Calibrer les fonctions paramétriques instantanées g et h ,

sachant que la dernière étape revient simplement à appliquer une condition reliant certains paramètres déjà calibrés aux paramètres définissant les fonctions de l'équation (3).

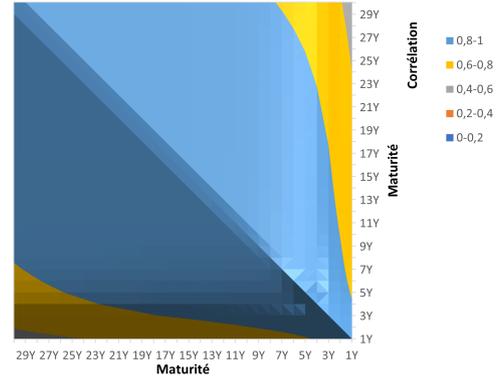
En théorie, la calibration d'un tel modèle est assez similaire à celle du SABR. Cependant, l'augmentation de la taille de la matrice de corrélation pose un problème important de définition. Il est en effet nécessaire d'avoir une matrice au moins semi-définie positive pour assurer une bonne diffusion du processus, condition qui n'est pas toujours garantie. Dans cette étude, il a donc été décidé de s'inspirer de la section §7.3.4.2 de CRISPOLDI et al. (2016) pour imposer $\rho = 0$ et plus largement $\Phi = 0$. Cette approche est justifiée par la relative redondance du paramètre ρ par rapport au β , tous deux contrôlant la pente du smile, mais elle reste néanmoins limitante. Pour ce qui est de la corrélation entre les volatilités, qui représente l'autre ajout de complexité du modèle, une approche basée sur la corrélation des *caps* a été adoptée. Ces volatilités sont ensuite paramétrisées de manière aussi cohérente que possible en prenant en compte à la fois la dépendance entre les différences de maturités et la variation de la maturité. Les résultats de cette approche sont visibles sur les graphiques 3a et 3b.

La calibration sur *swaption*

Il a été mentionné précédemment que le SABR se calibre sur des *caplets*, et en tant qu'extension du SABR, il est naturel que le LMM-SABR se calibre également sur des *caplets*. REBONATO et al. (2009) détaillent dans leur chapitre 6 la méthodologie permettant de procéder à une calibration sur



(a) Corrélacion de caps



(b) Corrélacion paramétrisée

FIGURE 3 : Résultat de la paramétrisation de la corrélation *volatility-volatility*

des *swaptions* pour le LMM-SABR. Cela ajoute des contraintes à l'utilisation du modèle, mais permet de réaliser des comparaisons où le biais de la source de calibration ne joue plus de rôle. Dans cette étude, la diffusion du LMM-SABR a été effectuée dans le cadre d'une calibration sur des *caplets*. En revanche, les études comparatives portant uniquement sur la calibration des modèles ont été réalisées dans le cadre d'une calibration sur des *swaptions*.

Validation

Au cours de cette étude, il a été question d'implémenter un modèle SABR, puis un modèle LMM-SABR afin de les comparer au LMM+ précédemment introduit. Il était donc crucial de garantir le respect des bonnes propriétés du modèle et de vérifier sa cohérence avec le marché. Les deux principaux tests effectués étaient donc un test de martingalité et un test comparatif entre la valorisation théorique, la valorisation pratique et les prix observés sur le marché pour des produits très liquides.

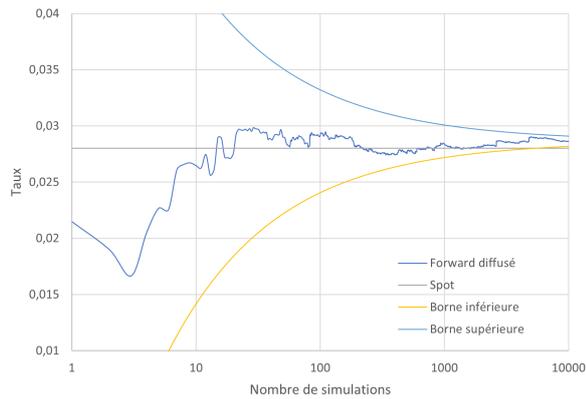
A propos de martingalité, il faut remarquer dans l'équation (2) sous \mathbb{Q}^{T_N} que le *drift* du taux ($F_N(t)_t$) est nul car c'est en effet une martingale. La valeur moyennée doit donc tendre vers sa valeur initiale, comme cela peut être observé sur le graphique 4a qui représente l'évolution d'une valeur finale $F_N(T_{N-1})$ en fonction du nombre de scénarios en échelle logarithmique. Pour garantir la cohérence entre la théorie du modèle, la pratique et le marché, il est nécessaire de comparer les prix obtenus à partir de ces trois sources. En effet, si le modèle est correctement implémenté, le prix obtenu en utilisant la formule (1) devrait être très proche du prix pratique obtenu en diffusant les différents taux jusqu'à maturité, la seule variation provenant du changement de mesure de valeur relativement faible. Ce test est illustré sur la figure 4b.

Impact en assurance

Pour évaluer sérieusement la pertinence du LMM-SABR par rapport à un LMM+, il est crucial d'examiner son impact d'un point de vue pratique. Dans cette optique, plusieurs études ont été réalisées pour comparer les aspects pratiques significatifs susceptibles d'influencer le choix d'utilisation d'un tel modèle en assurance.

Market consistence

L'avantage majeur du LMM-SABR réside dans sa flexibilité. Le LMM-SABR a $4 \times N$ paramètres, où N représente la taille de la structure, comparé à 9 paramètres pour le LMM+ réduit à 3 browniens.



(a) Test de martingalité pour le LMM-SABR

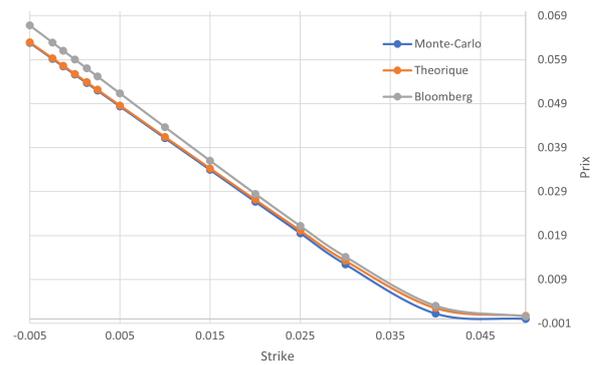
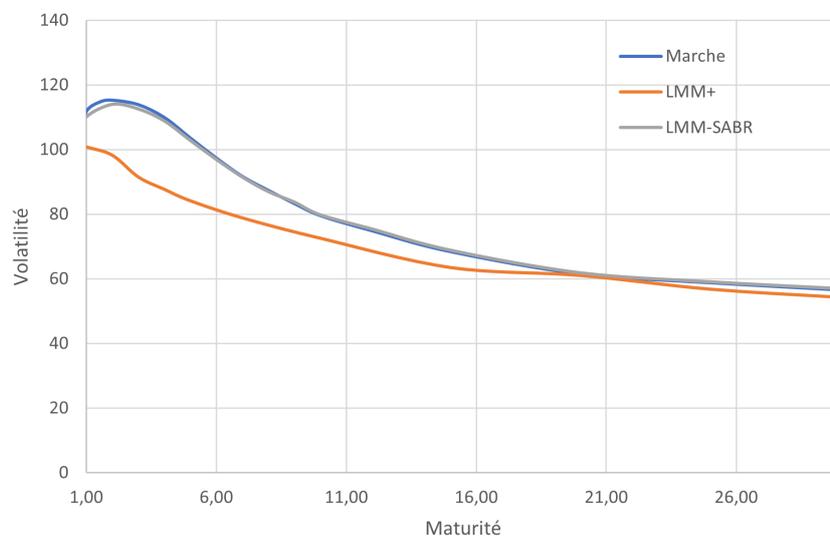
(b) Comparaison au marché pour un *cap* 1 an et 6 mois avec le LMM-SABR

FIGURE 4 : Test de validation

Bien qu'il existe certaines contraintes entre ces paramètres, cela laisse théoriquement 4 paramètres par *smile* comparé à 9 paramètres répartie sur l'ensemble de la structure. Une telle configuration permet de se rapprocher beaucoup plus aisément d'un optimum de *market consistency*. Pour illustrer cette flexibilité, une étude de calibration théorique optimale des deux modèles a été menée sur des *swaption*. Par exemple, le graphique 5 compare les résultats d'une calibration sur des *swaption* avec un *tenor* d'un an au 31/03/2022. On peut y observer une meilleure performance du LMM-SABR par rapport au LMM+.

FIGURE 5 : Comparaison théorique de calibrations entre LMM+ et LMM-SABR pour *tenor* 1 an

Différences pratiques

Le LMM-SABR présente des caractéristiques intéressantes, mais cela n'en fait néanmoins pas un modèle parfait, et les avantages qu'il peut avoir sur le LMM+ sont accompagnés de certains inconvénients. Ces derniers sont résumés schématiquement dans le tableau 2.

	LMM+	LMM-SABR
CALIBRATION	- -	+++
VITESSE DE CONVERGENCE	++	- -
DIFFUSION	++	-
CONDITIONS D'UTILISATIONS	+	+++
CONTRÔLE	-	++

TABLE 2 : Comparaison entre LMM+ et LMM-SABR

Il est toutefois important de noter que certaines pratiques observées sur le LMM+ étudié pourraient être adaptées au LMM-SABR, conduisant potentiellement à un compromis optimal, comme par exemple avec la réduction du nombre de browniens abordée dans le chapitre 7 de REBONATO et al. (2009).

Exemple d'un assureur vie épargne fictif

L'impact que l'utilisation d'un tel modèle peut avoir pour un assureur au sein de l'élaboration habituelle de ses bilans réglementaires est un élément essentiel à prendre en compte dans une telle étude. La mesure de cet impact repose sur la génération de tables de taux zéro-coupons avec les différents modèles, ainsi que sur l'observation des résultats obtenus à travers leur utilisation dans un modèle ALM. Ce modèle, issu de l'étude menée par CORDIER (2023), simule des trajectoires pour une compagnie d'assurance vie fictive de type épargne, sur un horizon de 50 ans à la date du 31/03/2022. L'objectif est alors de comparer l'évaluation du BE en fonction des tables de taux obtenues avec chaque modèle. L'idée est de fixer l'ensemble des autres paramètres, ne laissant l'aléa varier qu'au niveau des taux d'intérêt. Un biais entre ces deux évaluations est attendu et peut être observé en traçant l'évolution de l'évaluation moyenne en fonction du nombre de scénarios. C'est ce qui est représenté sur le graphique 6 avec les différents intervalles de confiance à 95% et le nombre de scénarios en échelle logarithmique en abscisses.

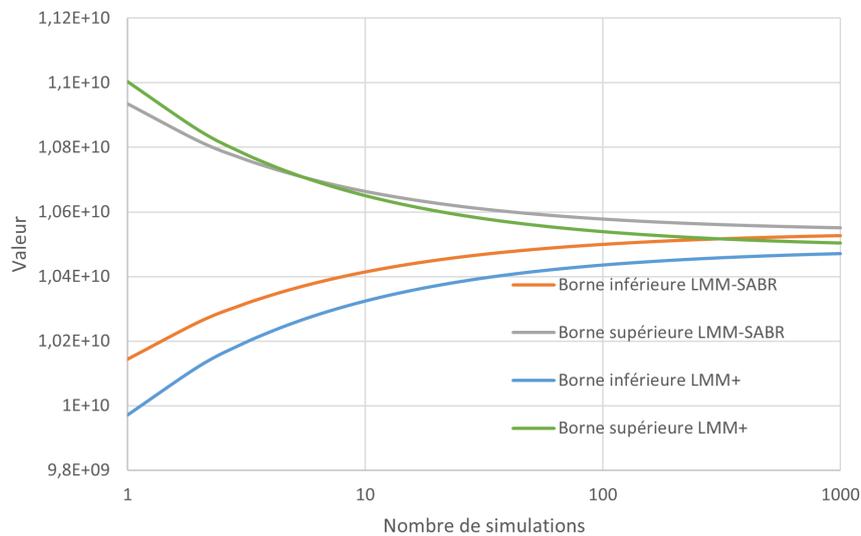


FIGURE 6 : Comparaison des intervalles de confiance

Sur le graphique 6, une intersection non vide existe tant que le nombre de simulations n'est pas suffisamment élevé. Aux alentours de 500 simulations, l'intervalle est vide, et un biais peut effective-

ment être constaté. Après 1000 simulations, le biais est clair et présente une taille significative par rapport aux intervalles de confiance. Il est donc raisonnable de supposer que le nombre de simulations est suffisant pour estimer le biais induit par l'utilisation du modèle de taux. Ce dernier peut alors être quantifié de manière plus significative en rapportant la différence d'évaluation entre les deux modèles de taux par rapport à la valeur de marché totale à l'origine de l'actif. Le graphique 7 représente cette valeur en pourcent en fonction du nombre de scénarios en échelle logarithmique. Cette dernière semble converger vers 0.5%.

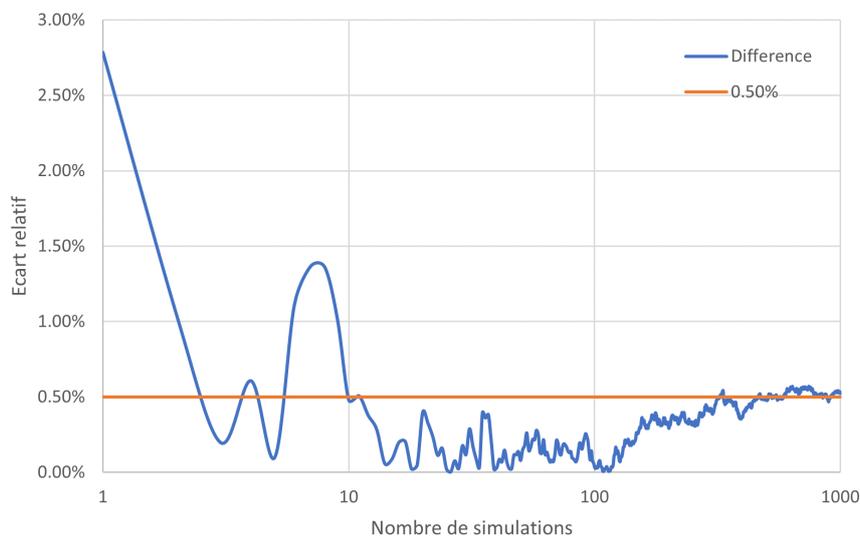


FIGURE 7 : Différence relative de l'utilisation du LMM-SABR par rapport au LMM+

Conclusion

L'augmentation soudaine et drastique des taux d'intérêt observée en 2022 a eu un impact significatif sur les portefeuilles des assureurs, remettant en question le compromis représenté par certains modèles. Dans ce contexte, l'alternative offerte par le LMM-SABR est séduisante, car elle permet de remédier à certains problèmes intrinsèques rencontrés avec d'autres modèles, tels que le LMM+.

Le LMM-SABR est en effet un modèle assez proche du LMM+, mais nettement plus flexible. Sa calibration permet ainsi de mieux s'ajuster aux conditions du marché. L'étude a révélé une variation acceptable dans l'estimation du *BE* d'un assureur vie fictif lors du passage d'un LMM+ classique en assurance au LMM-SABR. Bien que cette variation soit significative, elle demeure suffisamment faible pour que les avantages du LMM-SABR puissent être pris en considération.

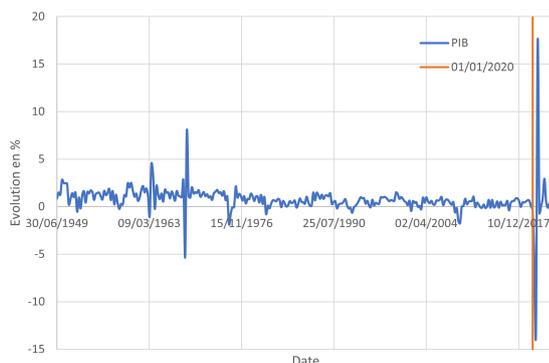
Ces avantages ne sont cependant pas dénués de compromis, et la pertinence qu'il représente dépend largement des attentes associées à un modèle de taux. Il demeure d'autre part très novateur dans le domaine de l'assurance et nécessiterait des études supplémentaires pour répondre efficacement à l'ensemble des exigences du secteur.

Synthesis note

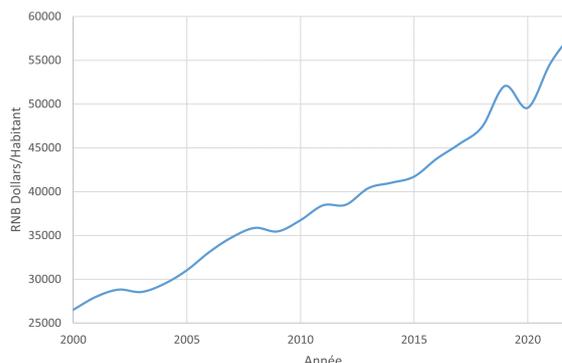
Context

The SABR model is a highly popular interest rate model in finance (Choi and Wu, 2021), but entirely absent in insurance. One of the reasons behind this is that it only diffuses a single forward rate, while insurers need to project the entire term structure of interest rates in a coherent manner. The SABR model meets very financial modeling needs by being practical, flexible, and without presenting any theoretical issues. Such qualities could be of interest in insurance provided that an adaptation to the needs of the field is made. Such an adaptation exists in the form of the LMM-SABR, which is an extension of the SABR for modeling an interest rate term structure.

The period from 2019 to 2022 has put the French economy to the test, as evidenced by the graphs 8a and 8b, which respectively represent the quarterly variation of GDP* and the evolution of GNI[†] of France. Such events provide an optimal opportunity to delve into the functioning of models, their limitations, and their potential questioning. In such a context, it would be worthwhile to compare the use of an LMM-SABR with that of a similar model whose reputation in insurance is already established, and the ideal candidate for this would be an LMM+. Indeed, LMM+s are now considered classical models in interest rate modeling in insurance. In terms of similarities, the two models have quite close diffusion equations to the extent that some LMM-SABRs can be considered LMM+s[‡].



(a) GDB variation



(b) GNI evolution

Figure 8: Economic indicators study

The characterization of an LMM+ model is quite general, making it difficult to effectively compare with other models. To address this limitation, it was decided to focus on a model specifically recognized in insurance (Andres et al., 2020), which will serve as a representative for the category of LMM+ models.

*Data: [INSEE](#)

†Data: [OECD](#)

‡If the SABR parameters β are fixed at 1, it is an LMM+

Interest rate modeling needs

To effectively characterize a model, it is essential to begin by defining its scope of application and the needs it aims to satisfy. In insurance, interest rate risk is often represented in the form of scenario tables. Table 3, of size $N \times (N + 1)$, is a typical example for scenario i and horizon N . The $ZCB(T_1, T_2)$ represent zero-coupon bond prices between T_1 and T_2 . By definition, a zero-coupon bond price is the value to lend without risk at T_1 to receive a unit repayment at T_2 . The concept of the term structure then becomes significant due to the dual indexing of the zero-coupon bond price.

SCENARIO N° i	TENOR = 1	TENOR = 2	...	TENOR = N
$T_1 = 0$	$ZCB(0, 1)$	$ZCB(0, 2)$...	$ZCB(0, N + 1)$
$T_1 = 1$	$ZCB(1, 2)$	$ZCB(1, 3)$...	$ZCB(1, N + 2)$
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
$T_1 = N$	$ZCB(N, N + 1)$	$ZCB(N, N + 2)$...	$ZCB(N, 2N)$

Table 3: Example of an interest rate scenario table

A zero-coupon bond is not traded on the market and is generally not directly modeled. However, they can be expressed in terms of other variables such as the short-term interest rate as

$$ZCB(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t \right],$$

the instantaneous forward rate as

$$ZCB(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du},$$

or with the forward rate as

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \left(\frac{ZCB(t, T_1)}{ZCB(t, T_2)} - 1 \right),$$

which can be more succinctly expressed as

$$F_k(t) = F(t, (k - 1) \times \tau, k \times \tau),$$

if the tenor τ is well specified. In the case of a market model, it is the $(F_k(t))_k$ that are modeled, and the zero-coupon table is obtained step by step.

It is worth noting that modeling requirements are not identical between insurance and finance. For example, for a trader seeking to value an option on a forward rate, the overall configuration of rates may be of lesser importance. Only the evolution of the specific forward rate is relevant, which explains why a model like SABR may be more widely used than LMM+.

The importance of the LMM+

A model can be defined as a concise, accurate, and standardized representation of a given subject of study, structured according to a predefined format. For a domain such as interest rates, this entails a significant evolution in their modeling and holds crucial importance in the historical context. Indeed, a model developed in a specific economic context may be unusable today, even when considering the stochastic nature of the subject under study. Figure 9 illustrates the interest rate paid by France on its sovereign bonds. This rate reflects the fluctuations in long-term borrowing costs for the French government, making it one of the most stable interest rates.



Figure 9: Evolution of Market yield on France Treasury securities at 10-year constant maturity

A striking example of the evolutions that such modeling can undergo concerns the consideration of interest rate positivity. In the 1980s, it was generally assumed that rates were positive, leading to research aimed at developing models guaranteeing this positivity. However, today, it is widely recognized that interest rates can be negative. Therefore, a model that imposes exclusively positive rates is no longer satisfactory, resulting in a change in model specification. Historically, drawing inspiration from the introduction by Rebonato (2012), several major periods can be identified regarding interest rate modeling.

The first period follows the publication of the article by Black and Scholes (1973), which greatly popularized the use of their formula. Although practical, it is not based on a theoretical foundation that can be generalized to the bond market. However, this did not prevent its use, nor did the formula of Bachelier (1900), which is also practical. This created a division between the academic world, seeking theoretically sound alternatives, and the industry world, which prioritizes practicality to meet market needs. The Black-Scholes and Bachelier formulas indeed allow the linking of option prices to a set of parameters, significantly simplifying the valuation of certain financial instruments. It is now common, for example, to speak in terms of implied volatility in the markets. The latter represents the value of σ to use to obtain the option price, given a fixed set of parameters. For example, with the Black-Scholes formula, it is the value of σ such that

$$\text{Prix}^{\text{Black-Scholes}}(S_t, K, \sigma, T, t, r),$$

for a set of parameters $(S_t, K, T, t, r)^*$ fixed. But while this makes sense when $(S_t)_t$ represents a stock following a log-normal dynamics, it is not directly true for forward rates.

Subsequently, the article by Vasicek (1977) marks the beginning of a second period by highlighting the Merton model[†], considered as the first short rate model. This marks the start of significant evolution in interest rate representation, although their pre-definition remains unchanged. Nevertheless, significant issues[‡] with short rate models push towards the search for alternatives. The publication of the article by Heath et al. (1990) then marks another major third phase, significantly altering the way modeling was conceived. This article is widely regarded as fundamental as it provides a comprehensive theoretical framework for studying interest rate modeling as a whole. It proposes modeling instan-

*for a stock $(S_t)_t$, a strike K , a maturity T evaluated at t with a risk-free rate r

[†]Now widely referred to as the Vasicek model

[‡]Exact calibration and expression of covariance among others

taneous forward rates, which is more ambitious than short rates, but does not solve the divergence problem with market practices.

We then have to wait for the BGM model* (Brace et al., 1997) to begin addressing this issue. This model can be considered as the first market model and thus constitutes a fundamental pillar of this fourth and final period. It models all LIBOR rates with a log-normal behavior. With such a model, the use of the Black-Scholes formula regains its relevance, and a harmonious coexistence between theory and practice becomes feasible. This argument must be considered in light of the market consistency requirement imposed by Solvency 2. Indeed, an asset must be valued at its market price, and a model that does not reflect the common practices of market participants may not provide a consistent valuation.

Although highly significant, the BGM model is not without its flaws. Its major shortcomings include the inability to model negative rates (which poses a problem in view of figure 2), and its deterministic volatility (see Andersen and Brotherton-Ratcliffe (2001) on this matter). The LMM+ (Joshi and Rebonato, 2001) is an extension that addresses these two issues by diffusing a term structure. It is a model with a solid theoretical foundation, consistent with actual market practices, and meets the specific modeling needs of the insurance industry. On the other hand, the SABR shares the first two points mentioned, but its requirements are not related to modeling a complete structure; rather, they focus on accurately modeling individual rates. They share a similar history but pursue distinct objectives.

The theory of the LMM+

The LMM+ by Andres et al. (2020) is defined as

$$\left\{ \begin{array}{l} dF_1(t) = (F_1(t) + \delta) \left(\sqrt{V(t)} \gamma_1(t) dW_1(t) - \sigma_1(t) dt \right), \\ \vdots \\ dF_N(t) = (F_N(t) + \delta) \left(\sqrt{V(t)} \gamma_N(t) dW_N(t) - \sigma_N(t) dt \right), \\ dV(t) = \kappa(\theta - V(t)) dt + \epsilon \sqrt{V(t)} dW_{N+1}(t), \end{array} \right.$$

where $\gamma_k(t) \sqrt{V(t)}$ represents the volatility, $(V(t))_t$ follows a CIR model imposing $2\kappa\theta \geq \epsilon^2$, $\gamma_k(t)$ represents a deterministic function, and $(\sigma_k(t))_t$ is the adapted change of measure. Additionally, there is a correlation matrix of size $(N+1) \times (N+1)$, consisting of a sub-matrix of size $(N \times N)$ representing the correlation of forwards as in the classical BGM model and an additional vector representing the forward-volatility correlation.

Such a model is relatively simple but can be quite cumbersome to diffuse, especially in an insurance context. The classical technique of brownian reduction, such as the one proposed by Wu and Zhang (2006), allows, for example, reducing the number of factors to $N = 2$ without too much loss of information, although it complicates the model. In this case, the correlation between the forward rates and volatility can be defined for $j = 1, 2$ as follows:

$$\rho_j(t) dt = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{1}{\|\gamma_j(t)\|} \gamma_j(t)^\top \times \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix} \right) \cdot dW_3(t) \right].$$

The calibration of such a model is done on swaptions but is not direct. It relies on a clever expression of the swaption price, allowing the highlighting of a random variable that can be approximated by a Gram-Charlier series. This leads to an analytical expression of the swaption price but entails a very costly calibration (cf. Appendix A of Andres et al. (2020), which details the most immediate intermediate results). The LMM+ used in this study comes from previous works (specifically, those of

*Now often referred to as LMM

†It may be noted that such a condition has been found to be restrictive in the context of rising interest rates

de Vandière (2021) and Vialard (2022)), and thus, its validation has not been the subject of additional studies.

The theory of the LMM-SABR

The SABR

The SABR (Hagan et al., 2002) models a forward rate as

$$\begin{cases} dF_k(t) &= \alpha_k(t)F_k(t)^{\beta_k}dW_{F_k}(t), \\ d\alpha_k(t) &= \nu_k\alpha_k(t)dW_{\alpha_k}(t), \end{cases}$$

where α , β , ν represent model parameters, and ρ represents the forward-volatility correlation.

To understand its popularity in finance, it is instructive to compare it to the BGM. What the SABR model offers is a robust theoretical framework coupled with a relatively simple and highly practical formula for expressing the implied volatility of an option. This takes the form

$$\sigma_k^N(\gamma) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_k(\gamma F_k) \frac{\beta_k}{2} \frac{1 + \frac{1}{24} \ln^2 \left(\frac{F_k}{\gamma} \right) + \frac{1}{1920} \ln^4 \left(\frac{F_k}{\gamma} \right) + \dots}{1 + \frac{(1-\beta_k)^2}{24} \ln \left(\frac{F_k}{\gamma} \right) + \frac{(1-\beta_k)^4}{1920} \ln^4 \left(\frac{F_k}{\gamma} \right) + \dots} \\ \times \frac{z_k}{\xi_k(z_k)} \\ \times \left(1 + \frac{-\beta_k(2-\beta_k)}{24} \cdot \frac{\alpha_k^2 T_{k-1}}{(\gamma F_k)^{1-\beta_k}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\alpha_k \beta_k \rho_k \nu_k T_{k-1}}{(\gamma F_k) \left(\frac{1-\beta_k}{2} \right)} + \frac{2-3\rho_k^2}{24} \nu_k^2 T_{k-1} + \dots \right), \end{array} \right. \quad (4)$$

in the case of the Bachelier model, with an equivalent for the Black-Scholes model. This formula can then be combined with the Black-Scholes or Bachelier formula to directly obtain option prices. Calibration of such a model is therefore relatively simple and fast. However, it is important to note that it is initially performed on caplets rather than swaptions. This is because caplets are the simplest and most suitable instruments in this context.

The LMM-SABR

The LMM-SABR (Rebonato, 2007) models a forward rate structure as

$$\begin{cases} dF_1(t) &= \mu_1(t)dt + \alpha_1(t)F_1(t)^{\beta_1}dW_{F_1}(t), \\ \vdots &\vdots \\ dF_N(t) &= \mu_N(t)dt + \alpha_N(t)F_N(t)^{\beta_N}dW_{F_N}(t), \\ d\alpha_1(t) &= \eta_1(t)dt + \nu_1(t)\alpha_1(t)dW_{\alpha_1}(t), \\ \vdots &\vdots \\ d\alpha_N(t) &= \eta_N(t)dt + \nu_N(t)\alpha_N(t)dW_{\alpha_N}(t), \end{cases} \quad (5)$$

where the sequences $(\mu_k(t))_t$ and $(\eta_k(t))_t$ represent changes of measures ensuring the coherence of the diffusion. An LMM-SABR can be considered as a set of N interconnected SABRs, with the major difference lying in the correlation, which becomes a matrix such as

$$\Pi = \begin{pmatrix} \varpi & \Phi \\ \Phi^\top & \vartheta \end{pmatrix},$$

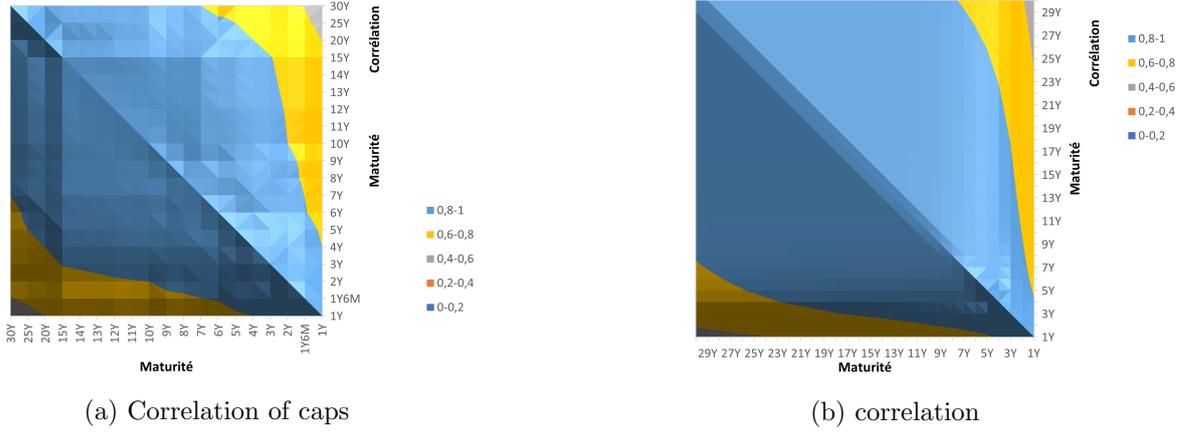


Figure 10: Result of the parameterized volatility-volatility correlation

with ϖ being a sub-matrix of forward correlation, ϑ a sub-matrix of volatility correlation, and Φ a sub-matrix of forward-volatility correlation. Additionally, Rebonato (2007) introduces deterministic parametric functions that allow for a calibration of the entire structure. These functions are defined as

$$\begin{cases} \alpha_k(t) &= g(T_{k-1} - t)s_k(t), \\ \nu_k(t) &= h(T_{k-1} - t), \end{cases} \quad (6)$$

where $(s_k(t))_t$ represents the stochastically considered residual of the parameterization of $(\alpha_k(t))_t$ by g .

The calibration is done in several steps such as:

1. Calibrate the correlations ϑ , ϖ et Φ ,
2. Calibrate the SABR parameters (α_k) , (β_k) , (ν_k) and (ρ_k) ,
3. Calibrate the instantaneous parametric functions g and h ,

given that the last step simply involves applying a condition that relates certain already calibrated parameters to the parameters defining the functions in equation (3).

In theory, calibrating such a model is quite similar to that of the SABR. However, the increase in the size of the correlation matrix poses a significant definition problem. It is indeed necessary to have at least a semi-positive definite matrix to ensure a good diffusion of the process, a condition that is not always guaranteed. In this study, it was therefore decided to draw inspiration from section 7.3.4.2 of Crispoldi et al. (2016) to impose $\rho = 0$ and more broadly $\Phi = 0$. This approach is justified by the relative redundancy of the parameter ρ compared to β , both controlling the smile slope, but it remains limiting. As for the correlation between volatilities, which represents the other added complexity of the model, an approach based on the correlation of caps was adopted. These volatilities are then parameterized as coherently as possible, taking into account both the dependence between maturity differences and the variation in maturity. The results of this approach can be seen in the figures 10a and 10b.

Calibration on swaptions

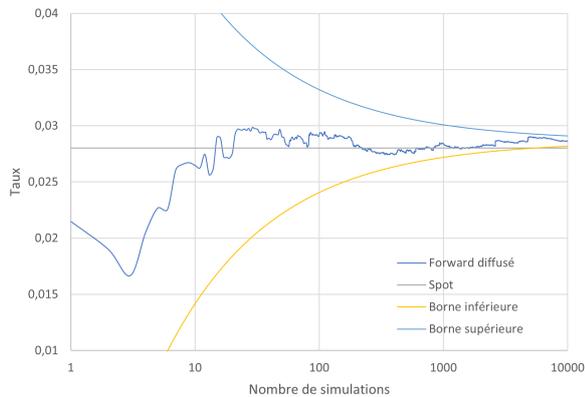
It has been previously mentioned that the SABR is calibrated on caplets, and as an extension of the SABR, it is natural for the LMM-SABR to also calibrate on caplets. Rebonato et al. (2009)

detail in their chapter 6 the methodology for calibrating on swaptions for the LMM-SABR. This adds constraints to the model's usage but allows for comparisons where the bias from the calibration source no longer plays a role. In this study, the diffusion of the LMM-SABR was performed within the framework of calibration on caplets. However, comparative studies focusing solely on model calibration were conducted within the context of calibration on swaptions.

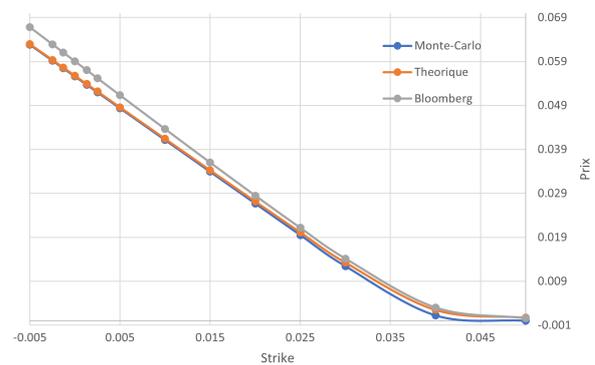
Validation

During this study, there was a need to implement a SABR model and then an LMM-SABR model to compare them with the previously introduced LMM+. Thus, it was crucial to ensure that the model adhered to the correct properties and to verify its consistency with the market. The two main tests conducted were therefore a martingale test and a comparative test between theoretical valuation, practical valuation, and observed market prices for highly liquid products.

Regarding martingale properties, it should be noted in equation (5) under \mathbb{Q}^{TN} that the drift of the rate ($F_N(t)t$) is zero since it is indeed a martingale. The averaged value must therefore tend towards its initial value, as can be observed in the figure 11a which represents the evolution of a final value $F_N(TN - 1)$ as a function of the number of scenarios on a logarithmic scale. To ensure consistency between the model theory, practice, and the market, it is necessary to compare prices obtained from these three sources. Indeed, if the model is correctly implemented, the price obtained using formula (4) should be very close to the practical price obtained by diffusing the different rates to maturity, with the only variation coming from the relatively small change in value measure. This test is illustrated in the figure 11b.



(a) Martingale Test for the LMM-SABR



(b) Comparison to Market for a 18 months cap with the LMM-SABR

Figure 11: Validation tests

Impact in insurance

To seriously assess the relevance of the LMM-SABR compared to the studied LMM+, it is crucial to examine its practical impact. In this regard, several studies have been conducted to compare the significant practical aspects that may influence the decision to use such a model in insurance.

Market consistency

The major advantage of the LMM-SABR lies in its flexibility. The LMM-SABR has $4 \times N$ parameters, where N represents the size of the structure, compared to 9 parameters for the LMM+ reduced

to 3 Brownian motions. Although there are some constraints among these parameters, theoretically, this leaves 4 parameters per smile compared to 9 parameters spread over the entire structure. Such a configuration allows for a much easier approach to achieving market consistency. To illustrate this flexibility, a study of the optimal theoretical calibration of both models was conducted on swaptions. For example, the figure 12 compares the results of calibration on swaptions with a one year tenor as of 31/03/2022. We can observe better performance of the LMM-SABR compared to the LMM+.

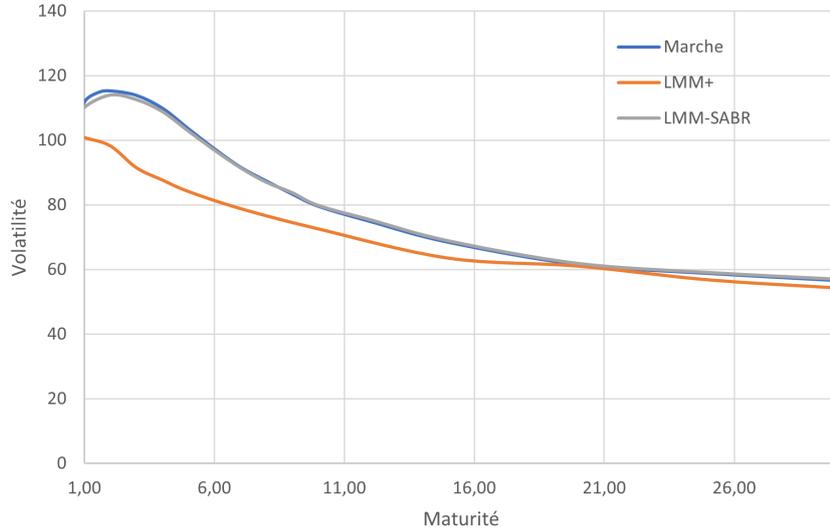


Figure 12: Theoretical comparison of calibrations between LMM+ and LMM-SABR for a of 1 year tenor of 1 year

Practical differences

The LMM-SABR has some interesting features, but this doesn't make it a perfect model, and the advantages it may have over the LMM+ come with certain drawbacks. These are summarized schematically in the table 4.

	LMM+	LMM-SABR
CALIBRATION	- -	+++
CONVERGENCE SPEED	++	- -
DIFFUSION SPEED	++	-
CONDITIONS OF USE	+	+++
CONTROL	-	++

Table 4: Comparison between LMM+ and LMM-SABR

However, it is important to note that some practices observed in the studied LMM+ could be adapted to the LMM-SABR, potentially leading to an optimal compromise, such as reducing the number of Brownians discussed in chapter 7 of Rebonato et al. (2009).

Example of a fictitious life insurer

The impact that the use of such a model can have for an insurer within the usual preparation of its regulatory balance sheets is a crucial element to consider in such a study. Measuring this impact

relies on generating zero-coupon rate tables with the different models, as well as observing the results obtained through their use in an ALM model. This model, stemming from the study conducted by Cordier (2023), simulates trajectories for a fictitious life insurance company of the savings type, over a horizon of 50 years as of 31/03/2022. The goal is then to compare the valuation of the BE based on the rate tables obtained with each model. The idea is to fix all other parameters, allowing only the interest rates to vary randomly. A bias between these two evaluations is expected and can be observed by plotting the evolution of the average valuation against the number of scenarios. This is depicted in Figure 13 with the different 95% confidence intervals and the number of scenarios on a logarithmic scale on the abscissa.

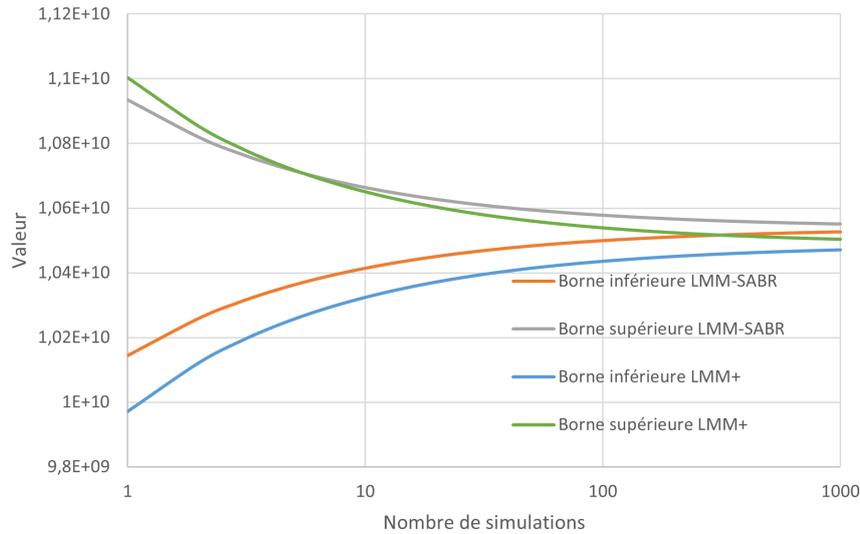


Figure 13: Comparison of confidence intervals

In the figure 13, a non-empty intersection exists as long as the number of simulations is not sufficiently high. Around 500 simulations, the interval is empty, and a bias can indeed be observed. After 1000 simulations, the bias is clear and exhibits a significant size compared to the confidence intervals. It is therefore reasonable to assume that the number of simulations is sufficient to estimate the bias induced by the use of the interest rate model. This bias can then be quantified more significantly by comparing the evaluation difference between the two interest rate models to the total market value at the asset's origin. The graph 14 represents this value in percentage as a function of the number of scenarios on a logarithmic scale. The latter seems to converge towards 0.5%.

Concluding remarks

The sudden and drastic increase in interest rates observed in 2022 had a significant impact on insurers' portfolios, calling into question the compromise represented by certain models. In this context, the alternative offered by LMM-SABR is appealing, as it addresses some intrinsic problems encountered with other models, such as LMM+.

LMM-SABR is indeed a model quite close to LMM+, but notably more flexible. Its calibration allows for a better adjustment to market conditions. The study revealed an acceptable variation in the estimation of the BE of a fictional life insurer when transitioning from a standard LMM+ to LMM-SABR. Although this variation is significant, it remains sufficiently low for the advantages of LMM-SABR to be taken into consideration.

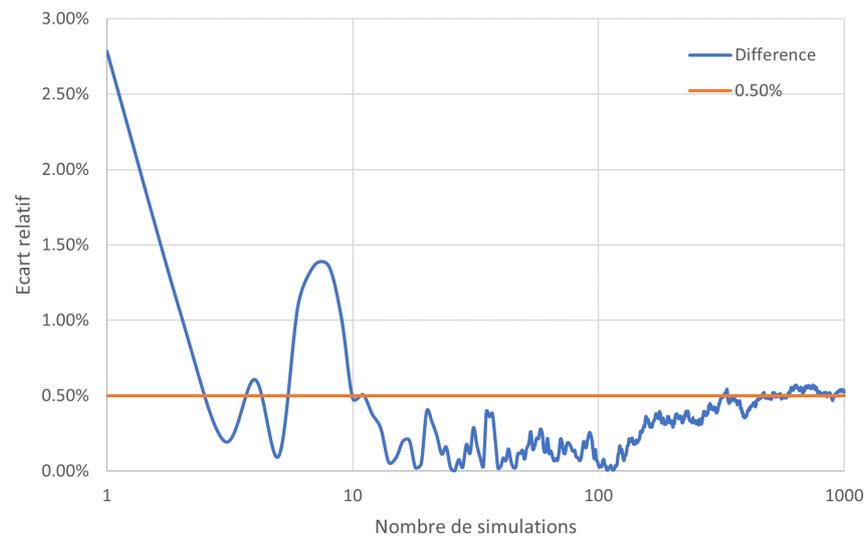


Figure 14: Relative difference from using LMM-SABR compared to LMM+

These advantages, however, are not without trade-offs, and the relevance it represents largely depends on the expectations associated with a rate model. Moreover, it remains highly innovative in the insurance domain and would require further studies to effectively meet all the sector's requirements.

Table des matières

Résumé	3
Abstract	4
Note de Synthèse	5
Synthesis note	15
Table des matières	25
Introduction	27
1 Les taux d'intérêt	29
1.1 Un cadre d'étude	29
1.2 Les générateurs de scénarios économiques	36
1.3 La modélisation dans le cadre de Solvabilité 2	39
1.4 Modèles de taux d'intérêt	42
2 La modélisation des taux	61
2.1 LMM	64
2.2 LMM+	69
2.3 SABR	73
2.4 LMM-SABR en théorie	76
2.5 LMM-SABR en pratique	80
2.6 Validation du modèle	90
3 La quantification d'un impact	103
3.1 Accessibilité des paramètres	103

3.2	Impact de l'utilisation du LMM-SABR en assurance	116
3.3	Limites et ouvertures	123
	Conclusion	129
	Bibliographie	131
	A Annexes	137
A.1	Changement de mesure	137
A.2	Rappels sur les modèles vanilles	141
A.3	Calibration du LMM-SABR sur <i>swaptions</i>	142
A.4	Compléments sur l'accessibilité des paramètres	143
A.5	Configuration du modèle ALM	148

Introduction

La ruine d'un assureur, c'est la ruine des assurés. Le cadre réglementant l'exercice des assurances a donc toujours été d'un sérieux considérable dans le but d'y parer. Dans la continuité de la recherche d'objectivité, les référentiels composants ce cadre ont subi une modernisation qui a pour conséquence de remettre au premier plan l'importance des modèles financiers. Parmi ces derniers, la portée toute particulière du modèle de taux d'intérêt doit être remarquée. Les taux impactent en effet directement la valeur des facteurs d'actualisation, la valorisation des obligations qui représentent l'investissement le plus courant en assurance et le risque de rachat.

La spécificité de la modélisation des taux d'intérêt vient de la complexité significative à appréhender le comportement du sujet d'étude. Les taux sont un concept abstrait, suivant une évolution très incertaine avec des limites théoriques peu claires. Il est donc classique que le cadre de modélisation suive des modifications pour s'adapter aux besoins du marché. Cela a par exemple été le cas du principe de taux négatifs, longtemps pensé impossible, mais finalement réalisé en Europe au cours de la dernière décennie. La complexification des modèles n'est pas une notion abstraite, mais plutôt le résultat d'une adaptation à la réalité du marché.

Ces dernières années ont été caractérisées par des taux très faibles, mais relativement constants. Certains modèles avaient alors été identifiés comme performants dans un tel contexte économique. Or, l'année 2022 s'est distinguée par une remontée rapide et très significative des taux. Ce changement est synonyme de remise en cause et de mise en perspective. La qualité des modèles peut en effet varier suite à cette montée des taux, et le rapport entre avantages et défauts des modèles de référence peut se détériorer.

Ce mémoire s'intéresse donc à la modélisation des taux d'intérêt dans le contexte d'une entreprise d'assurance française opérant dans une économie ayant subi la remontée des taux de mars 2022. L'objectif principal est de présenter l'approche standard du LMM+, de discuter de ses limites sur le plan de la complexité algorithmique, de la complexité théorique et de la difficulté à calibrer dans un contexte de remontée des taux, et de la comparer à l'approche alternative du LMM-SABR dont la réputation laisse penser à un gain significatif sur l'ensemble des points limitants du LMM+. Dans le premier chapitre, nous explorons la nécessité de la modélisation dans le domaine de la gestion du risque, en mettant l'accent sur la modélisation des taux d'intérêt à travers les divers cadres réglementaires de l'assurance, et en tenant compte de son évolution au fil du temps. Le chapitre 2 présente la théorie précise de l'approche alternative proposée, ainsi que les différences majeures que cela induit par rapport à l'approche de référence. Le chapitre 3 présente une analyse comparative des modèles pour un assureur d'épargne fictif.

Chapitre 1

Les taux d'intérêt, un sujet d'étude assurantiel

Le 27 juillet 2022 a marqué la fin de "près d'une décennie de taux directeurs négatifs" (BDF, 2022), faisant suite à une inflation à son "plus haut niveau depuis novembre 1985" selon la PREMIÈRE MINISTRE (2022). La remontée des taux est rapide et brutale, et témoigne d'un climat économique mouvementé (cf. mesures d'urgence du GOUVERNEMENT (2022)), en particulier dans le milieu de l'assurance comme le rappelle l'ACPR (2022)[†] en qualifiant le suivi de ses impacts comme priorité de travail de 2023.

1.1 Un cadre d'étude

1.1.1 Une définition des taux

"Le taux d'intérêt réel est la rémunération perçue lorsque l'on renonce à disposer d'une unité de biens à une date t pour n'en disposer qu'à une date ultérieure $t + k$. C'est aussi le prix à payer pour disposer d'une unité de biens à une date t plutôt qu'à une date ultérieure $t + k$." (BÉNASSY-QUÉRÉ et al., 2003). D'après MISHKIN (1981) le lien entre le taux d'intérêt réel et le taux d'intérêt nominal peut être approché tel que

$$r = i - \pi, \tag{1.1}$$

où π représente l'inflation, i le taux d'intérêt et r le taux d'intérêt réel. Ce qui est appelé communément taux d'intérêt fait référence à $i = r + \pi$, et c'est ainsi qu'il est désigné par la suite. Pour paraphraser l'équation (1.1), la différence entre le taux d'intérêt et le taux d'intérêt réel correspond à la prise en compte de la dévaluation de la monnaie due à l'inflation. De telles considérations ne changent pas fondamentalement la définition introductive. Le[‡] taux d'intérêt est le coût d'un emprunt d'argent, et prend en général la forme d'un pourcentage représentant le montant en supplément de l'emprunt initial (le nominal).

La relation entre l'inflation et les taux d'intérêts est un sujet très étudié. L'existence d'une corrélation positive entre ces derniers n'est pas surprenante étant donné la relation mise en exergue dans l'équation (1.1), mais la variation de l'intensité de cette corrélation est plus subtile à quantifier

[†]Entretien avec Nathalie Aufavre, Secrétaire générale de l'ACPR

[‡]Plus rigoureusement "un" taux d'intérêt

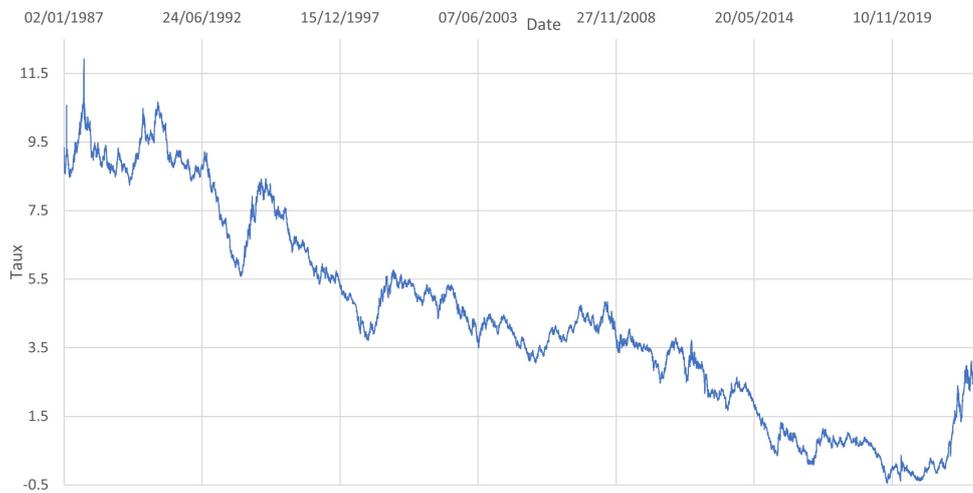


FIGURE 1.1 : Évolution du taux d'intérêt phare 10 ans pour la France

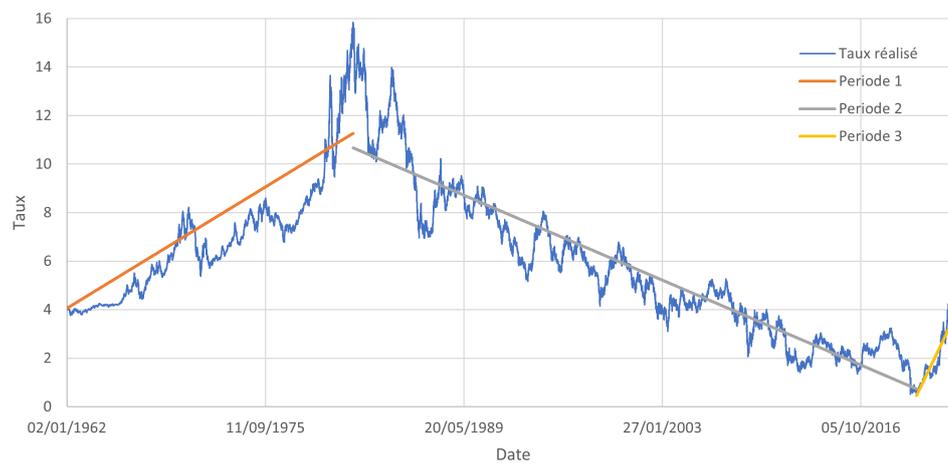


FIGURE 1.2 : Évolution du taux d'intérêt phare 10 ans pour les États-Unis

précisément et fait référence à l'effet Fisher qui est abordé en détail par MISHKIN (1992). La sous-partie §1.1.2, décrit le mouvement général des taux d'intérêts de ces dernières années pour en déduire un contexte de modélisation.

Trois grandes périodes sont définies et peuvent être observées sur le graphique 1.1. Ce graphique représente l'évolution du taux d'intérêt d'emprunt phare 10 ans * de 1987 à 2023. Ce sont des données qui concernent la France en tant qu'État (le passage à l'euro n'a pas d'impact dans la méthodologie cf. MINISTÈRE DES FINANCES ET DES COMPTES PUBLICS (2014)). Les abscisses sont les dates en jour et les ordonnées les taux en pourcent (*i.e.* 10^{-2}). Un équivalent pour les États-Unis issu de la FED est fourni sur le graphique 1.2[†] permettant de mieux mettre en avant certains éléments. L'historique est, en effet, plus large et les tendances comparables, mais les valeurs ne sont pas interchangeables.

