

Mémoire présenté devant l'Université de Paris-Dauphine
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine
et l'admission à l'Institut des Actuares

le

Par : Clotaire AUGEREAU

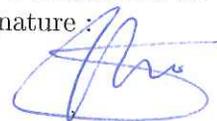
Titre : Applications de la théorie des jeux à la réassurance RC Auto d'un groupe d'assureurs.

Confidentialité : Non Oui (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuares :*

*Entreprise : Covéa
Nom : Adam SENIO
Signature :*



*Membres présents du Jury du Certificat
d'Actuaire de Paris-Dauphine :*

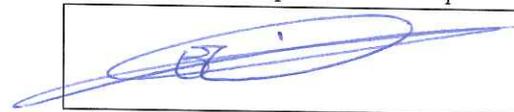
*Directeur de Mémoire en entreprise :
Nom : Emmanuel DUBREUIL
Signature :*



*Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

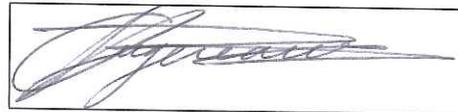
Secrétariat :

Signature du responsable entreprise



Bibliothèque :

Signature du candidat



Résumé

En France, la responsabilité civile automobile expose les assureurs à des pertes illimitées. Afin de limiter leur exposition et de respecter les seuils de tolérance au risque, ces derniers ont quasi-systématiquement recours à un niveau de mutualisation supplémentaire à l'aide de la réassurance.

Un ensemble d'interactions entre agents économiques est donc à l'origine de chacun des liens contractuels de réassurance. Leur modélisation peut ainsi s'appuyer sur des outils de la théorie des jeux ; cette perspective est le fondement de ce mémoire.

En effet, la cession de risque se traduit par un abandon certain d'une partie des résultats en contrepartie de la cession probabilisée d'une volatilité plus importante. Dès lors, l'assureur définit sa stratégie au sein de deux marchés concurrentiels : celui de l'assurance et celui de la réassurance. La valeur de la prime, reçue dans le premier et versée dans le second, est au centre de cette stratégie. Les méthodes de tarification en réassurance permettent, dans ce cadre, d'apporter des éléments de réponse aux décideurs qui arbitrent les enjeux de cessions et d'offrir une base de référence dans la construction de programmes de réassurance.

Ce mémoire considère le cas d'étude d'un programme de réassurance RC Auto d'un groupe d'assureurs. Le premier développement consiste à tarifer des traités non-proportionnels pour chacune de ses entités. De la construction de bases de données à l'obtention des primes, la ligne de conduite choisie est celle de méthodes robustes et adaptées aux spécificités de cette branche. Le second développement aborde une voie parmi les nombreuses tracées par les travaux de recherche de « contrats de réassurance optimaux ». Au travers de concepts issus de la théorie des jeux, une analyse du comportement des entités dans un cadre contraignant le niveau de risque conservé par les assureurs est réalisée selon deux approches : la coopération interne et la cession externe.

Mots-clés : Réassurance, Théorie des jeux, Tarification, Responsabilité Civile Automobile, Groupe d'assureurs.

Abstract

In France, motor third-party liability exposes insurers to unlimited losses. In order to limit their exposure and respect risk tolerance thresholds, insurers almost invariably resort to an additional level of mutualisation through reinsurance.

A set of interactions between economic agents is therefore at the origin of each contractual reinsurance link. Thus, their modelling can be based on game theory tools; this perspective is the basis of this master's thesis.

Indeed, the cession of risk corresponds to a certain abandonment of part of the results in exchange for the probable cession of greater volatility. The insurer therefore defines its strategy within two competitive markets: the insurance market and the reinsurance market. The value of the premium, received in the former and paid in the latter, is central to this strategy. In this context, reinsurance pricing methods have been used to provide answers to decision-makers who are arbitrating cession issues and to offer a reference basis for the construction of reinsurance programmes.

This master's thesis considers the case study of a motor third-party liability reinsurance programme for a group of insurers. The first development consists of pricing non-proportional treaties for each of its entities. From building databases to obtaining premiums, the aim is to implement robust methods adapted to the specificities of this line of business. The second section addresses one of the many avenues explored in the search for "optimal reinsurance contracts". Using game theory's concepts, an analysis of entities behaviour in a framework constraining the level of risk retained by insurers is carried out using two approaches: internal cooperation and external cession.

Keywords : Reinsurance; Game Theory, Tarification, Motor third-party liability, Group of insurers.

Note de Synthèse

Contexte

Entre 2021 et 2023, les coûts de la réassurance ont augmenté, l'appétit pour des programmes à franchises basses a disparu et des clauses restreignant la cession se sont de plus en plus généralisées. Ces phénomènes ont particulièrement touché la branche RC Auto, qui, de par l'exposition illimitée qu'elle implique, constitue pourtant une branche dans laquelle la cession est quasi-systématique pour les assureurs. Dès lors, ceux-ci ont tendance à se tourner vers des solutions extérieures à ce marché.