1.1.2 Le contexte des taux

Une forte inflation

La première période s'étale de 1971 jusqu'à la fin des années 80 et se voit très bien sur le graphique 1.2. Elle commence avec les *Nixon's socks*[‡], qui sont des mesures économiques prises par le président Nixon en réaction à des pressions inflationnistes. Pour bien comprendre l'impact de telles mesures, il faut les voir comme la fin des accords de *Bretton Woods* dont l'impact historique est aujourd'hui bien compris comme cela est rapporté par BORDO et EICHENGREEN (2007). Le but était alors d'assurer une stabilité économique, et ces accords avaient pour ce faire, indexé les monnaies d'un certain nombre de pays dont la France (BORDO, 1993, donne une liste détaillée des pays) sur le dollar, tout en indexant le dollar sur l'or. Ainsi, toutes ces monnaies suivaient un équivalent d'étalon-or, ce qui signifie que la valeur fiduciaire de chacune de ces monnaies était liée à une quantité d'or fixée. Le système monétaire qu'est l'étalon-or fut très populaire au XIXe siècle, et son utilisation a eu un impact important et assez bien documenté sur l'économie des pays concernés comme présenté par BORDO et SCHWARTZ (2009).

BAZOT et al. (2014) parlent de taux d'intérêt endogène dans le cadre de l'étalon-or, traduisant la stabilité favorisée par l'utilisation d'un tel système. Les banques centrales avaient globalement plus de contrôle sur ces derniers. Ainsi, les mesures de Nixon ont non seulement provoqué une forte spéculation sur le dollar comme expliqué par IRWIN (2013), mais aussi encouragé la volatilité des taux d'intérêts. C'est dans tous les cas un facteur d'accélération, si ce n'est l'élément déclencheur d'une période d'inflation qui va être particulièrement stimulée par les différents chocs pétroliers subis pendant les années 1970 (voir LIFSET (2014) à ce propos). Étant donné la corrélation de l'inflation et des taux d'intérêt, il est alors compréhensible de les voir suivre une augmentation similaire. Cette période s'arrête au début des années 1990 ayant atteint son pic durant les années 80. La stabilisation de l'inflation est en général expliquée par l'état de globalisation avancé qu'atteignent alors les États-Unis comme mis en avant par GAMBER et HUNG (2001), un phénomène similaire se propageant par la suite en Europe.

Une longue chute

La deuxième période est une longue baisse des taux d'intérêt. Le processus de globalisation continue et induit une baisse relativement constante de l'inflation qui s'accompagne donc d'une baisse des taux

*code série : FM.M.FR.EUR.FR2.BB.FR10YT.RR.YLD

[†]id : H15/H15/RIFLGFCY10.N.B

[‡]Sur le graphique 1.2, la période commence avant et le début effectif de cette période n'est pas évident, mais la date de 1971 reste décisive dans l'accélération de la montée des taux

comme évoqué par BEAN (2006). Le point surprenant vient à la suite de la crise des *subprimes*. Cette crise majeure a imposé une réaction rapide de la part de la banque centrale des États-Unis, imposant un taux directeur historiquement bas (jamais atteint depuis plus de 50 ans pour les courts termes selon BOERI et GUISSO (2008)). Une telle réaction s'est alors propagée mondialement, accompagnée de réactions similaires de la part des autres banques centrales.

Cet événement est perturbateur, car il induit une stabilisation de l'inflation sans pour autant stopper la baisse des taux, ce qui induit une décorrélation entre ces derniers. Les raisons sous-jacentes à cela sont multiples et abordées plus précisément dans GARNIER et al. (2019). Dans tous les cas les taux continuent de baisser jusqu'à atteindre une forme de stabilité après passage du côté des valeurs négatives. Cet événement est historique et impose une remise en cause de la vision des taux d'intérêt, que ce soit d'une façon générale (HEIDER et al., 2021) ou dans un contexte assurantiel (de GALHAU, 2020). Le système économique actuel ne concevant pas d'avoir un intérêt négatif (KALLIS et al. (2012) aborde par exemple la problématique de l'emploi dans un contexte de décroissance qui est induit par des taux négatifs).

Une remontée brutale

La troisième période commence en 2020 et peut être décrite par une "remontée dramatique de l'inflation" (BALL et al., 2022) suite à la combinaison du COVID-19 et de la guerre d'Ukraine. Elle est majoritairement expliquée par les chocs du marché de l'énergie, et par la disruption de la chaîne logistique (*supply chain*). Les chocs énergétiques sont à mettre en parallèle des chocs pétroliers des années 70 qui ont été précédemment présentés comme une explication de la montée de l'inflation et des taux d'intérêt de l'époque. La disruption de la chaîne logistique est quant à elle une conséquence directe de l'apparition d'une épidémie majeure imprévue, et apparaît comme une cause naturelle d'une augmentation de la demande et d'une baisse de l'offre sur l'ensemble du marché.

L'impact du COVID-19 est vaste et fait l'objet de nombreuses recherches qui peuvent être résumées par MAITAL et BARZANI (2020). Il ne fait par contre pas débat, que cette pandémie a en effet provoqué un contexte inflationniste (c.f. LABELLE et SANTACREU (2022) pour une discussion spécifique à ce sujet), sans pour autant qu'il y ait effectivement de l'inflation. La demande est globalement en baisse*, ce qui est en grande partie expliquée par les confinements de la population. Les banques centrales sont obligées de baisser encore leur taux directeurs pour soutenir l'économie comme cela est rappelé par ODENDAHL et al. (2020). La fin des confinements induit alors une reprise de la consommation en opposition totale avec la baisse précédente. Ces "changements massifs de l'offre et de la demande déclenchés par la fermeture et la réouverture des économies" (ECN, 2021) nécessitent alors un temps d'adaptation à la chaîne logistique. Il aurait pu être imaginable d'observer une montée contrôlée et temporaire de l'inflation le temps que l'équilibre entre offre et demande se forme dans ce nouveau contexte, mais cela aurait nécessité de ne pas constater d'autre pression inflationniste. Or, c'est exactement ce qui se passe en février 2022 avec l'invasion de l'Ukraine par la Russie comme en témoigne CALDARA et al. (2022).

La Russie et l'Ukraine sont en effet des producteurs de pétrole, de charbon, de blé, de gaz naturel, et de nombreuses autres ressources naturelles. La production du néon (élément essentiel dans la fabrication de semi-conducteurs) venait par exemple à 70% de ces deux pays (MBAH et WASUM, 2022). Cette guerre a donc d'une part stimulée les dysfonctionnements du marché de l'énergie qui avaient commencé pendant la[†] COVID-19, et d'autre part créé une pénurie massive de produits essentiels. La différence fondamentale avec la COVID-19 est que l'économie n'est alors plus au ralenti et qu'il n'y

*cf. l' INSEE pour le détail poste par poste

[†]Féminin en toute rigueur

pas du tout de baisse de demande.

Les banques centrales craignent en effet le risque de déflation pendant le COVID-19 ("Les risques de déflation entre 2014 et 2021, renforcés par l'émergence de la pandémie de la Covid en 2020" de BDF (2022)). La déflation est un mécanisme d'inflation très faible, voir négative ayant joué un rôle majeur dans de nombreuses crises économiques importantes ("*in the worst economic meltdowns experienced in U.S. history*" de FLECKENSTEIN et al. (2017)) qui peut s'expliquer par une chute importante de la demande (voir BERNANKE et al. (2002) pour un développement sur le sujet et CHRISTENSEN et al. (2020) pour une étude spécifique entre le COVID-19 et le risque de déflation). Le COVID-19 crée un cadre inflationniste et la guerre d'Ukraine agit comme un catalyseur amplifiant le phénomène comme cela peut être vu sur le graphique* 1.3 avec le pic de la deuxième vague (novembre 2020) et le début de la guerre d'Ukraine (février 2022) représentés en axes verticaux. C'est une augmentation bien trop substantielle par rapport aux 2% objectifs, et la réaction des banques centrales est proportionnellement considérable.



FIGURE 1.3 : Évolution de l'inflation en France

1.1.3 Spécificité de l'assurance, cadre réglementaire et *market consistency*

L'évolution des taux qui a été présentée a une incidence directe sur l'industrie de l'assurance. Cette incidence est d'autant plus intense que l'assurance a une présence particulièrement importante sur le marché des taux, la majorité de ses engagements étant liée à l'évolution de ces derniers (ACPR (2022) parle de 23% – 25% de placements en obligations souveraines). Il lui faut se protéger contre la variation de l'intérêt à l'aide de produit uniquement disponibles sur ce marché des taux. L'industrie de l'assurance se distingue également dans la contribution essentielle qu'elle apporte à la sécurité de la société en outre de son rôle crucial dans l'économie. Il y a donc une nécessité de contrôle spécifique organisée en France par l'ACPR pour éviter des défaillances préjudiciables. Le contrôle réglementaire qui encadre l'activité d'assurance est aujourd'hui soutenu par trois référentiels : *IFRS17*, *MCEV* et Solvabilité 2 (THÉRON, 2007).

*code série : ICP.M.U2.N.000000.4.ANR

IFRS, un cadre comptable

Les normes *IFRS* sont des normes comptables internationales auxquelles certaines* sociétés françaises sont obligées de se soumettre (AIZAC, 2020). Les assurances ne rentrant pas dans ces catégories n'ont pas cette obligation, mais elles restent fortement encouragées à le faire. Le but de telles normes est d'harmoniser la comptabilisation des contrats d'assurance à l'échelle mondiale, permettant alors une meilleure comparabilité des états financiers des compagnies d'assurance opérant dans différents pays.

La norme *IFRS17* en est la dernière mise-à-jour, elle y décrit plusieurs concepts tels que :

- les *fulfilment cash flow*, qui quantifient l'ensemble des flux attendus jusqu'au règlement d'un contrat,
- l'ajustement pour risque, qui quantifie l'incertitude liée à l'estimation de la valorisation de *fulfilment cash flow* à travers certains modèles tels que la *VaR*, la *TVaR* ou le *CoC*,
- la marge de service contractuelle, qui quantifie le résultat global de contrats mutualisés.

Ces derniers nécessitent alors systématiquement la valorisation de flux actifs et passifs selon le principe de juste valeur. Le terme *Best-Estimate* y est évoqué et désigne l'estimation objective la plus probable pour un ensemble de flux de trésoreries.

MCEV, une valorisation de référence d'entreprise

La *Market Consistent Embedded Value* consiste à donner une estimation de la valeur d'une entreprise. Traditionnellement, cela se faisait à travers l'estimation de la *TEV* (KARAMOKO, 2020) qui est la somme de

- l'actif net réévalué (ANAV),
- la valeur actuelle probables des profits futurs (NPVFP),
- les coûts liés à l'immobilisation de fonds propres (COC).

Le calcul de la *TEV* manquant de standards, la *MCEV* redéfinit ce concept en imposant les modèles à utiliser. Elle se décompose en la somme

- du capital requis (*RC*) nécessaire à son activité,
- du capital libre (*Free Surplus*),
- de la valeur actuelle des profits futurs (*Value of In-Force*),

le calcul de la *VIF* étant lui-même précisément défini comme la somme

- de la valeur actualisée des profits futurs (PVFP), selon une méthodologie prescrite,
- de la valeur temps des options et garanties financières (TVFOG),
- du coût de friction du capital requis (FCRC), qui représente le prix de l'immobilisation du capital requis,
- du coût des risques résiduels non répliquables, consistant à fournir un coût pour les risques non pris en compte par la PVFP et la TVFOG comme le risque de concentration par exemple.

*"les sociétés européennes cotées ou faisant appel public à l'épargne" (THÉRON, 2007)

Solvabilité 2, un cadre prudentiel

La solvabilité en assurance était jusqu'à 2015 encadrée par la norme Solvabilité 1 qui repose sur trois grandes notions (KARAMOKO, 2020) qui sont :

- la marge de solvabilité (MS), qui représente une sécurité pour faire face à une sinistralité anormale,
- l'exigence de marge de solvabilité (EMS), qui représente le capital nécessaire à la poursuite de l'activité de l'assurance,
- le fond de garantie (FG), un second capital de sécurité égal au tiers de l'EMS qui forme une sécurité pour les assurés en cas de faillite.

Ce système est aujourd'hui reconnu comme insatisfaisant, démontrant des limites quantitatives et qualitatives importantes, notamment à travers une vision rétrospective et limitée du risque, une incohérence avec les normes comptables internationales et un manque de suivi et de supervision important. Solvabilité 2 vise à renforcer cette norme à travers la modernisation des exigences et leur harmonisation par rapport aux autres référentiels présentés. Plus de détails à ce sujet sont donnés dans la partie 1.3.

La *Market Consistency*

Les différents référentiels présentés demandent la valorisation de l'actif et du passif d'une manière dite *market consistent* qui peut se définir par VEDANI et al., 2017 pour un actif comme "sa valeur unique d'échange" ("*the market-consistent valuation of an asset is its unique trading value*"). Cette définition vient de l'interprétation d'une partie de la directive (alinéa 3, l'article 76) PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2009) :

"Le calcul des provisions techniques utilise, en étant cohérent avec elles, les informations fournies par les marchés financiers et les données généralement disponibles sur les risques de souscription (cohérence avec le marché)."

Le problème est qu'une telle définition n'est possible que pour un actif liquide sur le marché, ce qui n'est pas le cas des passifs globaux d'une assurance. Une définition plus théorique est donc de définir la valorisation *market-consistent* comme le prix juste (MALAMUD et al., 2008), qui fait référence à une indifférence (en termes de fonction d'utilité) du point de vue d'un investisseur fictif entre l'achat à ce prix et l'inaction (PELSSER et STADJE, 2014). Autrement dit, une évaluation *market consistent* consiste à valoriser les actifs à leur prix d'échange en maximisant l'utilité des agents du marché.

Une approche classique (MALAMUD et al., 2008) pour le passif de l'assureur consiste alors à considérer un modèle à plusieurs périodes temporelles accompagné d'un flux de consommation optimale pour chaque acteur. Un tel flux est lui-même juste*, rendant cette valorisation du passif *market consistent*. Si une telle approche rentre effectivement dans le cadre de Solvabilité II, ce n'est pas le cas avec Solvabilité I où la valorisation du passif était alors disjointe du marché en utilisant des règles déterministes pour la mise en place des provisions.

*L'alinéa 2 du même article fait écho à cela en définissant la valorisation du passif comme le prix à payer pour le transfert de leur passif à une autre entreprise

1.2 Les générateurs de scénarios économiques

La partie précédente a exposé les besoins de valorisation *market consistent* dans l'évaluation du bilan des assureurs à travers les différents référentiels encadrant aujourd'hui ce milieu. Il a aussi été évoqué qu'une partie importante du passif d'un assureur n'est pas observable sur le marché. L'outil essentiel permettant de simuler une telle valorisation *market consistent* est le générateur de scénarios économiques (ARROUY et al., 2022).

1.2.1 Présentation

Un générateur de scénarios économiques (GSE) permet "une projection de grandeurs économiques et financières sur un horizon d'intérêts" (PLANCHET et al., 2009). Il est alors nécessaire de définir pour un assureur quels sont les risques auxquels il est soumis, à quel horizon, et comment les modéliser.

Un GSE peut d'une façon complémentaire être défini comme un ensemble de modèles mathématiques et statistiques prenant en compte diverses variables économiques et financières pour produire des scénarios plausibles, ces scénarios pouvant être stochastiques ou déterministes. L'importance de cet outil en assurance vient du fait que c'est "l'unique façon de déterminer la valeur *market consistent* des passifs" (VARNELL, 2011) de l'assureur et que c'est donc l'approche privilégiée pour la valorisation des fonds propres. Chaque risque auquel l'assureur fait face est alors modélisé mathématiquement. Les GSE se déclinent alors en deux familles selon s'ils sont risque-neutres ou historiques.

La probabilité risque neutre dans les générateurs de scénarios économiques

Le terme GSE risque-neutre est utilisé lorsque la modélisation se fait dans un environnement où la probabilité est dite risque-neutre. L'appétence au risque des agents n'a alors pas d'impact sur la probabilité d'occurrence d'événement. Le comportement (et donc la fonction d'utilité) des agents est alors beaucoup plus simple, réduisant considérablement la complexité de l'approche *market consistent* et l'estimation du prix juste.

La probabilité risque-neutre est une mesure probabiliste équivalente à la probabilité classique (dite historique), et suppose que les rendements futurs des actifs financiers sont actualisés en utilisant un taux sans risque plutôt que leur rendement réel. Ce taux théorique est le rendement attendu d'un investissement considéré comme exempt de tout risque de défaut ou de perte en capital. Dans ce cadre, les actifs génèrent tous un même rendement, et cela annule la question d'appétence au risque des investisseurs. La différence au niveau des actifs se situe alors uniquement au niveau de leur volatilité qui elle varie. D'un point de vue théorique, deux hypothèses sont nécessaires pour utiliser cette modélisation :

- **Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA).** Il n'y a pas de possibilité de faire un profit sûr (*ie* un gain strictement positif de probabilité non nul) sans risque (*i.e.* sans investissement initial pouvant être perdu).
- **Complétude du marché.** Chaque flux financier peut être répliqué par une somme d'actifs risqués et de l'actif sans risque. L'actif sans risque est un actif théorique qui rapporte le taux sans risque de manière sûre.

Remarque sur l'AOA

Cette hypothèse permet d'assurer l'existence d'au moins une probabilité risque neutre. La supposer vérifiée ne pose pas de problème puisque si une opportunité d'arbitrage existe, les investisseurs cherchent à en profiter en achetant les actifs sous-évalués et en vendant les actifs sur-évalués jusqu'à ce que les prix convergent vers leur valeur juste. Un tel processus a pour effet d'éliminer les déséquilibres de prix et de rétablir l'absence d'opportunité d'arbitrage. Ainsi, un marché d'une taille suffisante vérifiera cette propriété.

Remarque sur la complétude des marchés

La complétude du marché est une hypothèse forte dont la réalisation est moins évidente dans le monde réel. Elle permet de prouver qu'il existe au plus une seule probabilité risque-neutre. Couplé avec l'AOA, cela implique l'unicité de la probabilité risque-neutre et donc du prix juste de chaque actif. Elle est en pratique supposée vérifiée en estimant que la quantité d'actifs liquides est suffisante pour permettre cette réplcation.

La probabilité monde réel

La probabilité monde-réel est la probabilité objective basée sur l'observation du monde réel. Elle est fondée sur des informations empiriques et des statistiques réelles et permet de déduire des comportements probables en suivant une démarche inductive. Évaluer la valorisation *market consistent* de produits financiers sous cette probabilité est problématique, le comportement des investisseurs en fonction du risque étant très variable d'un individu à l'autre ce qui rend la modélisation délicate.

L'utilisation de la probabilité risque-neutre est souvent couplée à celle de la probabilité monde-réel et permet de prendre des décisions prudentes et équilibrées. Si une distribution de grandeur macro-économique peut être exhibée, alors pour chaque scénario monde réel, une valorisation risque-neutre peut être effectuée, suivie d'une projection risque-neutre. Ainsi, une distribution globale de la variation de l'actif considéré en est déduite. La combinaison des univers permet de projeter au mieux les facteurs de risque tout en respectant le cadre réglementaire associé.

1.2.2 La structure d'un GSE

En pratique un "GSE intègre en entrée des prix d'actifs, qui sont utilisés pour calibrer les paramètres d[es] modèles afin de refléter la volatilité des marchés et la courbe de taux sans risque EIOPA" (SGACPR, 2020). Le schéma 1.4 décrit les différentes interactions sous-jacentes au GSE.

En premier lieu, il faut pour chaque risque (action, immobilier ou taux comme cela est étudié en détail dans la suite du mémoire), choisir un modèle. Ce modèle doit d'une part refléter au mieux le profil de risque de l'entreprise considérée, et d'autre part refléter la réalité des marchés (le sujet est abordé pour les taux dans la partie 1.4.3).

Chaque modèle est ensuite calibré sur des données de marché et doit passer des tests réglementaires (martingalité et cohérence de marché sur la figure 1.4) pour valider leur bonne implémentation. La corrélation entre les différents modèles (représentant les différents risques) fait elle aussi l'objet d'une calibration.

Le GSE produit des scénarios économiques sous la probabilité risque-neutre qui sont utilisés par le modèle de projection actif-passif (lui-même sous la probabilité historique et contenant des hypothèses

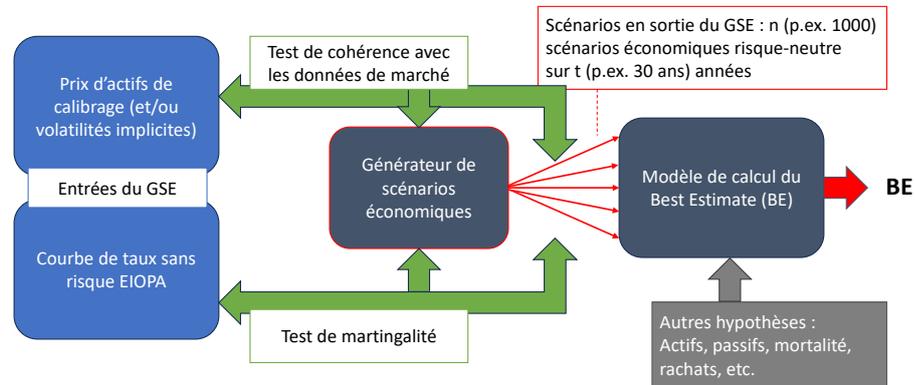


FIGURE 1.4 : Graphique de l'ACPR sur les GSE (SGACPR, 2020)

monde-réels). Les contrats sont alors projetés jusqu'à expiration, ce qui permet d'en déduire pour un scénario économique donné l'ensemble des engagements de l'assurance. La moyenne de ces estimations d'engagements sur l'ensemble des scénarios fournis, c'est le *BE*, une estimation du passif au plus proche de la réalité.

La suite de cette sous-partie explicite la modélisation de certains risques qui n'ont pas vocation à être approfondis par la suite. Par exemple pour le risque immobilier, le modèle de Black and Scholes peut être utilisé tel que

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW(t),$$

avec S_t l'actif immobilier, $(\mu_t)_t$ le rendement de l'actif immobilier (*i.e.* son gain de valeur annuel), σ_t la volatilité de l'actif et $W(t)$ l'ensemble* des risques auxquels est soumis l'actif.

Un tel modèle est alors purement historique (ce qui est nécessaire pour prendre en compte le rendement), mais un équivalent en risque neutre peut être déterminé dans lequel le rendement est remplacé par le taux sans risque. Si l'actif est acheté en $t = 0$, alors la variation de sa valeur est la distribution de $(S_{T_{fin}} - S_0)$. Avec cette distribution, une mesure de risque peut en être déduite $(S_0 - S_{T_{fin}})$, ce qui donne une estimation du risque immobilier. Un tel modèle peut alors être sophistiqué par une prise en compte de l'évolution des autres secteurs immobiliers à travers plusieurs brownien et des vecteur μ_i et $(\sigma_i)_i$ remplaçant μ et σ , ou par un autre modèle jugé plus adapté tel que celui d'Heston, ou bien encore par une approche complètement différente tel que présentée dans (de LAUZON, 2020).

Pour le risque action, le modèle de Black and Scholes peut lui aussi être utilisé même si d'autres modèles plus sophistiqués existent (Heston ou Merton par exemple). Des études spécialisées sur le sujet peuvent être trouvées en actuariat (KACEM, 2017). Quel que soit le risque considéré, le problème qui se pose alors est la quantification précise du risque acceptable pour une mesure de risque donnée.

*modélisé ici par un brownien unidimensionnel

1.3 La modélisation dans le cadre de Solvabilité 2

Cette partie s'intéresse aux exigences de marge de solvabilité pour un assureur, et met en exergue l'impact des modèles utilisés. Solvabilité 2 propose en effet une formule standard permettant de quantifier de manière prudente et générique (*i.e.* pas spécifique à une seule assurance) le risque de ruine. Il faut néanmoins noter que Solvabilité 2 est une réforme majeure assez vaste qui se décline sous trois piliers, décrits dans la figure 1.5. Cette partie s'intéresse à la quantification de métriques relatives à la marge de solvabilité des assurances, c'est donc uniquement le pilier 1 qui est ici détaillé.

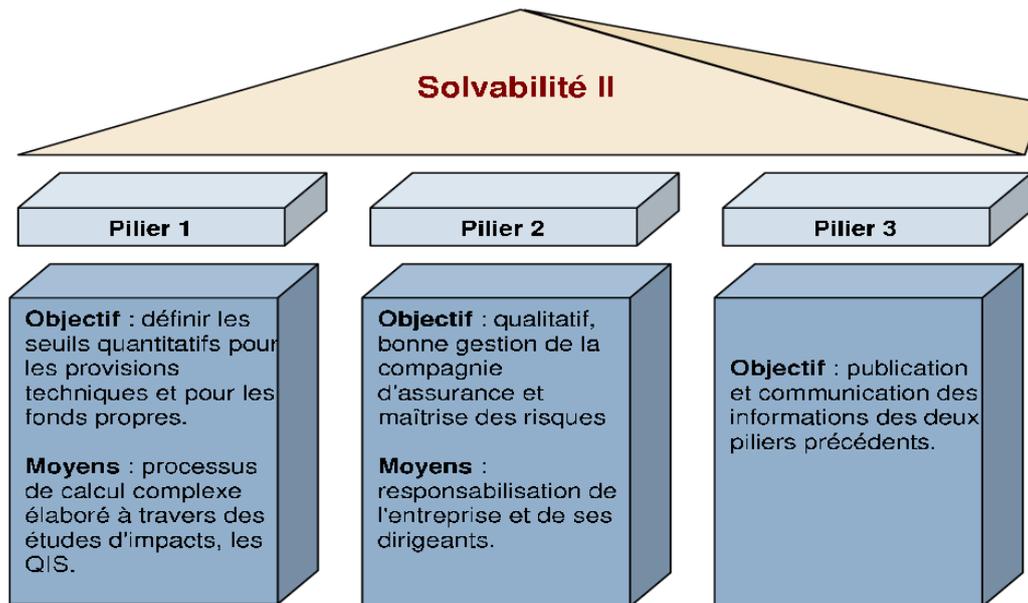


FIGURE 1.5 : Les trois piliers de solvabilité 2 (DERIEN, 2010)

1.3.1 La formule standard

Les exigences réglementaires auxquelles font face les assurances se matérialisent à travers le MCR (*Minimum Capital Requirement*) et le SCR (*Solvency Capital Requirement*). Le graphique 1.6 décrit précisément* le bilan d'un assureur sous Solvabilité 2, la différence que cela induit avec le bilan comptable classique, et la place des métriques évoquées à travers ce dernier. Le MCR est un seuil plancher absolu, il s'exprime linéairement en fonction du SCR (HAEGEL, 2009, entre 20% et 5%). Si ce niveau de fonds propres réglementaire n'est pas atteint, l'intervention des autorités de contrôle est automatique.

Le SCR est une métrique assurantielle, cela correspond au capital nécessaire pour faire face à un risque de ruine à 99.5% à horizon 1 an. L'assureur se doit alors de conserver un niveau de fonds propres suffisants par rapport à cette valeur. En général, il est observé une exigence réglementaire de 100% du rapport des fonds propres sur le SCR[†] (DEROGIS, 2021). Le SCR est défini (CHRISTIANSEN et NIEMEYER, 2014) tel que

*À la nuance que les "Plus ou Moins Values latentes" ne sont pas reconnues entièrement en face des exigences de fonds propres sous Solvabilité 1

†
$$\frac{\text{Fonds Propres}}{\text{SCR}}$$

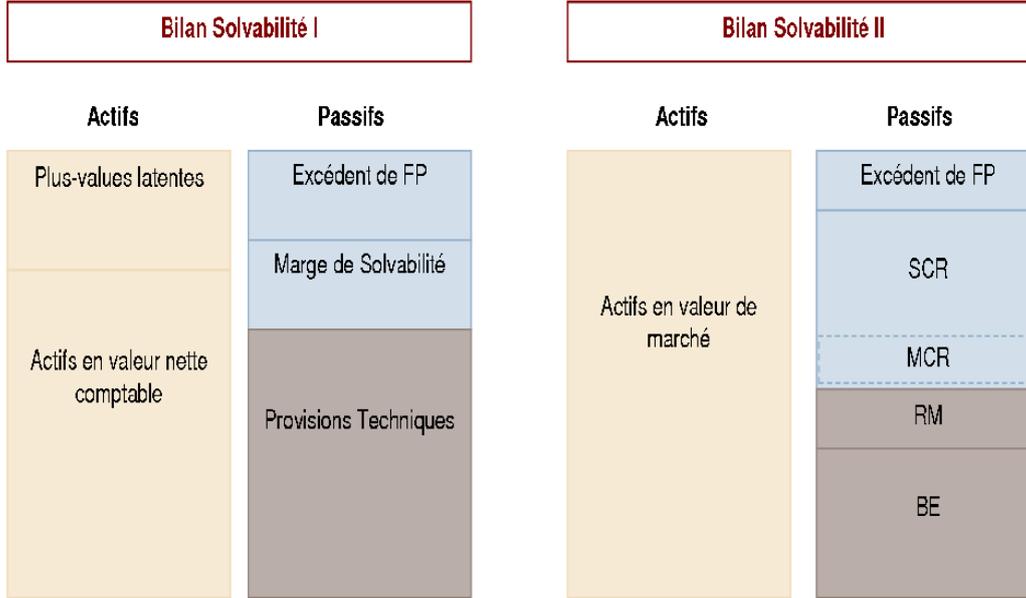


FIGURE 1.6 : Le bilan sous solvabilité 2 (DERIEN, 2010)

$$SCR = SCR_0 = VaR_{0.995}(N_0 - v(0,1)N_1), \quad (1.2)$$

avec

$$\forall \alpha \in (0,1) \quad VaR_\alpha(Y) = \inf\{y \in \mathbb{R} | P(Y \leq y) \geq \alpha\},$$

pour Y une mesure de risque. Dans l'équation (1.2), $N_t = A_t - L_t$ représente la valeur de l'actif net de passif (NAV) pour un instant t et $v(t, t+1)$ représente alors le facteur d'actualisation des actifs sous-jacent à A_t , la valeur de l'actif globale. L'article 101 de Solvabilité 2 ne précise alors pas la forme de $v(t, t+1)$ et laisse de la place pour de l'interprétation, ce sujet étant traité dans CHRISTIANSEN et NIEMEYER (2014).

Dans cette définition du SCR , Y représente une mesure de ruine globale dépendant de plusieurs risques. Ces risques sont nombreux, son calcul n'est donc pas évident. L'approche de la formule standard, consiste à effectuer une décomposition en risques élémentaires pour qui une mesure de risque est plus facilement identifiable. Pour chaque risque élémentaire un calcul de variation instantanée de NAV (N_t) est effectué où seul un risque est considéré, permettant de calculer un SCR élémentaire. L'agrégation précise des différents capitaux fournit alors une expression du SCR . Cette décomposition en risques élémentaires suivie d'une agrégation des capitaux, c'est la formule standard.

Le graphique 1.7 décrit cette décomposition, avec les risques élémentaires apparaissant en bleu clair. Il y a par exemple le risque de taux d'intérêt, le risque d'action et le risque immobilier en bas à gauche. Ces risques appartiennent tous au risque dit de marché qui se définit tel que (ARROUY et al., 2022)

$$SCR_{market} = \sqrt{\sum_{i,j \in Market} \rho_{i,j} SCR_i SCR_j}. \quad (1.3)$$

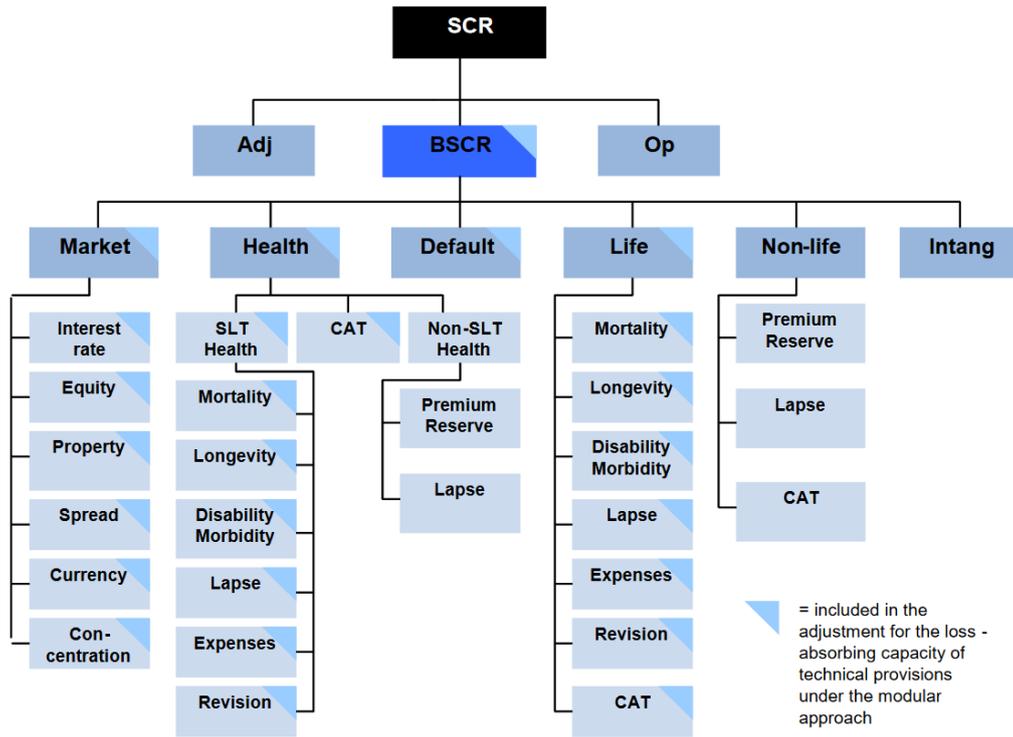


FIGURE 1.7 : Décomposition du SCR (EIOPA, 2014, p. 120)

Une agrégation similaire peut être observée pour la définition du risque vie, ou non-vie. Les facteurs de corrélations $(\rho_{i,j})$ sont fournis par Solvabilité 2. Que ce soit le risque de marché, le risque vie ou le risque non-vie, ils décrivent tous une partie du risque de l'assureur. Ils doivent donc être de nouveau agrégés avec une formule similaire à (1.3) avec d'autres coefficients de corrélations. L'agrégation des SCR de risques du niveau du risque marché fournit le *BSCR*. Le SCR peut finalement être calculé selon :

$$SCR = BSCR + SCR_{op} + Adj.$$

Le SCR_{op} quantifie alors le risque opérationnel, prenant en compte des paramètres comme le risque humain, les dysfonctionnements matériels, etc ... Le paramètre *Adj* inclut quant à lui, la capacité de l'assureur à faire varier ses fonds propres en conséquence d'un résultat défavorable (avec des réductions d'impôts par exemple). Ces deux éléments ne sont pas corrélés au *BSCR*, d'où leur addition telle quelle.

1.3.2 Best Estimate

La formule standard est générique, et ne prend donc pas en compte la spécificité des assureurs. Pour bien comprendre la différence qu'induit une approche modèle interne et l'importance de notions théoriques comme la mesure risque-neutre, il est essentiel de donner une définition plus précise du *Best-Estimate (BE)* (ou plus rigoureusement *Best Estimate of Liabilities*) que ce qui a été fourni jusqu'alors dans la partie 1.1.3 et 1.2.2. Le *BE* est défini dans (ARROUY et al., 2022) tel que

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \otimes \mathbb{Q} \left[\sum_{n \geq 1} D(0, n) CF_n \right], \quad (1.4)$$

où $D(0, n)$ représente le facteur d'actualisation* entre 0 et n , CF_n représente l'ensemble des flux financiers intervenant à la période n , et $\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}$ représente la combinaison des probabilité historique et risque-neutre dont la nécessité a été évoquée dans la partie 1.2.1. La probabilité \mathbb{Q} est en générale utilisée pour la gestion des risques financiers, tandis que la probabilité \mathbb{P} est utilisé pour le reste. Par exemple, la probabilité de décès d'un assuré est indépendante de l'aversion au risque des différents agents, et est donc directement évaluée sous \mathbb{P} .

Ce *Best Estimate* est l'évaluation la plus précise de L_t et impacte donc la valeur de N_t dans la formule (1.2). Il ne faut pas oublier qu' A_t est répliquable sur le marché, et ne représente pas les mêmes problématiques. Le calcul du BE peut toujours se faire à l'aide d'une estimation par Monte-Carlo telle que

$$BE \approx \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^N D^{(l)}(0, n) CF_n^{(l)},$$

en supposant une dépendance des flux du passifs aux risques financiers. Une formule plus simple de (1.4) peut être déduite dans le cas contraire telle que

$$BE = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(0, n)] \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [CF_n],$$

avec $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [D(0, n)]$ qui est un prix zéro-coupon comme introduit plus loin. Une telle hypothèse est restrictive, mais simplifie grandement l'estimation du BE . En son absence, il faut un couple de scénario monde réel et risque-neutre par simulation, ce qui complexifie grandement l'approche Monte-Carlo.

1.4 Modèles de taux d'intérêt

Que ce soit pour l'évaluation du risque, la tarification, la gestion de portefeuilles ou la réglementation, les sociétés d'assurance ont besoin de modèles. Parmi ces modèles, celui des taux d'intérêt est d'une importance toute particulière au regard des engagements des assureurs. Il est par ailleurs mis en jeu lors du calcul du SCR de taux qui a un poids majeur de par la prédominance des assurances sur le marché obligataire. Il permet en outre l'obtention des facteurs d'actualisation pour les assureurs qui sont nécessaires à chaque étape de l'élaboration et de la projection du bilan.

Définition d'un modèle

"Un modèle est une consolidation précise et concise de toutes les caractéristiques structurelles et comportementales pertinentes du sujet d'étude (présenté dans un format prédéfini)" d'après Arbez et Birta dans ROBINSON et al. (2015), et c'est aussi une "description d'un problème du monde réel (...)" d'après Wagner dans le même article. Un modèle est donc avant tout une reproduction simplifiée d'un phénomène lié au réel, le mot "modèle" étant d'ailleurs un emprunt à l'italien (*modello*) signifiant "miniature". Dans leur définition, Arbez et Birta ajoutent la subtilité que le sujet d'étude modélisé

*Il dépend intégralement du risque de taux

doit apparaître dans une forme prédéfinie, ce qui ajoute une seconde couche de simplification. Le sujet est d'abord simplifié de par l'observation qui en est faite* et ensuite dans la tentative de reproduction de cette observation. Un modèle peut donc évoluer dans le but de mieux reproduire ce qu'il décrit, ou bien parce que ce qu'il décrit n'est plus prédéfini de la même façon.

Pour un modèle de taux, le sujet d'étude est un taux d'intérêt. Le taux précis en question varie, mais les problématiques restent les mêmes. C'est en effet toujours un sujet théorique qui est expliqué par un modèle mathématique, utilisant des variables reliées entre elles par des équations. Le but est de décrire le comportement des taux†, et pas simplement leur valeur aujourd'hui. Les évolutions qui sont décrites historiquement parlant sont donc soit des évolutions théoriques (les taux ne doivent pas être négatifs donc le modèle doit changer cf. §1.4.4 par exemple), soit pratique (en proposant un modèle plus efficace).

Avant de parler plus en détails de modèles spécifiques, il est nécessaire d'introduire quelques notions afin de donner une intuition sur le comportement que peut induire un modèle de taux d'intérêt.

1.4.1 Définitions sur les taux

Taux d'intérêt

Le taux d'intérêt annuel simplement composé, noté $L(T_1, T_2)$ représente un emprunt débutant en T_1 et finissant en T_2 ‡. C'est un emprunt qui est ici supposé sans risque de défaut.

Prix Zéro-Coupon

Une obligation zéro-coupon est une obligation de verser une unité au bout d'un temps fixé, la maturité. Elle est notée pour une maturité $T > 0$ à un instant $t < T$, $ZCB(t, T)$. Autrement dit, par rapport au concept de *time value*, c'est la valeur en t d'une quantité unitaire en T . Le zéro-coupon peut être relié au taux d'intérêt par la formule

$$ZCB(t, T)(1 + (T - t)L(t, T)) = 1 \iff ZCB(t, T) = \frac{1}{1 + (T - t)L(t, T)}. \quad (1.5)$$

Dans l'égalité de gauche, $1 + (T - t)L(t, T)$ représente le remboursement d'un nominal unitaire pour un emprunt entre t et T d'un taux $L(t, T)$ annuel ramené sur la période $T - t$. Le zéro-coupon représentant ici le nominal d'un emprunt avec un tel taux, et sachant que sa valeur est égale à la somme qu'il faut investir en t pour avoir une unité en T . L'intérêt est ici composé simplement, car le taux $L(t, T)$ suppose une unique période de règlement. Dans le cas déterministe, il peut être démontré que

$$\forall t \leq T \leq U \quad ZCB(t, T) \times ZCB(T, U) = ZCB(t, U), \quad (1.6)$$

ce qui est plus cohérent avec une vision composée continument de l'intérêt.

*Les hypothèses de modélisation interviennent ici

†Même si c'est un taux (ou un ensemble de taux) qui est modélisé, le but est de décrire l'ensemble des taux en utilisant des formules les reliant

‡ $0 \leq T_1 < T_2$

Taux zéro-coupon

Le taux zéro-coupon $Z(t, T)$ peut alors être défini comme le taux annuel reflétant l'intérêt d'un zéro-coupon tel que

$$ZCB(t, T) = \frac{1}{(1 + ZCR(t, T))^{(T-t)}},$$

autrement dit

$$ZCR(t, T) = \left(\frac{1}{ZCB(t, T)} \right)^{\frac{1}{T-t}} - 1,$$

l'intérêt du taux zéro-coupon n'est ici pas simple mais composé, ce qui est habituel en assurance du fait que le règlement est en général étalé sur plusieurs périodes.

Taux *forward*

Un *forward* $F(t, T_1, T_2)$ est un taux d'intérêt annuel pour un prêt entre T_1 et T_2 évalué en $t < T_1$. Ainsi, $F(T_1, T_1, T_2) = L(T_1, T_2)$. Ce taux dépend d'une maturité T_1 , d'une expiration T_2 et du moment de l'évaluation t . Le *tenor* τ d'un taux *forward* est la durée de validité du taux tel que $\tau = T_2 - T_1$.

Lorsque la maturité et l'expiration sont claires, le taux est simplement écrit $F(t)$. D'autre part pour un *tenor* fixé, la structure des taux peut être entièrement décrite $(F(t, 0, \tau), F(t, \tau, 2\tau), \dots)$ dans ce cas, il est écrit

$$F_k(t) = F(t, T_{k-1}, T_k),$$

pour $T_k = k \cdot \tau$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Taux *forward* instantané

Le taux *forward* instantané $f(t, T)$ est un taux *forward* pour un *tenor* infinitésimal. Autrement dit

$$f(t, T) = \lim_{T_2 \rightarrow T^+} F(t, T, T_2).$$

Taux court

Le taux court r_t est un taux *forward* instantané où la période entre l'évaluation et la maturité est infiniment petite. Autrement dit, il peut être exprimé tel que

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t^+} f(t, T),$$

et représente un taux sans risque. En effet l'instant de son évaluation t est infiniment proche de sa maturité, elle-même infiniment proche de son expiration. Ce taux n'est donc pas soumis à une quelconque perte de valeur due à des variations du marché.

Liens entre le prix zéro-coupon et les taux *forwards*

En reprenant la formule (1.6), il peut être remarqué que la bonne composition de l'intérêt pour un zéro-coupon est la composition continue. Cela donne une autre façon de définir le taux *forward* instantané avec

$$f(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} (ZCB(t, T)) \iff ZCB(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du}. \quad (1.7)$$

Le taux *forward* peut alors être défini en reprenant une telle définition de l'intérêt tel que

$$1 \times (1 + (T_2 - T_1)F(t, T_1, T_2)) = 1 \times e^{\int_{T_1}^{T_2} f(t, s) ds} \iff F(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \left(\frac{ZCB(t, T_1)}{ZCB(t, T_2)} - 1 \right). \quad (1.8)$$

Une telle formule est l'équivalent de (1.5) pour une évaluation du taux $L(T_1, T_2)$ à un instant $t \leq T_1$.

Actualisation

L'actualisation d'un actif S_t fait référence à l'évaluation de sa valeur actuelle \tilde{S}_t , qui est définie dans DOWNES et GOODMAN (2014) comme "la valeur aujourd'hui d'un ensemble de paiements futurs selon un intérêt composé approprié". Il est classique d'utiliser le taux sans risque tel que

$$\tilde{S}_t = e^{-\int_0^t r_s ds} . S_t,$$

mais le taux zéro-coupon peut aussi être utilisé d'une façon tout aussi cohérente* telle que

$$\tilde{S}_t = ZCB(0, t) . S_t = \frac{1}{(1 + ZCR(0, t))^t} S_t.$$

Le premier point de vue est plus théorique et consiste à estimer le retour d'un investissement selon un taux dépourvu de tout risque, tandis que la deuxième expression est plus pratique et utilise l'interprétation du zéro-coupon en tant que valeur future d'une unité vue aujourd'hui. L'idée reste dans tous les cas que la valeur d'une monnaie fluctue au cours du temps pour prendre en compte l'investissement qui peut être fait entre aujourd'hui et un instant futur.

Taux *swap*

Un *swap* est un échange de flux financiers, entre un flux à un taux variable (représenté par un ensemble de *forwards* $(F_k)_k$ avec des *tenors* $(\tau_k)_k$ et un flux à un taux fixe F_{fixe} . Les $(F_k)_{m \leq l \leq n}$ caractérisent entièrement la jambe variable qui fournit donc $\tau_k . F_k(T_{k-1})$ pour $k \in \{T_{m+1}, \dots, T_{n+1}\}$ en T_k , tandis que la jambe fixe fournit $\tau . F_{fixe}$ à la même date.

*Il y a égalité entre ces deux expressions pour un taux court déterministe

Il peut être montré que

$$\begin{cases} JV(t) &= ZCB(t, T_m) - ZCB(t, T_n), \\ JF(t) &= \sum_{i=m+1}^n F_{fixe}(T_i - T_{i-1})ZCB(t, T_i), \end{cases}$$

le taux *swap* étant alors le taux F_{fixe} tel que les deux jambes soient égales. Ainsi

$$S_{m,n}(t) = \frac{ZCB(t, T_m) - ZCB(t, T_n)}{\sum_{i=m+1}^n (T_i - T_{i-1}) \cdot ZCB(t, T_i)}, \quad (1.9)$$

où m est la maturité du *swap* et n son expiration. Le terme de *tenor* à propos d'un *swap* désigne la quantité $n - m$.

1.4.2 Définitions sur le marché des taux

La volatilité implicite

La volatilité implicite est définie selon MAYHEW (1995) dans le cadre du modèle de Black-Scholes comme l'estimation du marché de la constante de volatilité ("*Under the strict assumptions of the Black-Scholes model, implied volatility is interpreted as the market's estimate of the constant volatility parameter*"). D'une manière plus générale, il existe deux modèles vanille rappelés dans l'annexe §A.2 extrêmement populaires sur les marchés. Ces deux modèles donnent une vision de l'évolution stochastique d'un sous-jacent dans le temps, et utilisent un paramètre constant de volatilité qui est plus communément appelé la volatilité implicite.

L'idée est que ces modèles permettent d'évaluer le prix d'options vanille. Ainsi pour un ensemble de paramètres fixés, il y a une bijection entre le prix d'une option et sa volatilité implicite. Il est alors plus usuel de communiquer un prix en volatilité implicite dans le but d'éviter de communiquer des biais de valorisation tels que le décompte de l'actualisation.

Caplet et floorlet

Un *caplet* est un *call* sur un taux *forward*. La maturité du *call* est la même que la maturité du *forward* sous-jacent. Pour un taux *forward* $F(t, T_1, T_2)$, le *caplet* avec un *strike* K a un *payoff* de

$$\tau(F(T_1, T_1, T_2) - K)^+,$$

et un prix en $t = 0$ de

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int_0^{T_2} r_s ds} (F(T_1, T_1, T_2) - K)^+ \right]$$

Le *floorlet* est le complémentaire du *caplet*, c'est un *put* sur un *forward*.

Cap et floor

Un *cap* est une somme de *caplets*. L'idée est qu'il est en général plus intéressant de s'assurer sur un taux pour une durée donnée souvent supérieur à la durée de validité d'un unique *caplet*. Un *caplet* est

néanmoins un *cap* (pour un ensemble qui est un singleton), mais un *cap* est en général un ensemble de plusieurs *caplets*. Un *cap* pour une durée de $(m - n) \cdot \tau$ où τ est le *tenor* du sous-jacent a un *payoff* de

$$\sum_{i=m+1}^n \tau(F_k(T_{k-1}) - K)^+,$$

et un prix en $t = 0$

$$\sum_{i=m+1}^n \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^{T_k} \tau(F_k(T_{k-1}) - K)^+} \right].$$

La notion de volatilité implicite pour un *cap* est donc légèrement différente de sa définition usuelle, car un *cap* n'est pas à proprement parler un *call*. La volatilité implicite d'un *cap* est donc définie comme la volatilité implicite de tous les *caplets* constituant le *cap* tels que le prix coïncide avec sa cotation sur le marché.

Swaption

Une *swaption* est une option sur un *swap* qui peut prendre différentes formes selon qu'elle est

- payeuse, et donne le droit de rentrer dans un *swap* en payant un taux fixe,
- receveuse, et donne le droit de rentrer dans un *swap* en recevant un taux fixe et en payant un taux variable,

et il est moins usuel de parler de *call* ou *put* dans ce cas. La maturité de l'option T_m est alors la maturité du premier *forward* du *swap* ce qui donne un *payoff* dans le cas d'une *swaption* receveuse de

$$\left(\sum_{k=m+1}^n \tau(K - F_k(T_m)) \cdot ZCB(T_m, T_k) \right)^+,$$

pour une maturité (de l'option) T_m . Sa valeur en $t = 0$ est alors

$$\mathbb{E} \left[e^{-\int_0^{T_m} \tau(K - F_k(T_m)) \cdot ZCB(T_m, T_k)} \right]^+.$$

Si l'annuité est définie telle que

$$A_{m,n}(t) = \sum_{k=m+1}^n \tau \cdot ZCB(t, T_k),$$

alors le *payoff* en T_m de la *swaption* receveuse peut être écrit

$$(A_{m,n}(T_m))(K - S_{m,n}(T_m))^+,$$

ce qui fait apparaître le caractère optionnel de l'objet. La formule de Black (respectivement Bachelier) peut alors être employée pour une détermination du prix, et la bijection avec une volatilité implicite est ainsi exhibée.

1.4.3 Histoire des modèles de taux

L'histoire des modèles de taux peut être résumée dans le graphique 1.8. Ce dernier décrit plus généralement la chronologie de la modélisation financière dans le cadre de l'assurance depuis 1970 jusqu'aux années 2010. Il s'agit alors de comprendre l'utilisation de ces modèles au regard du contexte économique et scientifique afin de saisir les enjeux actuels.

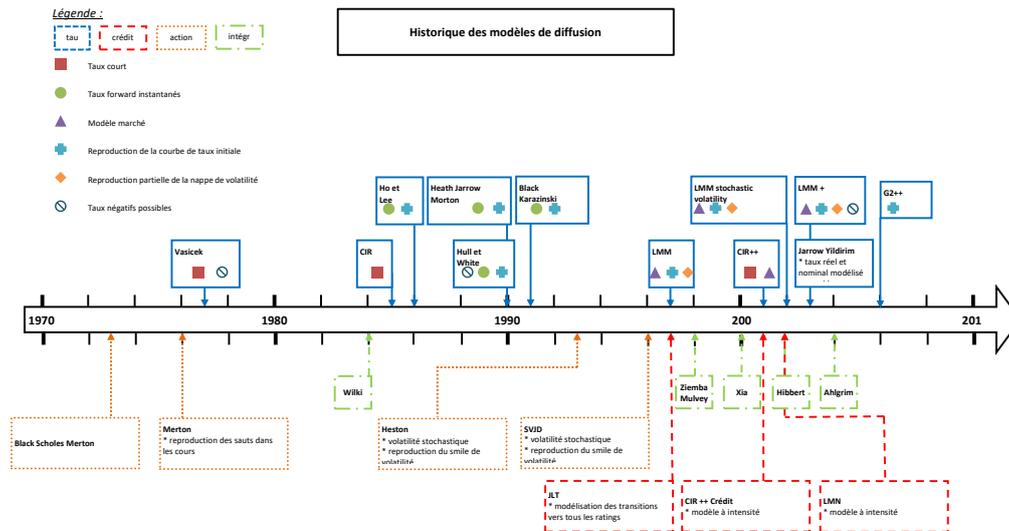


FIGURE 1.8 : Histoire des modèles de taux (INSTITUT DES ACTUAIRES, 2018)

Il existe plusieurs catégories de modèles de taux d'intérêt qui sont :

- les modèles de taux courts, qui simulent r_t ,
- les modèles de marché, qui simulent directement un taux *forward* F_t bien défini,
- les modèles *HJM* qui modélisent spécifiquement les taux *forward* instantanés,

qui au-delà de leur définition, ont besoin d'une phase dite de calibration pour la bonne mise en place des diffusions sous-jacentes. La calibration est vue dans le détail pour certains modèles dans le chapitre suivant, et consiste à la détermination des paramètres du modèle les plus représentatifs du marché.

Remarque sur les notations

L'approche de cette sous-partie est voulue historique. Ainsi, il a été choisi de présenter les formules originales, accompagnées de leurs sources, propres à chaque modèle. Par conséquent, ces formulations peuvent varier et ne sont pas uniformes. Ainsi les notations dz , $dz(t)$, dW , $dW(t)$, dW_t représentent dans cette sous-partie un même mouvement brownien. Il arrive de même que l'indice du temps soit sous-entendu (*i.e.* r au lieu de $r(t)$). Des reformulations des équations originales sont proposées lorsque jugées nécessaires, elles utilisent alors la notation $dW(t)$ pour le brownien.

1.4.4 Modèles de taux courts

Les modèles de taux courts se concentrent sur la modélisation du taux court r , ils sont tous sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} .

Vacisek

Le modèle de Vacisek est un modèle de taux court introduit en 1977, soit 4 ans après la fin explicite des accords de Bretton Woods et le passage définitif vers les taux flottants. Avant cela, c'était les modèles de BLACK et SCHOLES (1973) et de BACHELIER (1900) (cf. annexe §A.2) qui étaient utilisés malgré un manque de cohérence théorique ("*it was close to impossible to produce a satisfactory financial justification*" p. 6 de REBONATO (2012)). VASICEK (1977) (p. 1) s'inspire alors de la preuve de Black-Scholes pour fournir un modèle rigoureux basé sur le taux court. Il fait pour ce faire, l'hypothèse que l'ensemble de la courbe est dirigé par un brownien unidimensionnel *. Cette hypothèse bien que raisonnable, reste subjective et a eu une influence importante sur la communauté scientifique. Ceci n'empêchant pourtant pas les agents du marché de continuer à utiliser le modèle de Black (ce qui explique l'utilisation traditionnelle de la volatilité implicite rappelé dans l'annexe §A.2)†.