La réassurance est un transfert de risque qui se doit de répondre à des besoins multiples et divers, propres à chaque assureur. Néanmoins, dans la cession de risque, deux points de vues sont toujours à concilier. En effet, les contrats de réassurance n'existent que subsidiairement à un accord entre assureurs et réassureurs. De multiples interactions entre ces agents économiques sont donc nécessaires pour trouver un point d'équilibre entre appétits des réassureurs et besoins de l'assureur. La théorie des jeux fournit justement un ensemble d'outils permettant d'analyser un tel processus de prise de décision.

La considération d'un programme de réassurance d'un groupe d'assureurs implique une conciliation supplémentaire d'appétits et de besoins (entre ses entités). Mais l'existence d'un groupe mutualiste a justement pour but de garantir des partenariats solides à ses membres. Des stratégies de groupe peuvent ainsi être mises en place (si celles-ci sont bien « profitables » à tous) et notamment des cessions de réassurances entre ses entités (i.e. cession interne) en amont ou en place des cessions faites aux marchés.

L'objectif de cette étude est d'analyser, sous le prisme de la théorie des jeux, la construction de programmes de réassurance pour chaque entité d'un groupe d'assureurs, avec ou sans stratégie globale.

A. Modélisation du risque de chaque entité

Avant même de commencer à construire des programmes de réassurance, l'ensemble de la sinistralité « grave » (i.e. les sinistres aux montants extrêmes) doit être maîtrisée. En effet, les contrats de réassurance reposent sur l'adéquation d'un niveau de couverture et d'un prix ; aussi, l'association d'un niveau de risque (i.e. une charge cédée probable) à chaque contrat possible est nécessaire.

L'assomption faite dans ce mémoire est d'utiliser un modèle collectif pour représenter les pertes graves de chaque entité du groupe. Ainsi, pour chacune des six mutuelles offrant des garanties RC Auto individuelles, deux étapes sont à distinguer : la première, permet d'atteindre une compréhension fine du portefeuille et de son évolution ; la seconde sert à modéliser les charges ultimes (en trois sous-étapes), à partir desquelles le calibrage d'un modèle collectif est réalisé.

A.1. RC Auto : garantie et données spécifiques

Une assurance couvrant la responsabilité civile automobile est obligatoire pour tout possesseur de véhicule terrestre à moteur. Couvrant l'ensemble du territoire français, cette obligation implique des relations concurrentielles très fortes entre les assureurs mais ce n'est pas le seul point du cadre juridique occasionnant une sinistralité bien spécifique. En ce sens, dès la définition de cette garantie, trois caractéristiques centrales apparaissent :

- L'exposition de l'assureur est illimitée.
- Le montant de tout sinistre est très majoritairement défini par un facteur totalement inconnu avant la déclaration : la victime.
- L'indemnisation de dommages corporels implique des préjudices patrimoniaux et non-patrimoniaux, donc des évaluations particulièrement complexes.

Sur ce troisième point, la composante juridique ne s'arrête pas à la définition mais encadre aussi l'ensemble du déroulé, des méthodes de valorisation et de paiement des sinistres. Cet environnement implique des liquidations de sinistres lentes, d'autant plus lorsque la « gravité » est importante. Le délai moyen pour qu'un montant de sinistre grave soit fixé par la justice est d'un peu moins de 6 ans et les paiements peuvent s'étaler sur l'entièreté de la durée de vie humaine.

En effet, l'indemnisation des préjudices corporels est déclinée autour de 29 postes de préjudices. Les processus d'évaluation sont donc complexes, mais également instables dans le temps (chaque poste évoluant selon une logique inflationniste différente). De plus, trois formes de versements sont admises : le capital, la rente et la rente capitalisée (i.e. sur certains postes, une évaluation réalisée en rente peut être convertie en capital selon un barème choisi). Toutes ces considérations justifient l'appellation « branche longue » de la RC Auto mais surtout impliquent l'étude de données bien spécifiques.

Les données de chaque sinistre sont organisées autour de trois valeurs : le montant payé, le montant provisionné (i.e. le suspens) et la charge qui est la somme des deux précédents. Ces trois valeurs sont toutes rattachées à deux composantes temporelles : les années de rattachement des sinistres et les années d'observation des sinistres.

La définition de la base de données de chaque entité se fait autour de trois caractéristiques principales :

- Un seuil de référence définissant (selon si le montant d'un sinistre est supérieur ou non) l'appartenance d'un sinistre à cette base.
- La valeur de comparaison au seuil (i.e. charge, paiement ou suspens).
- Les conditions de maintien d'un sinistre dans la base (e.g. une fois le seuil franchi, le sinistre reste dans la base peu importe son évolution).

Le dernier enjeu des données utilisées est la valorisation des rentes : les rentes cédées ne correspondent pas aux rentes versées par l'assureur. Une clause de rente définit la méthode de calcul des premières et la conformité de la base à cette clause est essentielle car dans le cas inverse, tout calcul de charge cédée serait entièrement faux.

A.2. RC Auto : calibrage de modèles collectifs

Un modèle collectif suppose l'homogénéité (*i.i.d.*) de tous les sinistres mais aussi l'indépendance du nombre et du coût des sinistres. Dans l'optique de valider ces hypothèses, des retraitements sont appliqués aux données sous trois formes distinctes.

La mise en « *As-If* » : sert à placer l'ensemble du risque étudié dans une vision artificielle où chaque année de survenance de sinistre correspond à l'année « cible » (i.e. l'année sur laquelle portera la couverture de réassurance).