Pour revenir à la définition des taux d'intérêt, ils représentent la capacité de création de richesse dans un contexte donné. Intuitivement, l'économie connaissait à l'époque une grande croissance, et les taux ne pouvaient donc pas être négatifs. D'autre part, si les taux augmentent cela signifie que les investisseurs sont encouragés à prêter, et cela peut potentiellement provoquer un déséquilibre au niveau du marché (plus de créditeurs que de débiteurs). Si le déséquilibre est trop grand, cela gèle les échanges au niveau du marché (l'argent ne circule plus, car tout le monde veut le prêter.), il y a diminution de création de richesse, perte de valeur de la monnaie en question et chute des taux (si la monnaie vaut moins aujourd'hui, elle vaut aussi moins demain).

Ainsi, les taux sont censés rester dans un intervalle de valeurs, c'est pour cela que le caractère *mean-reverting* du modèle Vacisek était aussi intéressant. C'est à dire que la modélisation de Vasicek bien que personnelle, était académiquement cohérente avec la vision des taux de l'époque, et basée sur un cadre rigoureux. Le processus de diffusion derrière ce modèle vient de Merton (MERTON, 1971, eq. 120) et s'exprime sous la forme

$$dr = \alpha(\gamma - r)dt + \rho dz, \quad (1.10)$$

où dz représente le mouvement brownien, γ la moyenne long terme, α représente la vitesse de convergence vers cette moyenne et ρ la volatilité du processus. Sur le graphique 1.9, il a été représenté une simulation d'un tel processus avec en couleur la fonction f dépendant du temps telle que

$$f(t) = \gamma + (r_0 - \gamma)e^{-\alpha t}.$$

Même si ce modèle implique un retour à la moyenne, il n'empêche théoriquement pas les taux d'être négatifs. À l'époque, la décroissance était vue comme un concept temporaire, ce qui ne permettait pas d'avoir des taux négatifs. Une telle inadéquation entre le modèle et le concept qu'il captait était alors un défaut majeur. Ce modèle est d'autre part assez restrictif sur le long terme, et perd en richesse

*"*made the sweeping assumption that the dynamics of the whole yield curve would be driven by the instantaneous short rate*" p.9 de REBONATO (2012)

†"*Traders, although with a somewhat guilty conscience, were nonetheless still using the Black formula*" p.6 de REBONATO (2012)

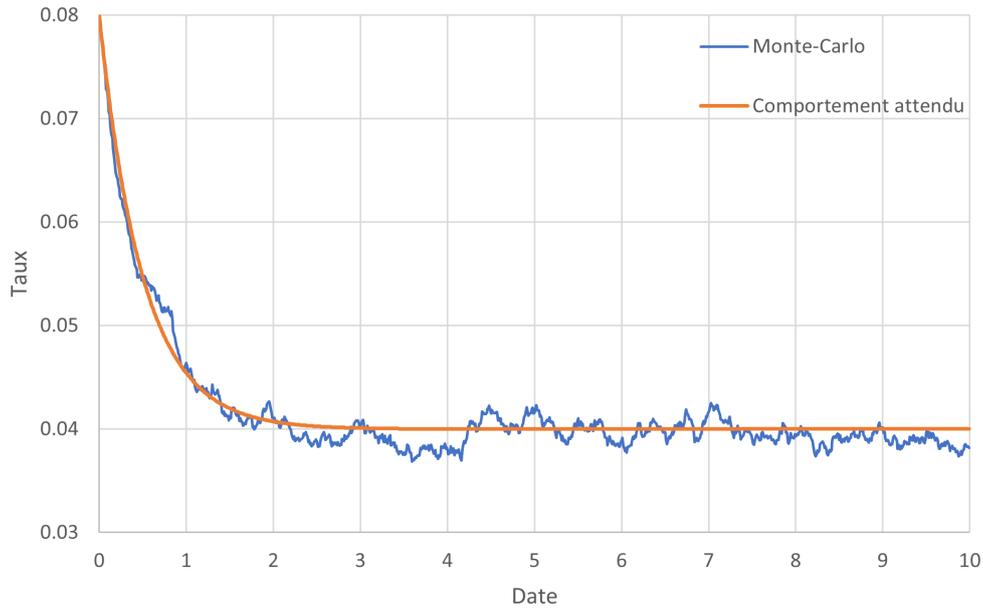


FIGURE 1.9 : Exemple de comportements sous Vasicek ($\gamma = 0.04$, $\alpha = 2$ et $\rho = 0.1$)

lorsque la moyenne est atteinte. Autrement dit, il ne reproduit pas une courbe de taux avec une forme très sophistiquée.

Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Le processus CIR introduit en 1985 (Cox et al., 1985) est un développement du processus de Vasicek, assurant la positivité des taux tout en conservant le cœur du modèle originel. Cette extension s'exprime telle que

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz,$$

et assure que r reste positif pour $2\kappa\theta \geq \sigma^2$. Le κ et le θ sont alors respectivement équivalents au α et au γ de Vasicek.

La positivité des taux modélisé est une caractéristique qui peut aujourd'hui être considérée comme restrictive, limitant son utilisation puisque les taux doivent pouvoir être négatifs. Néanmoins ce n'était pas le cas à son époque* et c'était une solution à un problème majeur qui limitait grandement la modélisation des taux. Restant très similaire à Vasicek, il partage ses autres caractéristiques : calibration et *pricing* similaire et relative pauvreté du comportement sur le long terme.

CIR++

Le modèle CIR++ est une sophistication du modèle CIR classique introduite par BRIGO et MERCURIO (2006) (dans une version de 2001) qui rajoute un processus déterminé pour permettre de se rapprocher exactement de la courbe des zéros-coupons à $t = 0$. Le processus de diffusion prend la forme

*C'est historiquement encore une période de montée des taux, cf. graphique 1.1

$$\begin{aligned} dx(t) &= k(\theta - x(t))dt + \sigma\sqrt{x(t)}dW(t), & x(0) &= x_0 \\ r(t) &= x(t) + \phi(t), \end{aligned}$$

pour des constantes réelles positives x_0 , k , θ , et σ telles que $2k\theta > \sigma^2$.

L'idée est que la diffusion d'un tel processus ne change pas par rapport au CIR classique, mais l'introduction d'un paramètre fonctionnel permet de raffiner la phase de calibrage. Il apparaît donc comme une méthode comblant l'autre défaut majeur évoqué par rapport à Vacisek, sa simplicité. Il garde un point de vue des taux positif ce qui apparaît comme problématique dans le contexte actuel.

Ho-Lee

Le modèle de taux court de (HO et LEE, 1986) donne une expression normale pour la distribution de r_t à travers un raisonnement différent des autres modèles qui étaient jusqu'alors dans la lignée de Vacisek. Cela se traduit par une diffusion de la forme

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t,$$

où $(\theta_t)_t$ est un paramètre fonctionnel.

À titre comparatif, Vacisek a 3 paramètres qui ne dépendent pas du temps. Ho-Lee a donc potentiellement une meilleure capacité à capturer le comportement des taux. Techniquement parlant, cela permet une plus grande flexibilité lors de la calibration du modèle.

Un tel modèle comble donc la critique majeure du modèle CIR et du modèle Vacisek (*i.e.* le manque de richesse), mais c'est au détriment de la simplicité, du retour à la moyenne et de la positivité des taux. Ce nouveau modèle est donc très complémentaire au CIR et met en lumière qu'un modèle n'est jamais idéal et reste avant tout un compromis.

Hull-White

Le modèle de HULL et WHITE (1990) reste encore utilisé aujourd'hui, malgré une équation de diffusion similaire à celle de Vacisek. Là où ce modèle diffère, c'est que ses paramètres ont une dépendance temporelle. Le retour à la moyenne est toujours présent, mais cette moyenne sur le long-terme n'est plus constante et dépend du temps. En terme d'expression de la diffusion cela donne

$$dr = [\theta(t) + a(t)(b - r)]dt + \sigma(t)dz,$$

où dz est défini comme un processus de Wiener (*i.e.* mouvement brownien). Il est plus fréquent aujourd'hui de voir une telle diffusion écrite telle que

$$dr(t) = [\theta(t) - \alpha(t)r(t)]dt + \sigma(t)dW(t).$$

Ceci fournit un gain significatif de sophistication, et supprime le problème de simplicité auquel faisait face les modèles Vacisek et CIR. Il peut être remarqué qu'Hull-White est toujours utilisé aujourd'hui car il corrige un problème toujours estimé comme majeur, ce qui n'est pas le cas du CIR ou du CIR++ par exemple (pour qui la restriction des taux du côté positif est aujourd'hui plus une limite qu'un avantage).

Ce modèle est étroitement lié à celui de Vacisek, il est souvent appelé le modèle de Vacisek généralisé, étant ainsi défini par son auteur ("The extended Vacisek Model" p.5). En effet en factorisant par $\alpha(t)$, cela donne la même équation que (1.10) avec des paramètres dépendants du temps. Ce modèle conserve les propriétés adéquates qui le caractérisent avec l'existence de formules fermées pour les prix zéro-coupon, *caps*, *floors* et *swaptions* et la présence d'une forme de retour à la moyenne. Il semble néanmoins moins performant que d'autres modèles dans la réplcation des prix.

Black Karasinski

Le modèle de BLACK et KARASINSKI (1991) est un modèle de taux court qui impose la positivité des taux par une forme de changement de variable. Techniquement parlant, c'est un modèle où une fonction (la fonction logarithmique en général) des taux courts suit un modèle de Hull-White tel que (equation 2 de BLACK et KARASINSKI (1991))

$$d(\log r) = \Phi(t)[\log \mu(t) - \log r]dt + \sigma(t)dz,$$

où la dépendance temporelle du r est omis dans l'équation originale. C'est encore une fois une écriture qu'il est peu commun de rencontrer aujourd'hui et qui se réécrit plutôt en

$$d \ln(r(t)) = [\theta(t) - \Phi(t)\ln(r(t))]dt + \sigma(t)dW(t).$$

Ce choix de fonction permet alors de corriger le problème de taux négatif du Hull-White, tout en conservant la totalité de ses avantages (retour à la moyenne, sophistication et simplicité relative). Il n'y a par contre pas de formule fermée, rendant le calcul des prix d'options plus problématique.

1.4.5 Heath-Jarrow-Morton

le modèle* HJM, introduit par HEATH et al. (1990), est un modèle de taux *forward* instantané ($f(t, T)$). Ce n'est plus une modélisation de taux court, mais une modélisation de l'ensemble de la courbe des taux en suivant la dynamique (l'équation 5 de HEATH et al. (1987))

$$df(t, T) = \alpha(t, T, \omega)dt + \sum_{j=1}^2 \sigma_j(t, T, \omega)dW_k(t)$$

,
sous \mathbb{P}^\dagger avec $(W_1(t), W_2(t))$ qui détermine "la fluctuation stochastique de tous les taux *forward*" (p.6), ω qui représente un événement aléatoire d'un univers Ω et α et σ des fonctions de $\{(t, s) : 0 \leq t \leq s \leq T\} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, pour T un horizon de taux. C'est une formulation très générale, qu'il est assez rare de voir reformulée ainsi, les ω étant en général omis. Il peut d'ailleurs être remarqué que même si ce modèle est historiquement avec deux browniens, il est aujourd'hui[‡] plus général de le considérer pour n quelconque entier donnant une formulation moderne de la forme

*Il est plus juste de parler de cadre, mais une discussion rigoureuse à ce sujet serait digressive par rapport aux objectifs de cette section

[†]Etant donné la forme très générique de la diffusion, la mesure en question n'a ici pas d'importance majeure

[‡]Dans HEATH et al. (1990), c'est déjà une version avec n browniens, mais l'écriture est assez loin de ce qui est ici présenté d'où le choix de ne pas l'exposer

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sum_{j=1}^n \sigma_j(t, T)dW_j(t).$$

Reprendre la définition du taux court comme limite du taux *forward* instantané met en lumière qu'une telle modélisation s'attaque à un problème plus subtil. Ainsi, même si le modèle HJM est plus sophistiqué en termes de paramétrisation que les modèles précédents, il lui est souvent fait le reproche de ne pas l'être assez, ce qu'il modélise étant moins accessible. C'est la première fois qu'une forme de corrélation entre les taux apparaît, ce qui ajoute une cohérence dans la modélisation de la structure des taux.

C'est un modèle très apprécié des assureurs (INSTITUT DES ACTUAIRES, 2018), de par leurs besoins réglementaire. En effet, une telle expression du taux *forward* instantané permet par exemple l'obtention de conditions claires pour la reproduction de la courbe EIOPA. D'une manière plus générale les assureurs ont systématiquement besoin d'une structure de taux, et favorisent donc de tels modèles (par rapport aux modèles de taux court), toute proportion gardée.

1.4.6 Modèles de marché

Selon BOX (1979) "tous les modèles sont faux, mais certains sont utiles". Ceci signifie que tous les modèles ne sont pas d'une qualité égale, et qu'il y a une forme de hiérarchie entre ces derniers. Les modèles de taux courts sont par exemple aujourd'hui considéré comme présentant de nombreux problèmes importants ("*short-rate models have also some clear drawbacks [:] an exact calibration to the initial curve of discount factors and a clear understanding of the covariance structure of forward rates are both difficult to achieve*" de BRIGO et MERCURIO (2006)), en particulier dans le cas des modèles à un facteur qui ne suffisent pas à expliquer la courbe de taux ("*two components can explain 85% to 90% of variations in the yield curve*" p. 139 de BRIGO et MERCURIO (2006)). Des exemples spécifiques démontrent à ce sujet l'inaptitude de certains modèles à expliquer la structure des taux (cf. CHAN et al. (1992) pour le modèle de Vacisek et CIR)

Le sujet du modèle HJM est plus subtil et il est ici important de se rappeler que c'est en fait un cadre qui est introduit dans HEATH et al. (1987). Il peut par exemple être mis en exergue qu'un modèle spécifique issu du cadre HJM est incapable d'expliquer les taux comme le fait FLESAKER (1993)*, mais il s'agit alors d'un modèle bien précis et pas du cadre HJM. Démontrer précisément l'entièreté des limites de HJM n'est pas du tout immédiat, et n'a pas le même sens que pour les modèles de taux courts. Les modèles de marchés peuvent par exemple être vus comme des modèles HJM (dans son livre REBONATO (2012) confond d'ailleurs volontairement les deux appellations).

Mais pour reprendre la citation de Box, il ne s'agit pas de comprendre les limitations des modèles qui sont simplement "faux" mais plutôt de cerner les particularités des modèles "utiles". Les modèles de marchés sont aujourd'hui les modèles les plus utilisées et l'argument principal derrière ce phénomène réside dans le fait que ce cadre théorique est en harmonie avec des méthodes de marché qui sont ancrées depuis une période considérable ("*The main reason lies in the agreement between such models and well-established market formulas*" p. 195 de BRIGO et MERCURIO (2006)). C'est-à-dire que les *traders* utilisent la formule de Black (rappelé en annexe A.2) pour la valorisation de *caplet* depuis son établissement en 1973 (cf. introduction de REBONATO (2012)), et que les modèles de marchés fournissent une base théorique convenable en cohérence avec cette pratique de marché.

Pour reprendre la discussion sur la *market-consistency* (1.1.3), cela implique pour un actif de le valoriser à son prix d'échange. Un tel prix est dicté par les investisseurs du marché. C'est donc une

*L'étude est en pratique plus large que cela et porte sur des futures Eurodollar, mais l'argument reste valide

valorisation qui prend en compte les pratiques de ces investisseurs et la grande popularité des modèles de marché vient du fait qu'ils sont en cohérence avec certaines de ces mêmes pratiques. Cela fait donc des modèles de marché un choix particulièrement judicieux pour une valorisation *market consistent*.

LMM

Le LIBOR *Market Model* (ou LMM) est une famille de modèle de marché où les taux LIBOR sont modélisés. Une telle appellation est aujourd'hui souvent* confondu abusivement avec le modèle BGM (Brace, Gatarek et Musiela (BRACE et al., 1997)) qui se trouve être un modèle LMM assumant un comportement log-normal des taux sous leur mesure *forward*. La confusion des appellations témoigne de la révolution qu'amène le BGM. Car même si BRACE et al. (1997) ne sont pas les premiers à s'intéresser à un comportement log-normal des taux (cf. GOLDYS et al. (1996) par exemple), le cadre global d'étude est novateur, rigoureux et fournit† une théorie justifiant l'utilisation de la formule de Black-Scholes pour les taux d'intérêt. Il fut donc naturellement suivi de travaux tout aussi importants tels que ceux de MILTERSEN et al. (1997) et de JAMSHIDIAN (1997).

La diffusion d'un *forward* F_k suivant le modèle BGM prend sous \mathbb{Q}^{T_k} la forme

$$dF_k(t) = \gamma_k(t)F_k(t)dW_k(t),$$

pour une fonction γ_k déterministe. Dans sa forme la plus générale, W_k est un brownien de dimension N , ce qui signifie que pour N *forwards* simulés il y a une matrice $N \times N$ de browniens. La façon dont les *forwards* se comportent entre eux, et la signification de \mathbb{Q}^{T_k} sont abordés respectivement dans l'annexe §A.1 et dans §2.1.

Sous ce modèle, les taux sont modélisés positivement à un changement de mesure près. La corrélation entre les différents *forwards* est alors l'élément spécifique qui n'apparaissait pas ou peu dans les autres modèles. Cette corrélation assure une cohérence dans la diffusion effectuée, mais rajoute une étape à la calibration du modèle. Ce nouvel élément n'est pas très limitant, des données historiques permettant de fixer sa valeur et apporte un gain important en pertinence dans la modélisation de la structure des taux. Ce modèle ne prend d'ailleurs pas en compte le retour à la moyenne explicitement, mais n'a plus la nécessité de le faire. La diffusion est sous \mathbb{Q}^{T_k} , et le comportement des taux n'est pas *mean reverting* sous cette mesure.

Même s'il a été très populaire à son époque, son incapacité à modéliser des taux négatifs est très vite apparue comme une limite rédhibitoire. D'autre part le fait d'avoir une volatilité déterministe est un point très limitant en terme de modélisation qui empêche de capter des réalités significatives du marché (ANDERSEN et BROTHERTON-RATCLIFFE, 2001, p. 1-2).

LMM+

Le *Stochastic Volatility Displaced Diffusion LIBOR Market Model*, ou *SVDDLMM* (ou LMM+) est une extension importante du LMM qui permet de combler ses faiblesses majeures et de l'adapter à un contexte économique ayant évolué. Il est introduit par JOSHI et REBONATO (2001). Le modèle LMM+ répond aux limites du modèle LMM à travers les deux points suivants :

- l'introduction d'un décalage (*shift*) α permettant la génération de taux négatifs,

*C'est entre autre le cas dans cette étude

†Même si le marché n'a pas attendu 1997 pour le faire

- l'introduction d'une volatilité stochastique permettant de gérer le problème du *skew* (notamment son asymétrie).

La formule de diffusion sous \mathbb{Q} prend dans JOSHI et REBONATO (2003) la forme

$$\begin{aligned} \frac{d(f_i(t) + \alpha_i)}{f_i(t) + \alpha_i} &= \mu dt + \sigma_i(t) dW_t^{(i)}, \\ \sigma(t) &= (a + b\tau)e^{-c\tau} + d, \\ de &= \lambda_e(r_e - e)dt + \sigma_e dW_t^{(e)}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

où λ_e , r_e et σ_e désignent la vitesse de retour à la moyenne, le niveau de retour à la moyenne et la volatilité de la volatilité du paramètre e . Ce même paramètre désigne de manière quelconque n'importe lequel des paramètres a , b , $\ln(c)$ ou $\ln(d)$. L'absence d'indice pour le $\sigma(t)$ signifiant qu'il en va de même pour chaque i , la même fonction étant utilisée pour tous les *forwards* f_i . Enfin chaque $W_t^{(e)}$ et chaque $W_t^{(i)}$ est un mouvement brownien unidimensionnel*, sachant qu'une matrice de corrélation gouverne leur diffusion.

L'équation (1.11) est très générale et a pour but de fournir une grande flexibilité pour la calibration (JOSHI et REBONATO, 2001, p.8), mais est en pratique très peu utilisée. D'autres LMM+ sont par contre très populaires comme celui présenté par WU et ZHANG (2006) qui est étudié plus précisément dans §2.2. Sa popularité n'est d'ailleurs pas limitée à la finance, son utilisation étant classique dans le monde de l'assurance (ARROUY et al., 2022, p. 53). Son calibrage reste néanmoins très délicat, et son utilisation complexe algorithmiquement parlant.

D'un point de vue général, le LMM+ est l'application de l'approche de la volatilité stochastique au modèle LMM. Cette approche est une solution[†] classique pour la réplication du *smile* de volatilité observé sur le marché. Sa calibration s'effectue en général[‡] sur des volatilités *swaptions* (cf. §1.4.2) via une formule analytiquement délicate à obtenir. Le coût d'entrée pour son utilisation est donc important et investiguer un quelconque défaut de modélisation suite à son utilisation est chronophage. De tels problèmes sont des freins à l'application de la réglementation, à la compréhension précise de son utilisation et plus largement à la gestion du risque en cas de perturbations majeures sur le marché des taux.

1.4.7 Évaluation d'un modèle

Les modèles de taux évoluent constamment pour répondre à une problématique le plus souvent économique. La volonté de complexifier les modèles ne vient pas d'une recherche de défi intellectuel mais à répondre à un besoin nécessaire à la compréhension et l'utilisation d'un objet, ici les taux. Il ne s'agit alors pas simplement de proposer un modèle, mais d'être capable d'évaluer sa pertinence aujourd'hui. Le contexte de notre étude restant réglementaire, une telle problématique est partiellement cadrée par Solvabilité 2 à travers des tests comme déjà discuté dans §1.2.2 et mis en lumière schématiquement dans le graphique 1.4.

Cohérence avec le marché

Une partie essentielle dans un modèle est sa capacité à donner une estimation fiable de prix. Le test en question est celui de *repricing*, il s'agit alors de valider le prix (obtenu à travers la phase de

*La diffusion générale du LMM sous-jacent avec $N \times N$ browniens étant simplifiée

[†]Dans le cas du LMM, le *smile* reproduit est indépendant du *strike*, ce qui est un problème de taille

[‡]Une calibration sur *caplet* par approche Monte-Carlo est théoriquement possible mais en pratique à éviter

pricing) classique obtenu par diffusion des taux. Quel que soit le modèle considéré dans cette étude, il existe des méthodes d'expression de la volatilité implicite en fonction des paramètres du modèle. Il s'agit alors de comparer le prix théorique obtenu avec la formule de Black (resp. Bachelier) avec la formule pratique moyenne obtenue en diffusant les taux sur un horizon donné, un grand nombre de fois.

Un tel test assure la cohérence entre la calibration et la diffusion, c'est à dire qu'un prix diffusé est alors équivalent au prix théorique sur lequel la calibration a été effectué. De tels tests peuvent aussi être mis en place avec les sensibilités des options vanilles considérées lorsque une expression théorique est disponible.

Martingalité et comportement risque neutre

Il a été rappelé que la vision des taux est *market-consistent*. Cela signifie qu'un bon modèle risque-neutre doit aussi vérifier les propriétés risque-neutre liées à un tel cadre. Dans ce cadre, l'actif ramené à sa valeur d'aujourd'hui doit être une martingale. Un processus est une martingale si la prochaine observation, étant donné l'historique passé, est égale en moyenne à la dernière observation. Formellement, pour un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$, $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, adapté :

$$\forall s \in [0, T] \quad \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s.$$

Le test de martingalité vérifie en général cette propriété pour $s = 0$ (car \mathcal{F}_0 ne représente plus d'information, donc il ne reste qu'une espérance simple) avec $X_t = \tilde{S}_t$, le prix actualisé. Il faut alors définir un estimateur de l'espérance $\bar{S}_t = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{S}_{n,t}$, et quantifier la différence avec la valeur de S_0 . Cela peut être fait graphiquement, mais revient dans tous les cas à quantifier l'erreur

$$\|\bar{S}_t - S_0\|_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{S}_{n,t} - S_0\right)^2}.$$

Autres propriétés

Les tests précédents sont des tests réglementaires, ils assurent le comportement risque-neutre de la modélisation ainsi qu'une cohérence avec l'implémentation du modèle. Le degré avec lequel le modèle évalué arrive à capter le comportement des taux n'apparaît néanmoins pas toujours de façon transparente. Au regard de la vision actuelle des taux, il est nécessaire de considérer les bonnes propriétés qui définissent un bon modèle. À ces propriétés, il pourra être associé des tests qui permettront de comparer plusieurs modèles. Par exemple certaines propriétés favorables au contexte actuel peuvent être :

- Capacité à générer des taux négatifs,
- Capacité à gérer des taux explosifs,
- Retour à une moyenne,
- Réplication des courbes de taux.

Les données et le cadre

La question des données est un problème majeur dans un domaine aussi exigeant que l'assurance. Plus largement, c'est le fondement empirique à la base de la simplification induite par l'utilisation de modèles. Autrement dit, c'est ce qui ancre les modèles dans le réel, qui doit donc être fidèlement représenté, sans quoi cela expose n'importe quelle modélisation (et tous les tests associés) à rester dénuée de sens. Les données doivent être (PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE, 2009, art. 82, p. 47)

- exhaustives,
- exactes,
- pertinentes,

et ce, selon les données de marché nécessaires pour le calibrage. Ces directives doivent être soigneusement suivies, et nécessitent un effort conséquent en assurance de par la complexité que représentent les données actuarielles.

Dans notre cas, la question se posera lors de la calibration de modèles du côté financier. Il s'agira de choisir les données les plus pertinentes pour calibrer chaque paramètre. La question se posera ensuite du côté actuariel, lors de l'intégration dans le cadre d'une approche permettant de quantifier la solvabilité d'une assurance.

1.4.8 Un autre modèle de taux d'intérêt

Le paragraphe §1.4.3 a mis en lumière qu'un modèle est lié à une vision des taux. Pour reprendre la définition 1.4, le "format prédéfini" du sujet d'étude évolue. Aujourd'hui, le LMM+ est un modèle de référence en assurance, mais a surtout été utilisé dans un contexte de taux bas (c'est la fin de la période décrite dans §1.1.2). Or, il a dernièrement été observé une variation significative du comportement des taux (c'est la période présentée dans §1.1.2) qui remet potentiellement en cause le cadre de modélisation, et requiert la disposition à maintenir un esprit ouvert envers l'examen d'autres modèles éventuellement mieux adaptés.

Le modèle *Stochastic Alpha Beta Rho* (SABR)

Le modèle SABR est un modèle de marché à volatilité stochastique introduit par (HAGAN et al., 2002). Il repose sur un modèle du type CEV* (*Constant Elasticity of Variance* cf. COX et ROSS (1976)) pour les taux *forwards* couplé à une volatilité stochastique. Son expression est historiquement sous \mathbb{Q}^T de la forme

$$\begin{cases} d\hat{F} &= \hat{a}\hat{F}^\beta dW_1, \\ d\hat{a} &= \nu\hat{a}dW_2, \\ dW_1dW_2 &= \rho dt, \end{cases}$$

pour W_1 et W_2 des browniens. Les paramètres du SABR sont supposés avoir une grande signification sur le *smile* (cf. p.8) $\alpha = \hat{a}(0)$ contrôle le niveau ("level"), ρ l'inclinaison ("skew") et ν l'ampleur

* Avec $\alpha = 0$ c'est exactement un CEV

du *smile** ("how much smile the curve exhibits"). Le paramètre β^\dagger quant à lui a un rôle similaire à ρ (" β and correlation ρ affect the volatility smile in similar ways") induisant une sur-paramétrisation. Le processus $\hat{\sigma}$ est par abus appelé processus de volatilité, même si c'est rigoureusement $\hat{\sigma} \hat{F}^{\beta-1}$.

Le CEV était pensé comme une extension de BLACK et SCHOLES (1973), le SABR peut donc être vu comme une extension du modèle log-normal adopté dans le cadre du BGM. HAGAN et al. (2002) ont mis en avant une formule semi-exacte de la volatilité implicite de *caplets* avec ce modèle. Il possède ainsi une phase de calibration nettement plus simple que la plupart des autres modèles à volatilité stochastique, notamment en comparaison avec le LMM+. En listant ses points forts, il peut être noté que :

- Le SABR présente une paramétrisation particulièrement riche et significative, chaque paramètre a un sens visible au niveau du *smile*. C'est un apport considérable dans un contexte où les modèles se complexifient de plus en plus, rendant leur interprétation de moins en moins évidente.
- Le SABR présente une équation simple de sa volatilité et cela a un impact important sur l'utilisation qui en est faite. Cela permet une estimation rapide et fiable du prix d'options pour les *trader* par exemple. Ce dernier permet ainsi d'offrir une alternative au modèle normal (Bachelier) et log-normal (Black).
- Le SABR totalise 3 degrés de liberté explicites du *smile* (*shift*, *skew* et *slope*).

Il présente néanmoins quelques limites telles que :

- Il ne diffuse qu'un seul taux d'intérêt, ce qui face au LMM est un manque de raffinement.
- Il n'y a pas de capacité de retour à la moyenne.
- Il ne gère pas en tant que tel les taux négatifs (même problème que le LMM).
- L'approximation d'Hagan a ses limites détaillées plus tard dans §2.3.2, notamment avec des longues maturités, un β élevé, un *strike* trop faible, ou un *forward* trop loin du *strike*.

Cela fait du SABR un modèle performant (calibration riche), efficace (calibration simple) et donc attrayant. Ses problèmes ont en général des solutions d'adaptation assez simples (déjà abordées dans d'autres modèles). Une extension classique récente est le *LMM-SABR* qui combine un modèle SABR et un modèle LMM, lui rajoutant certains des raffinements déficitaires évoqués plus haut.

Problématique du mémoire

La modélisation des taux est un facteur clé dans la gestion du risque d'un assureur et le LMM+ est reconnu comme un modèle de référence à cet égard. Il n'y a néanmoins pas de modèle parfait, et le LMM+ dénote certains problèmes dont le majeur à propos de sa calibration qui est longue, coûteuse et instable comme en témoignent les recherches récentes dans le milieu de l'assurance ("*huge interest in overcoming the not-so-fast and sometimes unstable existing calibration procedures*" de ANDRES et al. (2020)). Des travaux de recherche à ce sujet existent, mais les solutions proposées apparaissent comme

*En pratique c'est empiriquement proche de la convexité

†souvent appelé constante d'élasticité

*Historiquement 1990, mais des traces antérieures existent ("*HJM working paper began to be circulated as early as 1987*" cf. p. 13 de REBONATO (2012))

MODÈLE	CIBLE	PARAMÈTRES	BROWNIENS	PRODUITS VANILLES	SOURCE
V - 1977	r_t	3 SCALAIRES	1	FORMULES FERMÉES	<i>bonds</i>
CIR-1985	r_t	3 SCALAIRES	1	FORMULES FERMÉES	<i>bonds</i>
CIR++-2001	r_t	3 SCALAIRES	1 1 FONCTION	FORMULES FERMÉES	<i>caps</i>
H-L-1986	r_t	1 SCALAIRE 1 FONCTION	1	FORMULE FERMÉE	<i>bonds</i>
H-W-1990	r_t	3 FONCTIONS	1	FORMULES FERMÉES	<i>caps</i>
B-K-1991	r_t	3 FONCTIONS	1	APPROXIMATION NUMÉRIQUE	<i>caps</i>
HJM-1987*	$f(t, T)$	M + 1 FONCTIONS	M	FORMULES FERMÉES	<i>caps</i>
LMM-1997	$(F_k(t))_{1 \leq k \leq N}$	2N FONCTIONS	N^2	FORMULES FERMÉES	<i>caps</i>
LMM+-2003 VOLATILITÉ CIR	$(F_k(t))_{1 \leq k \leq N}$	2N FONCTIONS 3 SCALAIRES	$N^2 + 1$	APPROXIMATIONS THÉORIQUES	<i>swaptions</i>
SABR-2002	$F_k(t)$	4 SCALAIRES	2	PAR DÉVELOPPEMENT LIMITÉ	<i>caps</i>

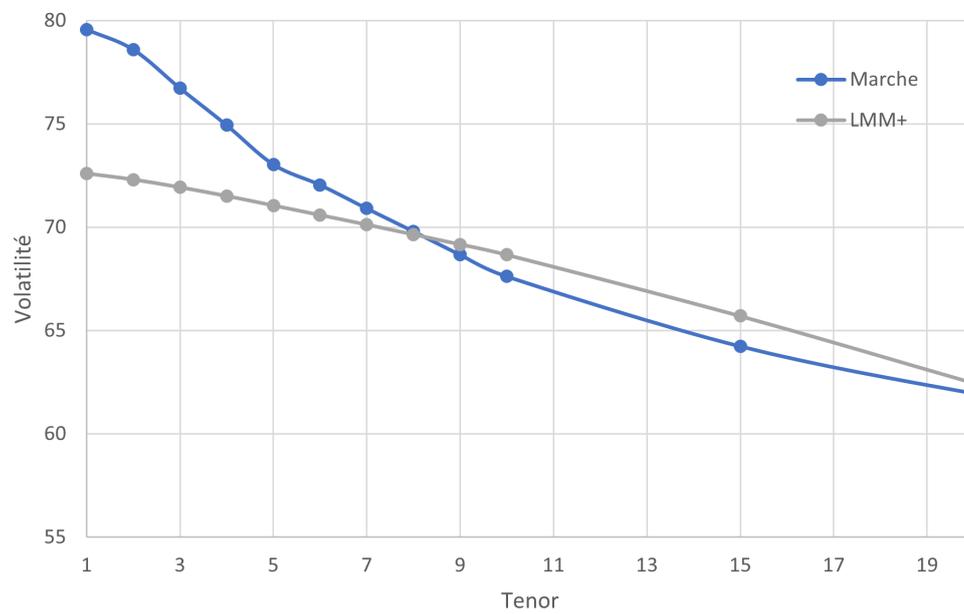
TABLE 1.1 : Tableau récapitulatif sur les modèles de taux d'intérêt

des compromis. La proposition d'implémentation de ANDRES et al. (2020) accélère par exemple le temps de calibration, mais nécessite l'utilisation de techniques très poussées. Du point de vue de l'entreprise, cela engendre un coût humain afin de s'assurer que ces techniques sont toujours bien comprises et bien maîtrisées. Le LMM+ est donc un modèle qui bien que performant, ne peut pas être considéré comme optimal et justifie dans tous les cas une recherche d'alternative.

A ces considérations générales s'ajoute le contexte de remontée des taux brutales de ces derniers mois exposant certaines vulnérabilités du LMM+. La calibration dans un tel contexte était alors très peu satisfaisante comme en témoigne le graphique 1.10, qui représente le résultat de calibration optimale du LMM+ à la date du 31/03/2022. Il s'agit de volatilités *swaptions ATM* de maturités 10 ans, avec en abscisse les *tenors* en années et en ordonnées les volatilités implicites en points de base. La calibration optimale est représentée en orange, tandis que la valeur de marché est représentée en bleu, et il peut être observé que la concordance des tracés est loin d'être parfaite. En outre, les conditions de bonne définition de la diffusion ne concordait alors plus avec leur limite théorique. La volatilité du LMM+ est en effet basée sur une diffusion CIR nécessitant de respecter la condition $2\kappa\theta \geq \sigma^2$, ce qui n'est pas le cas au 31/03/2022.

L'intérêt porté au SABR est alors naturel, c'est un modèle théoriquement proche du LMM+ et actuellement très populaire ("*one of the most popular stochastic volatility models*" CHOI et WU (2021)). Cette popularité étant expliquée par une utilisation supposée très intuitive. La théorie du SABR inclut des formules théoriques simples permettant une calibration rapide et efficace. De telles caractéristiques sont prometteuses car susceptibles de palier aux défauts du LMM+. D'un point de vue théorique, le LMM-SABR est d'ailleurs plus riche que le LMM+. Le LMM-SABR est un modèle CEV à volatilité stochastique généralisé à une structure de taux, tandis que le LMM+ est un modèle BGM à volatilité stochastique. Ainsi, le LMM-SABR est un LMM+, et le LMM+ est un cas particulier du LMM-SABR. La question de si le LMM-SABR est une avancée théorique par rapport au LMM+ n'est pas simple, mais ce n'est donc dans tous les cas pas une rétrogradation.

Le SABR est donc un modèle qui apporte une plus grande flexibilité dans la calibration que le LMM+. La question de savoir si le LMM-SABR conserve une telle efficacité de calibration et de *repricing* est légitime, d'autant plus dans un contexte mouvementé. Le but de ce mémoire est donc de s'intéresser à la théorie sous-jacente au LMM-SABR, et de qualifier l'alternative qu'il représente par rapport au LMM+ pour un assureur cherchant à évaluer ses engagements dans le contexte de remontée des taux.

FIGURE 1.10 : Calibration de volatilité *swaption* 10 ans

Chapitre 2

La structure des taux selon différents modèles

Ce chapitre présente le cadre théorique précis des principaux modèles sur lesquels cette étude s'appuie. Les sections 2.1, 2.2, 2.3 et 2.4 présentent respectivement les modèles LMM, LMM+, SABR et LMM-SABR en détails en parlant de leur diffusion et de leur calibration. La section 2.5 présente des choix de modélisation plus subjectifs nécessaire à un usage pratique du modèle. Finalement la section 2.6 présente la validation des modèles SABR et LMM-SABR, l'implémentation du LMM+ et sa vérification ayant déjà fait l'objet d'autres études. Dans tout ce qui suit, toute référence à la volatilité fait, sauf mention explicite contraire, implicitement référence à la volatilité log-normale. De même que la présence de terme τ_k fait implicitement référence au *tenor* d'un *forward* F_k , qui est en général simplifié par τ dans le cas où ils sont supposés tous égaux.

Une telle séparation des modèles en LMM et LMM+ d'une part et SABR et LMM-SABR d'autre part vient de la différence de nature intrinsèque de leur processus de diffusion. En effet, d'une manière générale, le comportement des taux *forwards* sous \mathbb{Q}^{T_k} est log-normal pour le LMM et le LMM+[†] avec

$$dF_k(t) = \gamma_k(t)F_k(t)dW_k(t),$$

et CEV[‡] pour le SABR et LMM-SABR

$$dF_k(t) = \gamma_k(t)F_k^{x/2}(t)dW_k(t).$$

où le terme x représente l'élasticité de la variance instantanée du taux par rapport au taux (EMANUEL et MACBETH, 1982) et où γ_k est alors stochastique. Pour retrouver l'équation du SABR, il suffit de poser $\beta = 2x$. L'utilisation de ce modèle était historiquement préféré pour les actions, car l'interprétation qui en était fait était basée sur la variation de valeur de l'entreprise émettrice (cf. introduction de BECKERS (1980)). Ce qui n'est plus le cas aujourd'hui, le modèle CEV étant selon BRIGO et MERCURIO (2006)[§] une approche classique en modélisation de taux pour résoudre le problème de queue plate du modèle BGM.

[†]Sachant qu'il faut en principe ajouter le *shift* et que la volatilité est stochastique

[‡]Avec une volatilité stochastique

[§]chap. 10.2

Remarques générales

La plupart des données de marché ne sont pas disponibles telles quelles. Ainsi la reconstruction de la courbe d'actualisation nécessite une interpolation log-linéaire des zéro-coupons, et le *stripping** de *caplets* une interpolation constante en fonction de la maturité.

L'ensemble de ce chapitre repose sur les notations introduites dans le chapitre précédent, principalement aux §1.4.1 et §1.4.2. Ces dernières sont parfois rappelées dans le but d'aider à la lecture. D'autre part, la volatilité des *forwards* est représentée par γ dans le cas du LMM, $\gamma\sqrt{V}$ dans celui du LMM+ et par α dans le cas du SABR et du LMM-SABR. Le passage de γ à $\gamma\sqrt{V}$ est expliquée dans la section 2.2, et la différence de notation avec α est dans le but de mettre en exergue le caractère stochastique de la volatilité dans le cas du SABR et du LMM-SABR.

A propos de la discrétisation

L'implémentation des différents modèles se fait selon une discrétisation d'Euler qui consiste à approximer

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \gamma(X_s)dW_s,$$

en calculant de proche en proche

$$\begin{cases} X_0^n &= X_0, \\ X_{(p+1)T/n}^n &= X_{pT/n}^n + b(X_{pT/n}^n)\frac{T}{n} + \gamma(X_{pT/n}^n)(W_{(p+1)T/n} - W_{pT/n}), \end{cases}$$

où n représente le pas d'approximation, T l'horizon d'approximation, et donc $t_p = pT/n$ le p -ième point considéré par la discrétisation de $[0, T]$. Il s'agit ici d'une discrétisation constante. Dans un tel schéma, b représente la fonction de *drift* et γ la fonction de volatilité instantanée. Une discussion détaillée à ce sujet accompagnée de ces deux équations peut être trouvée dans BALLY et TALAY (1996).

A propos de la calibration réglementaire en assurance

Il a été évoqué le fait que les taux d'intérêt sont un concept abstrait. En pratique, une courbe de taux ne s'observe pas directement. Elle est reconstruite à partir d'instruments financiers liquides basés sur le taux. Ce processus s'appelle le *bootstrapping*, et il existe différentes façons de le faire. Il y a une méthodologie qui fait implicitement référence sur le marché, il s'agit de l'interpolation log-linéaire (p. 96 de HAGAN et WEST (2006)) car la courbe des taux qui est fournie est cohérente avec les valeurs des volatilités implicites. Les données de marché sont en effet un ensemble et la volatilité implicite de Black-Scholes (rappelée en annexe §A.2) est par exemple implicitement déduite du reste des autres paramètres. Une modification de ces paramètres a donc un impact.

Or en assurance, une courbe de taux est imposée par l'EIOPA. Cette courbe de taux zéro-coupon 1 an est construite avec le modèle de Smith-Wilson et répond de manière cohérente mais subjective à différents articles de Solvabilité 2 comme cela est répertorié dans JØRGENSEN (2018). À titre d'exemple, c'est l'EIOPA et pas le marché qui "fixe le niveau auquel les taux zéro-coupon doivent converger" (p. 3 de l'article). Une telle courbe de taux répond à des problématiques actuarielles, en donnant une vision du marché plus adaptée aux besoins d'un assureur (typiquement moins de poids sur le court terme), et induit une différence qui peut être observée sur la figure 2.1. Il y est représenté une comparaison entre

*C'est le mécanisme de détermination des prix de *caplets* en fonction de prix des *caps* dans le cas où ils ne sont pas cotés

les taux zéro EIOPA et l'équivalent valable sur le marché* pour la même date du 31/08/2023 avec en abscisses les maturités et en ordonnées les taux. La courbe orange représente les données de marché. La courbe grise représente les taux zéro EIOPA avec *Volatility Adjustment* (VA), qui est un concept décrit comme "un ajustement [...] réduisant l'impact du court terme sur les bilans des entreprises" (EIOPA, 2020). La justification derrière cela étant qu'un assureur a une vision plus long terme que l'investisseur moyen du marché, ses actifs étant là pour équilibrer des engagements qui sont souvent sur le long terme. La courbe bleue représente la courbe zéro-coupon EIOPA sans VA.

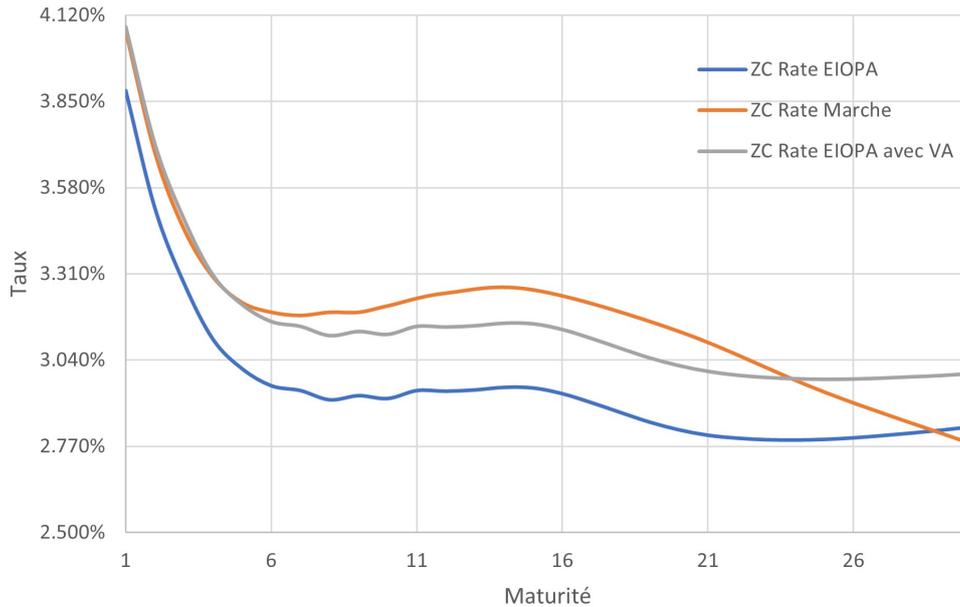


FIGURE 2.1 : Comparaison des taux de marché et des taux EIOPA

Cette différence est en effet source d'incohérences. L'INSTITUT DES ACTUAIRES (2018) évoque par exemple le fait que la volatilité implicite d'une action dépend d'un taux sans risque supposé constant, et que modifier ce dernier à des fins réglementaires tout en conservant la même volatilité implicite de marché peut en effet paraître contradictoire. Un problème similaire adapté à cette présente étude intervient pour les produits de taux. Les volatilités implicites extraites proviennent d'un calcul avec un taux *spot* provenant de la courbe du marché, tandis que les recommandations réglementaires semblent induire l'utilisation de la courbe de l'EIOPA. La construction de prix synthétiques permet en pratique d'harmoniser cela. Il s'agit de construire des prix fictifs qui utilisent effectivement la courbe EIOPA en tant que prix *spot* (ou en tant que taux sans risque dans le cas des actions par exemple) à partir des prix de marché réel. La calibration est alors effectuée avec la courbe EIOPA sur ces prix fictifs.

L'importance de la notion évoquée dans cette sous-section ne peut pas être ignorée en général. Ce chapitre est néanmoins abordé d'un point de vue purement financier. Il s'agit en effet de discuter de la diffusion théorique de processus, de leur implémentation et de la validation de leur implémentation. Ce sont donc uniquement des données de marché liquides et cohérentes entre elles qui sont utilisées.

*À savoir les taux zéro de EUR12M

2.1 LMM

Le modèle LMM est rappelé afin de faciliter la compréhension du LMM-SABR et du LMM+. Cette partie théorique introduit donc des concepts qui sont utilisés par la suite en s'inspirant du chapitre 6 de CRISPOLDI et al. (2016), mais n'a pas fait l'objet d'une implémentation.

2.1.1 Diffusion

L'équation de diffusion générale du modèle LMM sous \mathbb{Q}^{T_N} est selon l'équation 6.6 de BRIGO et MERCURIO (2006)

$$\begin{cases} dF_1(t) = \mu_1(t)dt + \underline{\gamma}_1(t)F_1(t)dW_1(t) \\ \vdots \\ dF_N(t) = \mu_N(t)dt + \underline{\gamma}_N(t)F_N(t)dW_N(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

avec $F(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_N(t) \end{pmatrix}$ un vecteur de N *forward* et $\mu(t) = \begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \\ \vdots \\ \mu_N(t) \end{pmatrix}$, le vecteur de *drift* associé.

Le vecteur de volatilité $\underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \underline{\gamma}_1(t) \\ \underline{\gamma}_2(t) \\ \vdots \\ \underline{\gamma}_N(t) \end{pmatrix}$ est en fait une matrice car ses éléments sont des vecteurs

tels que $\underline{\gamma}_k(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_N(t) \end{pmatrix}^\top$, et c'est de même une matrice $W(t) = \begin{pmatrix} W_1^1(t) & W_2^1 & \dots & W_N^1(t) \\ W_1^2(t) & W_2^2 & \dots & W_N^2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_1^N & W_2^N & \dots & W_N^N(t) \end{pmatrix}$, de browniens.

Le modèle LMM diffuse une structure de taux en modélisant N *forwards* $(F_k(t))_{1 \leq k \leq N}$ simultanément, ce qui explique la structure vectorielle précédente. C'est une approche qui prend en compte une corrélation entre les *forwards* de telle sorte que

$$\mathbb{E}^N [dW_k(t)dW_l^\top(t)] = \rho_{k,l}dt, \quad (2.2)$$

qui est ici une matrice. La corrélation globale est donc de dimension 4.

Le terme de *drift*, $\mu_k(t)$ de l'équation (2.4) s'exprime tel que

$$\begin{cases} \mu_k(t) = -\underline{\gamma}_k^\top(t)F_k(t) \sum_{l=k+1}^N \frac{\tau_l \rho_{k,l} F_l(t)}{1 + \tau_l F_l(t)} \underline{\gamma}_l(t) & k < N, \\ \mu_k(t) = 0 & k = N, \end{cases} \quad (2.3)$$

il représente le changement de mesure de \mathbb{Q}^{T_k} vers \mathbb{Q}^{T_N} discuté dans la partie A.1. La seule différence avec la formule (A.6) venant de la prise en compte de la corrélation entre les browniens associés à différents *forwards*. Le terme $\gamma_k(t)$ représente, quant à lui la fonction de volatilité du *forward* $F_k(t)$, qui est ici une fonction déterministe.

Choix de modélisation

La forme générale introduit dans (2.4) est rarement employée telle quelle, de par la lourdeur qu'une matrice de browniens induit. En pratique la volatilité est prise telle que $\underline{\gamma}_k(t) = (0 \dots 0 \ \gamma_k(t) \ 0 \dots 0)$, induisant que seuls les éléments diagonaux* de $W(t)$ importent. Les équations (2.2) et (2.3) s'adaptent, la corrélation n'étant alors plus que de dimension 2.

Avec une telle modélisation, la matrice $W(t)$ peut se limiter au vecteur des $\widetilde{W}(t) = \begin{pmatrix} W_1^1 \\ W_2^2 \\ \vdots \\ W_N^N(t) \end{pmatrix}$,

selon la diffusion

$$\begin{cases} dF_1(t) &= \mu_1(t)dt + \gamma_1^1(t)F_1(t)dW_1^1(t) \\ \vdots & \vdots \\ dF_N(t) &= \mu_N(t)dt + \gamma_N^N(t)F_N(t)dW_N^N(t), \end{cases} \quad (2.4)$$

en omettant la double indexation lorsque cela ne porte pas à confusion.

2.1.2 Calibration

Il y a deux éléments à calibrer dans ce modèle,

- la corrélation qui est dite *forward-forward* ρ ,
- la fonction vectorielle de volatilité $\gamma(t)$.

Calibration des corrélations

La calibration de la corrélation *forward-forward* consiste à calibrer la matrice de corrélation ρ . C'est la grande spécificité des modèles de marché qui diffusent un grand nombre de taux simultanément, des possibilités d'approches étant détaillées par la suite.

Approche historique

Cette démarche consiste à fixer ρ sur sa valeur historique par rapport aux *forwards* considérés. Il faut dans un premier temps définir le rendement $\Delta F_k(t)$ d'un *forward*, ce qui peut être fait de plusieurs manières telles que

$$\begin{cases} \Delta F_k(t) &= \ln\left(\frac{F_k(t)}{F_k(t-1)}\right) & \text{LOGARITHMIQUE} \\ \Delta F_k(t) &= \frac{F_k(t)}{F_k(t-1)} - 1 & \text{ARITHMETIQUE.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Une fois une convention établie pour le rendement, les notions empiriques de moyenne, variance et covariance peuvent être introduites telles que

*Cela signifie que la volatilité d'un *forward* ne dépend pas des autres *forwards*, ce qui est différent d'une absence de corrélation.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \bar{F}_k &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta F_k(t_i) & \text{MOYENNE,} \\ \sigma(F_k) &= \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\Delta F_k(t_i) - \Delta \bar{F}_k)^2} & \text{ÉCART-TYPE,} \\ \text{Cov}(\Delta F_k, \Delta F_l) &= \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\Delta F_k(t_i) - \Delta \bar{F}_k) (\Delta F_l(t_i) - \Delta \bar{F}_l) & \text{COVARIANCE.} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Finalement, les facteurs de corrélations sont fixés tels que

$$\rho_{k,l} = \frac{\text{Cov}(\Delta F_k, \Delta F_l)}{\sigma(F_k) \cdot \sigma(F_l)}.$$

Cette approche nécessite beaucoup de données pour être viable, et s'expose à certains problèmes pratiques comme par exemple le choix de la période considérée qui peut avoir une grande influence sur le résultat.

Approche de lissage

L'approche par lissage est en **complément** d'une approche historique et consiste à corriger les anomalies de la matrice de corrélation venant du bruit inné des données réelles. Le lissage a pour but d'atténuer les fluctuations brusques caractéristiques du bruit, minimisant alors les anomalies au niveau du résultat. Il faut pour cela créer une courbe plus régulière en partant des données initiales. En pratique, une* fonction paramétrique telle que (SVENSSON, 1994)

$$\left\{ \begin{array}{l} f(t, T_k) = \alpha + \beta e^{-\frac{T_k - t}{\lambda_1}} + \gamma \left(\frac{T_k - t}{\lambda_1} \right) e^{-\frac{T_k - t}{\lambda_1}} + \delta \left(\frac{T_k - t}{\lambda_2} \right) e^{-\frac{T_k - t}{\lambda_2}}, \\ ZCB(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, u) du} \\ F_k(t) = \frac{1}{\tau_k} \left(\frac{ZCB(t, T_{k-1})}{ZCB(t, T_k)} - 1 \right), \end{array} \right. \quad (2.7)$$

peut être choisie. Elle est alors calibrée sur des données historiques.

Par la suite, la fonction calibrée $F_k(t)$ est utilisée pour évaluer la vraisemblance des valeurs historiques. Une minimisation de l'erreur entre la fonction et la réalité est effectuée où le levier de contrôle est la modification des données d'entrée. Cette technique nécessite ainsi encore plus de données que l'approche historique ; le but étant de supprimer certaines valeurs jugées anormales.

Paramétrisation

L'étape précédente utilisait une fonction pour lisser les *forwards* historiques avant de procéder à une évaluation statistique de grandeur. Une autre stratégie consiste à directement utiliser une fonction pour modéliser la valeur de la corrélation, il s'agit d'une approche dite paramétrique. Des fonctions usuelles dans ce contexte sont par exemple (XIONG et al., 2020) (REBONATO et al., 2009, part. 2.5)

*Le papier décrit le choix de f

$$\begin{aligned}
\rho_{k,l} &= e^{-\beta|T_k-T_l|}, \\
\rho_{k,l} &= \rho_\infty + (1 - \rho_\infty)e^{-\beta|T_k-T_l|}, \\
\rho_{k,l} &= \rho_\infty + (1 - \rho_\infty)e^{-\beta|T_k-T_l|}e^{-\min(T_k,T_l)\alpha},
\end{aligned}$$

Une telle approche simplifie grandement la phase de calibration de ρ , c'est une technique qui est d'ailleurs pratique lorsque la cible de la calibration n'a pas beaucoup de données historiques*. Son problème majeur est que cela donne une importance significative pour le choix de la fonction paramétrique utilisée. Cela ne peut donc pas être utilisé lorsque la cible de la calibration est trop sensible.

Calibration de la fonction de volatilité

Dans le cas du LMM, la fonction $\gamma(t)$ de l'équation (2.4) est déterministe et est complètement déterminée par le *forward* considéré et l'instant t de l'évaluation. Il s'agit donc de calibrer chaque $\gamma_k(t)$ indépendamment, mais il faut avant cela procéder à une paramétrisation. La fonction de REBONATO (1999), définie telle que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \text{REBONATO}(t) = (a + b.t)e^{-c.t} + d, \quad (2.8)$$

avec $\{a, b, c, d\} \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^*+)^2$ est un choix classique. C'est une fonction très régulière, facilement manipulable et en cohérence avec les taux (de bonnes propriétés pour ses limites par rapport aux taux comme discuté à partie de la page 307 de REBONATO (1999)). Plus précisément, c'est une fonction avec une limite (d) représentant les taux à maturité longue, qui est atteinte avec une dynamique exponentielle linéairement atténuée en partant d'une valeur de départ claire ($a + d$). Un tel candidat permet d'exprimer la volatilité telle que

$$\gamma_k(t) = g(T_{k-1} - t) = (a + b(T_{k-1} - t))e^{-c(T_{k-1} - t)} + d,$$

où a, b, c, d sont des paramètres à calibrer. La facilité de manipulation se retrouve à travers la possibilité d'exprimer explicitement (expression en annexe) la valeur de la volatilité implicite de Black (A.7)

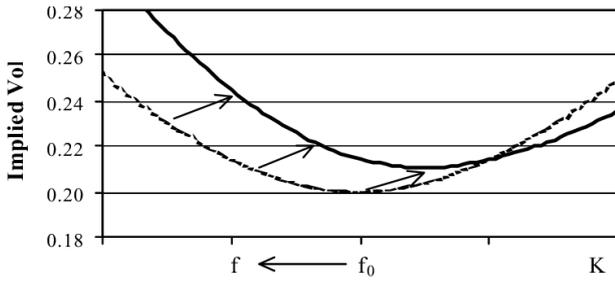
$$\gamma_k^{\text{BLACK-THEORIQUE}} = \sqrt{\frac{1}{T_{k-1} - t} \int_t^{T_{k-1}} g^2(T_{k-1} - u) du}.$$

Cela signifie que la volatilité implicite de Black peut servir de référence pour la calibration en se basant sur des *caplets*. La calibration consiste alors à minimiser la quantité

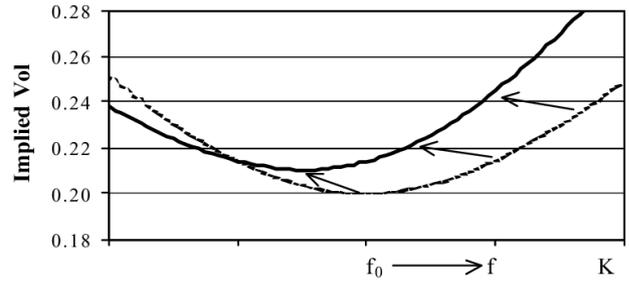
$$\sum_{K \in \Gamma} \left(\gamma_k^{\text{BLACK-MARKET}}(K) - \gamma_k^{\text{BLACK-THEORIQUE}} \right)^2, \quad (2.9)$$

où K représente un *strike* quelconque dans un ensemble Γ bien choisi, et il s'agit alors d'en déduire les paramètres a, b, c et d optimaux. Il faut en effet remarquer que $\gamma_k^{\text{BLACK-MARKET}}$ dépend du *strike*. Cette réalité de marché peut se constater suite à l'examen de n'importe quelles données de marché. Ces paramètres caractérisent complètement la fonction de Rebonato, concluant la phase de calibration de la fonction de volatilité. D'autres fonctions peuvent être choisies pour remplacer (2.8), la phase de calibration restant alors similaire.

*ou pas de sens pratique réel comme la volatilité



(a) "Implied volatility $\sigma_B(K, f)$ if the forward price decreases from f_0 to f (solid line)."



(b) "Implied volatility $\sigma_B(K, f)$ if the forward prices increases from f_0 to f (solid line)."

FIGURE 2.2 : Fig. 2.3 (gauche) et 2.4 (droite) de HAGAN et al. (2002)

2.1.3 Limitations

La limitation principale de cette phase de calibration et plus largement de ce modèle n'est pas dépendante de la fonction utilisée pour la paramétrisation de γ . Une volatilité déterministe, reste dans tous les cas trop plate, et n'est pas capable de reproduire la queue du *smile* fidèlement. Il n'y a par exemple pas de dépendance envers le *strike* dans l'équation (2.9) pour les volatilités théoriques, les seuls *smiles* pouvant être parfaitement calibrés dans ce cas précis sont donc des droites.

Une telle calibration peut néanmoins être affinée pour inclure une dépendance envers le *strike*. HAGAN et al. (2002) proposent (eq. 2.8) une formule générale pour une volatilité locale* telle que

$$\gamma^{\text{BLACK-THEORIQUE}}(K, F) = \gamma_{loc} \left(\frac{1}{2}(F + K) \right) \left(1 + \frac{1}{24} \frac{\gamma_{loc}'' \left(\frac{1}{2}(F + K) \right)}{\gamma_{loc} \left(\frac{1}{2}(F + K) \right)} (F - K)^2 + \dots \right)$$

où K représente le *strike* et les "... " représentent l'ordre supérieur d'un développement limité. Le nouveau processus de calibration permet de s'intéresser au comportement théorique du *smile*, les résultats d'Hagan et al sont reproduits dans les graphiques 2.2a et 2.2b.

Il s'agit d'observer le comportement du *smile* suite à une modification du sous-jacent. Dans le cas du graphique 2.2a il s'agit d'une diminution, et dans le cas du graphique 2.2b d'une augmentation. Il est observé que le *smile* et le *skew* bougent dans la direction opposée à celle du sous-jacent, ce qui est contraire à ce qui est observé empiriquement sur les marchés. D'autre part, le *smile* se décale vers le haut indépendamment de l'orientation de la variation du sous-jacent, que celle-ci soit à la hausse ou à la baisse. HAGAN et al. (2002) mettent en évidence l'apparition d'un terme correctif problématique dans la couverture d'un *call* lors de l'utilisation d'un modèle à volatilité locale, en inadéquation avec les observations du marché. D'un point de vue pratique, il est observé que l'augmentation systématique de la volatilité consécutive à une évolution du sous-jacent conduit nécessairement à des incohérences dans la couverture.

Hagan et al ne sont de plus pas les seuls à soutenir l'idée qu'une volatilité déterministe est insuffisante. Pour citer ANDERSEN et BROTHERTON-RATCLIFFE (2001), des preuves empiriques soutiennent la nécessité d'une fonction stochastique ("*Empirical evidence strongly supports the qualitative basis of [an independent stochastic volatility] model*" page 2).

*Dépendante du temps et de l'actif (donc plus générale qu'en (2.9)), mais toujours déterministe

2.2 LMM+

Le LMM+ (*SVDDLMM*) est une extension du LMM incluant un décalage (*Displaced Diffusion*) pour les taux négatifs et une volatilité stochastique (*Stochastic Volatility*). L'implémentation d'un tel modèle ne fait pas l'objet de cette étude, qui reposera sur l'implémentation faite par de VANDIÈRE (2021) et VIALARD (2022). Le but de cette section est donc uniquement de donner un cadre théorique précis.

2.2.1 Diffusion

L'équation générale de diffusion d'un LMM+ sous \mathbb{Q} est

$$\begin{cases} dF_1(t) &= -(F_1(t) + \delta)\sigma_1(t)dt + (F_1(t) + \delta)\sqrt{V(t)}\gamma_1(t)dW_1(t), \\ &\vdots \\ dF_N(t) &= -(F_N(t) + \delta)\sigma_N(t)dt + (F_N(t) + \delta)\sqrt{V(t)}\gamma_N(t)dW_N(t), \\ dV(t) &= \kappa(\theta - V(t))dt + \epsilon\sqrt{V(t)}dW_{N+1}(t), \end{cases} \quad (2.10)$$

et il est fréquent d'observer la dynamique des *forwards* exprimée telle que

$$dF_k(t) = (F_k(t) + \delta)\sqrt{V(t)}\gamma_k(t) (dW_k(t) - \tilde{\sigma}_k(t)dt),$$

où $\gamma_k(t)\sqrt{V(t)}$ représente la volatilité, $\sigma_k(t) = \tilde{\sigma}_k(t).\gamma_k(t)\sqrt{V(t)}$ est un simple changement de notation permettant de factoriser et δ est le *shift* venant de la désignation de *displaced diffusion*. Le terme δ représente la borne négative inférieure en dessous de laquelle les taux ne sont pas supposés descendre. D'un point de vue théorique, un modèle BGM ne peut pas modéliser de taux négatifs. Avec le décalage, c'est $F + \delta$ qui suit un BGM et le taux peut donc être modélisé dans $[-\delta, \infty[$. Dans le cadre de l'étude, ce paramètre est choisi fixé à la valeur de 3.3%, mais il est aussi possible d'induire sa valeur par calibration.

A la différence du LMM, ce sont ici des vecteurs de taille $N + 1$ qui sont manipulés. Ceci est dû au fait que la volatilité est stochastique et qu'elle utilise donc un autre brownien. Il y a donc, d'une part une volatilité *forward-forward* comme pour le LMM, et d'autre part une volatilité *forward-volatilité* qui s'expriment sous \mathbb{Q} telle que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[dW_k(t).dW_l(t)] &= \rho_{k,l}dt \quad k, l \leq N \\ \mathbb{E}[dW_k(t).dW_{N+1}(t)] &= \rho_k dt \quad k \leq N. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Cette volatilité stochastique qui s'exprime par le produit $\gamma_k(t) \times \sqrt{V(t)}$, où $\sqrt{V(t)}$ est la volatilité générale des *forwards* ("the (scaled) variance process for our forward rate diffusions" ANDERSEN et BROTHERTON-RATCLIFFE, 2001) et $\gamma_k(t)$ est donc le scalaire indiquant le redimensionnement nécessaire pour passer de la volatilité générale $\sqrt{V(t)}$ à la volatilité spécifique effective du processus F_k . En terme de vecteur, en prenant δ nul par soucis de lisibilité, cela donne sous \mathbb{Q}

$$\frac{dF(t)}{F(t)} = \begin{pmatrix} \frac{dF_1(t)}{F_1(t)} \\ \frac{dF_2(t)}{F_2(t)} \\ \vdots \\ \frac{dF_N(t)}{F_N(t)} \end{pmatrix} = \mu(t)dt + \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \vdots \\ \gamma_N(t) \end{pmatrix} \times \sqrt{V(t)} \times \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \\ \vdots \\ dW_N(t) \end{pmatrix},$$

avec " $\mu(t)$ " qui représente le changement de mesure qui n'est pas l'objet de ce qui est mis en exergue dans l'expression précédente (et peut être observé dans l'équation (2.10)). Le processus $V(t)$ suit quant à lui un processus CIR déjà évoqué dans la partie 1.4.4.

Dans l'équation (2.10), le terme $\sigma_k(t)$ représente la volatilité du zéro-coupon de maturité T_k , qui étant donné la remarque A.1 (en particulier la formule (A.6), est le composant du changement de mesure de \mathbb{Q}^{τ} vers \mathbb{Q} rappelant bien que si W_k est brownien sous \mathbb{Q} , alors $W_k^*(t) = W_k(t) - \sigma_k(t)$ l'est sous \mathbb{Q}^{T_k} . Cette volatilité peut d'ailleurs s'exprimer en fonction de celles des *forwards* telle que

$$\begin{cases} \sigma_{k+1}(t) &= -\sum_{l=0}^k \frac{\tau(F_l(t) + \delta)}{1 + \tau F_k(t)} \gamma_l(t) \sqrt{V(t)} \\ \sigma_0(t) &= 0, \end{cases}$$

en prenant $\sigma_0(t)$ nulle comme cela a été prouvé acceptable par BRACE et al., 1997, et avec le δ qui vient modifier la formule originale.

Choix de modélisation

Un choix de modélisation classique déjà introduit dans son implémentation originale par JOSHI et REBONATO, 2001 est de réduire le nombre de browniens utilisés pour la simulation des *forwards* de N à $n \ll N$, c'est un choix classique en assurance qui est par exemple fait par ANDRES et al. (2020). Le vecteur Z_t est alors un vecteur de dimension n de browniens indépendants représentant l'intégralité du mouvement stochastique*. Il est fréquent d'observer un nombre de browniens simulés tel que $n = 2$ (WU et ZHANG, 2006, partie 5), représentant alors les taux de maturités courtes et les taux de maturités longues. En terme de modélisation cela nécessite de transformer chaque $\gamma_k(t)$ en un vecteur de dimension n , ce qui donne donc sous $\mathbb{Q}^{T_k \dagger}$

$$\frac{dF_k(t)}{F_k(t) + \delta} = \sqrt{V(t)} (\gamma_k^1(t) \quad \gamma_k^2(t) \quad \dots \quad \gamma_k^n(t)) \cdot \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \\ \vdots \\ dW_n(t) \end{pmatrix},$$

avec " \cdot " le produit scalaire canonique. Suivant la même logique, le produit $\sqrt{V(t)} \gamma_k(t) \times \sigma_k(t) dt$ devient alors

$$-\sum_{l=0}^{k-1} \frac{\tau(F_l(t) + \delta)}{1 + \tau F_k(t)} V(t) \gamma_l^\top(t) \cdot \gamma_k(t),$$

*La corrélation est incluse dans le γ

†Par soucis de lisibilité pour supprimer le *drift*

avec

$$\gamma_l^\top(t) \cdot \gamma_k(t) = \sum_{j=1}^n \sqrt{V(t)} \cdot \gamma_l^j \times \sqrt{V(t)} \cdot \gamma_k^j,$$

autrement dit

$$\sum_{l=0}^{k-1} \frac{\tau(F_l(t) + \delta)}{1 + \tau F_k(t)} V(t) \gamma_l^\top(t) \cdot \gamma_k(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\tau(F_l(t) + \delta)}{1 + \tau F_k(t)} \sqrt{V(t)} \cdot \gamma_l^j \times \sqrt{V(t)} \cdot \gamma_k^j.$$

Chaque γ_k^i contient alors $1/n$ de l'information du γ_k scalaire introduit dans (2.10). La corrélation devient alors une matrice à $n+1$ dimensions avec une sous-matrice identité de dimension $n \times n$ et une corrélation *forward-volatilité* s'exprimant telle que

$$\rho_j(t) dt = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\left(\frac{1}{\|\gamma_j(t)\|} \gamma_j(t)^\top \times \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ dW_2(t) \end{pmatrix} \right) \cdot dW_3(t) \right].$$

Plus généralement, tout se passe comme dans l'équation (2.10) en adaptant les multiplications scalaires en multiplications vectorielles et avec une matrice de corrélation proche de l'identité. Il reste à choisir une modélisation pour γ , de même qu'il a été décidé une modélisation pour la volatilité déterministe dans la partie 2.1.2 sur le LMM. Dans la formule originale, JOSHI et REBONATO (2001) utilisent une fonction de Rebonato (cf. equation (2.8)) avec des paramètres a , b , c et d stochastiques pour la modélisation de la volatilité. Dans WU et ZHANG (2006), la modélisation est sous la forme

$$\gamma_k(t) = \begin{pmatrix} g_1(T_{k-1} - t) \\ g_2(T_{k-1} - t) \\ \vdots \\ g_n(T_{k-1} - t) \end{pmatrix},$$

avec $(g_i)_i$ des fonctions de Rebonato déterministes. Le choix qui est ici fait est une modélisation telle que

$$\gamma_k(t) = g(T_{k-1} - t) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

avec g une unique fonction de Rebonato déterministe, ce qui est plus simple et plus rapide à calibrer (ANDRES et al., 2020). Le côté stochastique venant dans tous les cas de $\sqrt{V(t)}$ omis dans les écritures précédentes.

2.2.2 Calibration

La calibration du LMM+ présentée ici dépend du *pricing* de *swaptions* payeuses. Il faut d'abord se rappeler qu'un *swap* peut s'écrire

$$S_{m,n}(t) = \sum_{i=m+1}^{n-1} \frac{1}{A_{m,n}(t)} \tau ZCB(t, T_i) F_i(t) = \sum_{i=m+1}^{n-1} \alpha_i(t) F_i(t),$$

avec $A_{m,n}(t) = \sum_{i=m+1}^{n-1} \tau ZCB(t, T_i)$. Cela donne par Itô une dynamique de $S_{m,n}(t)$ telle que

$$\begin{cases} dS_{m,n}(t) &= \sqrt{V(t)} \sum_{i=m+1}^{n-1} \frac{\partial S_{m,n}(t)}{\partial F_i} (F_i(t) + \delta) \gamma_i(t) \cdot dZ_t^S, \\ dV(t) &= \kappa (\theta - \tilde{\xi}^S(t) V(t)) dt + \epsilon \sqrt{V(t)} dW_t^S, \end{cases} \quad (2.12)$$

où le terme $\tilde{\xi}^S(t)$ dépend des différents paramètres de diffusions du LMM+. Une telle diffusion ne peut pas être manipulée telle quelle pour en déduire une calibration. Les termes en $t > 0$ étant inconnus, il s'agit alors d'approximer l'équation (2.12) en utilisant une technique de *freezing* telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial S_{m,n}(t)}{\partial F_j} (F_j(t) + \delta) \approx \frac{\partial S_{m,n}(0)}{\partial F_j} (F_j(0) + \delta), \\ \tilde{\xi}^S(t) \approx \tilde{\xi}^S(0), \end{cases}$$

sachant que

$$\frac{\partial S_{m,n}(t)}{\partial F_j} = \alpha_j(t) + \frac{\tau}{1 + \tau F_j(t)} \sum_{k=m+1}^{n-1} \alpha_k(t) \cdot (F_k(t) - S_{m,n}(t)),$$

les termes $\tilde{\xi}^S(0)$ et $\frac{\partial S_{m,n}(0)}{\partial F_j} (F_j(0) + \delta)$ étant alors connus. Une telle approche a déjà été utilisée dans ANDERSEN et ANDREASEN (2000) la justifiant en remarquant que pour un *shift* raisonnable des taux, la valeur de $\frac{\partial S_{m,n}(t)}{\partial F_j}$ ne varie que très peu dans le temps. Une telle technique est classique dans l'approximation du taux *swap*, un autre exemple pouvant être retrouvé dans la section 6.3 de REBONATO (2012).

Il s'agit alors de trouver une expression du prix d'une *swaption*. Le *payoff* d'une *swaption* payeuse s'exprime sous \mathbb{Q}^S (définie dans §A.1.3)

$$PSR = A_{m,n}(0) \mathbb{E} [(S_{m,n}(T_m) - K)^+],$$

ce qui en posant

$$Z = \frac{S_{m,n}(t) - S_{m,n}(0)}{\nu},$$

donne un prix en 0 de

$$PSR(K) = A_{m,n}(0) \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^{T_m} r_s ds} (S_{m,n}(0) + \nu \cdot Z - K)^+ \right].$$

L'idée est alors qu'une variable Z , avec ν telle que $\nu^2 = Var(Z)$ peut avoir une fonction de densité approchée par une série de Gram-Charlier (JONDEAU et ROCKINGER, 2001) telle que

$$PSR(K) \approx \widetilde{PSR}(K) = \nu A_{m,n}(0) \int_0^\infty (z - z_K) g(z) dz,$$

où $z_K = \frac{K - S_{m,n}(0)}{\nu}$ et g est la densité approché de Z .

Il peut alors être démontré que

$$\widetilde{PSR}(K) = PSR^{Bachelier}(K) + \nu A_{m,n}(0) \phi(z_K) \Psi,$$

où Ψ est une constante dépendant de différents moments d'ordre k de Z et de z_K , et où $PSR^{Bachelier}(K)$ est le prix d'une *swaption* payeuse.

Une expression analytique d'un prix de *swaption* payeuse est finalement exhibée, et une calibration peut être effectuée par rapport à une volatilité implicite de marché en utilisant une fonction de minimisation bien adaptée. Dans l'implémentation qui en a été faite, c'est la volatilité de Bachelier qui a été utilisée. La calibration qui a été présentée est dans le détail très lourde, et n'apporte pas plus d'élément de compréhension sur la structure des taux. Des informations essentielles à la bonne implémentation de la calibration ont donc été volontairement omises dans le but d'alléger au maximum cette section, mais peuvent être retrouvées dans WU et ZHANG (2006) et ARROUY et al. (2022).

2.3 SABR

Le SABR est un modèle de taux *forward* (au singulier) qui peut être décrit comme un CEV à volatilité stochastique. Si la volatilité est prise déterministe, cela devient un CEV classique. Il modélise donc $F_k(t)$, et pas une structure. Il ne peut donc pas être utilisé tel quel en tant que modèle de taux en assurance.

2.3.1 Diffusion

L'équation de diffusion générale d'un SABR sous \mathbb{Q}^{T_k} est

$$\begin{cases} dF_k(t) &= \alpha_k(t) F_k(t)^{\beta_k} dW_{F_k}(t), \\ d\alpha_k(t) &= \nu_k \alpha_k(t) dW_{\alpha_k}(t), \end{cases} \quad (2.13)$$

où $\alpha_k(t)$ est appelé (abusivement*) le processus de volatilité du *forward* $F_k(t)$. Ce modèle est donc à volatilité stochastique, il prend en considération la corrélation entre ces deux processus à travers une corrélation *forward*-volatilité définie telle que

$$\mathbb{E}^k [dW_{F_k}(t) dW_{\alpha_k}(t)] = \rho_k dt. \quad (2.14)$$

Le SABR a de plus trois paramètres emblématiques de son nom α , β et ρ qui se définissent tels que

- α , l'origine de la volatilité stochastique avec $\alpha_k = \alpha_k(0)$
- β , l'élasticité[†] de la volatilité du *forward* intervenant directement dans l'équation (2.13),

*En effet la volatilité est $\alpha_k(t) F_k(t)^{\beta_k - 1}$, qui est néanmoins stochastique

[†]D'où le lien avec le modèle CEV cf. 2

- ρ , la corrélation *forward*-volatilité définie dans l'équation (2.14).

À cela s'ajoute un dernier paramètre, la volatilité de la volatilité ν_k qui est modélisée de manière constante, et apparaît au niveau du processus de volatilité dans l'équation (2.13). Un SABR ne diffuse qu'un seul *forward*, ce qui signifie qu'il faut en diffuser plusieurs de manière simultanée pour modéliser une structure des taux.

2.3.2 Calibration

La calibration d'un SABR consiste à attribuer une valeur aux 4 paramètres α , β , ρ et ν . La grande force de ce modèle repose sur la simplicité de cette calibration. HAGAN et al. (2002) ont mis en exergue une formule explicite pour la volatilité implicite des *caplets* en fonction des 4 paramètres du modèle, du *strike*, de la maturité et du taux *forward spot* ($F_k(0)$). Il existe une version adaptée à la volatilité de Black (log-normale) et une autre conçue pour la volatilité de Bachelier (normale) en reprenant la remarque A.2.

Seule la volatilité implicite normale sera utilisée de par sa capacité à considérer des taux négatifs. La démonstration précise de cette formule se trouve dans les annexes de HAGAN et al. (2002), elle repose sur une utilisation de techniques de perturbations singulières pour obtenir le prix d'options européennes, et ainsi en déduire* une formule pour la volatilité implicite. Le résultat s'exprime tel que

$$\sigma_k^N(\gamma) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_k(\gamma F_k) \frac{\beta_k}{2} \frac{1 + \frac{1}{24} \ln^2 \left(\frac{F_k}{\gamma} \right) + \frac{1}{1920} \ln^4 \left(\frac{F_k}{\gamma} \right) + \dots}{1 + \frac{(1-\beta_k)^2}{24} \ln \left(\frac{F_k}{\gamma} \right) + \frac{(1-\beta_k)^4}{1920} \ln^3 \left(\frac{F_k}{\gamma} \right) + \dots} \\ \times \frac{z_k}{\xi_k(z_k)} \\ \times \left(1 + \frac{-\beta_k(2-\beta_k)}{24} \cdot \frac{\alpha_k^2 T_{k-1}}{(\gamma F_k)^{1-\beta_k}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\alpha_k \beta_k \rho_k \nu_k T_{k-1}}{(\gamma F_k) \left(\frac{1-\beta_k}{2} \right)} + \frac{2-3\rho_k^2}{24} \nu_k^2 T_{k-1} + \dots \right), \end{array} \right. \quad (2.15)$$

avec γ , le *strike* du *caplet* considéré et

$$\left\{ \begin{array}{l} z_k = \frac{\nu_k}{\alpha_k} (\gamma F_k)^{\left(\frac{1-\beta_k}{2} \right)} \ln \left(\frac{F_k}{\gamma} \right), \\ \xi_k(z_k) = \ln \left(\frac{\sqrt{1-2\rho_k z_k + z_k^2} + z_k - \rho_k}{1-\rho_k} \right). \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Remarques

Les remarques suivantes peuvent être faites à propos de l'équation (2.16) :

- Le taux *spot* est désigné en omettant la dépendance temporelle ($F_k(0) = F_k$),

*Il y a en effet une bijection entre prix et volatilité implicite selon A.2

- La formule (2.15) est une approximation et les "...” représentent l'ordre supérieur d'un développement limité d'une intégrale,
- La formule (2.15) repose sur les hypothèses suivantes
 - Les maturités ne doivent pas être trop longues,
 - Pour des valeurs de β trop élevées, le comportement perd en régularité,
 - La condition $\nu^2 T \ll 1$ doit être vérifiée pour ne pas perdre en précision.

Avec une telle formule, la calibration consiste à minimiser la quantité

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \left(\sigma_k^{N-MARKET}(\gamma) - \sigma_k^{N-IMPLICITE}(\gamma) \right)^2, \quad (2.17)$$

sur un ensemble bien choisi de *strikes*.

Calibration sur un sous-jacent quelconque

La formule (2.15) a été historiquement démontrée pour un *caplet*, ce qui est un choix logique étant donné la liquidité importante de ces objets et la popularité actuelle des modèles CEV pour les taux. Les modèles CEV ne sont pourtant pas limités aux taux, et les options ne sont pas limités aux *caplets*. La formule d'Hagan peut donc être déclinée pour d'autres types de *call* tant que les hypothèses restent vérifiées. Les *swaptions* sont par exemple des options sur taux *swap*, et la formule d'Hagan peut être utilisée pour un *call* sur taux *swap*. Le procédé de calibration est transposable, mais la diffusion ne porte par contre plus sur le même objet. Plus de détails à ce sujet est donné dans l'annexe §A.3.

2.3.3 Remarques générales sur la mise en place du SABR

Le SABR est un modèle calibré sur des volatilités implicites de *caplets*, qui sont des produits particulièrement liquides. Les vérifications de la bonne calibration sont donc particulièrement exigeantes et consistent à vérifier en norme 1* la distance globale avec le *smile* cible avec une exigence de l'ordre du point de base[†].

L'expression du prix des *swaptions* se fait directement par diffusion des *forwards*. Pour une *swaption* d'expiration T_m , de *tenor* $T_n - T_m$ et avec un taux *swap* sur un taux *forward* bien précis, cela nécessite de diffuser l'ensemble des $(F_k)_{m \leq k \leq n}$ jusqu'à T_m . Il est d'abord nécessaire d'adapter la diffusion du SABR en y ajoutant un *drift* pour exprimer les différents *forwards* sous la même mesure. Il est appliqué un changement de mesure similaire au LMM, et l'expression des *forwards* se fait donc sous \mathbb{Q}^{T_N} . Ainsi le prix d'une *swaption* receveuse pour un *strike* K est

$$PSR = ZCB(0, T_m) \left(\sum_{k=m+1}^n \tau(K - F_k(T_m)) \cdot ZCB(T_m, T_k) \right)^+,$$

avec τ le *tenor* des *forwards*.

*Il est nécessaire de ne pas amoindrir la distance pour une valeur inférieur à l'unité

[†] 10^{-4}

2.4 LMM-SABR en théorie

Le LMM-SABR (REBONATO, 2007) est une extension du SABR qui fait partie de la famille des LMM. Cette première partie est théorique et générale, tandis que la suivante expose des méthodologies pratiques.

2.4.1 Diffusion

L'équation générale de diffusion d'un LMM-SABR sous \mathbb{Q}^{T_N} est

$$\begin{cases} dF_1(t) = \mu_1(t)dt + \alpha_1(t)F_1(t)^{\beta_1}dW_{F_1}(t), \\ \vdots \\ dF_N(t) = \mu_N(t)dt + \alpha_N(t)F_N(t)^{\beta_N}dW_{F_N}(t), \\ d\alpha_1(t) = \eta_1(t)dt + \nu_1(t)\alpha_1(t)dW_{\alpha_1}(t), \\ \vdots \\ d\alpha_N(t) = \eta_N(t)dt + \nu_N(t)\alpha_N(t)dW_{\alpha_N}(t), \end{cases} \quad (2.18)$$

en adaptant sous forme de vecteur l'équation (2.13). Il y a une corrélation *forward-forward* telle que dans l'équation (2.2) avec les modèles de la famille LMM, une corrélation *forward-volatilité* telle que dans l'équation (2.14) pour le modèle SABR et une corrélation volatilité-volatilité qui se retrouve dans certains modèles LMM à volatilité stochastique comme le LMM+ avec l'équation (2.11). Ces corrélations* se définissent telles que

$$\begin{cases} \mathbb{E}^N [dW_{F_k}(t)dW_{F_l}(t)] = \varpi_{k,l}dt, \\ \mathbb{E}^N [dW_{\alpha_k}(t)dW_{\alpha_l}(t)] = \vartheta_{k,l}dt, \\ \mathbb{E}^N [dW_{F_k}(t)dW_{\alpha_l}(t)] = \Phi_{k,l}dt, \end{cases} \quad (2.19)$$

ou autrement dit sous forme de matrice

$$\Pi = \begin{pmatrix} \varpi & \Phi \\ \Phi^\top & \vartheta \end{pmatrix},$$

avec $\Phi = (\Phi_{k,l})_{1 \leq k, l \leq N}$, $\varpi = (\varpi_{k,l})_{1 \leq k, l \leq N}$ et $\vartheta = (\vartheta_{k,l})_{1 \leq k, l \leq N}$.

Une différence par rapport au SABR classique est la volatilité-volatilité (la volatilité de la volatilité), ν_k qui est ici affinée en une fonction $\nu_k(t)$. La cohérence avec le SABR sous-jacent induit la relation

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \dots, N\} & \nu_k = \nu_k(0), \\ \forall k \in \{1, \dots, N\} & \rho_k = \Phi_{k,k}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Le *drift* de la diffusion a le même rôle que dans (2.3), c'est le changement de numéraire permettant de passer de \mathbb{Q}^{T_k} vers \mathbb{Q}^{T_N} . Pour le processus *forward* il s'exprime tel que

$$\begin{cases} \mu_k(t) = -\alpha_k(t)F_k(t)^{\beta_k} \sum_{l=k+1}^N \frac{\tau_l \varpi_{k,l} \alpha_l(t) F_l(t)^{\beta_l}}{1 + \tau_l F_l(t)} & k < N, \\ \mu_k(t) = 0 & k = N, \end{cases} \quad (2.21)$$

*Les corrélation *forward-forward* sont notées ϖ de manière à ne pas être confondues avec ρ , le troisième paramètre du SABR sous-jacent

l'apparition du terme d'élasticité β venant du fait que ce soit cette fois le modèle SABR qui est sous-jacent à ce changement de numéraire*. Une formule similaire est valable pour $\eta_k(t)$ tel que

$$\begin{cases} \eta_k(t) &= -\Phi_{k,k}\nu_k(t)\alpha_k(t) \sum_{l=k+1}^N \frac{\tau_l \varpi_{k,l} \alpha_l(t) F_l(t)^{\beta_l}}{1 + \tau_l F_l(t)} & k < N, \\ \eta_k(t) &= 0 & k = N, \end{cases} \quad (2.22)$$

le terme $\Phi_{k,k}$ venant de la prise en compte de la corrélation *forward*-volatilité. En effet dans (2.21), c'est $W_{F_k}(t)$ qui est exprimé en fonction de $W_{F_N}(t)$, tandis qu'ici, c'est $W_{\alpha_k}(t)$ qui l'est.

Il est de plus possible avec ce cadre d'approximer le taux *swap* tout en gardant une calibration sur *caplets* (HAGAN et LESNIEWSKI, 2008), mais une telle approche n'est pas abordée ici.

Choix de modélisation

En pratique, plusieurs décisions doivent être prises afin de définir de manière précise l'équation (2.18). La paramétrisation de REBONATO, 2007 est ici adoptée. Elle induit l'existence de deux fonctions, g (volatilité instantanée) et h (volatilité-volatilité instantanée) et d'un autre paramètre, $s_k(t)$. Ils sont définis par la relation

$$\begin{cases} \alpha_k(t) &= g(T_{k-1} - t)s_k(t), \\ \nu_k(t) &= h(T_{k-1} - t). \end{cases} \quad (2.23)$$

Les fonctions g et h sont des fonctions paramétriques qui seront ici de Rebonato (cf. équation (2.8)). C'est un choix général qui peut être affiné pour s'adapter plus subtilement à certains produits financiers. Le terme $s_k(t)$ représente quant à lui l'erreur de paramétrisation du terme $\alpha_k(t)$ par rapport à la fonction de volatilité instantanée, g . C'est l'erreur de paramétrisation qui est stochastique dans l'expression (2.23) et la diffusion précise pour $k \in \{1, \dots, N\}$ prend finalement la forme

$$\begin{cases} dF_k(t) &= \mu_k(t)dt + \alpha_k(t)F_k(t)^{\beta_k}dW_{F_k}(t), \\ d\alpha_k(t) &= g(T_{k-1} - t)ds_k(t), \\ ds_k(t) &= \eta_k(t)dt + h(T_{k-1} - t)s_k(t)dW_{\alpha_k}(t), \end{cases} \quad (2.24)$$

avec

$$\begin{cases} \mu_k(t) &= -g(T_{k-1} - t)s_k(t)F_k(t)^{\beta_k} \sum_{l=k+1}^N \frac{\tau_l \varpi_{k,l} g(T_{l-1} - t)s_l(t)F_l(t)}{1 + \tau_l F_l(t)} & k < N, \\ \mu_k(t) &= 0 & k = N, \end{cases} \quad (2.25)$$

et

$$\begin{cases} \eta_k(t) &= -\Phi_{k,k}h(T_{k-1} - t)s_k(t) \sum_{l=k+1}^N \frac{\tau_l \varpi_{k,l} h(T_{l-1} - t)s_l(t)F_l(t)^{\beta_l}}{1 + \tau_l F_l(t)} & k < N, \\ \eta_k(t) &= 0 & k = N. \end{cases} \quad (2.26)$$

Un autre choix de modélisation peut être fait dans le but de simplifier le modèle et cela consiste à annuler la matrice de corrélation *forward*-volatilité Φ (CRISPOLDI et al., 2016, chap. 7.3.4.2). La

* $\gamma_k(t) = \alpha_k(t) \cdot F_k(t)^{\beta_k - 1}$

justification étant qu'au niveau du modèle SABR sous-jacent, les paramètres β et ρ ont des rôles semblables (celui de contrôler la pente de la volatilité implicite). Il y a donc de la redondance dans la paramétrisation du modèle, qui peut être exploitée et permettre de simplifier le modèle. La corrélation entre *forward* et volatilité n'est dans tous les cas pas observable sur le marché, ce qui rend la calibration de telles valeurs problématiques (PITERBARG, 2003). Un tel choix permet de supprimer toute forme de questionnement sur la formule (2.22) * mais est néanmoins assez restrictif pour le modèle.

Ce choix de modélisation est fait pour la suite de l'étude. La nécessité de cette décision est à propos des conditions de bonne définition de la matrice de corrélation abordées en ouverture (cf. §3.3.2) et induit une structure de corrélation plus simple telle que

$$\Pi = \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \vartheta \end{pmatrix}.$$

2.4.2 Calibration

Les choix de modélisations précédemment expliqués imposent une calibration dans un ordre précis qui consiste à

1. Calibrer des corrélations ϑ , ϖ ,
2. Calibrer des paramètres SABR (α_k) , (β_k) et (ν_k) ,
3. Calibrer des fonctions paramétriques instantanées g et h ,

Calibration des corrélations

Cette partie de la calibration est similaire aux étapes de calibrations associées à la corrélation du LMM ou du LMM+. La matrice de corrélation dans le cas du LMM-SABR est en théorie composée de trois éléments : la corrélation *forward-forward*, la corrélation *forward-volatilité* et la corrélation *volatilité-volatilité* comme présentée dans l'équation (2.19). Une méthodologie pratique est proposée dans la section suivante.

Calibration du SABR

Il y a $4 \times N$ paramètres à calibrer ici ; le processus de calibration étant pour le reste exactement le même que pour le SABR classique (2.17). Dans le cadre de cette étude, le ρ est fixé à 0 et seuls $3 \times N$ des paramètres sont à calibrer.

Calibration des fonctions paramétriques

Les fonctions de paramétrisations ici utilisées sont de Rebonato (cf. équation (2.23)). D'autres fonctions pourraient néanmoins être considérées de manière équivalente. Dans le cas de cette étude cela donne une paramétrisation avec deux jeux de paramètres a , b , c et d . Le processus de calibration proposé ici repose sur une égalité "heuristique" pour reprendre les termes de son auteur (REBONATO et al., 2009). Il est nécessaire d'introduire des notations supplémentaires pour cette sous-partie $\hat{\alpha}_k$, $\hat{\beta}_k$, $\hat{\rho}_k$ et $\hat{\nu}_k$ tel que

*En effet CHASE et LONDON, 2008, (eq. 28) proposent une différente formule, mais elle s'annule aussi avec $\Phi = 0$

$$\begin{cases} d\hat{F}_k(t) &= \hat{\alpha}_k(t)\hat{F}_k(t)^{\hat{\beta}_k}d\hat{W}_{F_k}(t), \\ d\hat{\alpha}_k(t) &= \hat{\nu}_k\hat{\alpha}_k(t)d\hat{W}_{\alpha_k}(t), \end{cases}$$

où les $(\hat{F}_k)_k$ représentent les N *forwards*-SABR sous-jacents au LMM-SABR. Les paramètres $\hat{\alpha}_k$, $\hat{\beta}_k$, $\hat{\rho}_k$ et $\hat{\nu}_k$ sont connus d'après la sous-sous-partie précédente. Et l'idée de cette sous-sous-partie est d'une part de justifier que ces paramètres peuvent être confondus avec α_k , β_k , ρ_k et ν_k et d'autre part d'en déduire une relation avec g et h permettant de calibrer ces deux fonctions (*i.e.* d'en déduire la valeur optimale pour les deux jeux de a , b , c et d).

La fonction g est la fonction paramétrique de la volatilité des *forward*, le terme $s_k(t)$ adaptant alors cette fonction générique pour s'approcher finement de la volatilité effective du *forward* $F_k(t)$. La calibration de g cherche à s'approcher au plus proche de $\alpha_k(t)$ selon

$$\alpha_k(t) = g(T_{k-1} - t) \implies \sqrt{\frac{1}{T_{k-1}} \int_0^{T_{k-1}} \alpha_k(s)^2 ds} = \sqrt{\frac{1}{T_{k-1}} \int_0^{T_{k-1}} g(s)^2 ds}.$$

Pour $t > 0$, le processus $\alpha_k(t)$ est inconnu et stochastique, une calibration sur sa valeur semble donc hors de portée. Il est néanmoins connu* pour $t = 0$, et il vaut $\alpha_k(0) = \alpha_k = \hat{\alpha}_k = \hat{\alpha}_k(0)$. L'idée de cette calibration revient donc procéder à l'approximation suivante

$$\mathbb{E}_0 \left[\sqrt{\frac{1}{T_{k-1}} \int_0^{T_{k-1}} \alpha_k(s)^2 ds} \right] \approx \mathbb{E}_0 \left[\sqrt{\frac{1}{T_{k-1}} \int_0^{T_{k-1}} \hat{\alpha}_k(s)^2 ds} \right], \quad (2.27)$$

or le processus $\hat{\alpha}_k(t)$ est nettement plus simple et peut s'exprimer tel que

$$\hat{\alpha}_k(t) = \hat{\alpha}_k(0) e^{-\frac{1}{2}\hat{\nu}_k^2 t + \hat{\nu}_k \hat{W}_k(t)},$$

d'où

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{E}_0 [\hat{\alpha}_k(t)] = \hat{\alpha}_k(0) = \hat{\alpha}_k \\ \mathbb{E}_0 [\hat{\alpha}_k^2(t)] = \hat{\alpha}_k^2(0) = \hat{\alpha}_k^2 \end{array} \right\} \implies \mathbb{E}_0 \left[\sqrt{\frac{1}{T_{k-1}} \int_0^{T_{k-1}} \hat{\alpha}_k(s)^2 ds} \right] = \hat{\alpha}_k = \alpha_k,$$

ce qui permet d'en déduire la relation

$$\sqrt{\frac{1}{T_{k-1}} \int_0^{T_{k-1}} g(s)^2 ds} \approx \alpha_k$$

qui amène à une calibration de g en minimisant

$$\sum_{k=1}^N \left(\alpha_k - \sqrt{\frac{1}{T_{k-1}} \int_0^{T_{k-1}} g(u)^2 du} \right)^2, \quad (2.28)$$

le but étant de calibrer sur la structure des taux pour que g reflète un comportement global.

*Il provient de la calibration du SABR sous-jacent

À propos de h , c'est l'équivalent pour $\alpha_k(t)$ de ce qu'est g pour $F_k(t)$. Sachant que la volatilité de la volatilité est $\nu_k(t)$, la relation (2.27) donne de manière similaire

$$\mathbb{E}_0 \left[\sqrt{\frac{1}{T_{k-1}} \int_0^{T_{k-1}} \nu_k(s)^2 ds} \right] \approx \mathbb{E}_0 \left[\sqrt{\frac{1}{T_{k-1}} \int_0^{T_{k-1}} \hat{\nu}_k(s)^2 ds} \right], \quad (2.29)$$

avec $\hat{\nu}_k(t)$ une constante égale à $\hat{\nu}_k$, d'où

$$\sqrt{\frac{1}{T_{k-1}} \int_0^{T_{k-1}} h(s)^2 ds} \approx \nu_k$$

et une calibration sur la structure des taux telle que

$$\sum_{k=1}^N \left(\nu_k - \sqrt{\frac{1}{T_{k-1}} \int_0^{T_{k-1}} h(u)^2 du} \right)^2. \quad (2.30)$$

2.4.3 Remarques générales sur la mise en place du LMM-SABR

La calibration du LMM-SABR est elle aussi basée sur des volatilités implicites de *caplets* de même que le SABR. Les remarques du §2.3.3 sont donc toujours applicables à la nuance que la calibration du SABR sous-jacent au LMM-SABR n'est plus la seule phase de calibration et qu'elle n'a pas la même signification. Une tolérance plus importante est donc observée pour la phase 2 de la calibration.

Enfin au sujet de la calibration des fonctions paramétriques (la phase 3 de la calibration), seul un résultat numérique est disponible. L'exigence de précision de cette phase se fait donc en raisonnant sur les grandeurs calibrées. Par exemple α_k représente une volatilité stochastique à l'origine à un facteur près, il s'agit donc d'une valeur de l'ordre de 10^{-2} , une erreur moyenne de l'ordre de 10^{-4} est attendue.

Le prix des *swaptions* se fait d'une manière similaire à ce qui est fait pour le SABR, à la différence que tous les *forwards* sont déjà sous \mathbb{Q}^{TN}

2.5 LMM-SABR en pratique

Cette section propose une série d'approches méthodologiques visant à résoudre les problématiques liées aux taux négatifs et aux corrélations, aspects qui n'ont été que brièvement abordés dans la partie théorique.

2.5.1 Le LMM-SABR adapté à des taux négatifs

Le LMM-SABR tel qu'il vient d'être présenté nécessite quelques ajustements pour pouvoir être utilisé en pratique dans le contexte économique actuel. Il ne prend par exemple pas en compte les taux négatifs. En effet, pour $F_k < 0$, le terme F_k^β est complexe*, ce qui est théoriquement problématique car les taux doivent pouvoir être négatifs. D'un point de vue pratique, cela pose aussi un problème pour F_k très faible car la probabilité de basculer du côté des valeurs négatives avec un schéma d'Euler est

* $\in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

non nulle. La question se pose donc de comment gérer cette problématique d'un point de vue théorique et pratique.

SABR absorbant

L'approche la plus simple en ce qui concerne la limite pratique du modèle consiste à ne rien changer à l'équation (2.13), mais de considérer le 0 comme barrière absorbante ("the forward rate is assumed to be absorbed at zero" de BALLAND et TRAN (2013)). Une telle approche est extrêmement simple et en accord avec la propriété d'absorption d'un processus CEV (DELBAEN et SHIRAKAWA, 2002, p. 1-2) tel que le SABR, ce qui explique sa popularité. Cette approche ne permet par contre pas de diffuser un taux négatif à l'origine, et nécessite beaucoup de simulations pour un taux faiblement positif.

SABR décalé

L'approche choisie pour pouvoir théoriquement considérer des taux négatifs est l'ajout d'un *shift* δ qui se retrouve dans l'équation de diffusion du SABR de manière similaire à ce qui est fait dans JOSHI et REBONATO (2001) (en ce qui concerne le *shift*). Cela donne une diffusion du SABR telle que

$$\begin{cases} dF(t) &= \alpha(t)(F(t) + \delta)^\beta dW_F(t), \\ d\alpha(t) &= \nu\alpha(t)dW_\alpha(t), \end{cases} \quad (2.31)$$

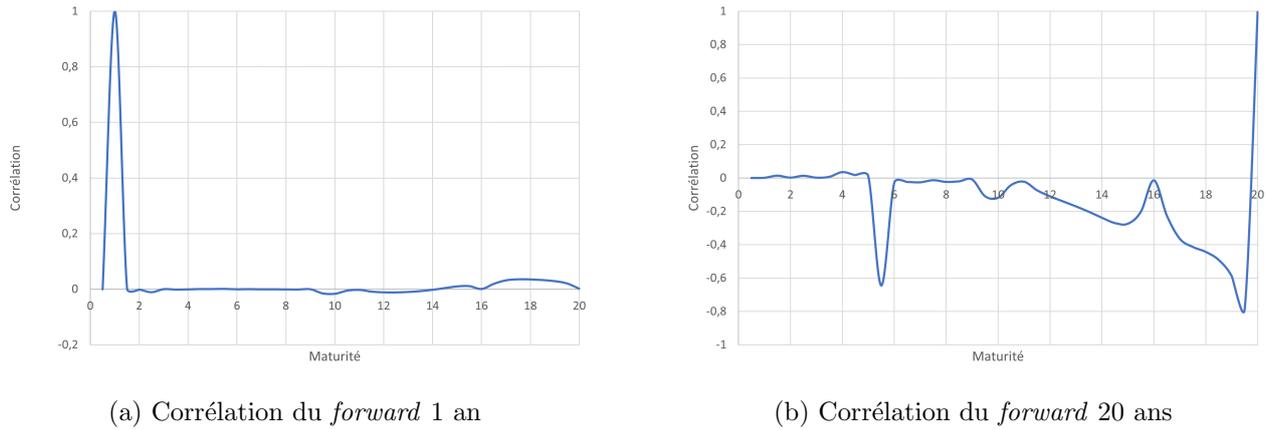
La simplicité de cette approche vient du fait que cela ne change que très légèrement la calibration. En effet HAGAN et al. (2014) démontrent une formule similaire pour la volatilité implicite de ce modèle, où la seule modification vient d'un ajout de δ pour le *strike* γ et le *spot* F_k dans la formule (2.17). Un tel résultat n'est pas surprenant étant donné que la démonstration de (2.17) vient d'une perturbation sur une option européenne, et que $(S + \delta - (K + \delta))^+ = (S - K)^+$. Une telle approche nécessite néanmoins de répondre à la question de la valeur du *shift* à prendre. Il doit être considéré comme un hyperparamètre, car sa valeur impact le sens du processus simulé. Il est donc fixé pendant la calibration, le choix de sa valeur étant donc critique pour le reste de l'étude. S'il est trop faible, il ne permet pas de prendre en compte des taux négatifs de manière plausible. En revanche, s'il est excessivement élevé, il biaise la diffusion des données*.

Il faut de plus réaliser qu'un modèle décalé est différent du modèle original. De manière plus générale, deux modèles présentant un décalage distinct sont considérés comme distincts, d'où l'importance du choix du décalage qui vient donc en amont des tests sur le modèle. Historiquement BRIGO et MERCURIO (2006) présentent cette approche dans le cas du modèle BGM au niveau du chapitre 10.1 comme une "approche simple permettant de construire une dynamique des taux *forward* induisant une structure de volatilité non-plate" et suppose une dynamique des taux sous \mathbb{Q}^{T_j} telle que

$$\begin{cases} F_j(t) &= X_j(t) + \alpha, \\ dX_j(t) &= \beta(t).X_j(t)dW_t, \end{cases}$$

où α est un réel constant et β est une fonction déterministe induisant que c'est alors $(X_j(t))_t$ qui suit une dynamique de type BGM.

*la question se pose du sens que peut avoir l'approximation d'une diffusion d'un processus par une diffusion décalée d'une valeur comparable (si ce n'est supérieure) au processus en question

FIGURE 2.3 : *Smile* d'étude pour le SABR

Remarque

L'implémentation du LMM-SABR qui est faite en pratique est celle d'une *shifted*-SABR (selon l'équation (2.31)) avec une barrière absorbante en 0. La barrière assure qu'il n'y ait jamais de problème pratique lié à l'implémentation du modèle, et le *shift* permet de considérer des taux négatifs (le contraire étant restreignant dans le contexte actuel). En ce qui concerne la valeur du *shift*, elle est fixée à 3%. C'est un choix de marché classique qui peut être par exemple renseigné dans certains exemples comme dans l'appendice D de BLOOMBERG (2021).

Il faut néanmoins garder en mémoire qu'aucune de ces approches n'est idéale, quand les taux sont hauts ce qui se passe en 0 importe peu et quand ils sont faibles il n'y a pas de choix tout à fait satisfaisant ("when rates are high, it barely matters what happens close to zero ... when rates are really low, then no choice is entirely satisfactory" p. 50 de REBONATO et al. (2009)).

2.5.2 La calibration des corrélations

Corrélacion *forward-forward* ϖ

La méthodologie choisie ici est une approche par lissage (cf. 2.1.2). Les données historiques nécessaires à cette approche sont les taux *forward* 6 mois pour des maturités variées à des dates variées. Plus précisément l'historique va du 18/02/2018 au 18/02/2023, et les maturités sont choisies continues telles que la dernière soit réglée dans 120 ans (soit 119 ans et 6 mois de maturité). La fonction de lissage utilisée est celle présentée dans l'équation (2.7). Les valeurs de *forwards* aberrantes sont alors supprimées manuellement et le résultat peut être observé sur les graphiques 2.3a et 2.3b pour des maturités respectives de 1 an et 20 ans. Les abscisses représentent les différentes maturités des *forwards* et les ordonnées les valeurs de la corrélation. Il peut être remarqué une différence de structure entre les deux maturités. Pour les taux très courts, une discontinuité apparaît : leur corrélation est nulle.

Corrélacion *forward-volatilité* Φ

La corrélation *forward-volatilité* se base aussi sur le comportement des volatilités et rencontre donc les mêmes problèmes que la sous-section suivante. Une différence importante est à propos de la composition de la diagonale qui est en fait le vecteur $(\rho_k)_k$ des N SABR sous-jacents. Dans le cadre de cette étude, le vecteur en question a été supposé nul imposant que la matrice de corrélation soit

elle aussi nulle.

Corrélation volatilité-volatilité ϑ

La calibration de la corrélation volatilité-volatilité pose un premier problème de sens. Plus précisément c'est la question de ce qu'est la volatilité d'un taux *forward* d'une manière pratique et comment cela s'observe. Le choix détaillé dans cette sous-partie est la tentative d'une approche rigoureuse, pratique, mais subjective à ce sujet.

Corrélation volatilité-volatilité ϑ : les données

La décision qui est prise est de considérer que la volatilité des *forwards* se retrouve dans la volatilité implicite des *caps* de même expiration. Il est donc décidé de récupérer la corrélation de marché de ces différents *caps* sur l'historique le plus large et le plus significatif possible. Les données au 20/06/2023 peuvent être observées sur le graphique 2.4.

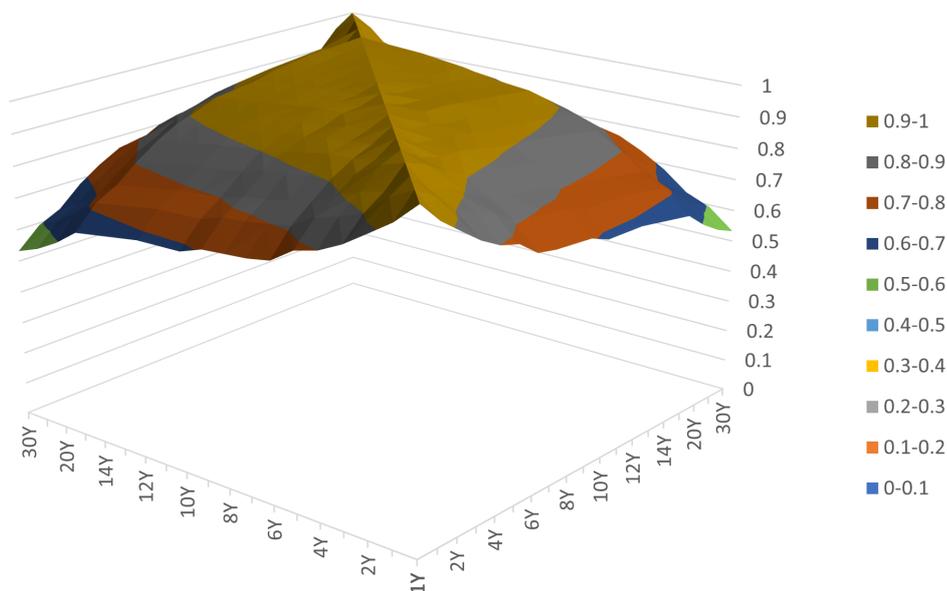


FIGURE 2.4 : Corrélation de volatilités implicites de *cap* EUR6M

Corrélation volatilité-volatilité ϑ : paramétrisation

Les données récupérées sont statistiquement très significatives, mais uniquement pour certaines maturités bien précises. Les produits en question sont très liquides, mais ne constituent pas pour autant un ensemble continu de valeurs. Il s'agit alors d'étendre ces valeurs.