Ces modifications de valorisations des sinistres sont faites de manière classiques, à l'aide de deux indices : l'un pour les coûts et le second pour les nombres. Les indices utilisés, cependant, ont été construits spécifiquement pour s'adapter aux évolutions des sinistres graves en RC Auto. Un indice des « dommages corporels » construits à partir d'études de marché de réassureurs et des bases de données d'assureurs prend la forme d'une moyenne pondérée de quatre indices s'articulant pour représenter au mieux les évolutions des trois postes de préjudices les plus lourds dans les sinistres graves. Un indice de nombre de sinistres est construit à partir de données publiques, correspondant à l'évolution du nombre de sinistres graves (observés par l'ONISR¹) attribués à l'assureur en cas d'assignation selon la proportion du parc des véhicules français assurés au sein de son portefeuille.

L'application de ces indices n'est cependant pas directe. L'indice des coûts n'est pas appliqué directement aux charges, mais bien séparément, aux suspens et aux paiements décumulés. L'indice des nombres quant à lui est appliqué sur les nombres de sinistres obtenus après les retraitements de la forme suivante.

La mise à l'ultime : consiste à estimer la valeur ultime de la charge de chaque sinistre. La distinction du coût et du nombre de sinistres est toujours présente : deux algorithmes de Chain Ladder sont appliqués. Le premier sert à obtenir une estimation de la charge ultime des sinistres agrégée par survenance et le second sert à atteindre une projection du nombre de sinistres par années de survenance (nombres sur lesquelles la mise en « *As-If* » est réalisée). Les triangles étudiés revêtent une forme particulière, considérant le seuil de référence de la base de données dans une vision « *As-If* », pour ne conserver dans le triangle de charges que celles qui dépassent ce seuil durant deux années consécutives et comptabiliser uniquement les sinistres supérieurs à ce seuil dans le triangle de nombres.

L'application de l'inflation : la vision ultime obtenue demeure figée sur l'année cible et par conséquent, les valeurs doivent être projetées pour que seule l'année de rattachement corresponde à celle-ci. Dans cette projection, la composition des charges a un rôle important : seuls les paiements effectués subissent l'inflation. Ainsi, une première étape consiste à calibrer des cadences de paiements, permettant le passage d'un triangle de paiements « individuels » à un « rectangle » de paiements « individuels ». Le ratio de paiement de la charge ultime est observé pour chaque sinistre, retraité (suppose l'impossibilité de paiement négatifs) puis agrégé (en prenant la moyenne) et enfin extrapolé (par interpolation linéaire) pour atteindre la liquidation complète de tous les sinistres sur un nombre d'années choisi (plus de 20 ans). Une fois le rectangle obtenu, l'inflation est appliquée sur les paiements décumulés. L'inflation choisie est constante, perçue comme une vision prospective de l'indice des dommages corporels.

Les sinistres étudiés devraient dorénavant vérifier toutes les hypothèses nécessaires à la construction des modèles collectifs. Le calibrage des deux lois de probabilité qui les compose, le coût et le nombre des sinistres, est effectué selon des méthodes actuarielles classiques et aboutit à la sélection de lois classiques en réassurance (Lognormale ou Pareto et Poisson ou Binomiale Négative).

¹Observatoire National Interministériel de la Sécurité Routière.

B. Transfert de risque et Théorie des jeux

Maintenant que des pertes crédibles sont modélisées pour chacun des portefeuilles des six entités du groupe, l'étude peut se concentrer sur la construction d'un programme de réassurance. L'aspiration de ce mémoire est d'utiliser des jeux comme représentations de l'ensemble des interactions entre assureur et réassureur, permettant d'analyser dans le même temps les deux points de vue de cette relation. Avant de mettre en place les jeux, trois « sous-problématiques » sont à résoudre, mettant en relief le cadre d'étude.

1. La comparaison des contrats de réassurance entre eux. Si un niveau de charge cédée peut être déterminé pour tout contrat, la méthode permettant de le mettre en adéquation à un prix demeure inconnue : un principe de prime doit être fixé. Le principe de l'écart-type, étant le plus utilisé, est sélectionné. Le niveau de chargement associé est noté κ .
2. Les contrats de réassurance considérés. Seuls les contrats de réassurance obligatoires et non-proportionnels sont envisagés. Les traités en RC Auto n'ont, par convention, pas de limite. Ainsi, la couverture des traités en excédents de perte et de sinistre (supposé avec un nombre de reconstitution infini) est entièrement définie par le niveau de franchise d choisi.

Tous les traités étudiés sont donc caractérisés par un couple de paramètres (κ, d) dont les espaces de définition ont été discrétisés (31 valeurs entre 0% et 150% pour les chargements et 301 valeurs entre EUR 0 et EUR 30 millions pour les franchises).

3. Le comportement des joueurs. Comme mentionné précédemment, la réassurance doit répondre aux besoins des assureurs et des réassureurs. L'enjeu est de déterminer comment les joueurs peuvent exprimer leurs préférences entre différents types de couverture. L'étude s'appuie sur la théorie de l'utilité espérée, admettant que chaque joueur souhaite maximiser son utilité espérée. Les fonctions d'utilité utilisées pour les assureurs sont de type CRRA, permettant un calibrage simple de l'aversion au risque (un paramètre r) et une représentation crédible du comportement d'agent économique (moins averse au risque lorsque les gains sont plus importants). La variable aléatoire, dont l'utilité espérée veut être maximisée, est le surplus de « grave » de l'assureur (i.e. la différence entre la charge des sinistres graves payée et la prime acquise retranchée de 70% car supposée consommée par les sinistres attritionnels).

Dans l'objectif de modéliser l'ensemble des contraintes subis par un assureur, la décision a été prise d'ajouter une « contrainte réglementaire ». Définie comme un contrôle des risques conservés par un assureur, cette contrainte permet d'éviter les accumulations trop importantes de risque chez un joueur (avant et après de possibles transferts).

La contrainte fixe l'utilité espérée du surplus d'un joueur à 0 dès lors que la *Value at Risk* de niveau 99,5% de ses pertes dépasse sa prime acquise.

Le cadre ainsi défini fixe la situation initiale aux valeurs consignées dans le tableau 1.

	Entite 1	Entite 2	Entite 3	Entite 4	Entite 5	Entite 6
Utilité Initiale	0	27,7	34,4	0	0	39,1
Aversion au risque - r	0,8	0,3	0,3	0,8	0,8	0,3

TABLE 1 : Situation Initiale - Utilités des entités

L'étude réalisée se concentre sur des jeux à deux joueurs, qui prennent place dans le cadre défini précédemment. Deux cas de figure sont observés : la cession interne entre assureurs et la cession vers un réassureur marché.

B.1. Jeu de cession interne - Deux assureurs

Ce jeu s'intéresse au cas de figure où deux assureurs du groupe coopèrent pour construire un programme de réassurance : l'un accepte de souscrire une partie du risque du second.

Dans cette vision de jeu coopératif, si l'ensemble des actions envisageables par les joueurs correspond à l'ensemble des traités de réassurance possibles, reste à choisir un « critère d'optimalité » permettant de définir le « meilleur » traité pour la coalition des joueurs.

Le critère choisi est le produit des gains d'utilité espérée (sous contrainte réglementaire) des deux joueurs.

Dès lors, pour chaque binôme, le niveau du critère d'optimisation peut être représenté en fonction des paramètres des traités (figure 1) et le contrat « optimal » est celui qui maximise ce critère.

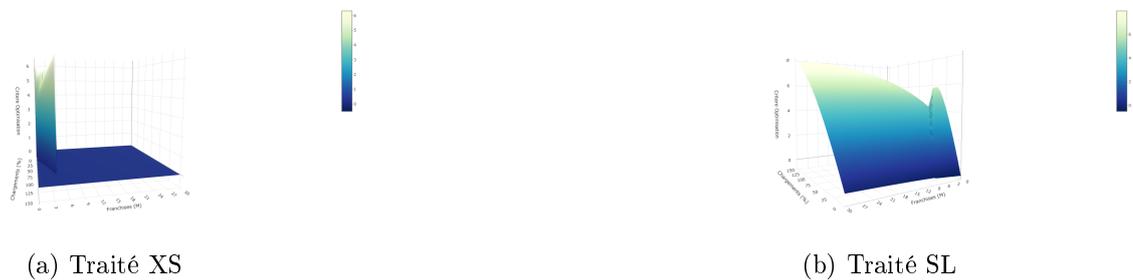


FIGURE 1 : Entité 3 en assureur réassureur et 5 en assureur cessionnaire - Fonction CRRA

Une fois le traité optimal fixé, demeure la problématique du partage des gains. Chaque joueur augmente son niveau d'utilité espéré initial, mais chacun selon un barème propre à sa fonction d'utilité. Un passage par les inverses des fonctions d'utilité permet de valoriser ces gains en euros, et ainsi de mettre en place une répartition « équitable » (selon la valeur de Shapley¹) entre les deux joueurs si une « sur-prime » est versée afin de ramener la coopération à un niveau d'équilibre.

De fait, des différences majeures de taille existent entre les différentes entités du groupe et des relations historiques fortes privilégient certains rapprochement. Le rôle d'assureur réassureur implique des capacités de souscriptions importantes, par conséquent ce rôle incombe aux assureurs de grandes tailles. De ces conjonctures, une vision globale du groupe est construite et les traités optimaux sont retranscrit dans le tableau 2.

Type de traité	Entités 3 et 5		Entités 6 et 4		Entités 2 et 1	
	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss
(d, κ) - Optimaux	(4,2 , 95%)	(25 , 150%)	(3,4 , 50%)	(7 , 65%)	(10 , 105%)	(28 , 150%)
Critère Optimisation	6,31	7,98	1,29	1,56	4,18	5,05
Gain utilité - cédante	3,60	3,74	3,29	3,60	2,55	2,85
« Sur-Prime » (EUR M) ²	0,57	0,77	0,02	-0,01	0,59	0,65

TABLE 2 : Traités optimaux, vision binomiale du groupe

¹ Attribution à chaque joueur individuel de l'espérance (arithmétique) de son gain lorsque tous les ordres de formation d'une entente entre tous les joueurs sont équiprobables.