Des fonctions sont alors testées pour paramétrer les corrélations obtenues. La fonction théorique utilisée remplissant le mieux ce rôle est celle de Rebonato (équation (2.8)), qui donne néanmoins lieu à une recherche d'amélioration. Au finale la fonction

$$k(x) = e.(a + (1 - a).(b.e^{-cx} + (1 - b).d.x)) + (1 - e).(f.x + g), \quad (2.32)$$

est choisie comme légère extension de la fonction de Rebonato pour la paramétrisation. Les graphiques 2.5 et 2.6 donnent un exemple de résultats de paramétrisation pour une maturité de 1 an et 5 ans respectivement. En abscisse, figure la distance positive entre les différentes *forwards*, en ordonnée est affichée la corrélation sans unité, et en bleu est tracée la corrélation obtenue à l'étape précédente. Autrement dit le tracé bleu est la corrélation $\vartheta_{k,l}$ pour $l \geq k$ où k vaut 1 an (respectivement 5 ans), avec en abscisse $T_{l-1} - T_{k-1}$. En orange, est affiché le résultat de paramétrisation avec une fonction de Rebonato, et en gris une paramétrisation avec la fonction introduite dans l'équation (2.32). Sur le graphique 2.6, il est remarqué que la fonction de Rebonato approxime par une droite tandis que l'autre fonction capture une différence de caractère pour une distance très faible. Cela implique qu'une distinction est établie entre les corrélations à court terme et à long terme.

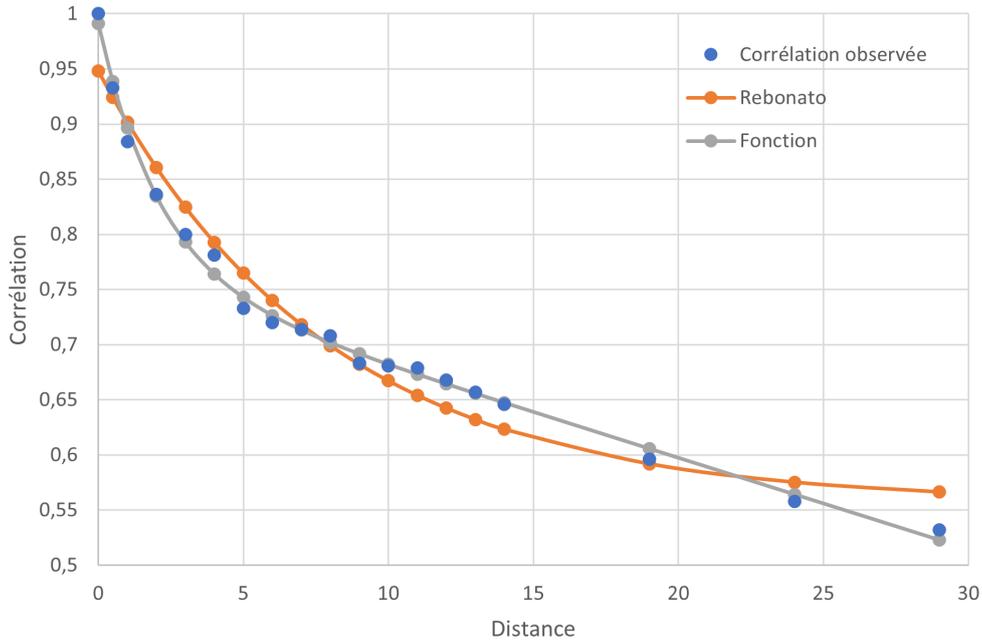


FIGURE 2.5 : Corrélation pour une maturité de 1 an

Les 6 paramètres de la fonctions sont calibrés* sur chacune des maturités disponibles (dans la limite où les dernières maturités n'ayant plus de données disponibles ne sont pas utilisées), et un comportement temporel leur est ensuite attribué suivant

$$a(x) = \alpha + \gamma \cdot e^{-\beta \cdot x},$$

où x représente l'augmentation de la différence entre les deux maturités de la corrélations (*i.e.* $l - k$ pour $l \geq k$). Pour $x = 0$, il s'agit d'une corrélation de 1 et plus la valeur de x est élevée, plus les maturités représentées sont éloignées. A titre d'exemple les graphiques 2.7 et 2.8 représente les paramètres a et f en fonction de x . En abscisse figure la différence de maturité en années et en ordonnée la valeur du paramètre concerné avec en bleu le paramètre observé après calibration (de la fonction introduite dans l'équation (2.32)) et en orange sa paramétrisation.

Ce comportement démontre des limites claires et une évolution relativement stable, ce qui assure que le comportement de la matrice de corrélation ne devrait pas varier trop vite, et que la

*Par une minimisation de l'écart quadratique sur les données significatives récupérées

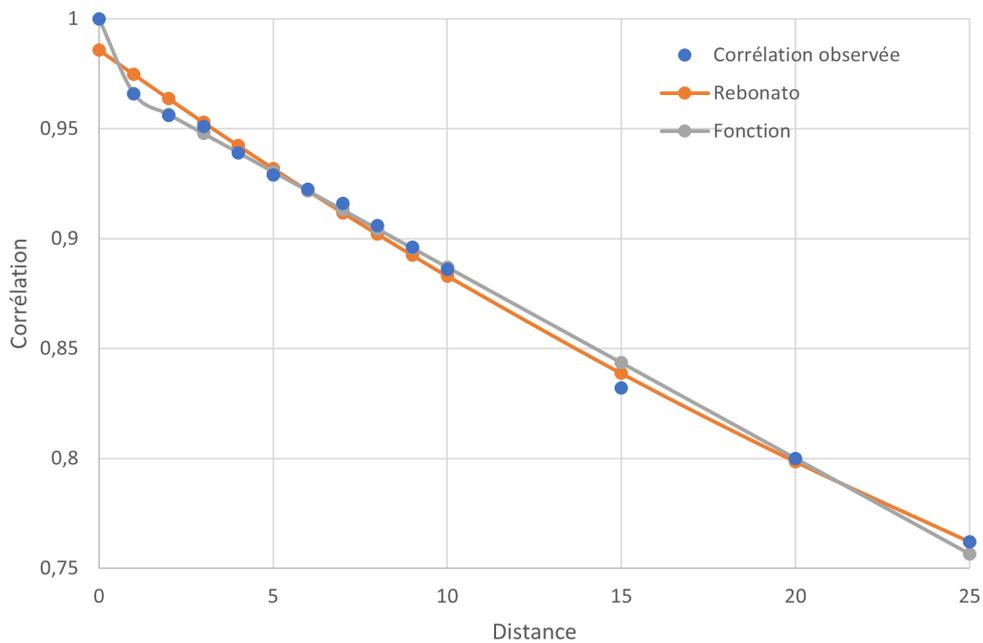


FIGURE 2.6 : Corrélation pour une maturité de 5 ans

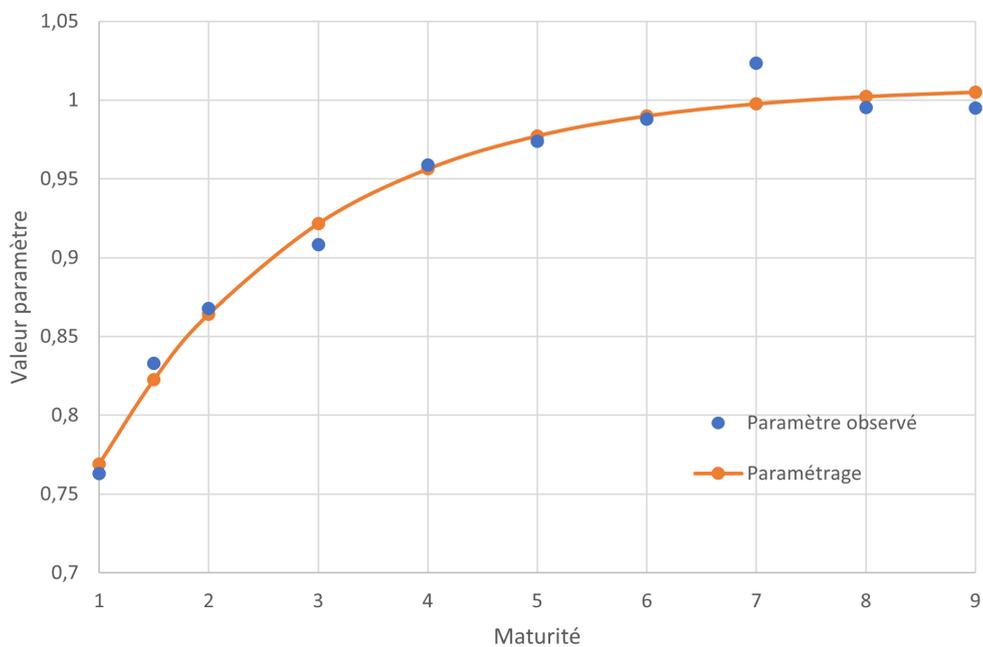


FIGURE 2.7 : Paramétrisation du paramètre a

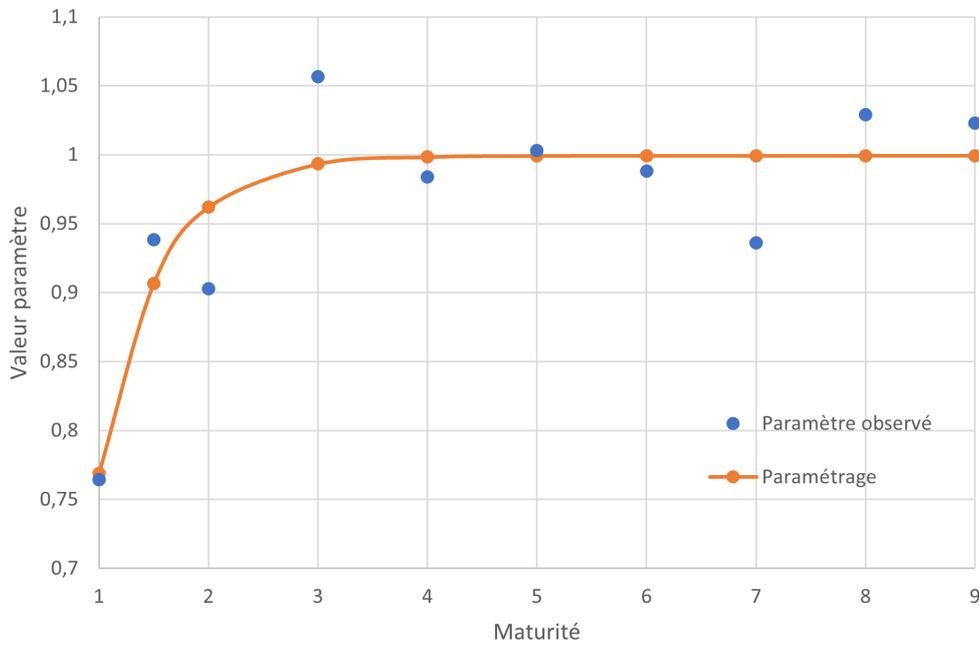
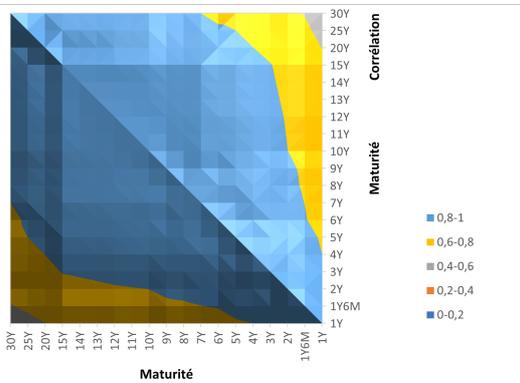
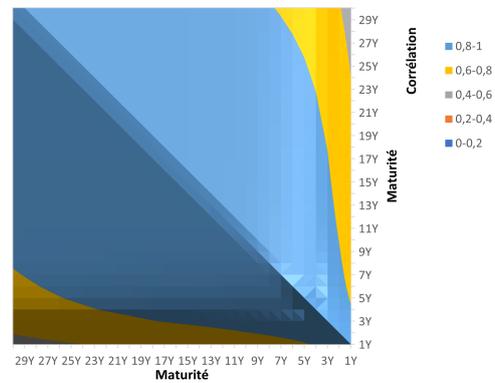


FIGURE 2.8 : Paramétrisation du paramètre f

paramétrisation choisie n'est pas trop ambitieuse. L'intérêt d'une telle approche est que cela prend en compte la double dépendance de la corrélation. Elle dépend globalement de la distance entre les maturités, mais aussi des maturités effectives considérées. Le résultat finale peut être observé sur les graphiques 2.9a et 2.9b représentant respectivement la corrélation avant et après paramétrisation. Il peut alors y être observé une structure très lisse, et une variation de la pente en fonction de la maturité considérée traduisant la double dépendance temporelle discutée dans cette sous-partie.



(a) Corrélation de la figure 2.4



(b) Corrélation paramétrisée

FIGURE 2.9 : Résultat de la paramétrisation de la corrélation *volatility-volatility*

2.5.3 Considération du biais de la source de calibration

Il a été observé dans §2.4.2 que le LMM-SABR est un modèle qui peut se voir comme un ensemble de N modèles de *forwards* et que sa calibration consiste en outre de la construction d'une matrice de corrélation, à calibrer ces N modèles*. Il a été de même abordé dans §2.3.2 que ces *forwards* sont calibrés sur des *caplets*. Le choix de cette source de calibration est objectivement bon, car ce sont des objets simples et liquides, représentant donc les taux sous-jacents au plus proche.

À propos du LMM+, il a été détaillé dans §2.2.2, qu'à la différence du LMM-SABR, il se calibre sur des *swaptions*. D'un point de vue financier, la raison de cette différence est en grande partie due à l'inexistence de formule fermée approchée ou non pour la valorisation de *caplets* sous ce modèle. En effet, la seule calibration sur *caplets* évoquée par JOSHI et REBONATO (2003) nécessite l'utilisation d'une approche de Monte-Carlo. C'est-à-dire que le prix du *caplet* est évalué par Monte-Carlo et que la fonction objectif de la calibration prend ce prix en entrée pour optimiser les paramètres du modèle. Cela amène donc à une complexité algorithmique inacceptable, les simulations de Monte-Carlo devant être répétées à chaque pas de l'optimisation. Le fait de calibrer sur *swaptions* peut dans un tel contexte être vu comme un défaut.

Dans le cadre réglementaire de l'assurance, une telle affirmation doit être nuancée. Au niveau de l'orientation 57 de EIOPA (2022), il peut être lu que :

”Les entreprises d'assurance et de réassurance devraient veiller à ce que le processus de calibrage d'un GSE utilisé pour une valorisation cohérente avec le marché est basé sur des données provenant de marchés financiers profonds, liquides et transparents, tels que définis au premier article des mesures d'exécution, et reflétant les conditions actuelles du marché. Si cela n'est pas possible, les entreprises devraient utiliser d'autres prix de marché en accordant une importance particulière aux distorsions possibles et en veillant à ce que les ajustements pour surmonter ces distorsions soient réalisés de manière réfléchie, objective et fiable.”

et que

”Les entreprises d'assurance et de réassurance devraient être en mesure de démontrer que le choix des instruments financiers utilisés dans le processus de calibrage est pertinent compte tenu des caractéristiques des engagements d'assurance ou de réassurance (par exemple, options et garanties financières incorporées).”

Une telle formulation ne donne pas de réponse précise à la question de la source idéale de calibration en assurance, mais fournit des éléments de réponse. À propos du deuxième point, la conclusion peut-être que la calibration sur *swaptions* liquides[†] est plus adaptée car cela représente un échange de flux en phase avec les engagements des assureurs. En suivant cette logique, une calibration sur *swaptions* peut être effectuée pour le LMM-SABR et est discutée en annexe A.3, permettant d'unifier les sources de calibration.

D'un autre côté, la lecture du premier point de l'orientation 57 de EIOPA (2022), fait penser à la perte rapide de liquidité des *swaptions* en dehors de la monnaie. Or, calibrer sur le cube de *swaptions* perd beaucoup de sa signification s'il est approximé uniquement par la surface *ATM*. À ce sujet, BLOOMBERG (2021) évoque (p. 21) ”[qu']il est raisonnable de modéliser les *smiles swaptions* en se basant sur les *smiles caplets* avec expirations correspondantes” dans le cas où la liquidité des *swaptions* est remise en cause. Ainsi, une calibration sur *swaptions* est dans tous les cas partiellement sur *caplets*. D'un point de vue théorique, c'est l'idée que la source d'aléas est la même pour ces deux objets : les taux *forwards*. Avec un tel argument la source de calibration a assez peu d'importance

* puis à calibrer cet ensemble pour donner une cohérence à la structure des taux

† À savoir des *swaptions ATM* de *tenor* pas trop élevé

D'un point de vue pratique, la conclusion est par contre qu'il faudrait calibrer sur les deux sources en question, leur liquidité étant complémentaire*. Sauf ce n'est pas envisageable avec le LMM+, à cause des problèmes théoriques évoqués pour la calibrations sur *caplets*. C'est par contre possible avec le LMM-SABR étant donné la calibration sur *swaption* évoqué plus haut. REBONATO et al. (2009) donne dans le chapitre 6 (résumé en annexe §A.3) une expression de paramètres $(\alpha_{m,n}, \beta_{m,n}, \rho_{m,n}, \nu_{m,n})$ associé à un taux *swap* $S_{m,n}$ en fonction de paramètres $(\alpha_k, \beta_k, \rho_k, \nu_k)_{m < k \leq n}$ associé à un ensemble de taux *forward* $(F_k)_{m < k \leq n}$. Ainsi, l'ensemble de ces paramètres peuvent être calibrés sur leur source associée respective, et l'expression entre ces paramètres peut être utilisée comme levier de contrôle en fonction de la liquidité des différents instruments.

En pratique, la calibration sur *swaptions* du LMM-SABR représente une augmentation substantielle de complexité au modèle, ce qui peut paraître contre-productif. C'est-à-dire qu'un des avantages du LMM-SABR par rapport au LMM+ est sa simplicité, couplée au fait qu'il peut être calibré sur *caplets*. Face à de telles considérations, il a été décidé dans cette étude de se contenter d'implémenter uniquement la partie calibration[†] permettant d'observer des résultats théoriques démontrant la capacité du modèle à se calibrer sur le cube *swaptions*. Pour le reste, la diffusion des taux avec le LMM-SABR reste avec une calibration sur *caplets*. La différence de source de calibration est responsable d'un biais dans la diffusion des *forwards*, qui induit une limitation dans la capacité de cette étude à comparer les deux modèles.

Comparaison théorique

La remarque précédente du §2.5.3 met en lumière qu'une comparaison telle quelle de la qualité de reproduction d'un *smile* est nécessairement biaisée. L'idée est donc ici de comparer la capacité théoriques de calibration d'un LMM-SABR sur un cube de *swaption* par rapport au LMM+. Il s'agit donc ici d'exploiter la remarque de l'annexe §A.3, de procéder à une calibration sur *swaptions* pour les deux modèles et de comparer uniquement les résultats théorique une fois la calibration effectuée. Une telle comparaison n'est pas aussi intéressante qu'une comparaison de *repricing*, mais a l'avantage d'être sans biais. Les graphiques 2.10, 2.11 et 2.12 représentent cette comparaison pour un *tenor* de 1 an, 5 ans et 10 ans à l'*ATM*. Les abscisses représentent la maturité en années et les ordonnées la volatilité implicite en points de base.

Les résultats des graphiques 2.10, 2.11 et 2.12 représentent un fort avantage de la calibration du LMM-SABR par rapport au LMM+, en particulier pour le *tenor* 1 an. Même si de tels résultats sont intéressants il faut garder en tête qu'ils présument que les problèmes suivants ont été réglés :

- La combinaison de la courbe EIOPA et des volatilités de marché a un impact contrôlé (cf. discussion du §2),
- Les conditions nécessaires de la matrice de corrélation du LMM-SABR ne posent plus de problème (cf. discussion du §3.3.2),
- La calibration sur *swaptions* est maîtrisée et optimisée (cf. §A.3),

ce qui n'est pas le cas dans cette présente étude. À la lumière de l'ensemble de cette sous-section, il est admis que la disparité des sources de calibration n'engendre pas un biais excessif dans la comparaison des modèles. Pour être exhaustif, un tel sujet mériterait néanmoins d'être approfondi dans d'éventuelles recherches futures.

*Les *caplets OTM* (vers la gauche) sont liquides ainsi que les *floorlets OTM* vers la droite et que les *swaptions ATM*

[†]C'est le lien entre les paramètres SABR-*swaptions* et ceux des *forwards* qui est subtil et pas la partie calibration

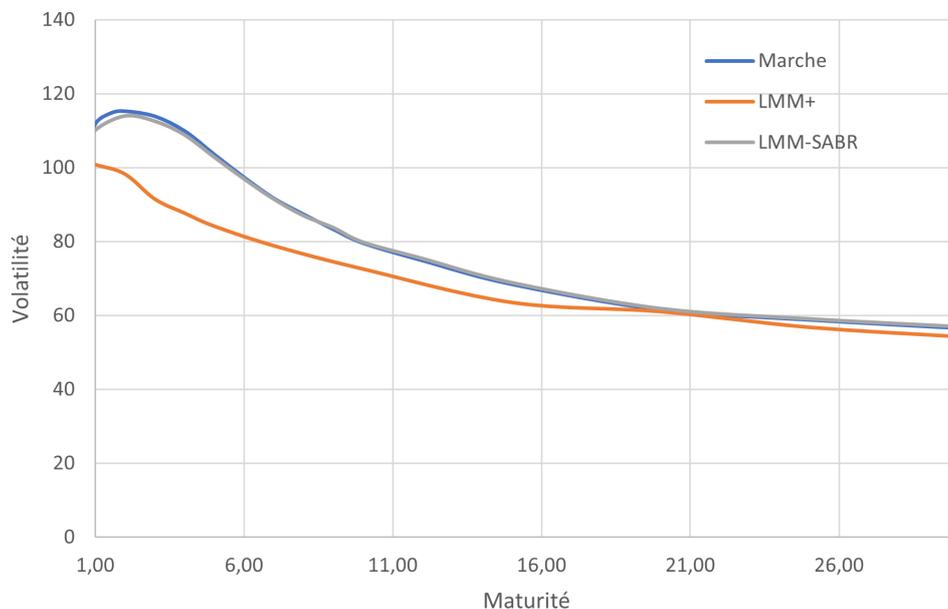


FIGURE 2.10 : Comparaison théorique de calibrations entre LMM+ et SABR pour *tenor* 1 an

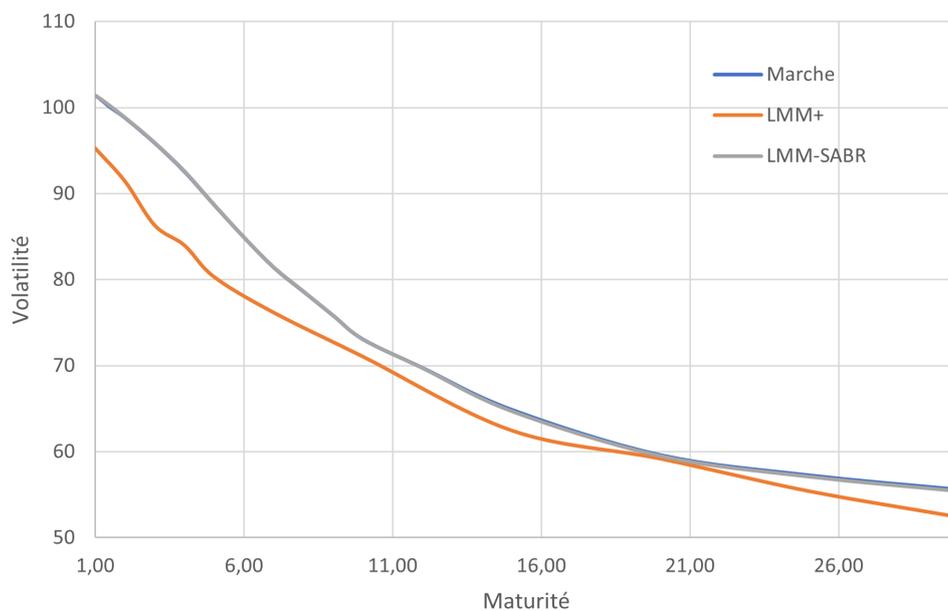


FIGURE 2.11 : Comparaison théorique de calibrations entre LMM+ et SABR pour *tenor* 5 ans

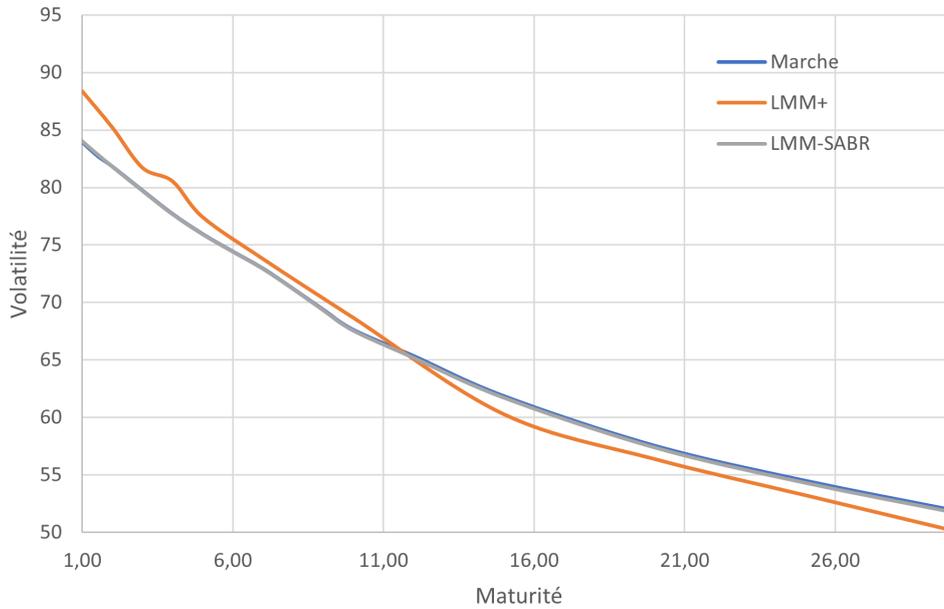


FIGURE 2.12 : Comparaison théorique de calibrations entre LMM+ et SABR pour *tenor* 10 ans

2.6 Validation du modèle

L'implémentation du LMM+ vient d'études antérieures (de VANDIÈRE (2021) et VIALARD (2022)), sa validation n'est donc pas étudiée ici. Cette section se concentre sur la validation de l'implémentation du SABR et du LMM-SABR. La sous-section 2.6.3 présente enfin une comparaison succincte de l'utilisation pratique des différents modèles.

2.6.1 Comportement martingale

La vérification du comportement risque-neutre consiste à s'assurer que l'actif simulé a bien le comportement d'un actif de référence comme présenté dans §1.4.7. L'étude se fait ici sur des *forwards* et sous mesure autre que la mesure risque-neutre \mathbb{Q} , le test est donc légèrement différent.

Comportement martingale du SABR

Le SABR consiste à diffuser un *forward* sous \mathbb{Q}^{T_k} . Le comportement attendu est donc tel que $F_k(T_{k-1}) \approx F_k(0)$. Pour ce modèle, les différents *forwards* peuvent être simulés sans continuité entre les maturités, il est donc décidé de prendre les *forwards* les plus significatifs*. Les détails de la simulation sont précisés dans le tableau 2.1.

Le résultat de ce test peut être observé sur le graphique 2.13, avec en abscisse les maturités en années des différents *forwards*, en bleu les taux *forwards spots* $F_k(0)$ et en orange les taux *forwards* diffusés à maturité $F_k(T_{k-1})$. Une courbe grise et jaune ont été ajoutées dans le but de donner un ordre de grandeur de l'erreur de Monte-Carlo. Mais il faut remarquer que cette dernière se base sur un estimateur de moyenne et un estimateur de variance avec un nombre de simulation basse, il est

**i.e.* les plus liquides

PAS DE SIMULATION	$1e^{-2}$ année															
DATE DES DONNÉES DE MARCHÉ	20/06/2023															
NOMBRE DE SIMULATIONS	1000															
<i>Tenor</i>	6 mois															
MESURE	Q^{T_k}															
MATURITÉ EN ANNÉE	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30

TABLE 2.1 : Données de simulation pour le test de martingalité général

donc ici acceptable de voir la valeur cible (la courbe bleue) sortir de cet intervalle.

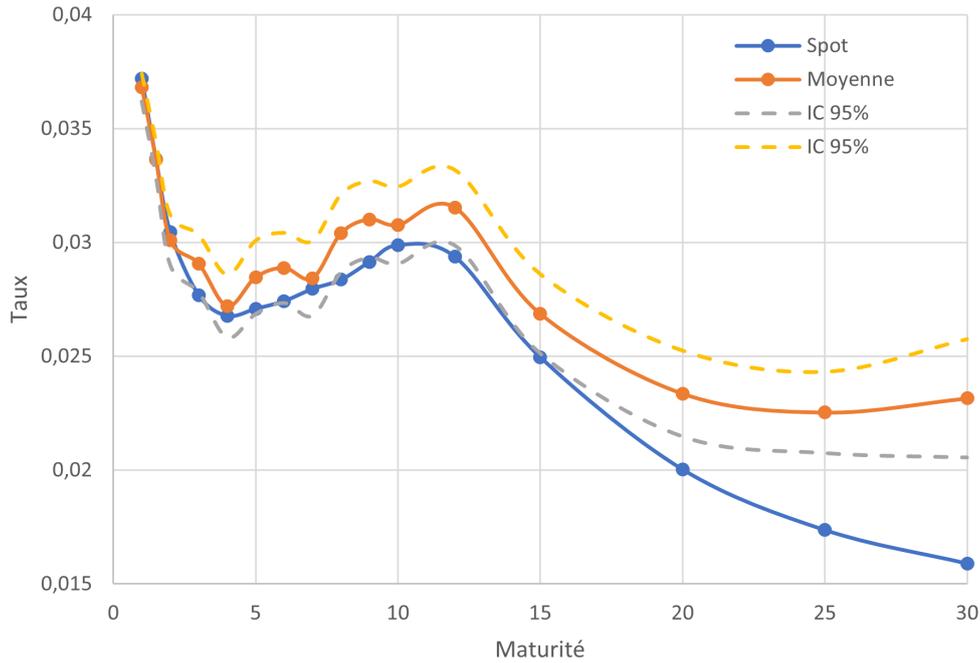


FIGURE 2.13 : Test de martingalité général pour le SABR

Pour plus de visibilité, un graphique d'erreur a été ajouté (figure 2.14), où l'ordonnée représente la différence absolue entre les deux courbes. Il est remarqué une augmentation de l'erreur avec la maturité, ce qui n'est pas surprenant étant donné que c'est un schéma d'Euler qui est utilisé pour approximer la diffusion. L'erreur de ce schéma (et plus largement de toute approximation) croît en fonction de la taille du chemin approximé (BALLY et TALAY, 1996). À cela, s'ajoute un comportement aléatoire dû à l'utilisation d'une approche Monte-Carlo, faisant osciller la courbe orange. L'erreur globale semble néanmoins raisonnable et en phase avec les attentes d'une simulation de Monte-Carlo (*i.e.* de l'ordre de $1e^{-\sqrt{3}}$ pour $1e^3$ simulations).

Pour s'assurer du comportement risque-neutre et valider que l'augmentation de l'erreur est bien due (en ce qui concerne l'erreur Monte-Carlo) à un besoin en simulations plus grand, il est fait un autre test dont les spécificités sont résumées dans le tableau 2.2. Le résultat du test peut être observé sur le graphique 2.15 avec en abscisse le nombre de simulation en échelle logarithmique.

D'après la remarque du graphique 2.13 sur le fait que la valeur cible sortait de l'intervalle, il peut être remarqué que ce n'est pratiquement plus le cas ici à part sur la toute fin lorsque l'intervalle de confiance est très petit. La maturité de 20 ans est choisie car elle démontre un début d'erreur

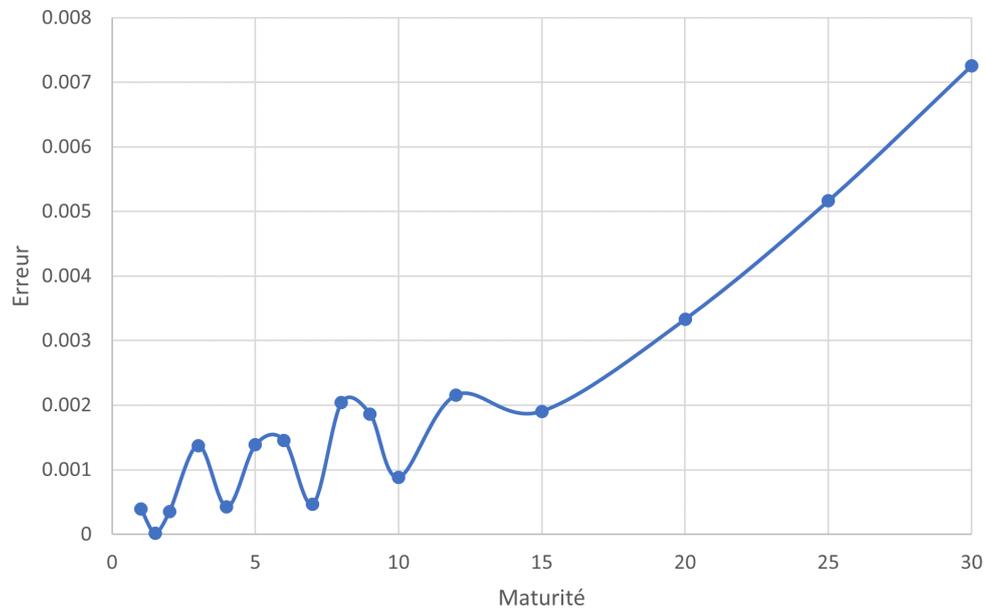
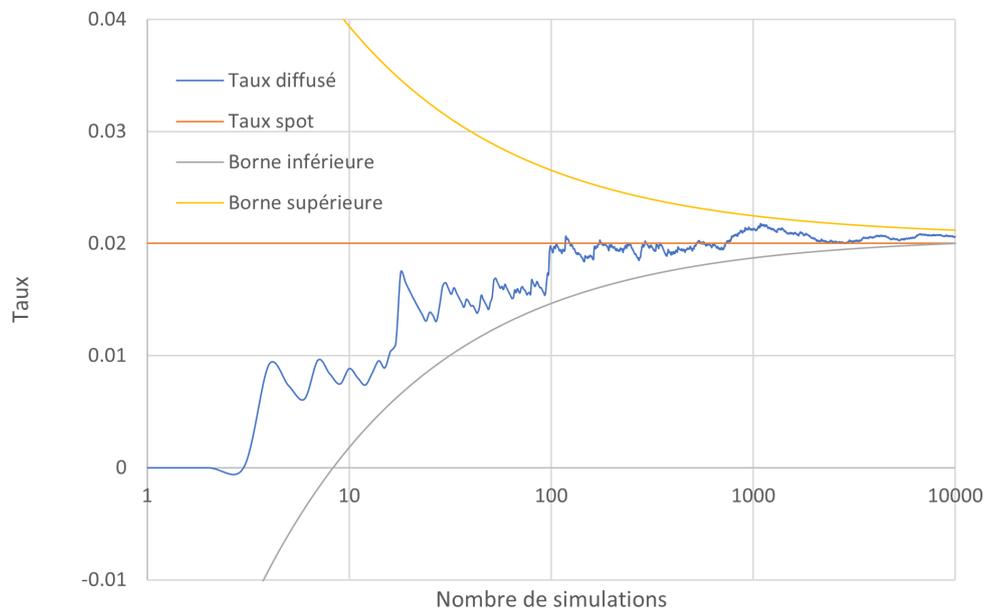


FIGURE 2.14 : Erreur de martingalité pour le SABR

FIGURE 2.15 : Test de martingalité pour un seul *forward* avec le SABR

PAS DE SIMULATION	$1e^{-2}$ année
DATE DES DONNÉES DE MARCHÉ	20/06/2023
NOMBRE DE SIMULATIONS	[1,1e4]
<i>Tenor</i>	6 mois
MESURE	\mathbb{Q}^{T_k}
MATURITÉ EN ANNÉE	20 ans

TABLE 2.2 : Données de simulation pour le test de martingalité spécifique

significatif sur le graphique 2.13, qui se voit donc atténuée avec une augmentation des simulations. Le résultat est satisfaisant* et permet d'affirmer que l'erreur de schéma d'Euler est négligeable pour une telle maturité. Ce comportement étant observé sur toutes les maturités disponibles, cela confirme le comportement risque-neutre des *forwards*.

Comportement risque-neutre du LMM-SABR

La diffusion du LMM-SABR est plus lourde que celle du SABR, et son comportement n'est donc pas le même. C'est une structure des taux qui est diffusée sous \mathbb{Q}^{T_N} , ce qui induit que les taux ne sont pas risque neutre (à l'exception du dernier). De manière exacte, le schéma d'Euler pour le LMM-SABR pour un $k < N$ donne

$$F_k(t + dt) = F_k(t) + \alpha_k(t)F_k(t)^{\beta_k} \left(dW_{F_k}(t) - \sum_{i=k+1}^N \frac{\varpi_{k,i}\tau_i\alpha_i(t)F_i(t)^{\beta_i}}{1 + \tau_i F_i(t)} dt \right),$$

qui couplé avec des considérations numériques telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} |\varpi_{k,l}| < 1, \\ \beta_k < 1, \\ F_k(t) \approx 10^{-2}, \\ \alpha_k(t) \approx 10^{-2}, \\ \tau_k = 0.5, \\ dt = 10^{-2}, \end{array} \right.$$

donne l'intuition que le terme de *drift* ne devrait pas avoir trop d'impact. Le même test que précédemment est donc mis en place, sauf qu'une diffusion avec un *drift* forcé à 0 est présentée pour discuter l'intuition précédente.

Les paramètres précis du test peuvent être retrouvés dans le tableau 2.3 avec les résultats dans le graphique 2.16. Les conventions utilisées sont les même que pour le graphique 2.13, à la différence de la courbe grise représentant la diffusion sans *drift*.

L'erreur semble croissante en fonction de la maturité de même que pour le SABR, mais d'une manière nettement plus rapide. Une explication de ce phénomène est que le LMM-SABR a un caractère aléatoire plus marqué. Car même si le nombre de browniens est le même, la matrice de corrélation est bien différente (de $4N$ coefficients non-nuls pour le SABR à $4N^2$ pour le LMM-SABR), ce qui induit un nombre de simulations plus important pour atteindre la stabilité requise par une approche Monte-Carlo. Un ensemble de tests spécifiques avec une seule maturité est une fois de plus nécessaire

*Diminuer encore l'erreur demanderait une diminution du pas et une augmentation supplémentaires des simulations, ce qui deviendrait problématique algorithmiquement parlant

PAS DE SIMULATION	$1e^{-2}$ année
DATE DES DONNÉES DE MARCHÉ	20/06/2023
NOMBRE DE SIMULATIONS	1000
<i>Tenor</i>	6 mois
MESURE	$\mathbb{Q}^{T_{9Y6M}}$
MATURITÉ EN ANNÉE	[6 mois ; 9 ans et 6 mois]

TABLE 2.3 : Données de simulation pour le test de martingalité général du LMM-SABR

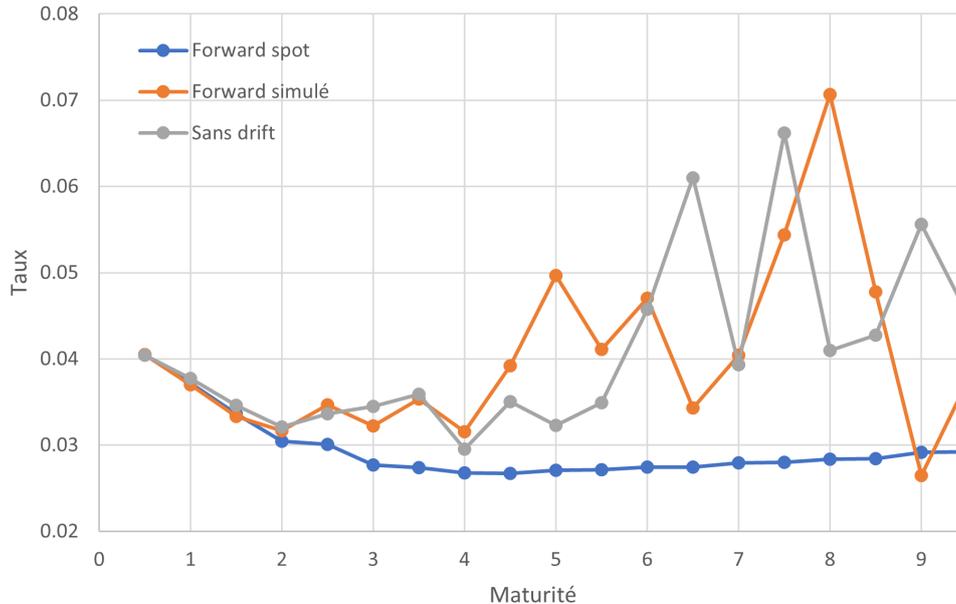


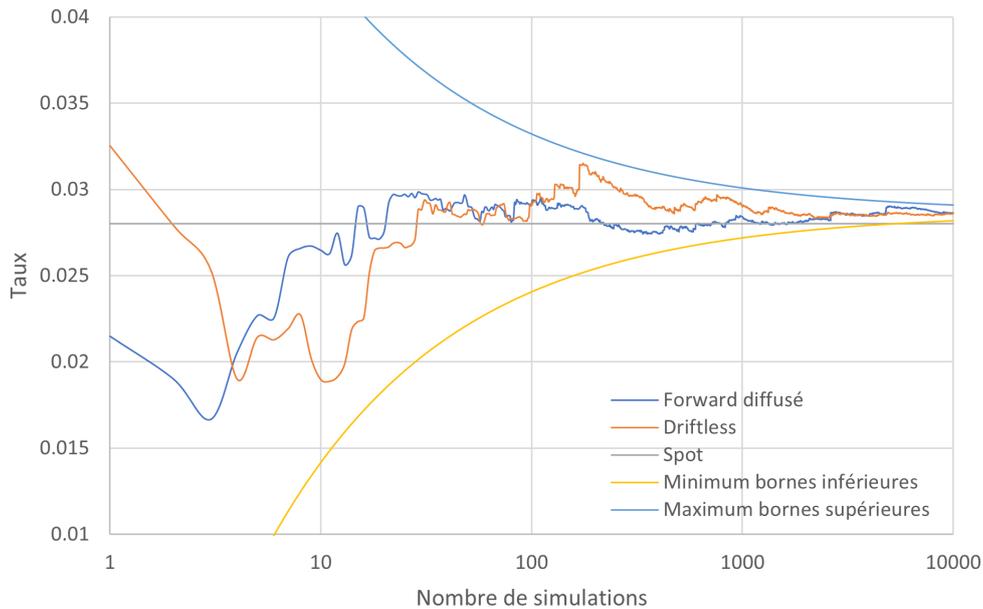
FIGURE 2.16 : Test de martingalité général pour le LMMSABR

dans le but de confirmer cette hypothèse. Dans tous les cas, le terme de *drift* semble ici confondu avec l'erreur de Monte-Carlo.

Les paramètres du test pour un seul *forward* sont résumés dans le tableau 2.4, le résultat dans le graphique 2.17 avec en bleu la simulation classique pour le LMM-SABR tel que dans le graphique 2.15, en gris le taux *spot* attendu et en orange une simulation sans *drift*. Les abscisses représentent le nombre de simulations en échelle logarithmique et les ordonnées la moyenne des simulations. L'intervalle de confiance est calculé pour les deux processus avec et sans *drift*, et seul (par soucis de lisibilité) l'union de ces derniers est représenté sur le graphique 2.17.

PAS DE SIMULATION	$1e^{-2}$ année
DATE DES DONNÉES DE MARCHÉ	20/06/2023
NOMBRE DE SIMULATIONS	$1e3-1e4$
<i>Tenor</i>	6 mois
MESURE	$\mathbb{Q}^{T_{8Y}}$
MATURITÉ EN ANNÉE	8 ans

TABLE 2.4 : Données de simulation pour le test de martingalité spécifique

FIGURE 2.17 : Test de martingalité pour un seul *forward* avec le LMM-SABR

2.6.2 Cohérence avec le marché

Le test précédent semble confirmer le comportement risque-neutre des différents modèles. Le test de cohérence avec le marché fait référence à §1.4.7 et a pour but de confirmer que le lien entre la calibration et la diffusion est correct. Des tests unitaires plus spécifiques étant par ailleurs mis en place pour s'assurer de la bonne implémentation de la calibration dans le cas de formules comme l'équation (2.17).

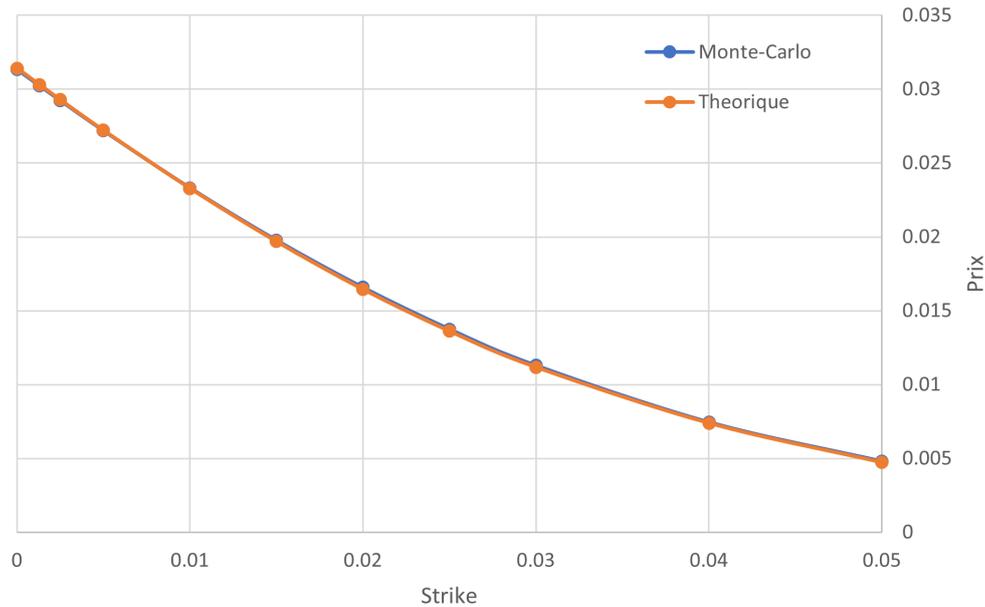
Les tests suivants consistent à calibrer les modèles sur des volatilités implicites, puis à diffuser les *forwards* selon un schéma d'Euler et donner une estimation du prix des objets financiers concernés par les volatilités implicites de calibration. Un prix théorique peut être déduit de la volatilité implicite (cf. A.2), qui est alors comparé au prix estimé par Monte-Carlo. Une bonne implémentation induit un écart faible entre ces deux prix.

Cohérence de la diffusion du SABR

Le test pour le SABR est direct, la volatilité implicite de Bachelier pour les *caplets* est donnée par la formule (2.17), les paramètres du SABR sont calibrés par rapport à cela et un prix Monte-Carlo en est déduit. Le détail complet de l'ensemble du test est donné dans le tableau 2.5. Étant donné que le but de ce test est d'assurer le bon fonctionnement de la diffusion, l'actualisation a été omise des deux côtés.

Sur le graphique 2.18 sont représentés les différents prix pour la maturité de 10 ans (jugée très représentative pour la suite). La courbe orange représente le prix théorique obtenu depuis la formule de Bachelier avec les volatilités implicites de marché et la courbe bleue est celle obtenue avec les prix Monte-Carlo après calibration sur ces mêmes volatilités implicites. Les abscisses représentent les *strikes* absolus et les ordonnées sont les prix en euros. Les deux courbes sont confondues, ce qui est un résultat satisfaisant.

Pas de simulation	$1e^{-2}$ année									
DATE DES DONNÉES DE MARCHÉ	20/06/2023									
NOMBRE DE SIMULATIONS	$1e4$									
<i>Tenor</i>	6 mois									
ACTUALISATION	Aucune									
MESURE	Q^{T_k}									
PRODUIT	<i>Caplet</i>									
MATURITÉS CONSIDÉRÉES EN ANNÉE	1	1.5	2	3	10	12	

TABLE 2.5 : Données de simulation pour le test de *repricing* avec le SABRFIGURE 2.18 : Test de *repricing* avec le SABR pour une maturité de 10 ans

Au niveau de l'erreur, seul le fait qu'elle soit faible compte réellement même si un caractère aléatoire supplémentaire est idéal. Le graphique 2.19 représente l'ensemble des erreurs absolues pour différentes maturités précisées en légende. Le résultat est plutôt rassurant, sauf pour la maturité 1 an et 6 mois qui présente une tendance relativement élevée*. Cela peut s'expliquer par le caractère particulier de cette maturité. La volatilité implicite du *caplet* de cette maturité est présentée avec un *forward-6-mois* comme sous-jacent, alors que c'est en pratique un *forward-3-mois*. Ce n'est pas le seul *caplet* dans ce cas, mais c'est le dernier et le moins liquide.

Ce test assure la cohérence de la diffusion du SABR, sans pour autant valider complètement le modèle. Pour se faire, il faut se confronter aux prix du marché. Il n'est alors pas attendu une réplique parfaite, mais plutôt un ordre de grandeur et un comportement comparable. Les *caplets* n'étant pas cotés sur le marché, ce test se fait sur des *caps* dont la fonction de valorisation a été testé en partant de la diffusion validée précédemment. Le test précis est détaillé dans le tableau 2.6, avec un résultat observable sur 2.20. Un graphique d'erreur est ensuite disponible, c'est le graphique 2.21.

Les deux graphiques 2.20 et 2.21 démontre une comparaison très similaire avec le prix de marché, surtout étant donné que l'erreur présentée pour les *caplet* s'accumule au niveau des *caps* étant donné

*Une tendance s'observe ici pour un *strike* faible où la valeur du *forward* a un impact

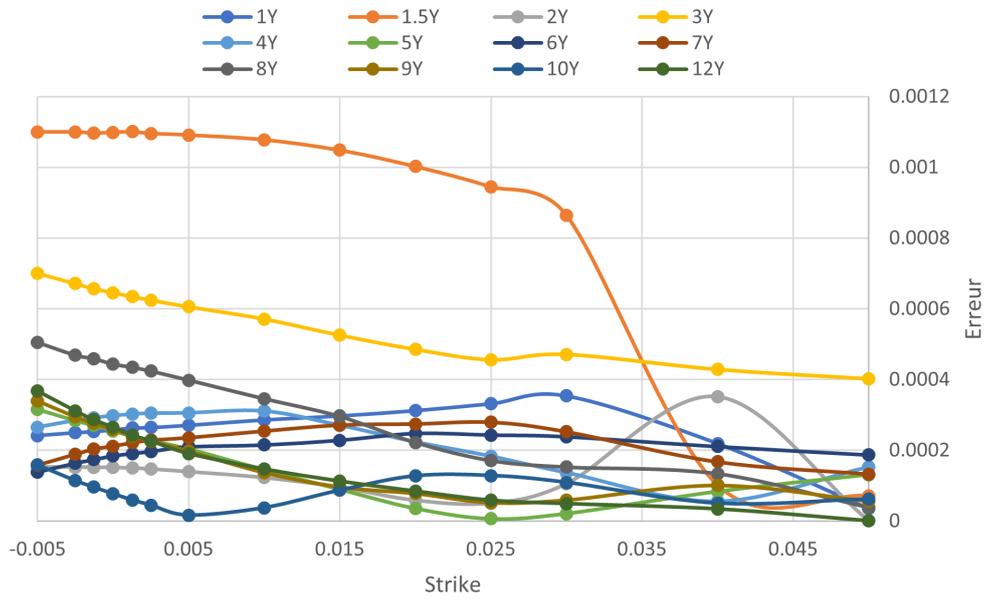


FIGURE 2.19 : Erreur du test de *repricing* avec le SABR

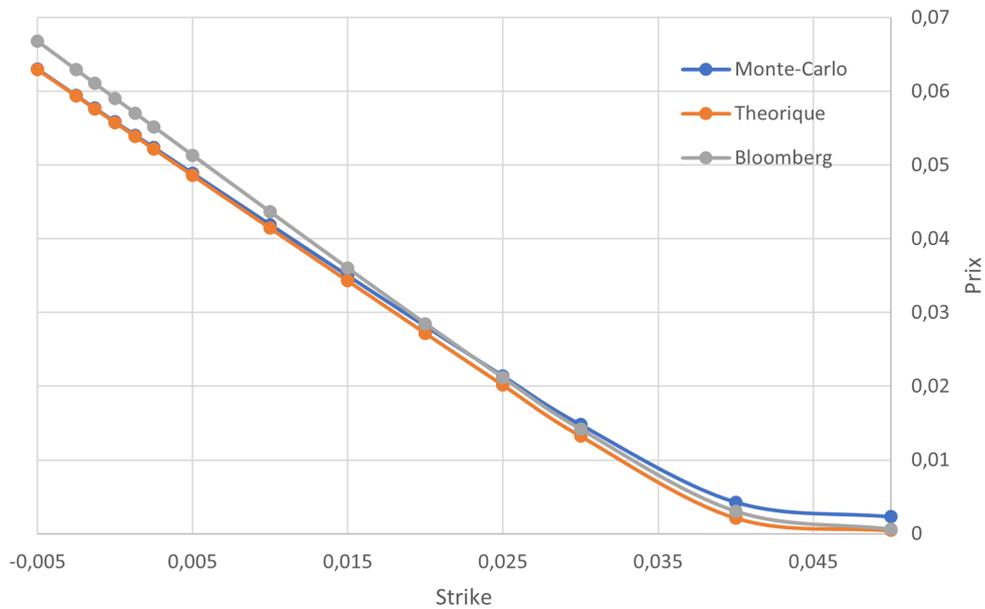
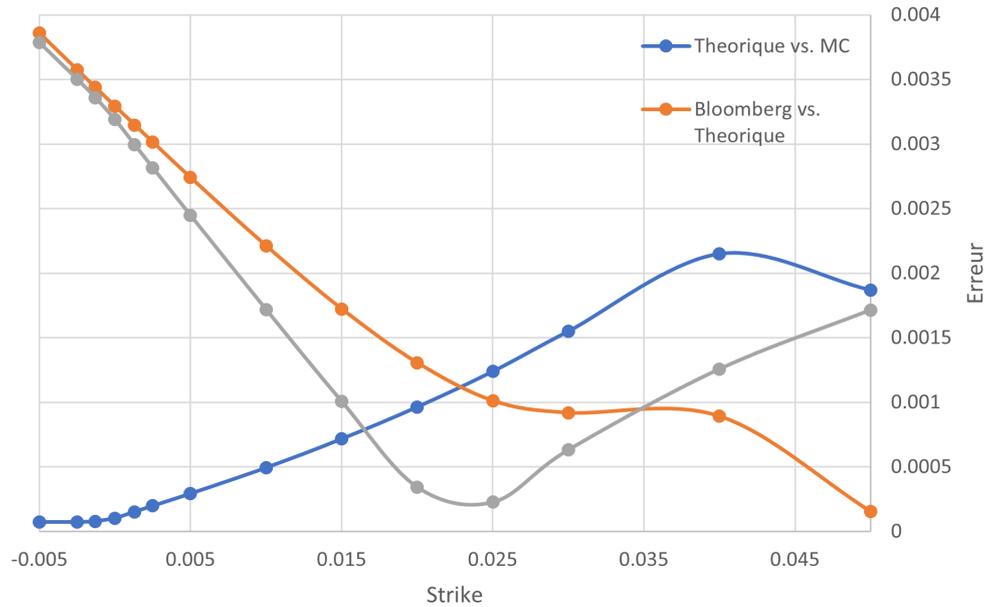


FIGURE 2.20 : Comparaison au marché pour un *cap* 1 an et 6 mois avec le SABR

Pas de simulation	$1e^{-2}$ année
DATE DES DONNÉES DE MARCHÉ	20/06/2023
NOMBRE DE SIMULATIONS	$1e4$
<i>Tenor</i>	6 mois
ACTUALISATION	EUROIS
MESURE	\mathbb{Q}^{T_k}
PRODUIT	<i>Cap</i>
EXPIRATION	1 an et 6 mois

TABLE 2.6 : Données de simulation pour le test de comparaison avec le marché

FIGURE 2.21 : Erreur pour un *cap* 1 an et 6 mois

que ces derniers ne sont que la sommes des premiers.