² Versée par l'assureur réassureur à l'assureur cessionnaire.

B.2. Jeu de cession sur le marché - Un réassureur et un assureur

Ce jeu s'intéresse au cas de figure où un assureur cède une partie de ses pertes à un réassureur du marché en échange du versement d'une prime.

Le profil du réassureur est particulier puisque celui-ci doit représenter non pas simplement l'appériteur du traité mais bien l'ensemble du marché. Ainsi, dans l'optique de considérer la concurrence entre réassureurs, la fonction d'utilité de ce joueur est supposé linéaire (i.e. la fonction identité est utilisée). Le réassureur est donc indifférent au risque et son objectif devient alors de maximiser les gains réalisés sur le traité.

Cette perspective implique une opposition fondamentale entre les deux joueurs : le niveau de chargement (i.e. le coût de la réassurance). Le réassureur aura toujours intérêt à l'augmenter et l'assureur à l'inverse souhaitera toujours le voir diminuer. Cette fois, l'approche choisie est donc celle d'un jeu non-coopératif.

De nouveau, pour chaque type de traité, les gains d'utilité espérée de chacun des joueurs peuvent être représentés en fonction des paramètres des traités (figure 2).



FIGURE 2 : Entité 5 - Traité XS - Fonction CRRA

Pendant, un point d'équilibre doit tout de même être désigné dans cette relation compétitive entre les joueurs. En effet, un seul et unique traité peut-être perçu comme « optimal ». À cette fin, l'étude retient celui caractérisé par l'équilibre de Stackelberg.

L'application de l'équilibre de Stackelberg implique une forme bien particulière de déroulement du jeu : le réassureur joue en premier, fixant la valeur des chargements, puis l'assureur adapte sa stratégie en choisissant son niveau de rétention. Sachant que l'assureur choisira la franchise qui maximise ses gains d'utilité, le réassureur sélectionne un niveau de chargement lui permettant de maximiser ses gains (à noter qu'un niveau de chargement bas implique des franchises plus basses et donc des primes plus élevées et gains potentiels plus importants). La justification de cette position de force conférée aux réassureurs s'appuie sur le statut tendu et la nature oligopolistique du marché de la réassurance.

De ces conjectures, un traité d'équilibre est atteint pour chacune des entités du groupe et retranscrit dans le tableau 3.

Type de traité	Entité 1		Entité 2		Entité 3	
	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss
(d, κ) - Optimaux	(8,2 , 150%)	(38 , 150%)	(4,2 , 5%)	(42 , 5%)	(0 , 5%)	(0 , 5%)
Gain utilité - cédante	1,27	3,88	0,22	0,19	-0,09	-0,09
Type de traité	Entité 4		Entité 5		Entité 6	
	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss
(d, κ) - Optimaux	(3,2 , 55%)	(6,6 , 75%)	(4 , 105%)	(30 , 150%)	(0 , 5%)	(0 , 5%)
Gain utilité - cédante	2,50	2,74	2,99	4,27	-0,10	-0,10

TABLE 3 : Traités Choisis - Équilibre de Stackelberg

Limites

La stabilité des résultats a été évaluée selon plusieurs paramètres. Si les traités choisis semblent stables à partir d'un nombre suffisamment important de simulations des pertes (i.e. utilité espérée des surplus stables), ces résultats connaissent des mouvements importants lorsque l'aversion au risque des joueurs est modifiée ou si d'autres fonctions d'utilités sont utilisées. La modélisation « comportementale » des joueurs demeure sensible et très déterminante dans les résultats observés.

Le cadre étudié considère une vision très simplifiée des contrats de réassurance, tous définis autour de deux paramètres. De plus, une simplification sémantique est admise dans la méthode de sélection des traités. La vision de « l'optimal » désigne finalement une comparaison de grande échelle entre des milliers de traités de réassurance et non l'application d'algorithmes d'optimisation.

Le principal facteur limitant de premier jeu est son nombre de joueurs. Au delà de deux joueurs, un grand nombre d'hypothèses supplémentaires deviennent nécessaires mais cela permettrait pourtant de faire état de programmes plus complexes entre entité d'un même groupe.

Le principal facteur limitant du second jeu est la simplification de la relation assureur - réassureur. D'abord car la circulation de l'information est supposée complète alors que l'incomplétude de l'information peut être un enjeu central des négociations. Des négociations qui, de plus, n'ont pas lieu en une seule et unique transaction mais se réalisent après de nombreux allers-retours. Et enfin car certains accords se réalisent sous condition d'engagement sur d'autres branches de réassurance, une composante d'équilibre qui est également manquante.

Synthesis note

Context

Between 2021 and 2023, reinsurance costs rose, the appetite for low-deductible programmes disappeared and clauses restricting cession became increasingly widespread. These phenomena have particularly affected the motor third-party liability line of business, which however, because of its unlimited exposure, implies virtually systematic cession for insurers. As a result, insurers are turning to off-market solutions.

Reinsurance is a risk transfer that must meet the many and varied needs of each insurer. Nevertheless, in any risk cession, two points of view must always be reconciled. Reinsurance contracts exist only as a subsidiary to an agreement between insurers and reinsurers. Multiple interactions between these economic agents are therefore necessary to find a point of equilibrium between reinsurers' appetites and insurer's needs. Game theory provides a set of tools for analysing such a decision-making process.

The consideration of a reinsurance programme for a group of insurers implies an additional reconciliation of appetites and needs (between its entities). But the very purpose of a group of mutual insurance companies is to guarantee solid partnerships for its members. Group strategies can therefore be put in place (if they are profitable for everyone), in particular reinsurance cessions between entities (i.e. internal cessions) upstream of or in place of markets' cessions.

The aim of this study is to analyse, through the prism of game theory, the construction of reinsurance programmes for each entity of a group of insurers, with or without an overall strategy.

A. Risk Modelisation

Before even starting to build reinsurance programmes, all extreme claims (i.e. claims with considerable amounts) must be mastered. Reinsurance contracts are based on the matching of a level of cover and a price, so it is necessary to associate a level of risk (i.e. a probable ceded expense) with each possible contract.

The assumption made in this report is to use a collective model to represent the serious losses of each entity in the group. Thus, for each of the six companies offering individual motor third-party liability cover, two stages are distinguished: the first provides a detailed understanding of the portfolio and its development; the second is used to model the ultimate costs (in three sub-stages), from which a collective model is calibrated.

A.1. Motor third-party liability : specific warranty and data

Motor third-party liability insurance is compulsory for all owners of land-based motor vehicles. Covering the whole territory, this obligation implies very strong competition between insurers, but it is not the only point in the legal framework that gives rise to a very specific type of claims. As soon as this cover is defined, three central characteristics emerge:

- The insurer's exposure is unlimited.
- The amount of any claim is largely determined by a factor that is totally unknown before the claim is reported: the victim.
- Compensation for severe bodily injury involves both pecuniary and non-pecuniary losses, which means that the assessments are particularly complex.

On this third point, the legal component does not stop at the definition, but also provides a framework for the entire process, the methods of claims' evaluation and payment. This environment means that claims take a long time to settle, especially when there is severe injuries. The average time taken for a extrem claim to be settled by the courts is just under 6 years, and payments can be spread over an entire human lifespan.

Compensation for bodily injury is based on 29 injury headings. The assessment processes are therefore complex, but also unstable over time (each item evolving according to a different inflationary logic). In addition, three forms of payment are accepted: capital, annuity and capitalised annuity (i.e. for certain headings, an assessment carried out as an annuity can be converted into capital according to a chosen scale). All these considerations require the study of very specific form of data.

The data for each claim is organised around three values: the amount paid, the amount provisioned and the sum of the previous two. These three values are all linked to two temporal components: the years in which the claims have occurred and the years in which the claims are observed.

Each entity's database is defined around three main characteristics:

- A reference threshold defining (depending on whether the amount of a claim is higher or lower) whether a claim belongs to this base.
- The value compared to the threshold (i.e. charge, payment or pending).
- The conditions for keeping a claim in the database (e.g. once the threshold has been exceeded, the claim remains in the database regardless of how it evolves).

The final issue with the data used is the valuation of the annuities: the annuities assigned do not correspond to the annuities paid by the insurer. An annuity clause defines the method for calculating the first annuity, and it is essential that the basis conforms to this clause, because otherwise any calculation of the assigned charge would be entirely wrong.

A.2. Motor third-party liability : calibration of collective models

A collective model assumes the homogeneity (*i.i.d.*) of all claims but also the independence of the number and cost of claims. In order to validate these assumptions, restatements are applied to the data in three distinct forms.

“As-If” methods: is used to place all the risk studied in an artificial vision where each year in which a claim occurs corresponds to the "target year" (i.e. the year for which reinsurance cover will be in place).

These changes in the valuation of claims are made in the traditional way, using two indices: one for costs and the other for numbers. The indices used, however, have been constructed specifically to adapt to changes in serious motor liability claims. An index of bodily injury costs constructed on the basis of reinsurers' market studies and insurers' databases takes the form of a weighted average of four

indices that are structured to best represent trends in the three most significant loss items in serious claims. An index of the number of claims is constructed from public data, corresponding to the change in the number of serious claims (observed by the ONISR¹) attributed to the insurer in the event of an assignment according to the proportion of the fleet of French vehicles insured within its portfolio.

However, these indices are not applied directly. The cost index is applied separately to provisioned amount items and accrued payments. The number index is applied to the number of claims obtained after the following adjustments.

Ultimate development: consists of estimating the ultimate value of the burden of each claim. The distinction between the cost and the number of claims is always present: two Chain Ladder algorithms are applied. The first is used to obtain an estimate of the ultimate cost of claims aggregated by occurrence, and the second is used to project the number of claims by year of occurrence. The triangles studied take a particular form, considering the reference threshold of the database in an As-If's vision, in order to retain in the load triangle only those claims that exceed this threshold during two consecutive years and to count only claims above this threshold in the triangle of numbers.