Cohérence de la diffusion du LMM-SABR

Comme indiqué dans la partie §2.6.1, il n'existe pas de test exact pour la vérification du LMM-SABR (d'où la nécessité d'être particulièrement minutieux pour la vérification du SABR), mais il est acceptable d'observer un comportement semblables entre ces derniers. Un test similaire à ce qui a été présenté pour le SABR est donc mis en place pour le *repricing* en gardant en mémoire que la tolérance d'écart est donc plus souple. Le détail du test peut être trouvé dans le tableau 2.7.

Le graphique 2.22 représente le détail pour une maturité de 5 ans. De même que précédemment, les erreurs absolues toute maturités confondues peuvent être observées sur le graphique 2.23.

Il peut être remarqué que les erreurs absolues restent relativement faibles, même si elles sont plus élevées qu'avec le SABR. De même, l'erreur pour la maturité 1 an et 6 mois reste particulièrement plus élevée que les autres. L'ensemble de ces tests sont concluants et assurent une bonne implémentation du LMM-SABR. D'autre part, toutes ces erreurs sont absolues, impliquant ainsi la nécessité d'ajouter une composante d'erreur matérielle à ces considérations.

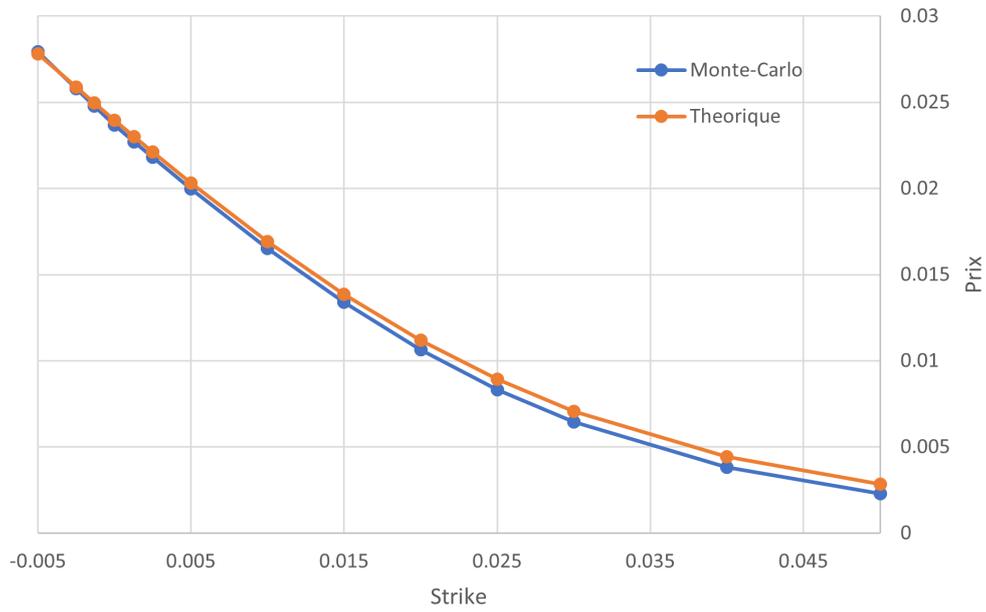


FIGURE 2.22 : Test de *repricing caplet* du LMM-SABR pour une maturité de 5 ans

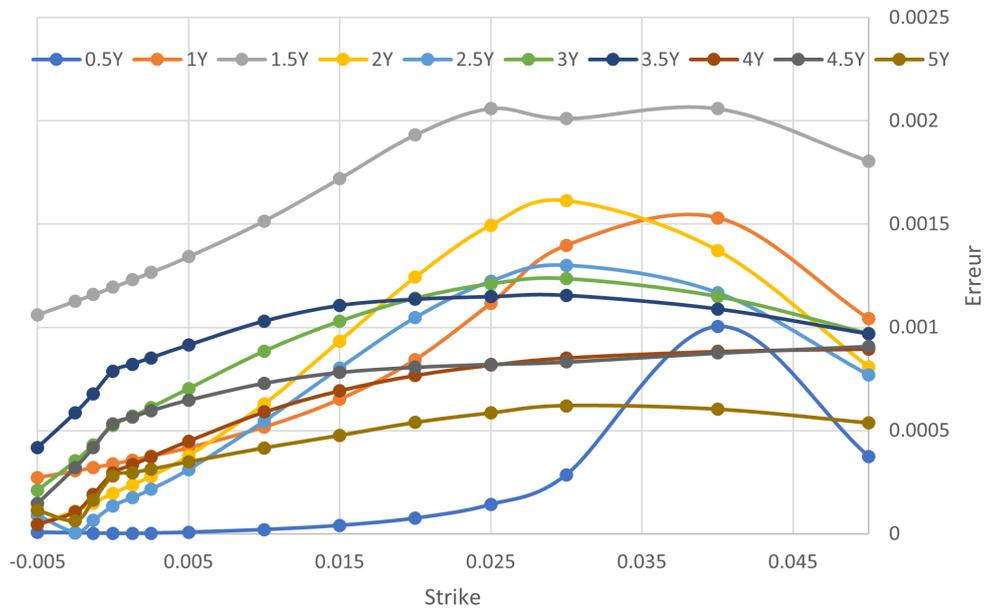
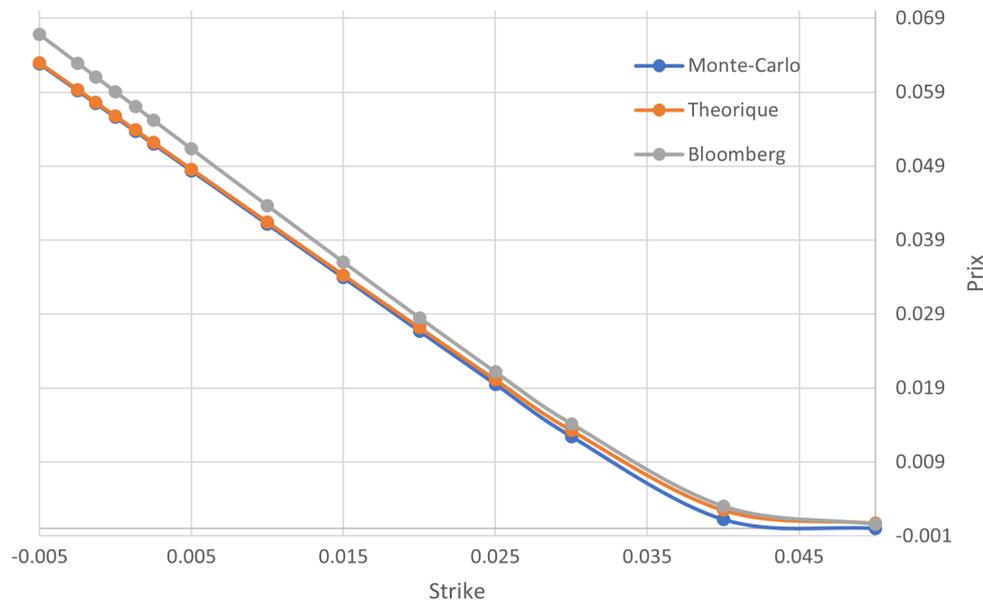


FIGURE 2.23 : Erreur du test de *repricing* avec le LMM-SABR

Pas de simulation	$1e^{-2}$ année									
DATE DES DONNÉES DE MARCHÉ	20/06/2023									
NOMBRE DE SIMULATIONS	1e4									
<i>Tenor</i>	6 mois									
ACTUALISATION	Aucune									
MESURE	$\mathbb{Q}^{T_{5Y}}$									
PRODUIT	<i>Caplet</i>									
MATURITÉ CONSIDÉRÉES EN ANNÉE	0.5	1	1.5	4.5	5	

TABLE 2.7 : Données de simulation pour le test de *repricing* avec le LMM-SABR

Une comparaison avec le marché est effectuée de même que pour le SABR dans le but d'assurer une fois encore la cohérence globale du modèle. Les détails du test sont rassemblés dans le tableau 2.6 (c'est le même que pour le SABR), et peuvent être observés sur le graphique 2.24, avec le graphique 2.21 qui représente spécifiquement l'erreur.

FIGURE 2.24 : Comparaison au marché pour un *cap* 1 an et 6 mois avec le LMM-SABR

Au niveau de la différence entre la théorie et le marché, un écart significatif est observé. Cela peut être dû au calibrage du SABR sous-jacent sub optimal (qui vient des choix de modélisation abordés dans §2.5.1). À propos de l'erreur entre théorie et pratique, elle est globalement égale à l'accumulation d'erreurs qui peut être observée sur les *caplets* constituant le *cap*. Et l'erreur entre pratique et marché peut être vue comme la somme de ces deux erreurs. Autrement dit, une erreur entre pratique et pratique optimale, puis une erreur entre pratique et théorique.

2.6.3 Comparaison pratique

Le chapitre suivant décrit en détail l'impact de l'utilisation du LMM-SABR par rapport au LMM+ du point de vue d'un assureur vie de type épargne. Les fondements théoriques nécessaires à une compréhension approfondie des modèles ont été exposés dans les sections précédentes. Il est alors

approprié de présenter les différences pratiques observées entre les modèles. Ces dernières sont résumées dans la table 2.8

	LMM+	LMM-SABR
CALIBRATION	- -	+++
VITESSE DE CONVERGENCE	++	- -
DIFFUSION	++	-
CONDITIONS D'UTILISATIONS	+	+++
CONTRÔLE	-	++

TABLE 2.8 : Comparaison entre LMM+ et LMM-SABR

D'un point de vue plus général, ce tableau souligne qu'il n'existe pas de modèle parfait. Le LMM-SABR semble certes présenter les avantages qui ont forgé sa réputation en finance, mais ceux-ci s'accompagnent de défis complexes. D'autre part, le LMM+ a fait l'objet de nombreuses recherches approfondies, le positionnant à un niveau quasi-optimal.

A propos de la vitesse de convergence

En observant le tableau 2.8, il peut être remarqué que la convergence, ainsi que la vitesse de diffusion du LMM-SABR sont significativement plus lentes que celle du LMM+. Cette lenteur de convergence représente un inconvénient notable en assurance, où les tables de scénarios dépassent rarement les 1000 simulations. En effet, cela semble être un chiffre un peu faible au vue du graphique 2.17. Il est néanmoins important de noter que les tests de validation du graphique 2.17 ont été effectués dans le but de fournir la vision la plus rigoureuse possible du point de vue financier, ce qui ne correspond pas nécessairement au cadre de simulation utilisé en assurance. De plus, ce graphique a été choisi délibérément pour illustrer une convergence progressive du modèle, ce qui ne reflète pas non plus la convergence de la structure des taux dans son ensemble. Ainsi, ce défaut ne pose pas de problème majeur pour la suite de l'étude, bien qu'il reste une préoccupation importante pour une utilisation intensive en assurance.

Un argument important à ce sujet a été abordé dans la section 2.2.1, où il est précisé qu'une réduction du nombre de browniens a été effectuée pour le LMM+ étudié. Cette réduction permet de passer de $N + 1$ browniens (soit 51 browniens dans le cadre d'une assurance avec un pas de 1 an) à seulement 3. La justification derrière cette réduction est qu'un nombre de 2 browniens est supposé suffisant pour expliquer la majorité de la variation des taux (cf. la remarque de BRIGO et MERCURIO (2006) pour les modèles à 1 facteur, page 139). Cette pratique a pour avantage majeur de considérablement diminuer l'effort algorithmique induit par le modèle.

Cette approche serait également pertinente pour le LMM-SABR, qui totalise $2N$ browniens de base, et est abordée par REBONATO et al. (2009) dans son chapitre 7. Cependant, une telle technique représente une sophistication significative du LMM-SABR et n'a donc pas été implémentée dans cette étude. Il est donc à noter un déséquilibre à ce niveau entre les deux modèles, ce qui a pour conséquence majeure une augmentation du coût algorithmique du LMM-SABR et est ainsi une source majeure de la lenteur de sa convergence.

Chapitre 3

Impact de l'utilisation du LMM-SABR en assurance

L'impact du choix entre le LMM+ et le LMM-SABR se traite ici sur deux plans. Le gain de simplicité en termes de calibration ayant déjà été évoqué au chapitre précédent, il reste à présenter l'avantage en termes d'interprétation et de souplesse que représente le LMM-SABR par rapport au LMM+. Enfin, il s'agit de s'intéresser à l'impact que l'utilisation d'un tel modèle peut avoir pour un assureur au sein de l'élaboration usuelle de ses bilans réglementaires. La date d'évaluation est fixée au 31/03/2022 sauf mention explicite contraire car c'est la première date d'inventaire qui a démontré une partie des impacts de la remontée des taux évoquée dans §1.1.2.

3.1 Accessibilité des paramètres

Cette section présente une étude empirique ayant pour objectif, d'une part, de démontrer que les variations des paramètres du LMM-SABR sont riches et directement liées à des mouvements spécifiques du *smile*, et d'autre part, de mettre en évidence la redondance des paramètres du LMM+. Plus généralement l'accessibilité d'un modèle est un vocabulaire subjectif faisant référence à la capacité des paramètres de ce modèle à être interprétable. C'est-à-dire qu'un paramètre a un sens, et que si ce dernier est clair, l'impact théorique de sa modification sur le *smile* doit être cohérent avec l'impact effectif observé. Une partie complémentaire de cette étude est disponible en annexe A.4.

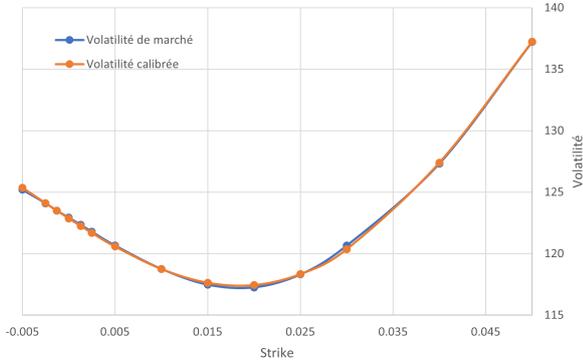
3.1.1 Accessibilité du LMM-SABR

La calibration du LMM-SABR a été abordée à la section 2.4.2, et il a été expliqué que la partie de cette calibration qui ancre le modèle dans la réalité du marché est la calibration des N SABR sous-jacents. En termes d'accessibilité, il y a équivalence entre étudier l'accessibilité d'un LMM-SABR et celle d'un SABR quelconque. Il peut être remarqué que l'impact présumé des 4 paramètres du SABR a déjà été évoquée au §1.4.8 en s'appuyant sur les propos de HAGAN et al. (2002).

Un *smile* d'étude

Le SABR se calibre sur des *caplets*. Une calibration sur des données de marché est donc effectuée et le *smile* le plus représentatif est choisi pour l'étude des paramètres. Les graphiques 3.1a et 3.1b

représentent respectivement le *smile* d'étude retenu et la valeur calibrée de ses 4 paramètres. Le sous-jacent des volatilités de marché est un taux *forward* 6 mois pour une maturité de 3 ans. Le graphique 3.1a représente spécifiquement la comparaison entre le *smile* calibré et le *smile* cible de marché avec en abscisse les *strikes* et en ordonnée la volatilité en points de base.



(a) *Smile* calibré

CARACTÉRISTIQUE	VALEUR
$\alpha \in \mathbb{R}^+$	0.0231
$\beta \in [0, 1]$	0.2446
$\rho \in [-1, 1]$	0.2446
$\nu \in \mathbb{R}^+$	0.3967
PRODUIT	<i>Caplet</i>
SOUS-JACENT	EUR6M
MATURITÉ	3 ANS

(b) Paramètres

FIGURE 3.1 : *Smile* d'étude pour le SABR

Paramètre α

Le paramètre α est le point de départ de la volatilité*, il est donc clair que pour un ensemble de browniens donnés, il a un impact à priori global sur l'ensemble du *smile* en se rappelant (cf. equation (2.13)) que

$$d\alpha(t) = \nu\alpha(t)dW_t \iff \alpha(t) = \alpha(0).e^{\nu.W_t - \frac{\nu^2}{2}.t},$$

ce qui explique assez intuitivement sa capacité à diriger le niveau du *smile* ("the overall height of the curve"). En termes de limitation, il est nécessaire qu'il reste positif et dans une moindre mesure, pas trop élevé (sans quoi la diffusion risque d'avoir un comportement explosif).

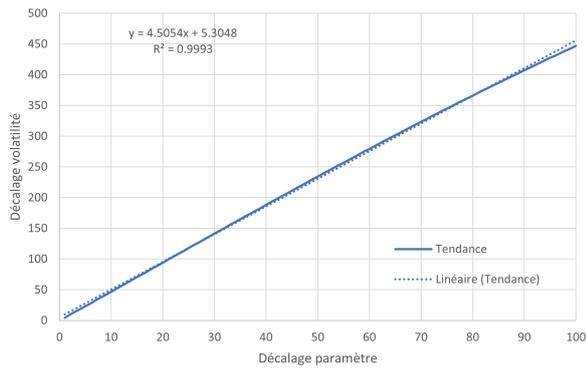
Schématiquement, cela fait penser à une expression linéaire de la variation de la volatilité qui s'exprimerait sous la forme

$$\tilde{\sigma}(\alpha + x) = \sigma(\alpha) + a.x + b,$$

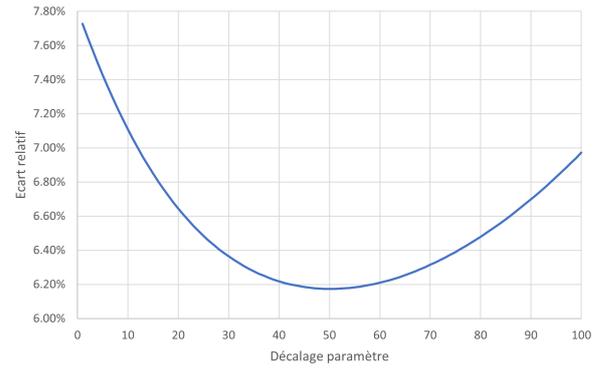
pour certaines constantes a et b . Sur le graphique 3.2a est représenté la variation moyenne du *smile* en fonction de la variation du paramètre α . La forme est clairement linéaire et confirme l'intuition des premiers graphiques. Une approximation de a et b pouvant alors être 0.45 et 5[†]. Le graphique 3.2b met quant à lui en avant l'écart relatif avec l'hypothèse linéaire. Il peut être observé qu'il est plutôt faible mais non nul et avec un comportement qui ne fait pas référence à du bruit. L'hypothèse de linéarité peut donc être adoptée en première approximation avec une erreur moyenne relative de l'ordre de 8% dans ce cas précis.

*À un facteur près

†Mais dépendent de l'ensemble des autres paramètres gardés ici constants



(a) Tendance



(b) Écart relatif

FIGURE 3.2 : Étude du comportement linéaire de la variation de volatilité en fonction de la variation de α

Paramètre β

Le paramètre β est le paramètre CEV qui contrôle la relation entre la volatilité et le sous-jacent. Il est, en effet (cf. equation (2.13)), vrai que

$$\frac{dF_t}{F_t} = \alpha_t F_t^{\beta-1} dW_t \implies \sigma(F_t, t) = \alpha_t F_t^{\beta-1},$$

avec $\sigma(F_t, t)$ la volatilité. Donc pour $\beta = 1$, l'impact de F sur la volatilité est nul* et pour $\beta = 0$ il est maximal. D'un point de vue pratique ce paramètre contrôle l'inclinaison ("skew") du *smile*. Pour bien comprendre d'où vient cette intuition, il est utile de rappeler la formule (3.2b) de HAGAN et al. (2002) valable† pour un *strike* K proche de f

$$\sigma_B(K, f) = \frac{\alpha}{f^{1-\beta}} \left(1 - \frac{1}{2}(1-\beta) \frac{K-f}{f} + \dots \right),$$

qui met bien en avant l'impact de β sur la pente du *smile*. C'est une caractéristique qui est par contre moins évidente à observer que le niveau (cf. paramètre α). De plus, c'est un paramètre qui est restreint dans $[0, 1]$, il est donc plus judicieux de l'étudier dans la globalité de son ensemble de définition (ce qui n'était pas possible avec α , d'où la différence de traitement). Un premier test est réalisé, dont le résultat est observable sur le graphique 3.3, qui suit les mêmes conventions que les graphiques de la sous-partie précédente.

Le fait est que le paramètre β semble avoir un impact sur le niveau du *smile*, ce qui rend difficile de discerner une quelconque variation de l'inclinaison. Il est néanmoins maintenant possible de supprimer son impact sur le niveau grâce au paramètre α (dans la limite où α reste positif). Un autre test est donc réalisé dans lequel le niveau de tous les *smiles* est normalisé‡ de sorte que la variation du niveau par β n'ait plus aucun impact sur le résultat final. C'est à dire que si $\sigma(s, \beta)$ représente la valeur de la volatilité pour une valeur donnée de β et un *strike* s donné, alors le graphique 3.3 représente $\sigma(s, \beta)$ en fonction de s pour différentes valeurs de β . Pour supprimer l'effet de décalage, il faut sélectionner

*c'est le cas classique du comportement log-normal déjà présenté dans le modèle BGM

†pour la volatilité de *Black*

‡En admettant qu'un α puisse être identifier à cette fin

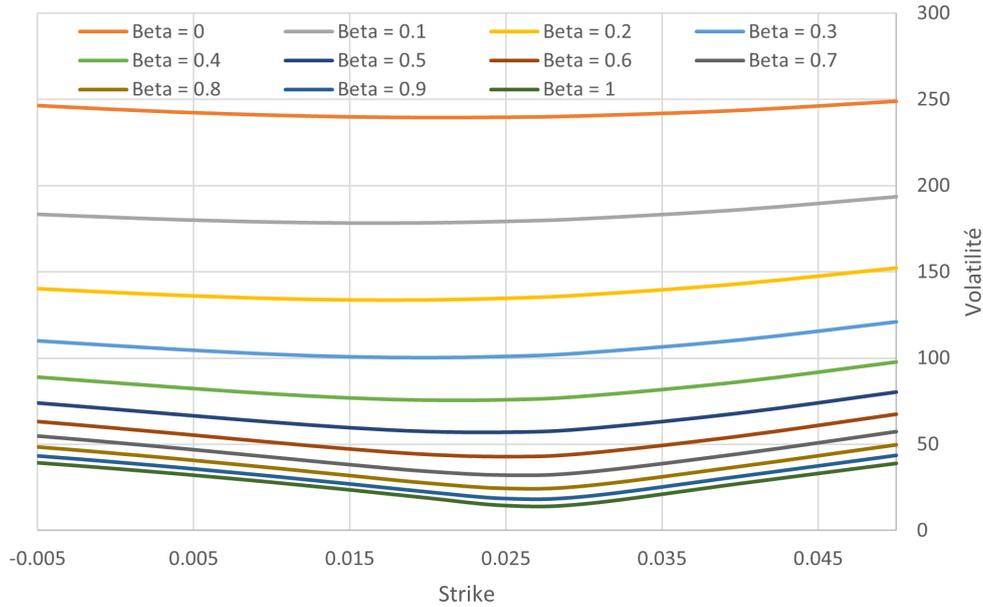


FIGURE 3.3 : Étude de la variation du *smile* en fonction de la variation du paramètre β

un β (arbitraire) d'origine, noté β_0 , et s_{ATM} la valeur *ATM* pour le *smile* d'étude. Il faut ensuite identifier h_β tel que

$$\sigma(s_{ATM}, \beta) = \sigma(s_{ATM}, \beta_0) + h_\beta,$$

ce qui quantifie la partie de décalage pure qu'induit la modification du paramètre β . Normaliser le graphique 3.3 revient donc à représenter $\sigma(s, \beta) - h_\beta$ en fonction de s pour différentes valeurs de β . Il est remarqué que cela induit nécessairement un point d'inflexion en l'*ATM*. Ce graphique est reporté en annexe (cf. figure A.2) et le raisonnement précédent donne l'intuition de plutôt s'intéresser à la pente en passant par la dérivée instantanée du *smile*, qui est elle représentée sur le graphique 3.4. En annexe est représentée une version avec la valeur absolue de la figure 3.4, c'est la figure A.3.

Il peut y être observé une tendance assez nette : la dérivée instantanée augmente en valeur absolue en fonction de β assez nettement, mais les résultats ne sont pas aussi évidents que pour le paramètre α . Et il est peu évident d'en déduire un comportement précis en fonction de la variation de β comme ce qui a été fait pour α .

Paramètre ρ

Le paramètre ρ est la corrélation *forward*-volatilité, c'est-à-dire qu'il relie le comportement stochastique de la corrélation et de la volatilité. Pour $|\rho| = 1$, tout se passe comme s'il n'y avait qu'un seul brownien et il est naturel d'observer moins de richesse dans le comportement du *forward*. En termes de réputation, ce paramètre est supposé comparable à celui du β en contrôlant l'inclinaison (*skew*) du *smile*. Ce paramètre est défini sur $] -1, 1[$. Il s'agit donc de le faire varier sur cet intervalle entier. Le résultat du test peut être observé sur le graphique 3.5 pour des valeurs allant de -0.9 à 0.9 .

Il peut être observé que la variation du *smile* est très régulière et que c'est effectivement son inclinaison qui varie et pas son niveau. D'autre part, la partie supérieure rappelle le graphique A.2,

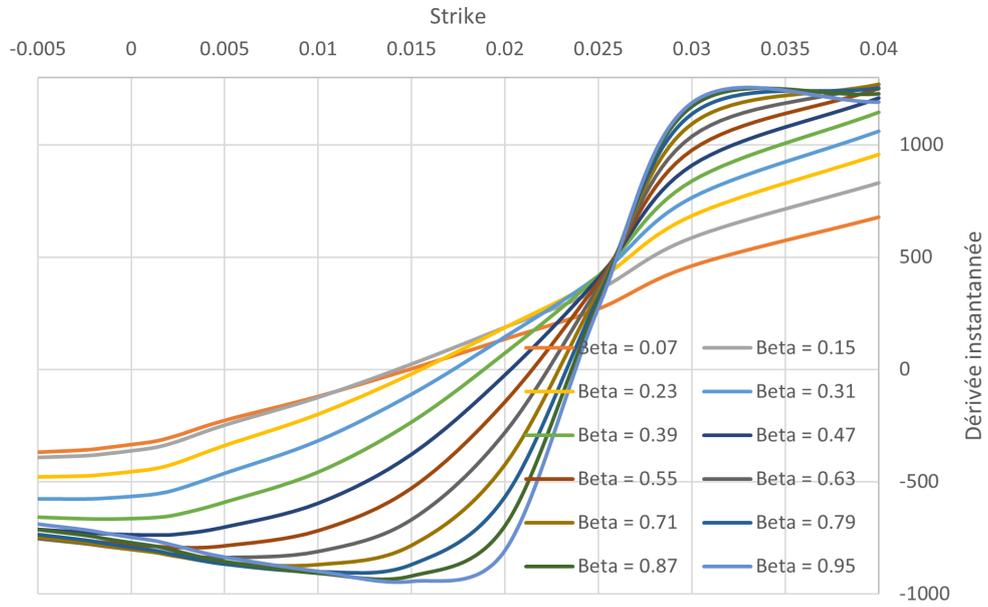


FIGURE 3.4 : Étude de la variation de la dérivée instantannée *smile* en fonction de la variation du paramètre β

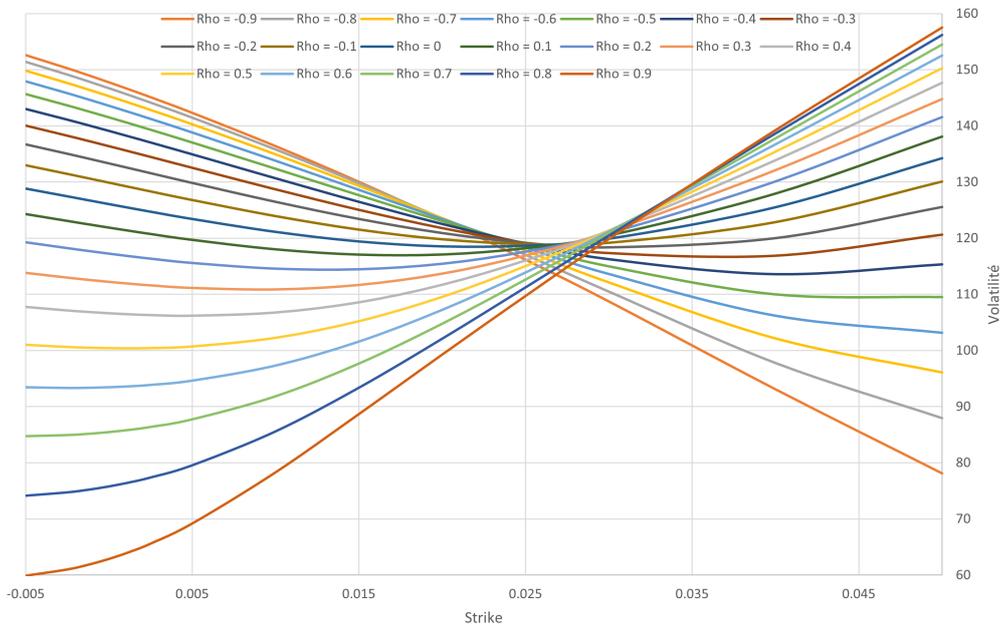


FIGURE 3.5 : Étude de la variation du *smile* en fonction de la variation du paramètre ρ

ce qui indiquerait en effet une sur-paramétrisation avec β même si cela signifie aussi que le pouvoir de contrôle du ρ est nettement plus significatif. D'autre part, pour reprendre l'interprétation du ρ il est assez naturel d'observer des droites pour $|\rho| = 1$. Ce sont en effet les cas où la diffusion est la moins riche (où tout se passe comme s'il n'y avait qu'un seul brownien). La pente a donc tendance à augmenter en moyenne avec ρ , avec un point d'intérêt pour $\rho = 0$ où le *smile* présente le plus de richesse. Étant donné que c'est une fois encore la pente qui est sujet à variations, il est intéressant de représenter à nouveau la variation instantanée, comme objectivé dans le graphique 3.6. Ce graphique démontre un impact clair de ρ sur la dérivée première, les différentes courbes ne se coupent jamais et augmentent en fonction de ρ . Le décalage de la dérivée en fonction de ρ n'est néanmoins pas aussi évident que pour α avec le *smile*. C'est, en effet, moins régulier et avec un impact léger sur le comportement du *smile*.

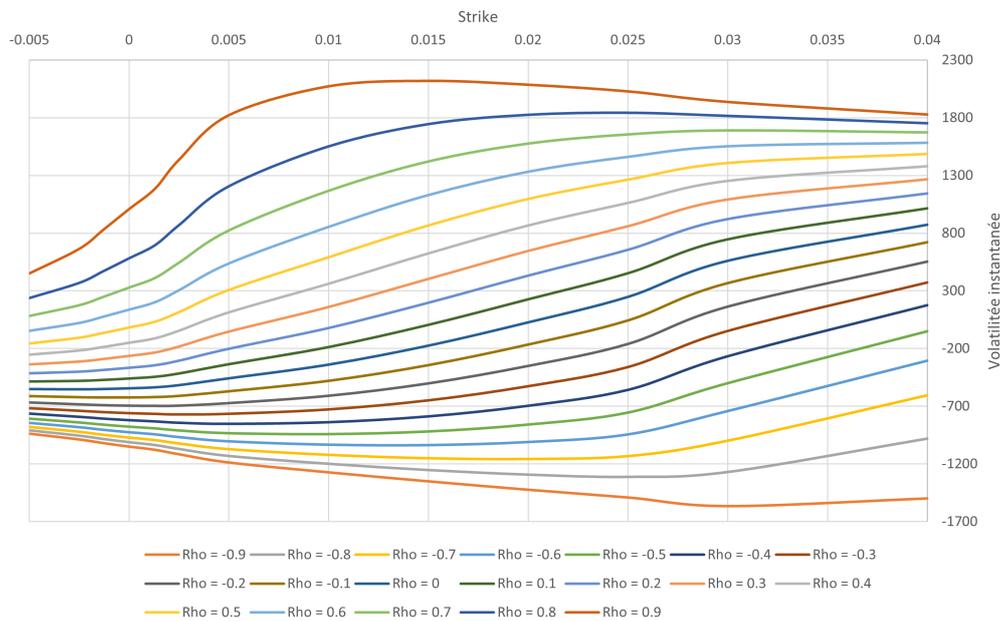


FIGURE 3.6 : Étude de la variation de la dérivée instantanée *smile* en fonction de la variation du paramètre ρ

Paramètre ν

Le paramètre ν contrôle l'ampleur du *smile* ("how much smile the curve exhibits"). En termes de signification, c'est la volatilité log-normale de $\alpha(t)$. Ainsi, plus il est élevé, plus il y aura d'aléa pour $\alpha(t)$, et plus la volatilité globale du *forward* sera variable. Cela induit une plus grande richesse, et il est donc assez compréhensible que cela induise un *smile* avec une plus grande ampleur. Ce paramètre étant défini sur \mathbb{R}^*_+ , il s'agit d'en donner une représentation significative de même que pour α . Un premier test avec quelques valeurs positives et négatives est réalisé dans le but de confirmer un comportement similaire du côté positif et négatif. Le résultat du test peut être observé sur le graphique 3.7, où les valeurs de ν varient de leur valeur initiale avec un écart allant de $+/- 1e - 2$ à $+/- 8e - 2$. Aller plus loin risquerait de provoquer un basculement vers les valeurs négatives.

Il est remarqué que le comportement est similaire des deux côtés, et qu'il y a une légère augmentation du niveau global du *smile*. Par exemple, la courbe $\nu = +4e - 2$ est symétrique à la courbe $\nu = -4e - 2$ par rapport à la courbe "Volatilité calibré" (*i.e.* le *smile* d'étude). L'impact du paramètre

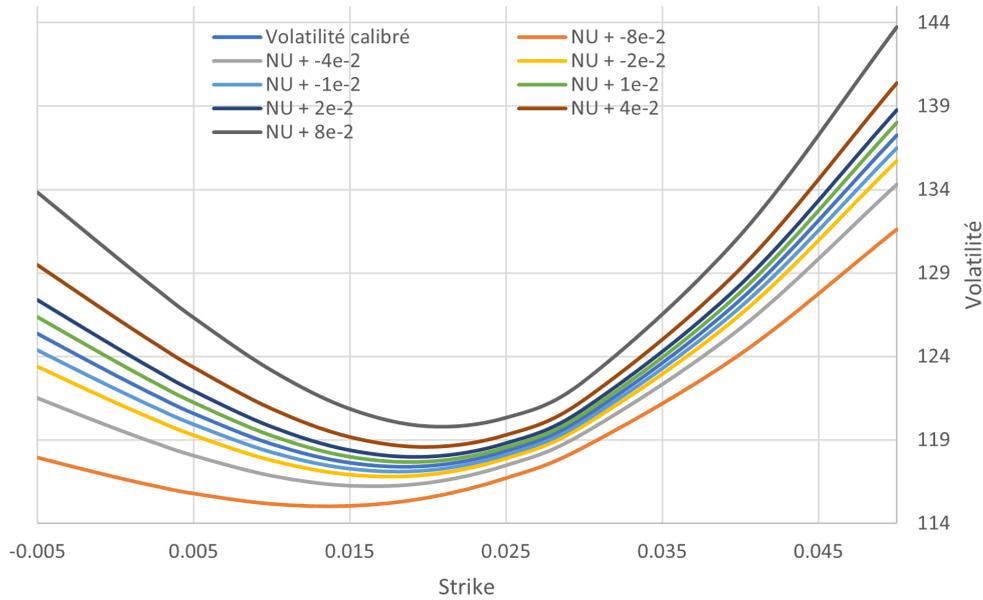


FIGURE 3.7 : Étude de la variation du *smile* en fonction de la variation du paramètre ν

ν est néanmoins très régulier. Il est ainsi intéressant de procéder à un test plus approfondi* en se cantonnant à une variation de ν positive. Le résultat de ce test peut être observé sur le graphique 3.8, les valeurs de variations étant renseignées en légende. Un raisonnement similaire au paramètre β est effectué pour ce graphique, et les *smiles* ont ainsi tous subis un décalage pour que l'impact sur le niveau ne soit pas pris en compte.

Le graphique 3.8 est en accord avec la théorie, et induit un impact de la convexité assez clair dans l'exemple qui est présenté. La figure annexe A.4 présente la dérivée instantanée dans l'idée de pouvoir effectuer une comparaison avec les graphiques 3.4 et 3.6.

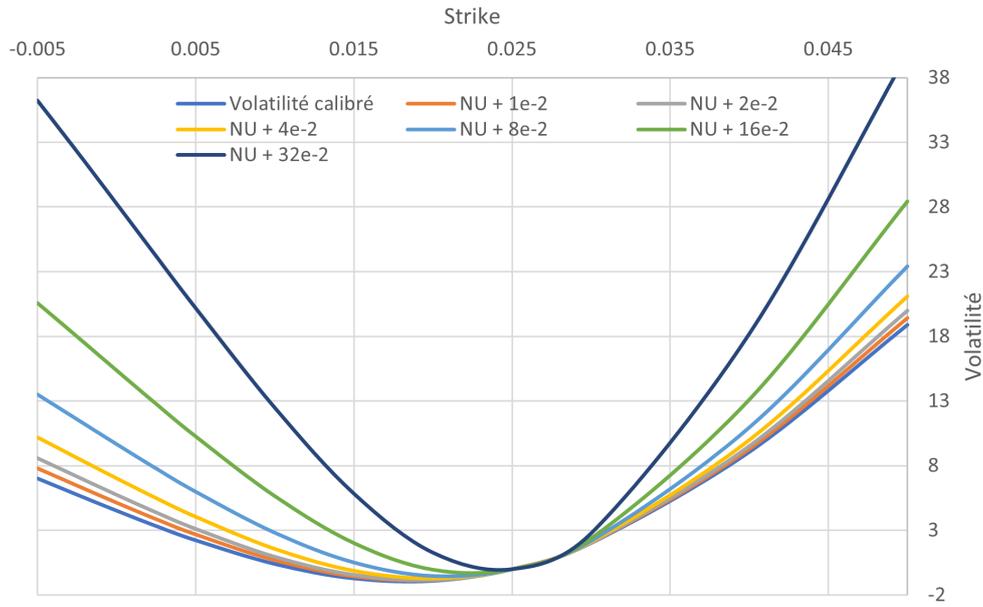
3.1.2 Interprétabilité du LMM+

Selon la présentation du LMM+ effectuée dans la partie 2.2, le modèle présente 9 paramètres qui sont répartis en plusieurs sous-catégories

- les paramètres régissant la fonction de Rebonato (a , b , c et d),
- les paramètres régissant le comportement CIR de $\sqrt{V(t)}$ (κ , θ et ϵ) dont l'étude est faite en annexe A.4,
- les paramètres régissant le comportement global du processus *forward* (δ et ρ).

Les données sont issues d'études d'un LMM+ venant de VIALARD (2022) et de de VANDIÈRE (2021). Comme rappelé au §2.2.2, le LMM+ calibre sur des *swaptions*. Les détails des paramètres de base du *smile* sont résumés dans le tableau 3.1. Il peut être remarqué que le *smile* est très plat ce qui est une critique légitime de cette étude, mais reste un phénomène plus fréquent lors de l'étude de

*Les variations de ν sont plus prononcées, mais uniquement positives

FIGURE 3.8 : Étude de la variation du *smile* en fonction de la variation du paramètre ν

smile de *swaption*. D'autre part, les *strikes* sont donnés en relatif dans toute l'étude à la différence de l'étude du SABR. Ainsi, un *strike* nul correspond à l'ATM*.

REBONATO				CIR			AUTRE	
a	b	c	d	κ	θ	ϵ	δ	ρ
0.1271	0.0228	0.09	0.0011	0.1	0.40	0.21912	0.033	0.89901

TABLE 3.1 : Paramètre du *smile* d'étude pour le LMM+ au 31/12/2022

Interprétabilité des paramètres de la fonction de Rebonato

La fonction de Rebonato dans l'implémentation du LMM+ qui a été présentée a le rôle du facteur moyen de mise à l'échelle permettant le passage de la *scaled volatility* $\sqrt{V(t)}$ à la volatilité effective $\sqrt{V(t)}\gamma_j(t)^\dagger$ pour le *forward* F_j . Il est donc naturel qu'une augmentation de cette fonction, se traduise par une augmentation générale de la volatilité. Ainsi en se rappelant de la forme d'une fonction de Rebonato (*i.e.* (2.8)), les paramètres a , b et d sont censés provoquer une augmentation du *smile* tandis que le paramètre c est supposé avoir un rôle inverse. Les résultats suivants proviennent de l'étude de VIALARD (2022) parlant d'une différence de traitement entre le long terme et le moyen terme, mais cette différence n'est pas jugée essentielle dans l'étude de ces paramètres. L'ensemble des résultats est donc basé sur une même maturité de 1 an et un même *tenor* de 5 ans. Les graphiques 3.9, 3.10, 3.11 et 3.12 représentent l'étude des paramètres a , b , c et d .

Les résultats des graphiques 3.9, 3.10, 3.11 et 3.12 sont en phase avec ce qui est attendu, leur signification étant assez simple de par la simplicité de la fonction choisie. Plus largement, la fonction qui est choisie pour occuper ce rôle dans la modélisation a toujours la même signification d'un point

*ATM *Spot* et pas ATM *Futur*†Sachant que γ est ici un vecteur

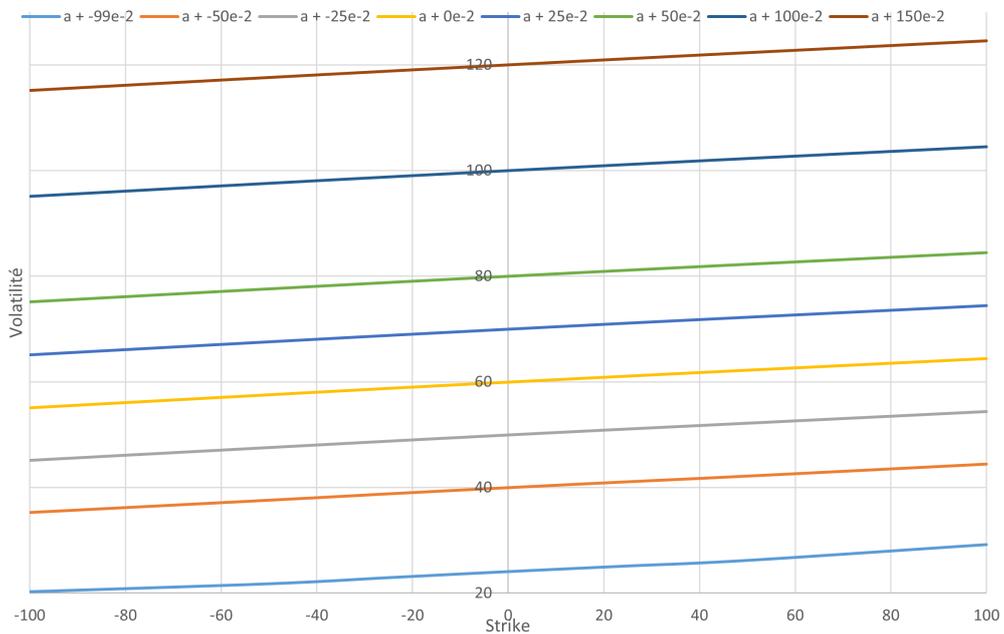


FIGURE 3.9 : Étude de la variation du *smile* en fonction de la variation du paramètre a

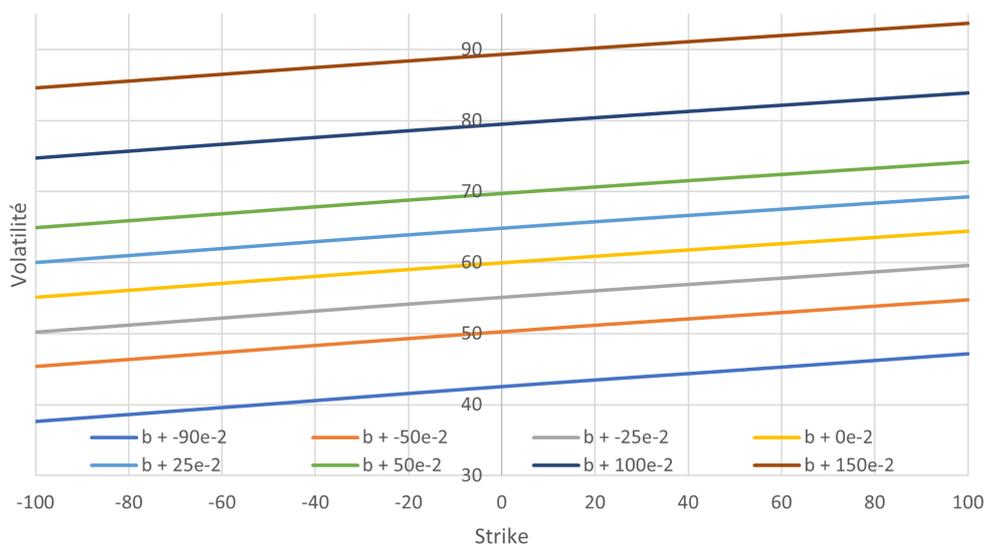
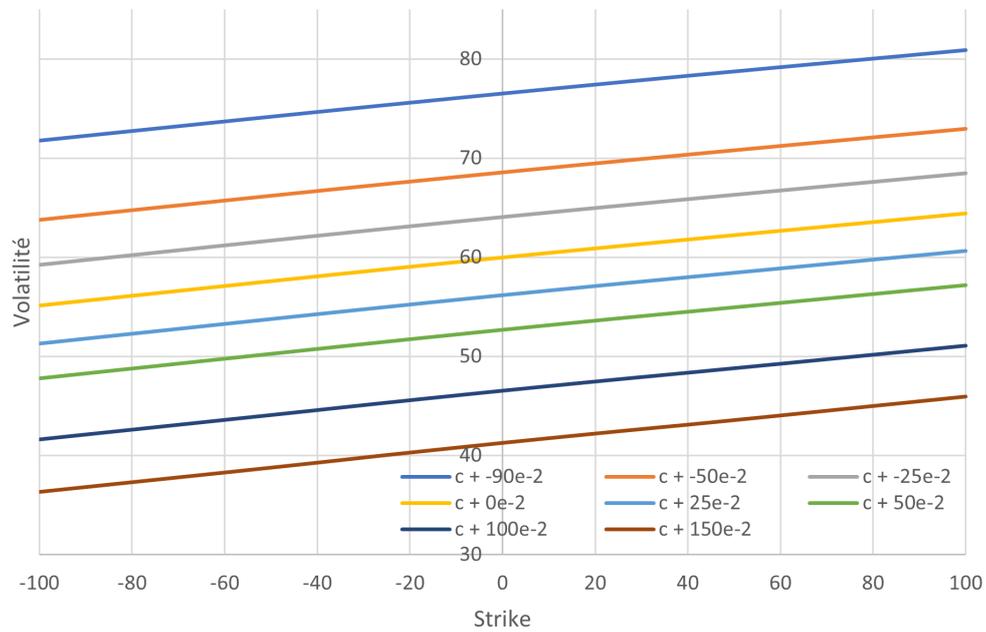
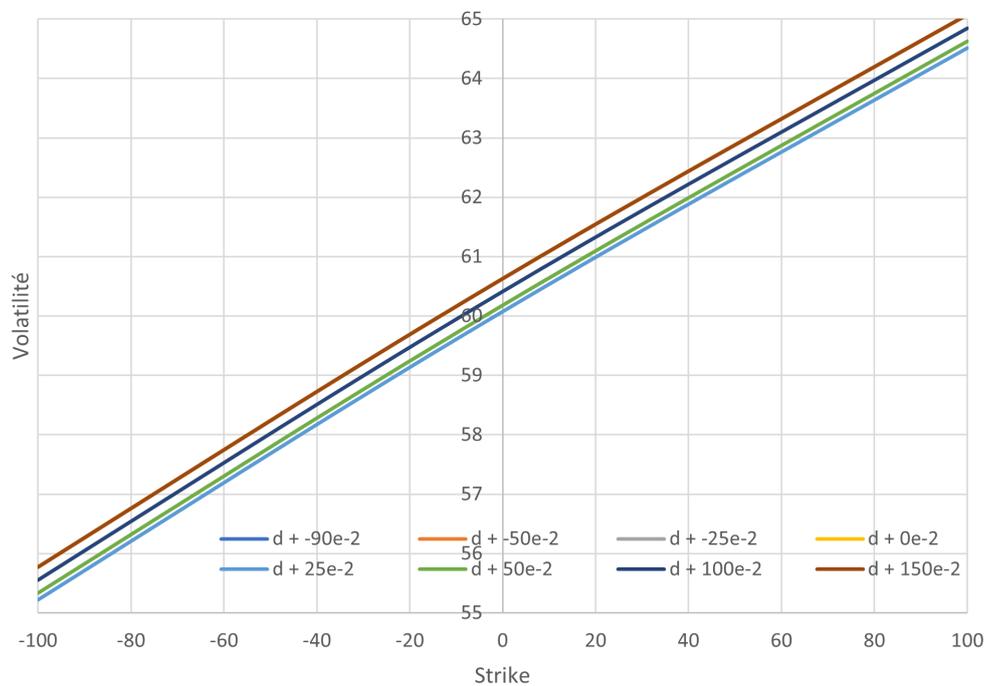


FIGURE 3.10 : Étude de la variation du *smile* en fonction de la variation du paramètre b

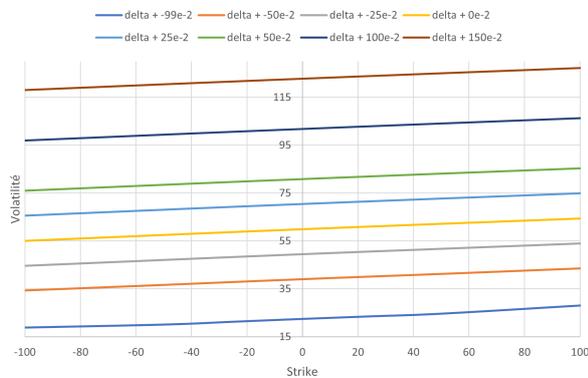
FIGURE 3.11 : Étude de la variation du *smile* en fonction de la variation du paramètre c FIGURE 3.12 : Étude de la variation du *smile* en fonction de la variation du paramètre d

de vue théorique. Il s'agit donc de la choisir suffisamment simple pour que l'impact de ses propres paramètres soit clair sur le *smile*, mais suffisamment significative pour ne pas trop approximer son comportement. La capacité de contrôle de la fonction de Rebonato semble comparable au paramètre α du SABR, chacun des paramètres présenté ayant un contrôle très régulier sur le *level* du *smile*. La différence majeur est que les paramètres liés au LMM+ ne peuvent pas être modifiés aussi simplement que le α du SABR. Pour le *SABR* c'est un paramètre lié au *smile* qui peut donc être ajusté au mieux selon le contexte économique, tandis qu'au niveau du LMM+ toute modification sur le *smile* est répercutée sur l'intégralité de la structure des taux.

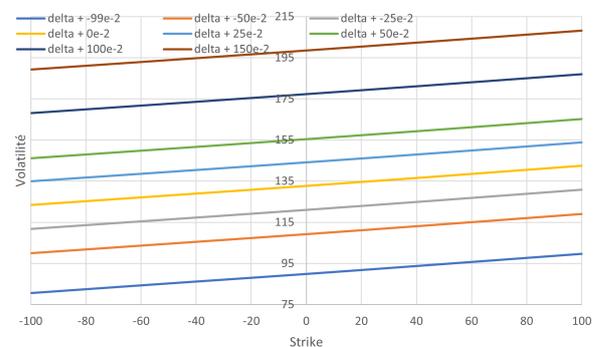
Interprétabilité de δ et ρ

Les deux paramètres restants sont le *shift* δ et la corrélation ρ . Le paramètre ρ représente la corrélation en tant que scalaire dans le cas précis du LMM+ présenté au §2.2.1. Il n'y a alors que 3 browniens et la corrélation est la même pour les deux browniens des *forwards* et celui de la volatilité. Le paramètre δ , représente le *shift*. Il intervient aussi dans le SABR, mais n'est pas compté comme un paramètre. Il est fixé comme une convention de marché, car son but n'est justement pas de changer la signification de la diffusion mais plutôt d'étendre cette dernière pour considérer des taux avec une valeur négative. Le considérer comme un paramètre comme ici peut être intéressant, mais ne permet pas d'apporter une interprétation très précise à son impact sur le *smile*.