Inflation application: the ultimate vision obtained remains fixed on the target year and, consequently, the values must be projected so that only the year of attachment corresponds to it. In this projection, the composition of expenses plays an important role: only payments made are subject to inflation. The first step, therefore, is to calibrate payment rates, enabling the transition from a triangle of individual payments to a rectangle of individual payments. The ultimate expense payment ratio is observed for each claim, restated (assuming the impossibility of negative payments) then aggregated (by taking the average) and finally extrapolated (by linear interpolation) to achieve the complete settlement of all claims over a chosen number of years (more than 20 years). Once the rectangle has been obtained, inflation is applied to the decumulated payments. The inflation chosen is constant, seen as a forward-looking view of the bodily injury index.

The claims studied should now satisfy all the assumptions required to construct the collective models. The calibration of the two probability laws that make up the models, the cost and the number of claims, is carried out using classic actuarial methods and results in the selection of classic reinsurance laws (Lognormal or Pareto and Poisson or Negative Binomial).

B. Risk cession and Game theory

Now that credible losses have been modelled for each of the portfolios of the group's six entities, the study can focus on the construction of a reinsurance programme. The aim of this dissertation is to use games as representations of all the interactions between insurer and reinsurer, enabling both points of view of this relationship to be analysed at the same time. Before setting up the games, three sub-problems need to be resolved, highlighting the framework for the study.

1. Comparison of reinsurance contracts. While a level of ceded expense can be determined for any contract, the method for matching it to a price remains unknown: a premium principle must be established. The standard deviation principle, being the most widely used, is selected. The associated loading level is noted κ .
2. Reinsurance contracts considered. Only compulsory and non-proportional reinsurance contracts are considered. By convention, motor liability treaties have no limit. Coverage for excess loss and excess of loss treaties (assuming an infinite number of recoveries) is defined entirely by the

¹Observatoire National Interministériel de la Sécurité Routière.

deductible level. Thus, the cover of excess loss and excess of loss treaties (assumed with an infinite number of recoveries) is entirely defined by the chosen level of deductible, d .

All the treaties studied are therefore characterised by a pair of parameters (κ, d) whose definition spaces have been discretised (31 values between 0% and 150% for loadings and 301 values between EUR 0 and EUR 30 million for deductibles).

3. Player behaviour. As mentioned earlier, reinsurance must meet the needs of insurers and reinsurers. The challenge is to determine how players can express their preferences between different types of cover. The study is based on expected utility theory, which assumes that each player wishes to maximise his expected utility. The utility functions used for insurers are of the CRRA type, allowing simple calibration of risk aversion (one parameter r) and a credible representation of economic agent behaviour (less averse to risk when gains are greater). The random variable, whose expected utility is to be maximised, is the insurer's severe surplus (i.e. the difference between the cost of severe claims paid and the earned premium subtracted from 70% because it is assumed to be consumed by attritional claims).

In order to model all the constraints undergone by an insurer, the decision was taken to add a regulatory constraint. Defined as a control on the risks retained by an insurer, this constraint makes it possible to avoid excessive risk accumulation by a player (before and after possible transfers).

The constraint sets the expected utility of a player's surplus at 0 as soon as the 99.5% Value at Risk of his losses exceeds his earned premium.

The framework thus defined sets the initial situation at the values given in the table 4.

	Entity 1	Entity 2	Entity 3	Entity 4	Entity 5	Entity 6
Initial Utility	0	27,7	34,4	0	0	39,1
Risk Aversion - r	0,8	0,3	0,3	0,8	0,8	0,3

Table 4: Initial Situation - Entities' Utility

The study focuses on two-player games, which take place within the framework defined above. Two scenarios are observed: internal cession between insurers and cession to a market reinsurer.

B.1. Internal cession game - Two insurers

This game focuses on the case where two insurers in the group cooperate to build a reinsurance programme: one agrees to underwrite part of the risk of the second.

In this vision of a cooperative game, if the set of actions envisaged by the players corresponds to the set of possible reinsurance treaties, it remains to choose an optimality criterion to define the best treaty for the coalition of players.

The criterion chosen is the product of the expected utility gains (under regulatory constraints) of the two players.

For each pair of players, the level of the optimisation criterion can be represented as a function of the treaty parameters (figure 3), and the optimal contract is the one that maximises this criterion.

Once the optimal treaty has been set, the problem of sharing the winnings remains. Each player increases his initial expected utility level, but each according to a scale specific to his utility function. By using the inverses of the utility functions, these gains can be valued in euros, so that a fair distribution can be established between the two players if an "extra-premium" is paid in order to bring the cooperation back to an equilibrium level.



Figure 3: Entity 3 as reinsurer and 5 as insurer - CRRA Function

In fact, there are major differences in size between the various entities in the group, and strong historical relationships favour certain combinations. The role of reinsurance insurer implies significant underwriting capacity, which is why this role falls to large insurers. As a result of these circumstances, a global vision of the group has been built up, and the optimal treaties are shown in the table 5.

Treaty Type	Entities 3 and 5		Entities 6 and 4		Entities 2 and 1	
	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss
(d, κ) - Optimal	(4,2 , 95%)	(25 , 150%)	(3,4 , 50%)	(7 , 65%)	(10 , 105%)	(28 , 150%)
Optimisation Criterion	6,31	7,98	1,29	1,56	4,18	5,05
Gain of utility - Transferor	3,60	3,74	3,29	3,60	2,55	2,85
Extra-premium (EUR M) ¹	0,57	0,77	0,02	-0,01	0,59	0,65

Table 5: Optimal Treaties

B.2. On the market cession game - One reinsurer and one insurer

This game deals with the situation where an insurer cedes part of its losses to a market reinsurer in exchange for the payment of a premium.