Le paramètre ρ contrôle quant à lui la corrélation entre les *forward*, et il n'est pas évident d'interpréter ce que cela peut donner du point de vue d'un seul *forward*. Par contre, en ce qui concerne le taux *swap* un raisonnement similaire au paramètre de corrélation du SABR peut être fait. Le graphique 3.13 représente l'étude effectuée pour l'impact du *shift* et le graphique 3.14 celle effectuée à propos de la corrélation.



(a) Maturité 1 an, *tenor* 5 ans



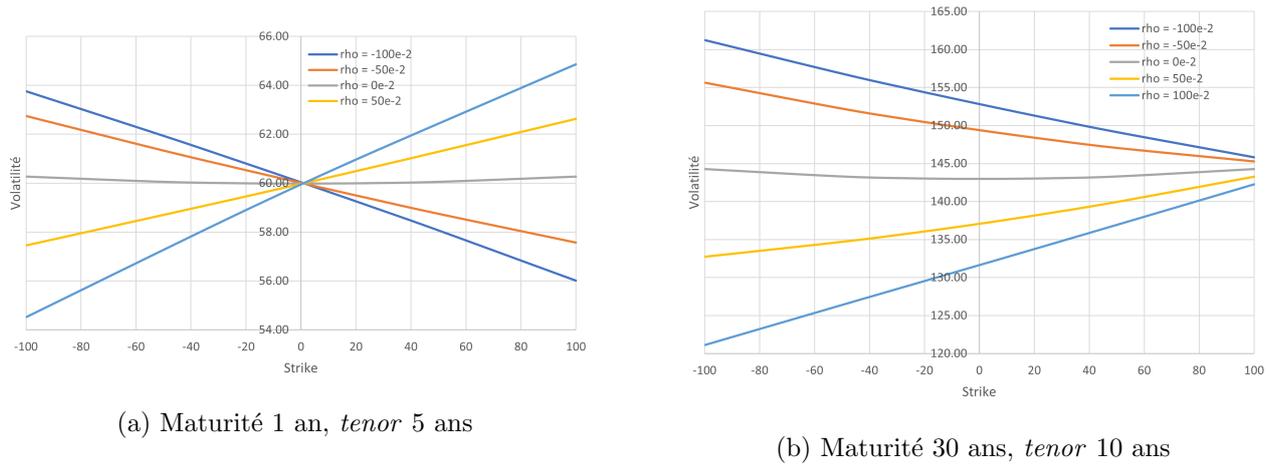
(b) Maturité 30 ans, *tenor* 10 ans

FIGURE 3.13 : Étude de la variation du *smile* en fonction de la variation du paramètre δ

Il sera fait la même remarque sur le graphique 3.14 que sur le graphique A.7 : il y a un décalage de l'ATM. Cela signifie qu'ils dirigent tous les deux une partie similaire du *smile*. Étant donné l'étude du SABR précédente, cela indiquerait un contrôle du *skew*, ce qui est cohérent avec le comportement de la corrélation* du SABR. D'autre part, l'étude du *shift* semble indiquer très peu de modification du *smile*, ce qui soutient l'intérêt de le garder comme paramètre de marché†.

* Au niveau du SABR il s'agit d'une corrélation entre volatilité et *forward*, tandis qu'il s'agit ici d'une corrélation entre *forwards*. Cette différence de nature n'empêche néanmoins pas une forme de similarité au niveau de la variation : une corrélation proche de 1 indique une réduction du caractère aléatoire.

† *i.e.* cela n'apporte pas grand chose en pratique et est préférablement fixe en théorie

FIGURE 3.14 : Étude de la variation du *smile* en fonction de la variation du paramètre ρ

3.1.3 Synthèse

Ce que l'étude précédente a montré est que l'accessibilité des paramètres du LMM+ est très variable. Parfois, leur impact est clair et en accord avec la théorie (comme pour a , b , c ou d par exemple), et parfois nettement moins (comme pour ϵ par exemple). Mais le problème majeur pour ce modèle, est que la majorité des paramètres présentés ont un impact sur l'ensemble de la structure des taux. L'amélioration d'un *smile* précis risque donc de se faire au détriment de la structure globale.

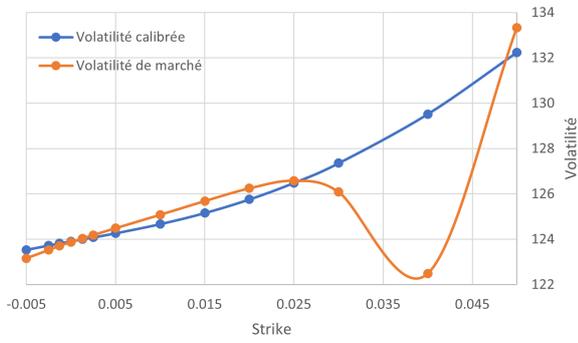
C'est bien là que le LMM-SABR se différencie le plus. Sa calibration est en 2 parties*. Sa première phase (cf. §2.4.2) lui permet de calibrer au plus proche l'ensemble des *smiles* de la structure, tandis que la deuxième (cf. §2.4.2) assure la cohérence de cet ensemble en tant que structure des taux. D'autre part, les paramètres α , ρ et ν ont un impact très régulier et avec une base théorique bien comprise. Il y a moins de redondance, et elle est moins nécessaire ce qui fait qu'il est plus simple de réaliser la calibration du modèle.

Un exemple de ce phénomène est montré sur le graphique 3.16 et le graphique 3.15 qui représentent tous deux une calibration sur volatilité *caplets* pour des maturités de 1 an et 6 mois et 2 ans respectivement avec la convention de volatilité *forward*-volatilité nulle (*i.e.* ρ nul). Dans le cas du graphique 3.15, la calibration est mauvaise et les paramètres ont des valeurs anormalement élevés, mais le *smile* de marché est très surprenant. La conclusion est dans ce cas, que les données d'entrée doivent probablement être traitées, mais que le modèle n'est pas a priori mis en défaut. Par contre, dans le graphique 3.16 le problème vient cette fois des paramètres et non pas du *smile* de marché qui semble tout à fait cohérent. En effet, en regardant les paramètres, α , β sont très faibles (et proche de leur borne inférieure de définition). La conclusion est ici que la limitation de $\rho = 0$ est trop limitante pour un tel *smile*.

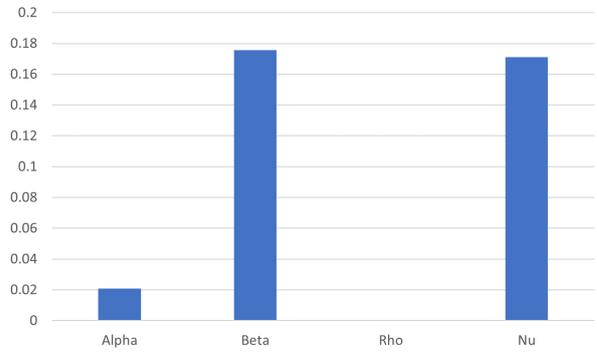
A titre comparatif, dans le cas du LMM+ pour le graphique 1.10, les paramètres sont renseignés dans le tableau 3.2 et il est moins évident de dire s'ils sont particulièrement proches ou loin de leurs limites théoriques. La calibration n'est pas optimale, mais il est peu évident de dire si cela vient du modèle ou du marché.

Il faut d'autre part remarquer que la diminution de l'effort algorithmique est significative. Le LMM+ utilisé a une calibration de l'ordre de 30 minutes, tandis que le LMM-SABR en a une de l'ordre de 3 minutes.

*Sans parler de la corrélation qui est une phase commune (mais pas identique) pour les deux modèles

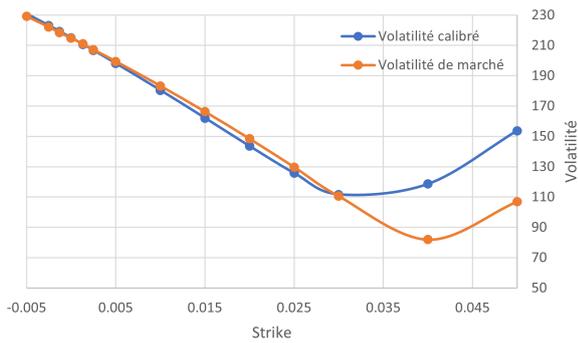


(a) *Smile* calibré



(b) Paramètres

FIGURE 3.15 : Problème de calibration pour un *smile caplet* 2 ans



(a) *Smile* calibré



(b) Paramètres

FIGURE 3.16 : Problème de calibration pour un *smile caplet* 1 an et 6 mois

REBONATO				CIR			AUTRE	
a	b	c	d	κ	θ	ϵ	δ	ρ
0.0893	0.0386	0.0897	0.0012	0.1309	0.1584	0.2036	0.033	-0.131

TABLE 3.2 : Paramètre du LMM+ lors d'un problème de calibration

3.2 Impact de l'utilisation du LMM-SABR en assurance

Cette partie se concentre sur l'impact global qu'aurait l'utilisation du modèle LMM-SABR par rapport au LMM+ pour un assureur. La mesure de cet impact repose sur la génération de tables de taux zéro-coupons avec les différents modèles et l'observation des résultats obtenus à travers leur utilisation dans un modèle ALM. C'est un modèle qui simule le comportement d'un équilibre entre actif et passif pour un assureur d'épargne fictif. L'horizon de projection du modèle est de 50 ans. Un schéma récapitulatif du fonctionnement du modèle est renseignée dans la figure 3.17. [Un résumé de ses hypothèses est présenté dans le tableau 3.3, avec l'ensemble des valeurs numériques en annexe A.8.](#) Le coût des garanties et options est déterminé dans l'étude associé et s'élève à 279 millions d'euros.

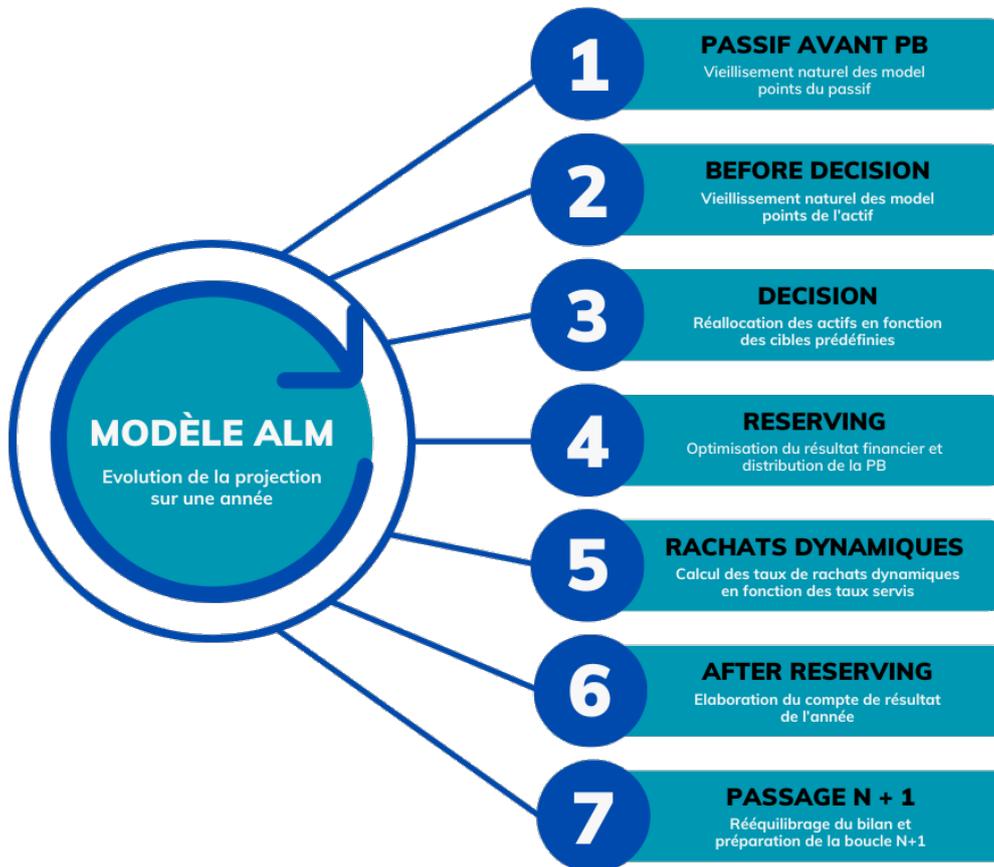


FIGURE 3.17 : Schéma récapitulatif du modèle ALM (figure 2.6 de CORDIER (2023))

3.2.1 Le modèle

Cette sous-partie résume les différents mécanismes et hypothèses du modèle ALM utilisé pour la mesure d'impact. Ce modèle est plus richement détaillé dans l'étude de CORDIER (2023) qui a donné

Entrée	H1	Nombre de scénarios
	H2	Horizon
	H3	Réserve de capitalisation initiale
	H4	Maturité du réinvestissement obligataire
	H5	Taux d'inflation des frais
	H6	Taux des frais
	H7	Taux de dividendes et loyer
	H8	Niveau minimum de PPE et PMVL
Sortie	HS1	PPB distribuée aux assurés
	HS2	RC distribuée à l'assureur
	HS3	Taux de partage de plus-values lors de la liquidation

TABLE 3.3 : Résumé des hypothèses du modèle ALM de CORDIER (2023)

lieu a son implémentation.

Évolution du passif

Le passif est supposé ne pas pouvoir augmenter, et ne diminue que dans le cas de décès ou de rachat. Le décès suit la probabilité de la table de mortalité TH-TF 002, tandis que le mécanisme de rachat structurel est basé sur une fonction de densité de probabilité empirique. Les avantages fiscaux encouragent effectivement le rachat pour certaines années. Une analyse statistique de ces pics, combinée à des conditions de régularité et à une définition précise des fonctions de densité, permet d'identifier un candidat approprié.

Une fois cette comptabilisation stochastique de la sortie de contrats prise en compte, un calcul d'intérêt technique et de chargements de frais sur encours est effectué, permettant une estimation du montant total des prestations de sortie et des provisions mathématiques avant participation aux bénéfices au 31/12/ N . Les statistiques du passif du modèle sont résumées dans le tableau 3.4, avec la valeur des provisions en euro.

INFORMATION	VALEUR
PROVISION MATHÉMATIQUES TOTALES	10.400.000.000
AGE MOYEN	69,34 ANS
ANCIENNETÉ MOYENNE	18,27 ANS
TMG MOYEN	0.17%
PB CONTRACTUELLE MOYENNE	91,95%

TABLE 3.4 : Statistique du passif (cf. table 1.7 de CORDIER (2023))

Évolution de l'actif

De même que pour le passif, l'actif évolue sur une période donnée. L'actif est composé d'obligations, d'actions, d'immobilier et de liquidités. A propos des obligations, chaque année un coupon par obligation est perçu. Il peut être accompagné du nominal associé dans le cas où l'obligation arrive à expiration.

Il y a ensuite des tables de scénarios du taux sans risque, de l'action et de l'immobilier qui font évoluer l'actif global de l'assureur selon un comportement stochastique. Cela permet pour les actions, les obligations, l'immobilier et les liquidités d'en déduire un ensemble de flux pour la période considérée. Ces flux sont alors tous actualisés selon le taux sans risque. A cela s'ajoute aussi des frais financiers

basés sur la valeur de l'actif. Les statistiques de départ de l'actif sont données dans le tableau 3.5, et la table de corrélation reliant l'actif dans la table 3.6. Les valeurs de VNC et VM sont fournies en euro.

CLASSE D'ACTIF	PART DU PORTEFEUILLE	VNC	VM	PMVL
OBLIGATION	73,5%	8.085.000.000	6.864.220.703	-15.1%
ACTION	16,7%	1.837.000.000	1.866.127.473	1.6%
IMMOBILIER	7,4%	814.000.000	1.015.543.332	24.8%
LIQUIDITÉ	2,4%	264.000.000	264.000.000	0.0%
TOTAL	100%	11.000.000.000	10.009.891.508	-9.0%

TABLE 3.5 : Statistique de l'actif (cf. table 1.6 de CORDIER (2023))

	TAUX	ACTION	IMMOBILIER
TAUX	1	0.1036	0.0013
ACTION	0.1036	1	0.0078
IMMOBILIER	0.0013	0.0078	1

TABLE 3.6 : Statistique de corrélation du GSE (cf. table 1.4 de CORDIER (2023))

Le GSE dans son ensemble

D'un point de vue plus global, le GSE simule des trajectoires d'actifs et de variables financières à partir d'un instant initial et évoluant au fil du temps. En fonction de l'évolution du passif et de l'actif, une réallocation est effectuée chaque année. À chaque instant, un solde est calculé en prenant en compte l'état de l'actif et du passif. Une quantité de liquidités est alors nécessaire pour garantir les engagements de l'assureur. Si cette quantité est par exemple jugée insuffisante, des actifs sont vendus. Concernant les obligations, en cas de vente, la plus ou moins-value est transférée à la réserve de capitalisation. En revanche, lors d'un achat, celui-ci est effectué au pair, c'est-à-dire au prix nominal. De manière schématique, le mécanisme d'achat et de vente est lié à un intervalle cible, avec une marge de tolérance.

Dans le cadre de notre étude, le modèle de taux d'intérêt utilisé est soit le LMM-SABR, soit le LMM+. La calibration de ces modèles a donc déjà été abordée précédemment. En ce qui concerne les modèles d'actions et d'immobilier, c'est le modèle de Black-Scholes qui a été utilisé. Il s'agit alors de déterminer la valeur de la constante de volatilité, étant donné que le taux sans risque régit le *drift* et est obtenu directement grâce au modèle de taux. Pour ce faire, CORDIER (2023) utilise d'une part une étude "sur des options européennes sur le cours de l'EuroStoxx50" au 31/12/2022 pour les actions, et d'autre part une étude statistique "en accord avec les normes du marché, sur la base d'avis d'experts" pour la volatilité immobilière.

3.2.2 Mesure d'impact

La diffusion du LMM-SABR a été présentée au §2.4 sous \mathbb{Q}^{T_N} tandis que les taux zéro-coupons doivent être modélisés sous \mathbb{Q} (c'est d'ailleurs ainsi qu'est diffusé le LMM+). Il s'agit donc d'effectuer le changement de mesure expliqué dans l'équation (A.3)

$$dW_{\mathbb{Q}^{T_N}}(t) = dW_{\mathbb{Q}}(t) - \Gamma_N(t).dt,$$

ce qui inverse l'indexation des sommes dans les formules (2.25) et (2.26) (ainsi que toutes les autres sommes traduisant un changement de mesure de \mathbb{Q}^{T_k} vers \mathbb{Q}^{T_N} associé au LMM-SABR).

Il s'agit donc de diffuser des taux *forwards* 1 an sur un horizon de 50 ans pour en déduire des tables de taux zéro-coupons. La calibration des modèles s'adapte par rapport à ce qui a été présenté dans le chapitre précédent et les données initiales sont directement issues de la courbe EIOPA datant du 31/03/2022.

Pour rappel (cf. §1.4.2 à propos des produits de marché), le LMM-SABR utilisé est calibré sur un ensemble de *caplets*

$$\tau(F(T_1, T_1, T_2) - K)^+,$$

tandis que le LMM+ est calibré sur des *swaptions*

$$\left(\sum_{k=m+1}^n \tau(F_k(T_m) - K) \cdot ZCB(T_m, T_k) \right)^+.$$

La différence de source de calibration est un problème qui a été abordé précédemment (cf. §2.5.3). En résumé, il existe des avantages à utiliser les deux sources de calibrations, et celles-ci reposent finalement sur la même source d'incertitude, à savoir un taux d'intérêt. L'avantage majeur de l'utilisation d'une source de calibration différente pour chaque modèle est qu'elle est plus adaptée à celui-ci. Dans le cas du LMM+, une calibration sur *caplets* est très coûteuse, tandis que dans le cas du LMM-SABR, une calibration sur *swaptions* est moins directe. En théorie, un tel biais ne devrait pas entraîner de trop grandes différences, mais justifierait néanmoins une étude supplémentaire pour être plus rigoureusement évalué.

Reproduction de la courbe EIOPA

Une fois les simulations effectuées, une série de tests réglementaires liés à la bonne implémentation d'un GSE peuvent être effectués sur les tables de scénarios comme discuté dans INSTITUT DES ACTUAIRES (2018). Au niveau de la modélisation des taux, le test le plus important est celui de la convergence du déflateur. L'idée est que selon l'équation (1.6) pour un scénario k et un instant $T > 1$, il est vrai que

$$ZC^{(k)}(0, T) = \prod_{i=0}^{T-1} ZC^{(k)}(i, i+1),$$

et si l'approche de Monte-Carlo est correcte, il doit être vrai que

$$ZC(0, T) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N ZC^{(k)}(0, T),$$

en remarquant que les prix zéro-coupons $(ZC(O, T))_T$ représentent la courbe EIOPA.

Le test est effectué pour le LMM+ et le LMM-SABR. Ils sont tous deux représentés sur le graphique 3.18 avec en abscisses les maturités des zéro-coupons considérés et en ordonnées les valeurs des prix pour 10000 simulations.

Il peut être remarqué plusieurs choses par rapport à ce test du déflateur. Ces dernières sont résumées dans le tableau récapitulatif 3.7.

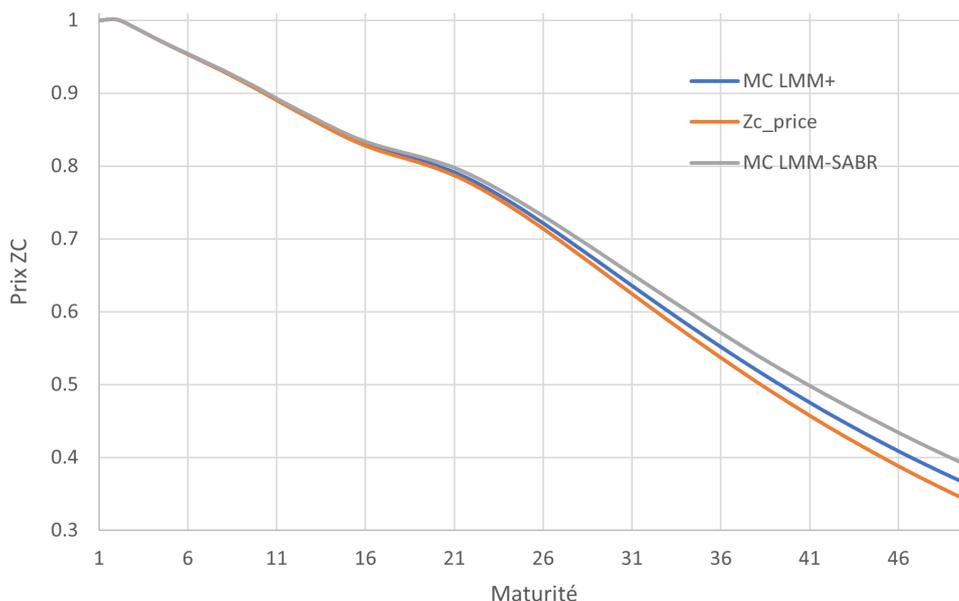


FIGURE 3.18 : Test du déflateur pour le LMM-SABR

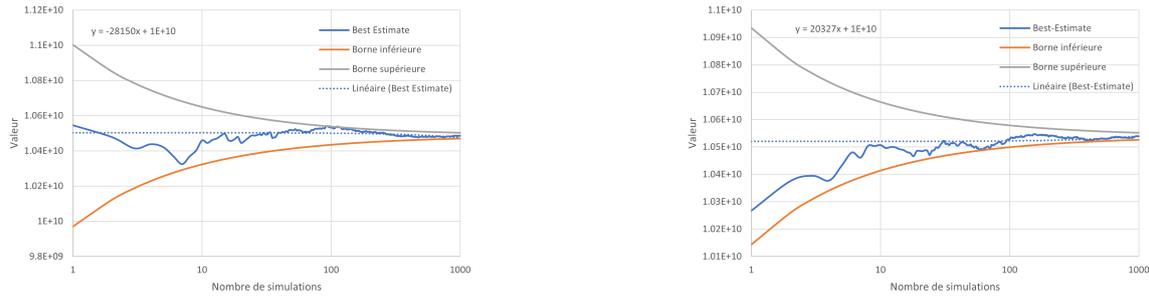
	LMM+	LMM-SABR
CONDORDANCE EXACTE À L'ORIGINE	OUI	OUI
SENS DE L'ÉCART	SURÉVALUATION	SURÉVALUATION
PREMIÈRE MATURITÉ AVEC ÉCART VISIBLE	24 ANS	19 ANS
SURÉVALUATION DES FLUX FUTURS	+	++
SOURCES POSSIBLES DE L'ÉCART	CALIBRATION SUB-OPTIMALE CONDITION DE DÉFINITION MAL RESPECTÉES	TROP DE BROWNIENS SOURCE DE CALIBRATION
ÉCART RELATIF MOYEN ENTRE LES MODÈLES	2.6%	

TABLE 3.7 : Tableau comparatif pour le test du déflateur

Projection du bilan

Il s'agit alors d'itérer les mécanismes évoqués en figure 3.17 afin de projeter le bilan de l'assureur et d'en déduire un BE selon les deux modèles utilisés. Il faut remarquer que seul l'impact de l'utilisation du modèle de taux est ici mesuré, ainsi seule la table de scénarios de taux varie, et l'entièreté des statistiques fournies jusqu'ici sont fixées. Autrement dit les scénarios des autres sources d'incertitudes sont fixés, ce qui n'empêche pas de voir une variation au niveau des taux en question (comme pour l'immobilier par exemple). Le résultat de l'estimation du BE est alors fourni dans le graphique 3.19a pour le LMM+ et dans le graphique 3.19b pour le LMM-SABR. Dans les deux cas, les abscisses représentent le nombre de simulations en échelle logarithmique et en ordonnées la valeur de l'estimation du BE en euro. Les bornes de l'intervalle de confiance à 95% sont aussi fournies dans les deux cas.

Des conclusions similaires au test précédent peuvent être déduites. C'est-à-dire que le BE converge dans les deux cas, mais il converge plus rapidement avec le LMM+. De même, il peut être observé que le BE estimé avec l'utilisation des tables du LMM-SABR est plus élevé (et donc plus prudent)

(a) Convergence du BE pour le LMM+(b) Convergence du BE pour le LMM-SABRFIGURE 3.19 : Étude du comportement linéaire de la variation de volatilité en fonction de la variation de α

que celui estimé avec le LMM+, ce qui est cohérent avec la remarque précédente sur la convergence de la courbe d'actualisation. La convergence des BE étant assurée, une comparaison des différentes estimations est envisageable. Le graphique 3.20 représente alors cela avec en abscisses le nombre de simulations en échelle logarithmique et en ordonnées, la différence relative absolue sur le BE . C'est-à-dire que l'ordonnée représente la différence absolue pour un nombre de simulations donné, entre l'estimation obtenue à l'aide de la table produite par le modèle LMM+ et l'estimation obtenue à l'aide de celle produite par le LMM-SABR, par rapport à la VM totale à l'origine (qui est d'environ 10 milliards, cf. table 3.5).

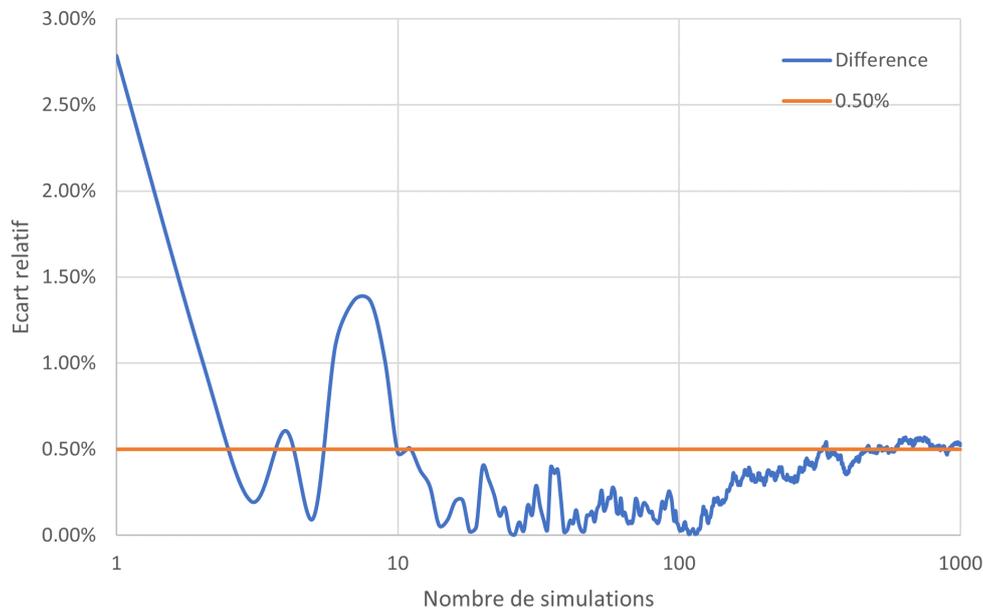


FIGURE 3.20 : Différence relative de l'utilisation du LMM-SABR par rapport au LMM+

Sur le graphique 3.20, il est difficile de déterminer si le nombre de simulations est suffisant pour estimer le biais d'utilisation des modèles. La question de l'impact des différentes sources d'erreurs (Monte-Carlo, biais de source de calibration, différence de vitesse de convergence, *etc.*) est complexe à aborder, et il n'est pas certain que la valeur finale de 0.50% obtenue soit entièrement stable. En toute rigueur, il serait nécessaire d'augmenter le nombre de simulations pour garantir l'atteinte d'un plateau

de stabilité et une variance limitée. Cependant, de tels tests sont très chronophages, extrêmement coûteux en ressources et n'ont ainsi pas pu être menés aussi loin que souhaité dans le cadre de cette étude. Une étude supplémentaire approfondie est nécessaire pour fournir une réponse plus satisfaisante à cette question.

Il est néanmoins possible de contextualiser cette valeur afin, entre autres, de mettre en lumière l'importance du biais qu'elle représente. Pour ce faire, les différents intervalles de confiance à 95% des estimations de l'évaluation du BE peuvent être représentés sur un même graphique, c'est ce qui est représenté sur la figure 3.21. Les abscisses représentent le nombre de simulations en échelle logarithmique et les ordonnées les valeurs de ces intervalles.

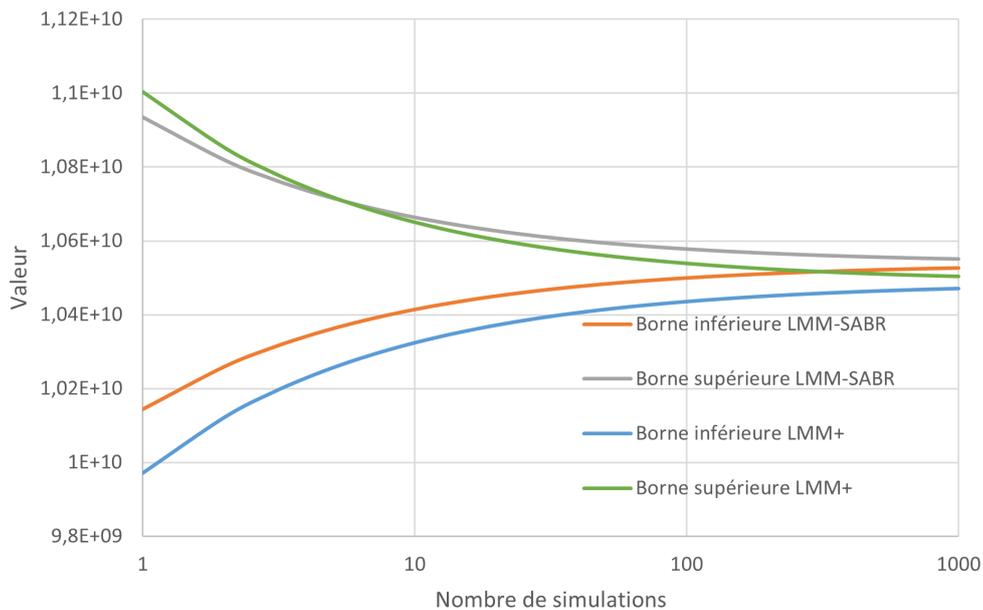


FIGURE 3.21 : Comparaison des intervalles de confiance

Il peut être observé qu'une intersection non-vide entre les intervalles de confiance se manifeste approximativement entre 8 et 500 simulations. Cependant, cette intersection disparaît définitivement au delà de 500 simulations, et ce jusqu'à 1000 simulations. Ceci suggère qu'il existe un seuil minimum de simulations en deçà duquel le biais n'est pas discernable en raison de l'erreur de Monte-Carlo. Opter pour 1000 simulations semble être relativement judicieux, car cela permet une observation claire du biais qui est alors d'une taille significative par rapport à l'erreur de Monte-Carlo. Il est ensuite nécessaire de confronter ces résultats au graphique 3.20. En effet, cela confirme que les valeurs associées à un faible nombre de simulations ne peuvent pas être considérées comme fiables, tandis que celles obtenues avec plus de 600 simulations fournissent une information beaucoup plus robuste. Enfin, il est remarqué sur le graphique 3.20 que le biais de 0.5% est déjà relativement stable à partir de 600 simulations. Ces observations semblent confirmer que la valeur de 0.5% n'est pas excessivement élevée et que 1000 simulations sont déjà significatives pour évaluer ce biais.

Une autre façon de quantifier cet écart est de procéder à une comparaison déterministe. De manière schématique, cette approche consiste à envisager un scénario moyen à partir des différentes tables et à effectuer une évaluation du BE en se basant sur ces scénarios moyens. L'erreur de Monte-Carlo, qui était visible dans le graphique 3.20, n'est alors plus prise en compte. Du point de vue du GSE, cela limite l'incorporation efficace de l'optionnalité des contrats. Ainsi, il s'agit d'un autre test qui

révèle un écart avec des sources d'erreurs réduites, mettant différemment en évidence l'impact des modèles. Sur le plan technique, la projection déterministe avec le modèle ALM n'était au moment de l'étude pas possible avec un horizon supérieur à 21 ans dans de telles conditions. Le tableau 3.8 récapitule les différents biais observés. Pour un horizon de 21 ans, une comparaison est effectuée entre le biais stochastique (tel que présenté dans le graphique 3.20 avec un horizon de 50 ans) et le biais déterministe, offrant ainsi une perspective de la composante élémentaire (*i.e.* sans source d'erreur) du biais stochastique.

HORIZON	ÉCART STOCHASTIQUE	ÉCART DÉTERMINISTE
21 ANS	0.302%	0.176%
50 ANS	0.522%	NA

TABLE 3.8 : Tableau récapitulatif du test d'impact

Il peut être observé un rapport proche de la moitié entre l'écart déterministe et stochastique pour un horizon de 21 ans. Il semble raisonnable de supposer ce rapport relativement constant et indépendant de l'horizon de projection. Avec une telle hypothèse, l'impact élémentaire de l'utilisation du LMM-SABR peut être estimé à la moitié du résultat présenté dans le graphique 3.20, soit 0.304%. La portion restante peut être imputée à l'influence des modèles sur l'aspect optionnel des contrats ainsi qu'aux diverses sources d'erreurs.

3.3 Limites et ouvertures

L'étude précédente utilise un cadre bien précis qui a été posé par un besoin pratique induit lors de la rencontre de différents problèmes. Ces problèmes ont parfois amené à des réflexions intéressantes bien que hors sujet et ont donc été volontairement laissés de côté afin de ne pas entacher la cohérence de l'étude. Cette section vise à aborder les sujets jugés les plus pertinents dans l'optique d'enrichir et d'améliorer la présente étude.

3.3.1 Sensibilité de calibration du LMM-SABR

Ce chapitre s'est penché sur la comparaison entre le LMM-SABR et le LMM+ du point de vue d'un assureur vie à la date du 31 mars 2022. Cette date revêt une importance particulière, car elle correspond au premier bilan où l'impact de la remontée des taux s'est fait ressentir. Toutefois, un modèle d'assurance doit nécessairement faire preuve de robustesse, soulevant ainsi la question de la variabilité de sa performance. L'objectif initial de cette étude complémentaire était de comparer l'évaluation du *BE*, tel que présentée dans §3.2.2, entre le LMM+ et le LMM-SABR pour différentes dates et en augmentant significativement le nombre de simulations. Mais il n'a pas été possible d'obtenir les ressources nécessaires à l'obtention de résultats pour le LMM+, et le modèle ALM précédemment employé ne pouvait pas faire l'objet d'études complémentaires. Par conséquent, seules les sensibilités de la calibration du LMM-SABR en fonction de l'état du marché sont ici présentées. Le test en question consiste à comparer la calibration théorique sur des *swaptions*, considérées comme très représentatives en assurance, pour différentes dates spécifiques. Les détails de ce test sont rapportés dans le tableau 3.9.

Les résultats sont représentés sur les graphiques 3.22, 3.23 et 3.24 pour les dates respectives du 30/09/2020, 31/03/2022 et 30/09/2023. Ces graphiques illustrent la volatilité en points de base en fonction de la maturité en années. La valeur de marché est représentée en orange, tandis que la valeur de la calibration théorique est en bleu (lorsqu'elle n'est pas confondue avec la courbe orange).

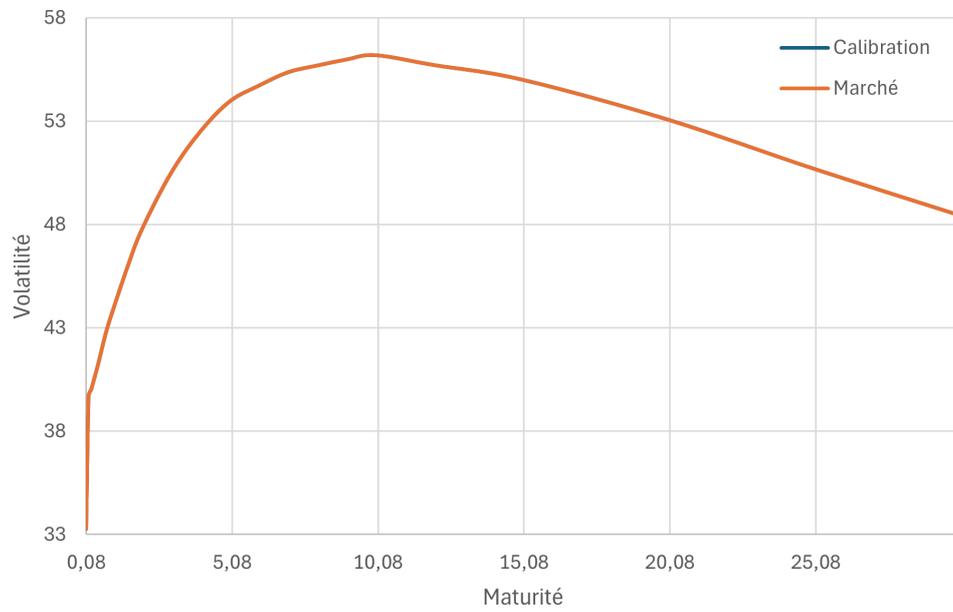


FIGURE 3.22 : Calibration théorique au 30/09/2020

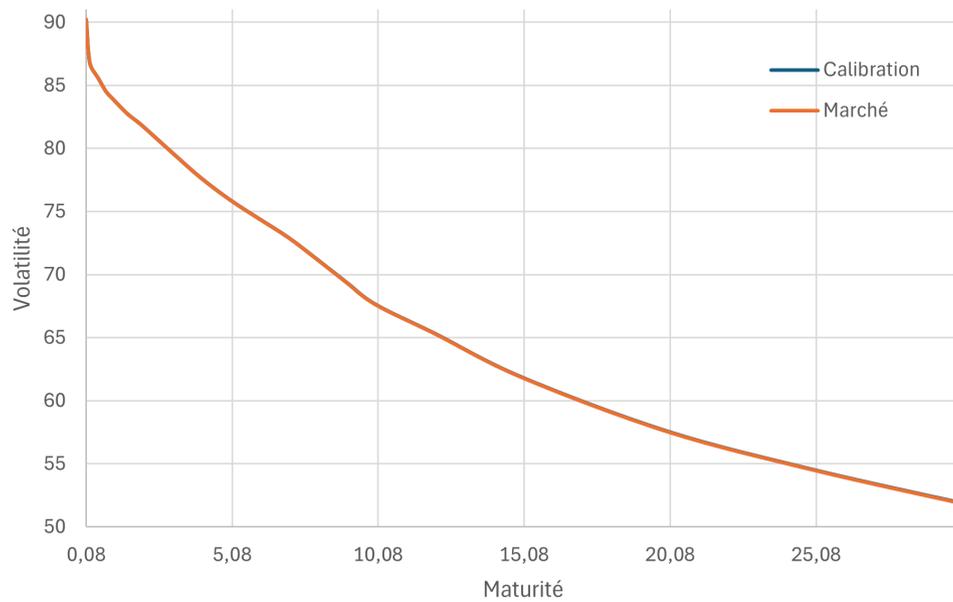


FIGURE 3.23 : Calibration théorique au 31/03/2022

OBJET	swaption 12M fixe contre flottant		
TENOR	10 ans		
MATURITÉS CONSIDÉRÉES	Entre 1 mois et 30 ans		
DATES CONSIDÉRÉES	30/09/2020	31/03/2022	30/09/2023

TABLE 3.9 : Paramètre du test de sensibilité de la calibration SABR

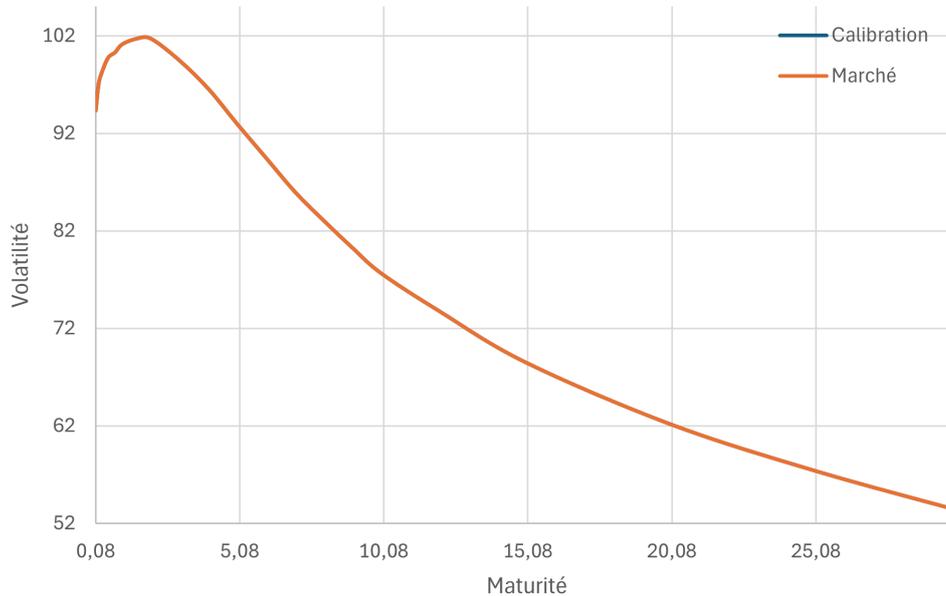


FIGURE 3.24 : Calibration théorique au 30/09/2023

Les résultats de cette section peuvent être mis en relation avec la section 2.5.3, où la calibration du LMM+ est comparée directement à celle du LMM-SABR. Les résultats des différents graphiques ne semblent pas indiquer une dépendance de la qualité de calibration du LMM-SABR vis-à-vis du contexte économique sous-jacent. Cependant, une étude plus approfondie à ce sujet, notamment en utilisant un plus grand ensemble de données, en prenant en compte de manière pratique le biais de la source de calibration, et en assurant une comparaison effective avec le LMM+, est nécessaire pour tirer une conclusion. Il reste intéressant de noter que les divers paramètres du LMM-SABR sont demeurés dans leurs ensembles respectif de définitions, et que le coût algorithmique de la calibration n'a pas varié. Ce test suggère donc bien que les autres qualités du LMM-SABR mises en avant dans cette étude ne sont pas restreintes à une date particulière.

3.3.2 Discussion sur la condition de semi-positivité et sur la nullité de Φ

La construction de la matrice de corrélation est une problématique spécifique aux modèles de marchés. Ces modèles diffusent souvent de très nombreux taux simultanément, ce qui induit une taille importante pour cette dernière. Une matrice A est dite semi-définie positive selon BHATIA (2009) (d'autres définitions équivalentes sont présentées dans le livre) si pour tout x de l'espace de Hilbert \mathcal{H} de dimension $n \in \mathbb{N}^*$

$$\langle x, Ax \rangle \geq 0,$$

où " $\langle \cdot, \cdot \rangle$ " représente le produit scalaire. Il est alors énoncé qu'une telle propriété est équivalent à être factorisable selon une décomposition de Choleski* permettant d'implémenter la corrélation dans la diffusion d'un processus quelconque. En pratique, l'espace est réel et la condition minimale sur la matrice de corrélation est ainsi d'être semi-définie positive, avec des valeurs comprises dans $[-1, 1]$. Le fait est qu'une telle condition est un point d'attention essentiel lors de la phase de calibration de la corrélation ("*One has to check at every step of a hypothetical calibration optimization that the resulting matrix is positive semidefinite*" dans BRIGO (2002)).

Dans le cas du LMM, il s'agit uniquement de corrélation de *forwards* ce qui en fait un problème déjà résolu. Il s'agit en effet de récupérer la matrice de corrélation la plus proche (problème résolu par (HIGHAM, 2002)), ce qui n'est rien d'autre que la matrice semi-définie positive la plus proche (problème plus général résolu par HIGHAM (1988)) conservant la diagonale ainsi que la condition d'appartenance à $[-1, 1]$ pour l'ensemble de ses éléments. Des implémentations d'algorithmes résolvant ce problème étant déjà populaires (c.f. SEABOLD et PERKTOLD (2010)[†] pour *Python*).

Le problème est que la matrice de corrélation du LMM-SABR n'est plus aussi légère que pour le LMM. Dans le cas du LMM c'est une matrice de taille $N \times N$ avec des données qui peuvent être approchées historiquement, tandis que pour le LMM-SABR c'est une matrice $2N \times 2N$ (cf. équation (2.19)) dont seulement 1/4 est approchable historiquement. Il s'agit donc de trouver la matrice de corrélation la plus proche, qui préserve en plus des conditions précédentes les sous-diagonales $(\Phi_{k,k})_k$ et $(\Phi_{k,k}^T)_k$ (issues de la diagonale de la corrélation *forward*-volatilité).

Aucun algorithme satisfaisant n'a été trouvé à propos de ce problème, il a donc été décidé de procéder à la calibration classique de la matrice de corrélation dans son ensemble (*i.e.* d'abord la calibration des SABR 2.4.2 sans imposer $\rho = 0$, puis la calibration de la corrélation sans imposer $\Phi = 0$) et de regarder la distance avec la matrice de corrélation semi-définie positive la plus proche ainsi que le temps de calcul pour son obtention. Les résultats ont mis en avant un temps de calcul excessif, avec une distance très élevée et une sous-diagonale très loin de la corrélation *forward*-volatilité et il a donc été décidé de forcer Φ à 0^\ddagger , faute de solution plus efficace.

3.3.3 *Free Boundaries SABR*

Des approches permettant de considérer des taux négatifs ont déjà été abordé dans la section 2.5. Une autre approche relativement populaire, mais plus subtile théoriquement parlant revient à considérer la barrière des 0 comme réflexive. C'est le *Free Boundaries SABR* (FBSABR) (ANTONOV et al., 2015) et cela fournit une diffusion sous la forme

$$\begin{cases} dF(t) &= \alpha(t)|F^\beta(t)|dW_F(t), \\ d\alpha(t) &= \nu\alpha(t)dW_\alpha(t), \end{cases}$$

avec la condition $\beta < 1/2$, ce qui est restreignant.

Une expression du prix des options européennes peut en être déduite, ce qui permet d'appliquer un autre mécanisme de calibration comparable à celui employé pour le SABR classique, mais ce n'est pas immédiat. Les taux ainsi modélisés ont de plus tendance à être assez élevés. Il est de plus clair qu'une telle approche ne permet pas de considérer un taux négatif strictement parlant, mais apporte simplement une réponse à la problématique du basculement vers les valeurs négatives suite à l'approche

*Ce qui induit entre autre la symétrie de la matrice

[†]le module *stats.correlation_tools*

[‡]Ce qui n'assure même pas la semi-définie positivité de la corrélation, mais implique en pratique une capacité à en trouver une assez proche qui ne change pas les valeurs de Φ

d'Euler. Il peut néanmoins être imaginer d'appliquer un tel modèle à un processus décalé comme ce qui est actuellement fait avec le SABR classique dans cette étude.

Conclusion

La modélisation des taux d'intérêt revêt une importance cruciale dans le domaine de l'assurance. La soudaine et vigoureuse hausse des taux de mars 2022 marque un changement de régime qui remet en question les standards jusqu'alors en vigueur. Le contexte des taux bas avait en effet vu le modèle LMM+ s'établir comme une référence en assurance, mais la remontée des taux a mis en lumière des problèmes théoriques et pratiques qu'il est naturel de chercher à combler. L'alternative du LMM-SABR se présente alors comme intuitive, car théoriquement proche du LMM+ tout en présentant des caractéristiques susceptibles de parer aux défauts du LMM+.

La modélisation en assurance est aujourd'hui encadrée par la *market consistency*, qui dicte la recherche du modèle représentant les taux de la manière la plus juste tout en restant viable en tant qu'élément au sein d'un GSE. Le LMM-SABR se distingue alors en ayant une calibration (sur *caplets*) objectivement plus simple que le LMM+ (sur *swaptions*) et permettant donc de mieux s'adapter à ce cadre réglementaire de modélisation. Le procédé est plus direct, et permet une diminution significative de l'effort algorithmique qu'impose le LMM+. Un tel gain n'est alors pas au détriment d'une moindre qualité, cette dernière semblant bien au contraire plus importante. Ceci semble la répercussion d'une plus grande accessibilité des paramètres du modèle : ces derniers ont un sens théorique clair, avec un impact sur le *smile* cohérent et régulier.

Cependant, avant de pouvoir exploiter efficacement le LMM-SABR, certaines problématiques techniques mises en exergues lors de cette étude doivent être adressées. L'utilisation d'un LMM-SABR par rapport à un LMM+ induit une augmentation de la taille de la matrice de corrélation. Ceci est un point très limitant, car cela conditionne la bonne définition du modèle. Cette matrice doit en effet être définie* positive, et c'est une condition qui n'est pas assurée. Il n'a alors pas été trouvé d'algorithme satisfaisant à ce sujet†. Une approche simple pour résoudre cette problématique serait de réduire le nombre de browniens simulés, adoptant ainsi une approche similaire à celle utilisée pour le modèle LMM+‡. Cette approche ne résout pas le problème, mais permet de revenir à une dimension où la recherche d'une matrice ayant les bonnes propriétés est faisable à la main. Cette réduction aurait pour autre avantage d'optimiser la diffusion du processus. Un autre sujet est à propos de la différence de calibration : le LMM-SABR est classiquement calibré sur *caplets* et le LMM+ sur *swaptions*. Des arguments peuvent être trouvés pour les deux choix, mais le LMM-SABR se démarque en proposant aussi une calibration sur *swaptions*§.

L'étude a de surcroît démontré un impact relativement faible du changement de modèle sur l'estimation du BE. L'impact pratique de l'utilisation du LMM-SABR ne devrait donc pas être trop important du point de vue d'un assureur. C'est donc une alternative séduisante, avec des avantages significatifs et dont les principaux défauts laissent place à des pistes de réflexions intéressantes et pro-

*Semi-définie est acceptable mais ne change rien au problème

†La recherche de la matrice de corrélation la plus proche est un sujet classique, mais ne préserve aucune sous-diagonale (ce qui est nécessaire dans le cas du LMM-SABR)

‡Le LMM+ diffuse 3 browniens au lieu de $N + 1$

§La calibration sur *caplet* avec le LMM+ est algorithmiquement trop coûteuse pour être envisagée

metteuses. Un tel modèle apparaît donc comme une solution viable pour une modélisation des taux flexible et bien adaptée aux besoins actuels de l'assurance.

Ces résultats sont néanmoins liés à un contexte. Certaines limites techniques ont été abordées plus haut, auxquelles s'ajoutent des limites plus théoriques. Le modèle ALM utilisé lors de l'estimation de l'impact est relativement abstrait et ne s'appuie pas sur un portefeuille réel spécifique. C'est de plus un modèle spécifiquement axé sur l'assurance vie, ce qui laisse la question de l'impact pour un assureur plus quelconque. L'étude de l'interprétation pratique des paramètres des modèles se base de même sur un jeu spécifique de données pour une date fixée. Il est impossible de donner un résultat général à ce propos, mais il serait intéressant de vérifier que les résultats présentés se poursuivent sur un échantillon plus vaste. Enfin, certains arguments théoriques en faveur du LMM-SABR nécessiteraient une application pratique la validité de leur valeur ajoutée. En particulier à propos de la calibration sur *swaption* du LMM-SABR, qui a ici été abordée d'un point de vue relativement théorique.

Bibliographie

- ACPR (2022). La situation des assureurs soumis à Solvabilité II en France au premier semestre 2022. Analyses et synthèses 143. ACPR. URL : https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20221125_as_143_assureurs_s2.pdf.
- ACPR (2022). Rapport annuel 2022. Rapport annuel.
- AIZAC, R. (2020). Les composantes de la formation du résultat sous IFRS 17. Mémoire d'actuariat. Lyon : ISFA, Univ. Clauder Bernard Lyon 1.
- ANDERSEN, L. et ANDREASEN, J. (2000). Volatility skews and extensions of the LIBOR market model. *Applied Mathematical Finance* 7.1, p. 1-32.
- ANDERSEN, L. et BROTHERTON-RATCLIFFE, R. (2001). Extended Libor Market Models with Stochastic Volatility. *Journal of Financial Abstracts eJournal*.
- ANDRES, H., ARROUY, P.-E., BONNEFOY, P., BOUMEZOUED, A. et MEHALLA, S. (2020). Fast calibration of the LIBOR Market Model with Stochastic Volatility based on analytical gradient. arXiv : [2006.13521 \[math.OC\]](https://arxiv.org/abs/2006.13521).
- ANTONOV, A., KONIKOV, M. et SPECTOR, M. (2015). The free boundary SABR: natural extension to negative rates. *Available at SSRN 2557046*.
- ARROUY, P.-E., BOUMEZOUED, A., LAPEYRE, B. et MEHALLA, S. (2022). Economic Scenario Generators: a risk management tool for insurance.
- BACHELIER, L. (1900). Théorie de la spéculation. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. T. 17, p. 21-86.
- BALL, L. M., LEIGH, D. et MISHRA, P. (2022). Understanding us inflation during the covid era. Rapp. tech. National Bureau of Economic Research.
- BALLAND, P. et TRAN, Q. (2013). SABR goes normal. *Risk* 26.6, p. 72.
- BALLY, V. et TALAY, D. (1996). The law of the Euler scheme for stochastic differential equations: I. Convergence rate of the distribution function. *Probability theory and related fields* 104, p. 43-60.
- BAZOT, G., BORDO, M. D. et MONNET, E. (2014). The Price of Stability: The balance sheet policy of the Banque de France and the Gold Standard (1880-1914). Rapp. tech. National Bureau of Economic Research.
- BDF (2022). Chiffres clés 2022. Rapport annuel.
- BEAN, C. R. (2006). Globalisation and inflation. *Bank of England Quarterly Bulletin, Winter*.
- BECKERS, S. (1980). The constant elasticity of variance model and its implications for option pricing. *the Journal of Finance* 35.3, p. 661-673.
- BÉNASSY-QUÉRÉ, A., BOONE, L. et COUDERT, V. (2003). Les taux d'intérêt. Ed. La Découverte.
- BERNANKE, B. S. et al. (2002). Deflation: making sure 'it' doesn't happen here. *Remarks before the National Economists Club, Washington, DC* 21.
- BHATIA, R. (2009). Positive definite matrices. Princeton university press.
- BLACK, F. et KARASINSKI, P. (1991). Bond and Option Pricing when Short Rates are Lognormal. *Financial Analysts Journal* 47, p. 52-59.
- BLACK, F. et SCHOLES, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *World Scientific Reference on Contingent Claims Analysis in Corporate Finance*, p. 3-21. eprint : <https://www>.

- [worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9789814759588_0001](https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/9789814759588_0001). URL : https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814759588_0001.
- BLOOMBERG (2021). Bloomberg Volatility Cube. Quantitative Analytics Bloomberg L.P. Bloomberg.
- BOERI, T. et GUIISO, L. (2008). The subprime crisis: Greenspan's legacy. *The first global financial crisis of the 21st century* 73.73, p. 37.
- BORDO, M. D. (1993). The Bretton Woods international monetary system: a historical overview. *A retrospective on the Bretton Woods system: Lessons for international monetary reform*. University of Chicago Press, p. 3-108.
- BORDO, M. D. et EICHENGREEN, B. (2007). A retrospective on the Bretton Woods system: lessons for international monetary reform. University of Chicago Press.
- BORDO, M. D. et SCHWARTZ, A. J. (2009). A retrospective on the classical Gold Standard, 1821-1931. University of Chicago Press.
- BOX, G. E. (1979). Robustness in the strategy of scientific model building. *Robustness in statistics*. Elsevier, p. 201-236.
- BRACE, A., GATAREK, D. et MUSIELA, M. (1997). The Market Model of Interest Rate Dynamics. *Mathematical Finance* 7.
- BRIGO, D. (2002). A note on correlation and rank reduction. *damianobrigo. it*.
- BRIGO, D. et MERCURIO, F. (2006). Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit. T. 2. Springer.
- CALDARA, D., CONLISK, S., IACOVIELLO, M. et PENN, M. (2022). The effect of the war in Ukraine on global activity and inflation. FEDS Notes. FEDS. URL : <https://www.federalreserve.gov/econres/notes/feds-notes/the-effect-of-the-war-in-ukraine-on-global-activity-and-inflation-20220527.html>.
- CHAN, K. C., KAROLYI, G. A., LONGSTAFF, F. A. et SANDERS, A. B. (1992). An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate. *The journal of finance* 47.3, p. 1209-1227.
- CHASE, J. M. et LONDON, F. (2008). LIBOR market model with SABR style stochastic volatility.
- CHOI, J. et WU, L. (2021). The equivalent constant-elasticity-of-variance (CEV) volatility of the stochastic-alpha-beta-rho (SABR) model. *Journal of Economic Dynamics and Control* 128, p. 104143.
- CHRISTENSEN, J., GAMBLE, J. M. et ZHU, S. (2020). Coronavirus and the Risk of Deflation. *FRBSF Economic Letter* 2020.11, p. 1-5.
- CHRISTIANSEN, M. C. et NIEMEYER, A. (2014). Fundamental definition of the solvency capital requirement in solvency II. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA* 44.3, 501-533.
- CORDIER, A. (2023). Études de la convexité de la courbe des taux dans un environnement de haute inflation et ses effets sur les fonds euros. Working paper - mémoire d'actuariat. Université Dauphine - PSL.
- COX, J. C., INGERSOLL, J. E. et ROSS, S. A. (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica* 53.2, p. 385-407.
- COX, J. C. et ROSS, S. A. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics* 3.1, p. 145-166.
- CRISPOLDI, C., WIGGER, G. et LARKIN, P. (2016). SABR and SABR LIBOR market models in practice: With examples implemented in python. Springer.
- De GALHAU, F. V. (2020). Les taux bas : quelles causes, et quels effets pour la France ? Rapp. tech. Banque de France.
- De LAUZON, F.-X. (2020). Intégration du risque immobilier dans l'univers Solvabilité 2. Mémoire d'actuariat. Paris : Institut du Risk Management.
- De VANDIÈRE, E. (2021). Implémentation du Libor Market Model +. Mémoire de fin d'étude. Paris : IP Paris - Sorbonne Université.
- DELBAEN, F. et SHIRAKAWA, H. (2002). A note on option pricing for the constant elasticity of variance model. *Asia-Pacific Financial Markets* 9, p. 85-99.
- DERIEN, A. (2010). Solvabilité 2 : une réelle avancée ?

- DEROGIS, L. (2021). Quel est l'effet du turnover obligataire sur le ratio de solvabilité d'un assureur vie ? Mémoire d'actuariat. Paris : ENSAE.
- DOWNES, J. et GOODMAN, J. E. (2014). Dictionary of finance and investment terms. Simon et Schuster.
- ECN (2021). Economic Bulletin. Issue 8 / 2021.
- EIOPA (2014). Technical Specification for the Preparatory Phase (Part I). EIOPA-14/209.
- EIOPA (2020). echnical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures. Technical documentation. EIOPA. URL : https://www.eiopa.europa.eu/system/files/2020-08/21.08.2020_-_technical_documentation.pdf.
- EIOPA (2022). Orientations sur la valorisation des provisions techniques. EIOPA-BoS-14/166.
- EMANUEL, D. C. et MACBETH, J. D. (1982). Further results on the constant elasticity of variance call option pricing model. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 17.4, p. 533-554.
- FLECKENSTEIN, M., LONGSTAFF, F. A. et LUSTIG, H. (2017). Deflation risk. *The Review of Financial Studies* 30.8, p. 2719-2760.
- FLESAKER, B. (1993). Testing the Heath-Jarrow-Morton/Ho-Lee model of interest rate contingent claims pricing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28.4, p. 483-495.
- GAMBER, E. N. et HUNG, J. H. (2001). Has the rise in globalization reduced US inflation in the 1990s? *Economic Inquiry* 39.1, p. 58-73.
- GARNIER, O., LHUISSIER, S. et PENALVER, A. (2019). Taux d'intérêt bas, quelle responsabilité de la politique monétaire? *Risques*, p. 71.
- GIRSANOV, I. V. (1960). On Transforming a Certain Class of Stochastic Processes by Absolutely Continuous Substitution of Measures. *Theory of Probability & Its Applications* 5.3, p. 285-301. eprint : <https://doi.org/10.1137/1105027>.
- GOLDYS, B., MUSIELA, M. et SONDERMANN, D. (1996). Lognormality of Rates and Term Structure Models. *Stochastic Analysis and Applications* 18.
- GOVERNEMENT (17 août 2022). LOI n° 2022-1158 du 16 août 2022 portant mesures d'urgence pour la protection du pouvoir d'achat. Journal officiel no 0189.
- HAEGEL, T. (2009). Solvabilité II - Impact de la nouvelle directive sur une société d'assurance non vie spécialisée dans l'assurance construction : Application et calibrage de la formule standard. Mémoire d'actuariat. Strasbourg : DUAS.
- HAGAN, P. et LESNIEWSKI, A. (2008). LIBOR market model with SABR style stochastic volatility. *JP Morgan Chase and Ellington Management Group* 32, p. 57.
- HAGAN, P. S., KUMAR, D., LESNIEWSKI, A. et WOODWARD, D. (2014). Arbitrage-free SABR. *Wilmott* 2014.69, p. 60-75.
- HAGAN, P. S., KUMAR, D., LESNIEWSKI, A. S. et WOODWARD, D. E. (2002). Managing smile risk. *The Best of Wilmott* 1, p. 249-296.
- HAGAN, P. S. et WEST, G. (2006). Interpolation methods for curve construction. *Applied Mathematical Finance* 13.2, p. 89-129.
- HEATH, D., JARROW, R. et MORTON, A. (1990). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: A Discrete Time Approximation. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 25.4, 419-440.
- HEATH, D., JARROW, R. A. et MORTON, A. J. (1987). Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates: a new methodology for contingent claims valuation. Working paper. University of Cornell.
- HEIDER, F., SAIDI, F. et SCHEPENS, G. (2021). Banks and negative interest rates. *Annual Review of Financial Economics* 13, p. 201-218.
- HENON, S. (2023). Cours modèle de Taux. Polycopié de cours. Université Paris Dauphine - PSL.
- HENON, S. et TURINICI, G. (2019). Modèle de Taux. Polycopié de cours. Université Paris Dauphine - PSL. URL : https://turinici.com/wp-content/uploads/cours/taux_isfapp_masefP21/cours_taux_Turinici_P21_v2_2.2.pdf (visité le 28/08/2023).

- HIGHAM, N. J. (1988). Computing a nearest symmetric positive semidefinite matrix. *Linear Algebra and its Applications* 103, p. 103-118.
- HIGHAM, N. J. (2002). Computing the nearest correlation matrix—a problem from finance. *IMA Journal of Numerical Analysis* 22.3, p. 329-343.
- HO, T. S. et LEE, S.-B. (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *the Journal of Finance* 41.5, p. 1011-1029.
- HULL, J. et WHITE, A. (avr. 1990). Pricing Interest-Rate-Derivative Securities. *The Review of Financial Studies* 3.4, p. 573-592. eprint : <https://academic.oup.com/rfs/article-pdf/3/4/573/24416170/030573.pdf>.
- INSTITUT DES ACTUAIRES (2018). Les Générateurs de scénarios économiques. Document d’Orientation.
- IRWIN, D. A. (2013). The Nixon shock after forty years: the import surcharge revisited. *World Trade Review* 12.1, p. 29-56.
- JÄCKEL, P. (2017). Implied normal volatility. *Wilmott* 2017.90, p. 54-57.
- JAMSHIDIAN, F. (1997). LIBOR and swap market models and measures. *Finance and Stochastics* 1, p. 293-330.
- JONDEAU, E. et ROCKINGER, M. (2001). Gram–Charlier densities. *Journal of Economic Dynamics and Control* 25.10, p. 1457-1483.
- JØRGENSEN, P. L. (2018). An analysis of the Solvency II regulatory framework’s Smith-Wilson model for the term structure of risk-free interest rates. *Journal of Banking & Finance* 97, p. 219-237.
- JOSHI, M. S. et REBONATO, R. (2001). A stochastic-volatility, displaced-diffusion extension of the LIBOR Market Model. Working paper. University of Oxford. URL : <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:16518658>.
- JOSHI, M. S. et REBONATO, R. (2003). A displaced-diffusion stochastic volatility LIBOR market model: motivation, definition and implementation. *Quantitative Finance* 3.6, p. 458-469. eprint : <https://doi.org/10.1088/1469-7688/3/6/305>.
- KACEM, M. (2017). Modélisation du risque action, ajustement symétrique et optimisation de portefeuille dans le cadre de Solvabilité-II. Mémoire d’actuariat. Lyon : ISFA, Univ. Clauder Bernard Lyon 1.
- KALLIS, G., KERSCHNER, C. et MARTINEZ-ALIER, J. (2012). The economics of degrowth. *Ecological economics* 84, p. 172-180.
- KARAMOKO, V. (2020). Etude comparative des référentiels IFRS phase 2, Solvabilité 2 et MCEV : exemple d’un contrat d’épargne mono support euro. Mémoire d’actuariat. Paris : CNAM.
- LABELLE, J. et SANTACREU, A. M. (2022). Global supply chain disruptions and inflation during the COVID-19 pandemic. Available at SSRN 4029211.
- LIFSET, R. D. (2014). A new understanding of the American energy crisis of the 1970s. *Historical Social Research/Historische Sozialforschung*, p. 22-42.
- MAITAL, S. et BARZANI, E. (2020). The global economic impact of COVID-19: A summary of research. *Samuel Neaman Institute for National Policy Research* 2020, p. 1-12.
- MALAMUD, S., TRUBOWITZ, E. et WÜTHRICH, M. V. (2008). Market Consistent Pricing of Insurance Products. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA* 38.2, 483–526.
- MAYHEW, S. (1995). Implied volatility. *Financial Analysts Journal* 51.4, p. 8-20.
- MBAH, R. E. et WASUM, D. F. (2022). Russian-Ukraine 2022 War: A review of the economic impact of Russian-Ukraine crisis on the USA, UK, Canada, and Europe. *Advances in Social Sciences Research Journal* 9.3, p. 144-153.
- MERTON, R. C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory* 3.4, p. 373-413.
- MILTERTSEN, K. R., SANDMANN, K. et SONDERMANN, D. (1997). Closed Form Solutions for Term Structure Derivatives with Log-Normal Interest Rates. *Journal of Finance* 52, p. 409-430.

- MINISTÈRE DES FINANCES ET DES COMPTES PUBLICS (2014). Décret n° 2014-1115 du 2 octobre 2014 fixant les catégories de prêts servant de base à l'application de l'article L. 313-2 du code monétaire et financier. Journal officiel no 0230.
- MISHKIN, F. S. (1981). The real interest rate: An empirical investigation. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 15, p. 151-200.
- MISHKIN, F. S. (1992). Is the Fisher effect for real?: A reexamination of the relationship between inflation and interest rates. *Journal of Monetary Economics* 30.2, p. 195-215.
- ODENDAHL, F., PENALVER, A. et SZCZERBOWICZ, U. (2020). L'action des banques centrales pour aider l'économie à survivre au Covid-19. *Banque de France, Bloc-note Éco-billet* 157.
- PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2009). Directive 2009/138/CE du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II). OJ L. 335/I.
- PELSSER, A. et STADJE, M. (2014). Time-consistent and market-consistent evaluations. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics* 24.1, p. 25-65.
- PITERBARG, V. (2003). A practitioner's guide to pricing and hedging callable LIBOR exotics in forward LIBOR models. Available at SSRN 427084.
- PLANCHET, F., THÉRON, P.-E. et KAMEGA, A. (2009). Scénarios économiques en assurance - Modélisation et simulation. Assurance Audit Actuariat. *Economica*, p. 235.
- PREMIÈRE MINISTRE (2022). Projet de loi portant mesures d'urgence pour la protection du pouvoir d'achat. Étude d'impact.
- REBONATO, R. (1999). Volatility and Correlation in the Pricing of Equity, FX and Interest-rate Options. (*No Title*).
- REBONATO, R. (2007). A time-homogeneous, SABR-consistent extension of the LMM. *Risk* 20.11, p. 102-106.
- REBONATO, R. (2012). Modern pricing of interest-rate derivatives: The LIBOR market model and beyond. Princeton University Press.
- REBONATO, R., MCKAY, K. et WHITE, R. (2009). The SABR/LIBOR Market Model: Pricing, calibration and hedging for complex interest-rate derivatives. John Wiley & Sons.
- ROBINSON, S., ARBEZ, G., BIRTA, L. G., TOLK, A. et WAGNER, G. (2015). Conceptual modeling: Definition, purpose and benefits. *2015 winter simulation conference (wsc)*. IEEE, p. 2812-2826.
- SCHACHERMAYER, W. et TEICHMANN, J. (2008). How close are the option pricing formulas of Bachelier and Black-Merton-Scholes? *Mathematical Finance: an international journal of mathematics, statistics and financial economics* 18.1, p. 155-170.
- SEABOLD, S. et PERKTOLD, J. (2010). statsmodels: Econometric and statistical modeling with python. *9th Python in Science Conference*.
- SGACPR (2020). Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques. Revue de l'ACPR. ACPR.
- SVENSSON, L. E. (1994). Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994.
- THÉRON, P.-E. (2007). Mesure et gestion des risques d'assurance : analyse critique des futurs référentiels prudentiel et d'information financière. Prix Actuariat France 2007. Theses. Université Claude Bernard - Lyon I. URL : <https://theses.hal.science/tel-00655896>.
- VARNELL, E. M. (2011). Economic Scenario Generators and Solvency II. *British Actuarial Journal* 16.1, 121-159.
- VASICEK, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5.2, p. 177-188.
- VEDANI, J., EL KAROUI, N., LOISEL, S. et PRIGENT, J.-L. (2017). Market inconsistencies of market-consistent European life insurance economic valuations: pitfalls and practical solutions. *European Actuarial Journal* 7, p. 1-28.

- VIALARD, P. (2022). Implémentation et optimisation du modèle LMM +. Mémoire de fin d'étude. Paris : IP Paris - ENSAE.
- WU, L. et ZHANG, F. (2006). LIBOR market model with stochastic volatility. *Journal of Industrial and Management Optimization* 2.2, p. 199-227.
- XIONG, J., DENG, G. et WANG, X. (2020). Extension of SABR Libor Market Model to handle negative interest rates. *Quantitative Finance and Economics* 4.1, p. 148-171.

Annexe A

Annexes

A.1 Changement de mesure

Le concept de mesure risque-neutre a déjà été présenté au §1.2.1, mais une présentation plus technique peut être utile à la bonne compréhension de certaines équations. L'ensemble de cette sous-partie est inspirée du cours de HENON (2023), très similaire à une version antérieure en libre accès (HENON et TURINICI, 2019). D'une manière théorique, une mesure est dite "risque neutre" lorsqu'elle rend une classe d'actif indépendante de l'aversion au risque des investisseurs. Il y en a donc plusieurs, et il est essentiel de savoir passer de l'une à l'autre.

Le théorème de Girsanov (GIRSANOV, 1960) est alors l'outil théorique essentiel à cela. En pratique si $(\theta_s)_{0 \leq s \leq T}$ est un processus adapté tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \theta_s^2 < \infty, \\ (L_t)_t = \left(e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds + \int_0^t \theta_s dW_s} \right)_t \end{array} \right. \text{ martingale}$$

pour $(W_t)_t$ un mouvement brownien alors

$$\left\{ \begin{array}{l} L_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}, \\ dW_t^* = dW_t - \theta_t dt, \end{array} \right.$$

avec $(W_t^*)_t$ un mouvement brownien sous \mathbb{Q} avec \mathbb{Q} la probabilité de densité L_T par rapport à \mathbb{P} . Il reste alors à définir les différentes mesures nécessaires à l'étude des modèles.

A.1.1 La mesure risque-neutre

Sur le marché des taux, les actifs de référence sont les zéro-coupons, la mesure risque neutre \mathbb{Q} est donc la mesure qui rend l'ensemble des zéro-coupons risque-neutres. C'est une mesure unique[†] et standard, le passage de \mathbb{P} à \mathbb{Q} n'est pas abordé. Sous cette mesure, il est vrai que pour toute maturité T , il existe un processus $(\Gamma(t, T))_t$ tel que

[†]Avec les hypothèses d'AOA et de complétude du marché

$$\frac{dZCB(t, T)}{ZCB(t, T)} = r_t dt + \Gamma(t, T) dW^{\mathbb{Q}}(t), \quad (\text{A.1})$$

l'indépendance du caractère martingale par rapport à la maturité rendant la démonstration de l'existence d'une telle mesure fondamentale pour le marché des taux. Le processus $(\Gamma(t, T))_t$ est le processus de volatilité log-normale* des zéro-coupons $ZCB(t, T)_t$. L'équation A.1 est équivalente à dire que $\widetilde{ZCB}(t, T) = e^{-\int_0^t r_s ds} ZCB(t, T)$ est une martingale sous \mathbb{Q} . Ce qui amène à l'égalité

$$ZCB(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t \right], \quad (\text{A.2})$$

qui met en lumière la simplicité des modèles de taux courts pour la modélisation de la structure des taux, et la différence entre les deux définitions† présentées pour l'actualisation.

A.1.2 Les mesures *forward*-neutres

Une mesure *forward*-neutre fait appel à la notion de changement de numéraire (+ref annexe?). L'idée générale d'une telle pratique est de vouloir rendre martingale un quotient, dont le numérateur est un actif de référence (*i.e.* sa valeur actualisée est \mathbb{Q} -martingale). Dans le cas présent, il s'agit d'un changement en posant

$$N_t = ZCB(t, T),$$

pour une maturité précise.

Une telle mesure est alors noté \mathbb{Q}^T pour faire référence à cette dépendance de la maturité des zéro-coupons numéraires. Sous cette mesure $(Y_t)_t = \left(\frac{S_t}{ZCB(t, T)} \right)^\ddagger$ est martingale avec $(\tilde{S}_t)_t$ martingale quelconque sous \mathbb{Q} . Entre autre en posant

$$S_t = \frac{1}{\tau} (ZCB(t, T_1) - ZCB(t, T_2)),$$

cela rend le *forward* $F(t, T_1, T_2)_t$ martingale et il est alors vrai qu'il existe un processus $(\gamma(t))_t$ tel que

$$\frac{dF(t, T_1, T_2)}{F(t, T_1, T_2)} = \gamma(t) dW^{\mathbb{Q}^T}(t),$$

où $\gamma(t)$ représente donc la volatilité log-normale du *forward*. Pour un ensemble de *forward* $(F_k)_k$ avec le même *tenor* τ , la mesure prend la forme \mathbb{Q}^{T_k} et la volatilité log-normale peut s'exprimer $\gamma_k(t)$. Le changement de mesure de \mathbb{Q} vers \mathbb{Q}^T s'écrit

$$dW_{\mathbb{Q}^T}(t) = dW_{\mathbb{Q}}(t) - \Gamma(t, T).dt, \quad (\text{A.3})$$

où $\Gamma(t, T)$ représente la volatilité log-normale du zéro-coupon de maturité T . Le passage de \mathbb{Q}^{T_k} vers \mathbb{Q}^{T_l} pour k et l quelconques dans \mathbb{N} s'en déduit immédiatement tel que

*appelé abusivement processus de volatilité

†*i.e.* soit avec un taux zéro-coupon, soit avec un taux sans risque

‡Il est remarqué que $\tilde{Y}_t = Y_t$

$$dW_{\mathbb{Q}^{T_k}}(t) = dW_{\mathbb{Q}^{T_l}}(t) + (\Gamma(t, T_l) - \Gamma(t, T_k)) .dt.$$

A.1.3 La mesure *swap* neutre

C'est une autre mesure introduite par changement de numéraire, cette fois en posant l'annuité en tant que numéraire telle que

$$N_t = A_{m,n}(t) = \sum_{k=m+1}^n \tau ZCB(t, T_k),$$

qui de manière similaire est pensé pour rendre martingale le taux *swap* $S_{m,n}(t)$. Ce qui est atteint en posant

$$S_t = ZCB(t, T_m) - ZCB(t, T_n),$$

qui est un actif de référence permettant d'écrire $S_{m,n}(t) = \frac{S_t}{N_t}$. Ainsi le taux *swap* est martingale, d'où le fait qu'une telle mesure s'écrive $\mathbb{Q}^{S_{m,n}}$, qui est souvent abrégée en \mathbb{Q}^S quand cela ne porte pas à confusion.

Le changement de mesure fait intervenir la grandeur suivante

$$\theta(t) = \frac{\sum_{k=m+1}^n \tau \Gamma(t, T_k) ZCB(t, T_k)}{\sum_{k=m+1}^n \tau_k ZCB(t, T_k)},$$

à travers la formule

$$dW_{\mathbb{Q}^{S_{m,n}}}(t) = dW_t - \theta(t) .dt,$$

quantifiant le changement de \mathbb{Q} vers $\mathbb{Q}^{S_{m,n}}$. Un changement de mesure avec \mathbb{Q}^T pouvant alors être déduit.

A.1.4 La mesure *LIBOR*-neutre

Il est parfois évoqué le terme de mesure *LIBOR*-neutre associé au numéraire

$$ZCB(t) = \frac{ZCB(t, T_m)}{\prod_{i=1}^m ZCB(T_{i-1}, T_i)} = \frac{ZCB(t, T_m)}{ZCB(0, T_m)},$$

où T_m est l'horizon sur lequel l'étude est faite. C'est un sujet introduit dans JAMSHIDIAN, 1997, décrivant cette mesure comme bien adaptée aux produits dérivés du *LIBOR* ("well-adapted to *LIBOR* [...] derivatives"). Cette mesure qui peut être noté \mathbb{Q}^* est en pratique parfois (souvent même selon ANDRES et al. (2020) p. 4) confondue avec \mathbb{Q} . Il peut être démontré (+dem ?) que

$$dW_{\mathbb{Q}^*}(t) = dW_{\mathbb{Q}}(t) - \Gamma(t, T_m).dt, \quad (\text{A.4})$$

la valeur de $\Gamma(t, T_m)$ étant en pratique très faible. Le numéraire introduit est très comparable à celui de la mesure *forward*-neutre de maturité T_m (c'est le même à un scalaire près). Le changement de mesure ne prenant pas en compte les constantes* il est naturel de retomber sur le même changement de mesure.

A.1.5 Le changement de mesure en pratique

Les changements de mesures précédents sont théoriques, et n'apparaissent en général pas tel quel dans les équations de diffusions. Il s'agit alors de travailler avec ces équations en partant de l'égalité (+dem annexe)

$$\begin{aligned} d\left(\frac{ZCB(t, T)}{ZCB(t, U)}\right) &= \frac{ZCB(t, T)}{ZCB(t, U)} (\Gamma(t, U) - \Gamma(t, T)) \times (\Gamma(t, U).dt - dW(t)), \\ &= -\frac{ZCB(t, T)}{ZCB(t, U)} (\Gamma(t, U) - \Gamma(t, T)) \times dW_{\mathbb{Q}^U}(t), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

qui permet d'en déduire que

$$\tau_j dF_j(t) = d\left(\frac{ZCB(t, T_{j-1})}{ZCB(t, T_j)}\right) = -(1 + \tau_j F_j(t))(\Gamma_j(t) - \Gamma_{j-1}(t))dW_{\mathbb{Q}^j}(t),$$

et donc par identification que

$$\frac{dF_j(t)}{F_j(t)} = \frac{1 + \tau_j F_j(t)}{\tau_j F_j(t)} (\Gamma_{j-1}(t) - \Gamma_j(t))dW_{\mathbb{Q}^j}(t) = \gamma_j(t)dW_{\mathbb{Q}^j}(t),$$

en conservant les notations introduites dans cette sous-partie et cela fournit ainsi une valeur de la volatilité log-normale des *forwards* par identification. Cela permet donc d'en déduire par somme télescopique que

$$\Gamma_j(t) = \sum_{l=1}^j \frac{\tau_l F_l(t)}{1 + \tau_l F_l(t)} \gamma_l(t) + \Gamma_0(t),$$

et de déduire les changements de mesures suivants pour $k < N^\dagger$

$$\left. \begin{aligned} dW_{\mathbb{Q}^{T_k}}(t) &= dW_{\mathbb{Q}^{T_N}}(t) - \sum_{l=k+1}^N \frac{\tau_l F_l(t)}{1 + \tau_l F_l(t)} \gamma_l(t).dt \\ dW_{\mathbb{Q}^{T_k}}(t) &= dW_{\mathbb{Q}} - \left(\Gamma_0(t) + \sum_{l=1}^k \frac{\tau_l F_l(t)}{1 + \tau_l F_l(t)} \gamma_l(t) \right).dt \\ dW_{\mathbb{Q}^{T_k}}(t) &= dW_{\mathbb{Q}^*} + \sum_{l=k+1}^m \frac{\tau_l F_l(t)}{1 + \tau_l F_l(t)} \gamma_l(t).dt \end{aligned} \right\}. \quad (\text{A.6})$$

*En effet dans la formule (ref annexe) le changement de mesure s'identifie à travers $\frac{d\tilde{N}_t}{\tilde{N}_t}$, donc il se simplifie

†en utilisant A.4 pour la troisième formule

A.2 Rappels sur les modèles vanilles

Un *call* est un contrat émit sur un marché financier entre deux investisseurs, c'est une option sur achat. L'émetteur du *call* s'engage à vendre un sous-jacent S au détenteur du *call* à un certain prix K (le *strike*), au bout d'une certaine maturité T , dans l'éventualité où le détenteur en question décide d'exercer son option. Le *payoff* de cette option (pour le détenteur) vaut $(S - K)^+ \geq 0$. Le complémentaire d'un *call* est un *put*, c'est une option sur vente et son *payoff* est $(K - S)^+ \geq 0$.

Pour détenir un *call*, l'investisseur doit payer un prix d'entrée qui prend en compte l'évolution probable du sous-jacent, le *strike*, l'évolution de la *time value* en fonction du taux sans risque, et la maturité de l'option. Un tel prix prend la forme $\mathbb{E} \left[e^{-\int_0^t r_s ds} (S_T - K)^+ \right]$, l'évolution du sous-jacent étant en général supposée stochastique. Il existe alors deux modèles usuels pour décrire leur évolution*

- le modèle de Bachelier (BACHELIER, 1900),

$$S_t = S_0(r.t + \sigma W_t)$$

- le modèle de Black (BLACK et SHOLES, 1973),

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right).t}$$

avec W_t un brownien, r le taux court et σ une constante appelée la volatilité implicite. Ces deux modèles permettent de donner une évaluation du prix d'options selon les différents paramètres évoqués. Les différences entre ces deux prix sont décrites dans SCHACHERMAYER et TEICHMANN (2008).

Les formules de prix pour un *call* donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Call}^{\text{Black}}(S_t, K, \sigma, T, t, r) = e^{-r.(T-t)} (S_t.\Phi(d_1) - K.\Phi(d_2)), \\ \text{Put}^{\text{Black}}(S_t, K, \sigma, T, t, r) = e^{-r.(T-t)} (-S_t.\Phi(-d_1) + K.\Phi(-d_2)), \\ d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (\sigma^2/2).(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 = d_1 - \sigma.\sqrt{T-t}, \end{array} \right.$$

dans le cas de Black et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Call}^{\text{Bachelier}}(S_t, K, \sigma, T, t, r) = e^{-r(T-t)}. \sigma\sqrt{T-t} (d.\Phi(d) + \phi(d)), \\ \text{Put}^{\text{Bachelier}}(S_t, K, \sigma, T, t, r) = e^{-r(T-t)}. \sigma\sqrt{T-t} (-d.\Phi(-d) + \phi(-d)), \\ d = \frac{S_t - K}{\sigma\sqrt{T-t}}, \end{array} \right.$$

dans le cas de Bachelier, avec Φ la fonction de répartition et ϕ la fonction de densité de probabilité de la loi normale centrée.

Pour chaque modèle, si les paramètres d'une option sont fixés, alors la volatilité implicite détermine entièrement le prix. Il y a une bijection entre ces deux valeurs et la fonction du prix peut alors être inversée ("Brenner and Subrahmanyam (1988) showed that the Black-Scholes formula can be inverted" dans MAYHEW (1995)[†] avant une discussion sur diverses techniques de calcul à ce propos).

*la diffusion est ici supposée être sous \mathbb{Q} avec un taux court constant et déterministe

[†]Dans le cas de Black, l'expression de Bachelier ne posant pas le même problème comme cela peut être vu dans JÄCKEL (2017)

Il est alors plus fréquent sur les marchés de parler de volatilité (implicite) lorsqu'il s'agit d'évaluer le prix d'une option, car cela permet d'éviter d'inclure des biais de modélisation (comme par exemple avec la convention de jours choisie, ou selon les pratiques d'actualisation). Dans le cas du modèle de Black, une expression simple existe en fonction de la volatilité instantanée du processus. Si le sous-jacent suit la dynamique

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma_t dW_t,$$

sous \mathbb{Q} alors sa volatilité implicite log-normale est directement (+ref +détails?)

$$\sigma^B = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^T \sigma_u^2 du}, \quad (\text{A.7})$$

et ne dépend pas du *strike*.

A.3 Calibration du LMM-SABR sur *swaptions*

La formule classique du SABR, qui est présentée dans l'équation 2.13 donne l'expression de la diffusion de *forwards*, et nécessite la calibration sur les options associées : les *caplets* et *floorlets*. La formule de calibration rappelée dans le cas de Bachelier dans l'équation 2.15 nécessite uniquement la présence d'un *call*. C'est pour cela qu'une telle formule peut être déclinée dans le cas d'un modèle d'action ou dans le cas d'un modèle de taux *swap* prenant alors comme source de calibration des volatilités implicites de *swaptions*.

L'adaptation de la formule 2.13 dans le cas d'une calibration sur volatilité *swaption* donne sous \mathbb{Q}^S

$$\begin{cases} dS_{m,n}(t) &= \alpha_{m,n}(t) S_{m,n}(t)^{\beta_{m,n}} dW_{S_{m,n}}(t), \\ d\alpha_{m,n}(t) &= \nu_{m,n} \alpha_{m,n}(t) dW_{\alpha_{m,n}}(t), \end{cases}$$

et il est important de remarquer que le k qui permettait d'identifier de manière unique chaque taux est devenu un (m, n) . En effet, si le taux est fixé (par exemple EURIBOR-6M) le k désigne un taux *forward* précis, et l'équivalent pour un taux *swap* nécessaire à l'unicité de sa désignation est le couple maturité et *tenor* qui est renseigné dans (m, n) .

Il y a donc toujours quatre paramètres, et en admettant qu'il s'agisse uniquement de valoriser des *swaptions* il n'y rien d'autre à faire. C'est alors un modèle de taux *swap*. Sauf que ce qui est nécessaire ici en assurance est la modélisation de la structure des taux, *i.e.* les $(F_k)_k$. Il faut donc trouver un lien entre des paramètres SABR de *swaptions* sous \mathbb{Q}^S et des paramètres SABR de *forwards* sous \mathbb{Q}^{TN} . De même, il faut exprimer les browniens des *forwards* en fonction des browniens des *swaptions*. Les notations employées pour les *forwards* sont celles des équations 2.19 et 2.24, et l'ensemble des sommes qui suivent sont entre m et n tel que dans la définition du taux *swap*. Ainsi, selon REBONATO et al. (2009) (chapitre 6), il peut être démontré que*

*REBONATO et al. (2009) utilise une autre convention pour les *forwards* (*i.e.* $F_i(t) = F(t, T_i, T_{i+1})$) ce qui ne pose pas de problème si les sommes ne sont pas précisément indicées (d'où le choix de les laisser ainsi)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{m,n} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i,j} \left(\varpi_{i,j} \cdot W_i^0 \cdot W_j^0 \cdot s_i(0) \cdot s_j(0) \cdot \int_0^T g_i(s) g_j(s) ds \right)} \\ \beta_{m,n} = \sum_k \omega_k \beta_k \\ \Phi_{m,n} = \sum_{i,j} \Omega_{i,j} \Phi_{i,j}, \\ \nu_{m,n} = \frac{1}{\alpha_{m,n} \cdot T} \sqrt{2 \sum_{i,j} \left(\varpi_{i,j} \cdot \vartheta_{i,j} \cdot W_i^0 \cdot W_j^0 \cdot s_i(0) \cdot s_j(0) \int_0^T g_i(s) \cdot g_j(s) \cdot \hat{h}_{i,j}(s)^2 \cdot s \cdot ds \right)} \end{array} \right.$$

où $T = T_n$ l'expiration du *swap* et avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{h}_{i,j}(t) = \sqrt{\frac{1}{t} \int_0^t h_i(u) \cdot h_j(u) \cdot du}, \\ W_k^t = \omega_k \frac{F_k^{\beta_k}(t)}{S_{m,n}^{\beta_{m,n}}(t)}, \\ \Omega_{i,j} = \frac{2 \cdot \varpi_{i,j} \cdot \Phi_{i,j} \cdot W_i^0 \cdot W_j^0 \cdot s_i(0) \cdot s_j(0) \cdot \int_0^T g_i(u) \cdot g_j(u) \cdot \hat{h}_{i,j}(u)^2 \cdot u \cdot du}{(\nu_{m,n} \cdot \alpha_{m,n} \cdot T)^2}, \end{array} \right.$$

en remarquant que l'ensemble de ces formules sont des approximations. L'argument principal derrière ces formules étant l'approche du *freezing* de coefficients, il faut reconnaître une forme de ressemblance dans la calibration sur *swaptions* du LMM-SABR et le début de la calibration du LMM+ évoqué au §2.2.2. La démonstration précise est relativement technique et peut être consultée dans REBONATO et al. (2009).

Il est intéressant de remarquer que cela laisse une certaine liberté sur les paramètres des *forwards*. Il peut donc être imaginé une calibration où la fonction objectif est une combinaison de volatilités de *caplets* et de *swaptions* et où un degré de tolérance entre ces derniers permet de réguler le bon déroulé de l'opération. Par exemple, il peut être fait en premier lieu une calibration sur *caplets* qui fournit un jeu de paramètres, qui sont ensuite optimisés pour que la calibration sur *swaption* soit optimale.

A.4 Compléments sur l'accessibilité des paramètres

Figures complémentaires à l'étude du LMM-SABR

Un résultat intermédiaire de l'étude du paramètre α sur le *smile* d'étude peut être observé sur le graphique A.1 où les abscisses représentent les *strikes*, respectivement les différences de α , et les ordonnées les différences de volatilités en points de base. Autrement dit, si $\sigma(s, \alpha)$ représente la volatilité pour un *strike* s et un paramètre α donné, si α_0 représente un minimum arbitraire pour le paramètre α lié à cette étude, alors le graphique A.1 représente $\sigma(s, \alpha_0 + \delta) - \sigma(s, \alpha_0)$ en fonction de s et de δ . La légende n'est pas précisée par soucis de lisibilité, mais la variation du paramètre α se fait par incrément positif de 3×10^{-4} .

Il est remarqué sur le graphique A.2 d'autre part que le cas $\beta = 0$ (*i.e.* normal) est particulier et peu comparable au reste.

Les courbes de la figure A.3 démontrent un comportement intéressant mais relativement complexe. Elles ont par exemple tendance à se croiser vers le point d'inflexion, qui semble lui-même bouger en fonction de β . Cela peut faire référence au caractère spécifique de β qui a un impact sur la *backbone*. C'est un paramètre qui a impact plus subtil que α . Il s'agit de la variation de la volatilité *ATM* au cours du temps (cf. HAGAN et al. (2002) pour plus de détails).

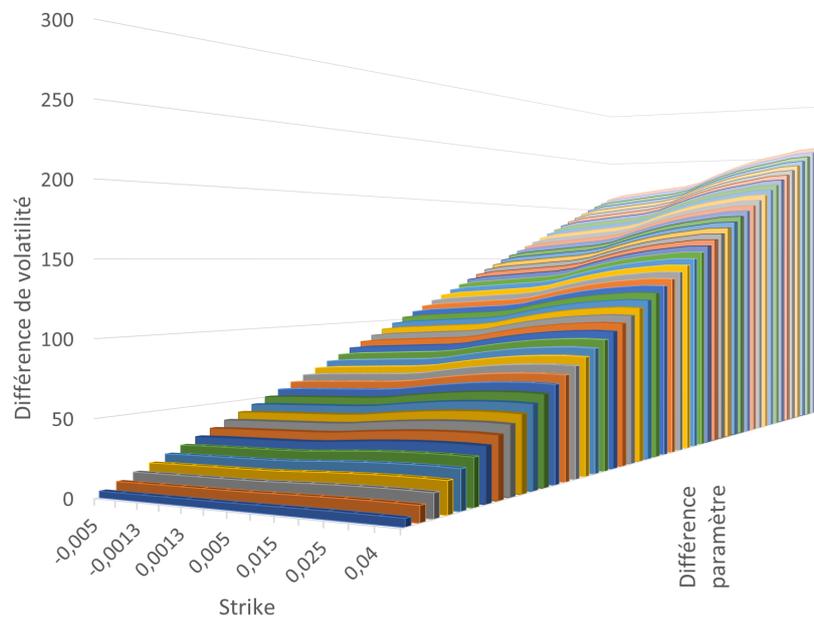


FIGURE A.1 : Surface de variation de la volatilité en fonction de α

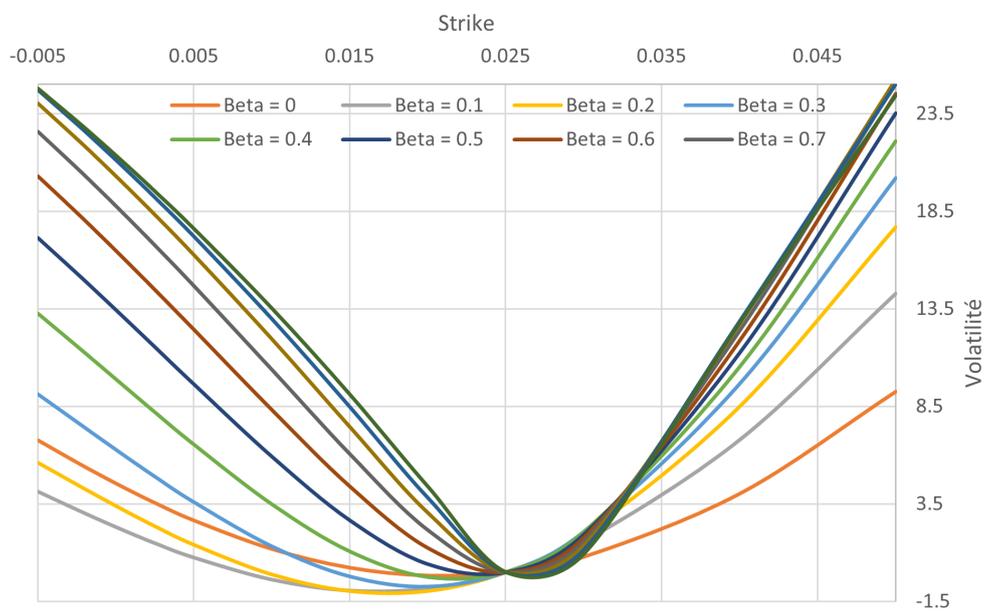


FIGURE A.2 : Étude de la variation du *smile* en fonction de la variation du paramètre β avec ajustement

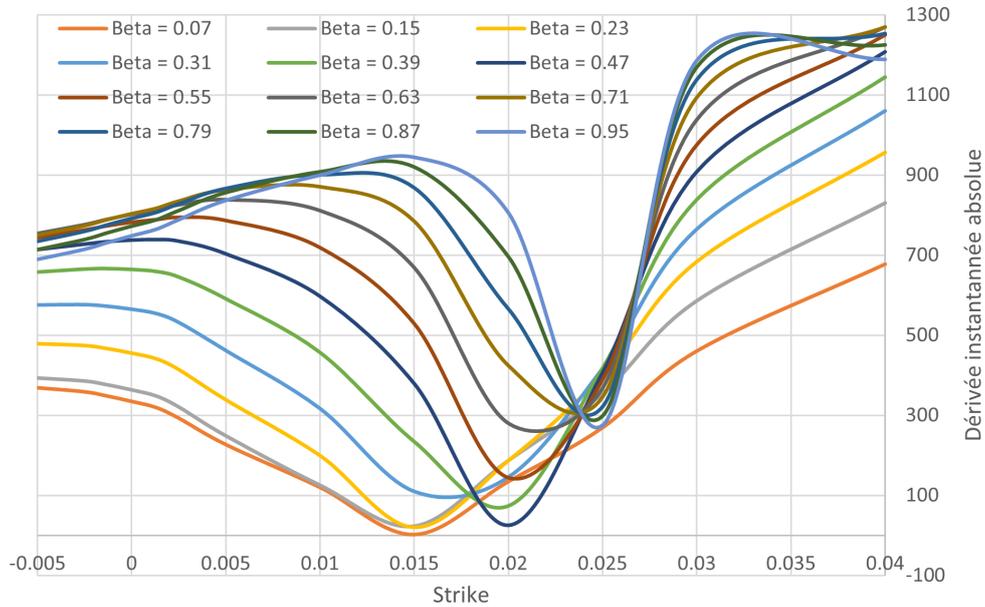


FIGURE A.3 : Étude de la variation de la dérivée instantannée absolue *smile* en fonction de la variation du paramètre β

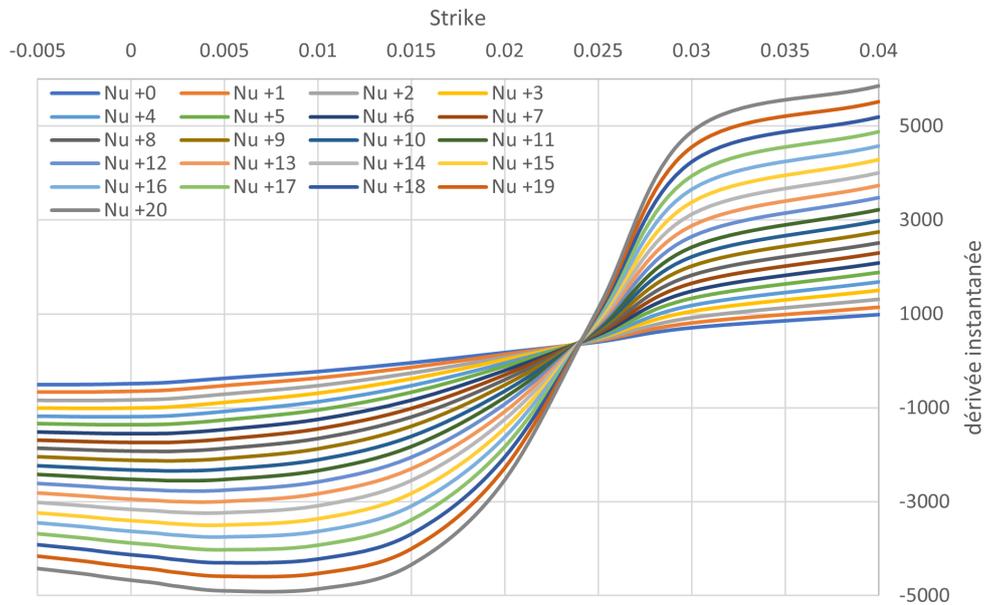
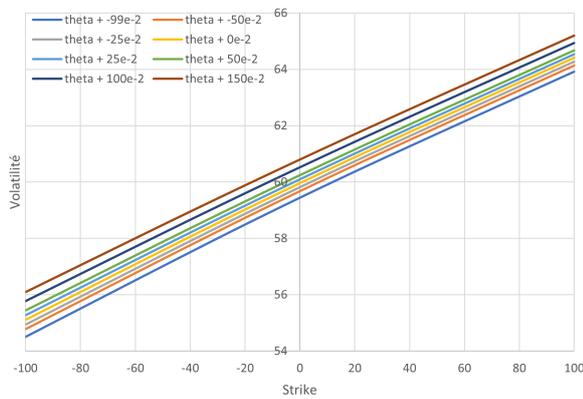


FIGURE A.4 : Étude de la variation de dérivé instantannée en fonction de la variation du paramètre ν

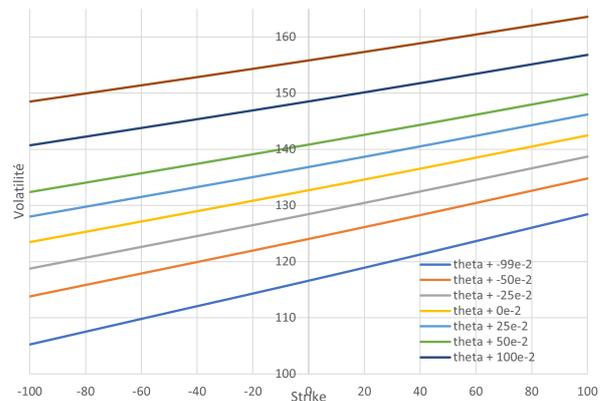
Le graphique A.4 ressemble beaucoup au graphique 3.4, car les deux paramètres ont un impact sur une dérivée (d'ordre 3 et 2 respectivement). Cela ne signifie par contre pas qu'ils ont globalement un même impact, mais simplement qu'en augmentant l'ordre de dérivé, leur impact devient comparable (mais différent). Par exemple sur le graphique A.4, la variation de la dérivée du *smile* est moins régulière que sur 3.4. A propos du graphique A.4 spécifiquement, seule la régularité du déplacement de la dérivée du *smile* peut être affirmée.

Interprétabilité des paramètres du CIR

L'impact des paramètres liés à la partie CIR du modèle est plus subtil à appréhender. Ils ont cette fois un impact sur la *scaled volatility* au lieu du facteur de mise à l'échelle. Ce n'est d'autre part plus une fonction déterministe, mais une équation de diffusion d'un processus stochastique. Le paramètre θ est le seul pour lequel une interprétation claire est possible. Il représente en effet la moyenne sur le long terme. Il est donc naturel d'observer un impact positif de ce paramètre sur le *smile* et ce, d'autant plus sur le long terme. Un résultat de son étude peut être observé sur les graphiques A.5 pour une maturité de, respectivement 1 an et 30 ans et un *tenor* de 5 ans et 10 ans.



(a) Maturité 1 an, *tenor* 5 ans



(b) Maturité 30 ans, *tenor* 10 ans

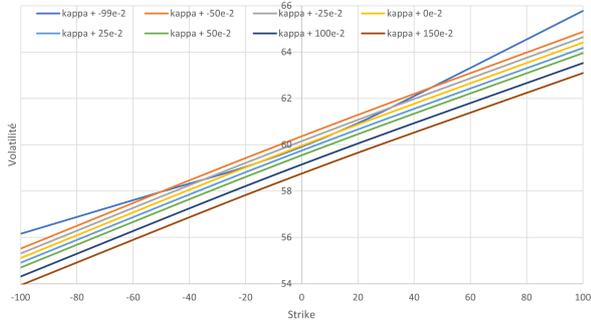
FIGURE A.5 : Étude de la variation du *smile* en fonction de la variation du paramètre θ

Le paramètre κ représente quant à lui la vitesse de convergence vers θ . Il va donc avoir un impact sur la différence d'impact de θ et ϵ entre le long terme et le court terme. Mais il est par contre peu évident d'en déduire un impact indépendant précis pour ces paramètres fixés. Enfin le paramètre ϵ dirige lui la volatilité de la *scaled volatility*, et il est assez peu évident d'imaginer la signification que cela peut avoir sur le *smile*. Un parallèle avec la paramètre ν du SABR peut être fait, et cela peut se voir comme une augmentation de l'ampleur du *smile*. Les tests respectifs de ces paramètres peuvent être observés sur les graphiques A.6 et A.7.

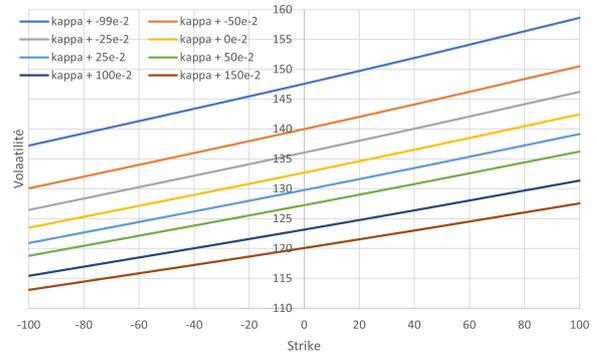
Il y a une forte dépendance entre le court terme et le long terme dans les exemples présentés. Cela peut être observé sur le graphique A.6* à propos de la différence de niveau du *smile* et dans le graphique A.7 à propos du déplacement du point d'inflexion (qui est représenté par l'*ATMf*). A propos de ϵ , le décalage vers la droite du point d'inflexion n'est pas surprenant. Ce dernier a en effet lieu pour l'*ATMf*[†], qui se décale vers la droite pour une maturité élevée.

*Le comportement étrange pour $\kappa - 99\%$ n'est pas surprenant étant donné que cela atteint la limite de son ensemble de définition

[†]ATM-Futur

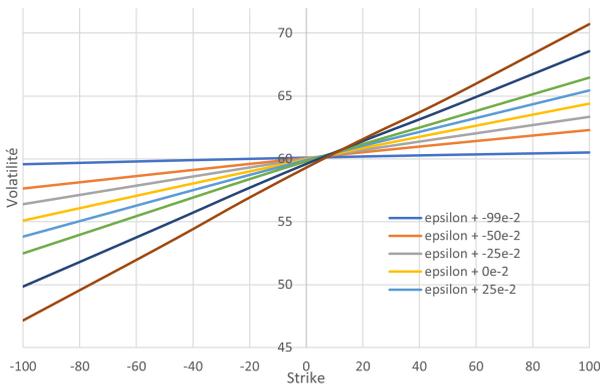


(a) Maturité 1 an, *tenor* 5 ans

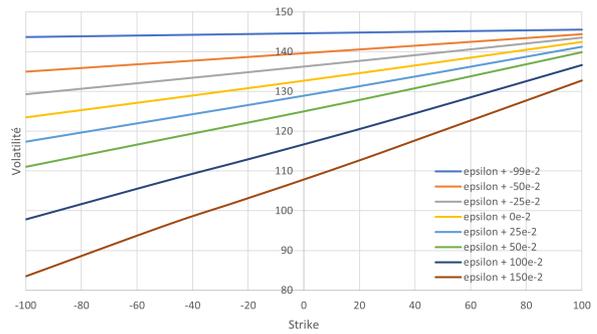


(b) Maturité 30 ans, *tenor* 10 ans

FIGURE A.6 : Étude de la variation du *smile* en fonction de la variation du paramètre κ



(a) Maturité 1 an, *tenor* 5 ans



(b) Maturité 30 ans, *tenor* 10 ans

FIGURE A.7 : Étude de la variation du *smile* en fonction de la variation du paramètre ϵ

A.5 Configuration du modèle ALM

Paramètres de projection	valeur	unité
Nombre de scénarios	1000	scénarios
Durée de projection	50	ans
Année de départ	2022	

Stocks initiaux	valeur	unité
VNC des actifs	11 000 000 000	€
Provisions mathématiques	10 400 000 000	€
PPE initiale	450 000 000	€
Réserve de capitalisation initiale	150 000 000	€

Réinvestissement obligataire	valeur	unité
Maturité obligation minimum	8	ans
Maturité obligation maximum	10	ans

Frais et impôts	valeur	unité
Taux d'inflation annuel	0,00	%
Taux de frais financier (sur garde et produits)	0,20	%

Produits financiers	valeur	unité
Taux de dividende	3,00	%
Taux de loyer	4,50	%

Paramètres de seuils (en % des PM)	valeur	unité
Taux de PPE min	1,00	%
Taux de PPE max	8,00	%
Taux de PVL min	0,50	%
Taux de MVL min	0,50	%

Répartition de fin de projection	valeur	unité
Part des PVL pour les assurés	85,00	%

FIGURE A.8 : Configuration des hypothèses du modèle ALM (fig. A.1 de CORDIER (2023))