The profile of the reinsurer is special in that it must represent not just the treaty payer but the entire market. Thus, in order to consider competition between reinsurers, the utility function of this player is assumed to be linear (i.e. the identity function is used). The reinsurer is therefore indifferent to the risk and its objective becomes to maximise the gains made on the treaty.

This perspective implies a fundamental opposition between the two players: the level of loading (i.e. the cost of reinsurance). The reinsurer will always have an interest in increasing it, while the insurer will always want to see it reduced. This time, the approach chosen is that of a non-cooperative game.

Again, for each type of treaty, the expected utility gains of each of the players can be represented as a function of the treaty parameters (figure 4).

However, a point of equilibrium must still be identified in this competitive relationship between the players. Indeed, a single treaty may be perceived as optimal. To this end, the study selects the one characterised by the Stackelberg equilibrium.

¹Paid by reinsurer to insurer



Figure 4: Entity 5 - XS Treaty - CRRA Function

The application of Stackelberg's equilibrium implies a very specific way of playing the game: the reinsurer plays first, setting the value of the loadings, then the insurer adapts its strategy by choosing its retention level. Knowing that the insurer will choose the deductible that maximises its utility gains, the reinsurer selects a loading level that enables it to maximise its gains (note that a low loading level implies lower deductibles and therefore higher premiums and greater potential gains). The justification for this position of strength conferred on reinsurers is based on the tense status and oligopolistic nature of the reinsurance market.

Based on these assumptions, an equilibrium treaty has been reached for each of the Group's entities, as shown in the table 6.

	Entity 1		Entity 2		Entity 3	
Treaty Type	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss
(d, κ) - Optimal	(8,2 , 150%)	(38 , 150%)	(4,2 , 5%)	(42 , 5%)	(0 , 5%)	(0 , 5%)
Gain of utility - Trasnferor	1,27	3,88	0,22	0,19	-0,09	-0,09
	Entity 4		Entity 5		Entity 6	
Treaty Type	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss
(d, κ) - Optimal	(3,2 , 55%)	(6,6 , 75%)	(4 , 105%)	(30 , 150%)	(0 , 5%)	(0 , 5%)
Gain of utility - Trasnferor	2,50	2,74	2,99	4,27	-0,10	-0,10

Table 6: Chosen Treaties - Stackelberg's equilibrium

Limits

The stability of the results was assessed according to several parameters. While the treaties chosen appear stable after a sufficiently large number of simulations of losses (i.e. expected utility of stable surpluses), these results change significantly when the players' risk aversion is modified or if other utility functions are used. The modelling of player behaviour remains sensitive and very decisive in the results observed.

The framework studied takes a very simplified view of reinsurance contracts, all defined around two parameters. In addition, a semantic simplification is accepted in the treaty selection method. The vision of the optimal ultimately refers to a large-scale comparison between thousands of reinsurance treaties and not to the application of optimisation algorithms.

The main limit of the first game is the number of players. Beyond two players, a large number of additional hypotheses become necessary, but this would allow more complex programmes to be reported between entities in the same group.

The main limit in the second game is the simplification of the insurer-reinsurer relationship. Firstly, because the flow of information is assumed to be complete, whereas incomplete information can be a central issue in negotiations. Moreover, negotiations do not take place in a single transaction, but are carried out after many rounds of negotiations. And lastly, because some agreements are conditional on a commitment to other lines of reinsurance, a balancing component that is also missing.

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier le corps enseignant du Master Actuariat de l'université Paris Dauphine-PSL, et plus particulièrement M. Quentin Guibert et M. Christophe Dutang pour le canevas L^AT_EX.

Je tiens également à remercier l'ensemble des membres de la Direction Réassurance Cessions de Covéa, pour la bienveillance dont chacun a fait preuve à mon égard, et l'accueil chaleureux qui m'a été réservé - notamment l'équipe actuariat, avec une attention particulière pour l'antenne strasbourgeoise : merci à Mme Julie Barbe et M. Antoine Pierre pour leur soutien et leurs relectures avisées (malgré le nombre affolant de notes de bas de page dans la première version).

Je remercie également Mme Anne Bontoux pour son aide précieuse dans la construction des deux premiers chapitres, et M. Adam Senio pour son suivi et ses conseils de structure.

Enfin, un grand merci à M. Emmanuel Dubreuil, sans la confiance de qui ce mémoire n'aurait pû exister. Des généraux byzantins aux mouvements incongrus de produits de convolutions de lois lognormales, le tracé de ce mémoire a connu quelques détours. Son soutien, ses relectures et ses conseils éclairés ont été déterminants tout au long de la réalisation de ce travail.

Pour finir sur une note plus personnelle, je tiens à remercier mes proches et ma famille qui m'ont toujours soutenu, dès la première page.

Table des matières

Résumé	3
Abstract	4
Note de Synthèse	5
Synthesis note	13
Remerciements	21
Introduction	25
1 RC Auto : garantie et données disponibles	27
1.1 Garantie RC Auto	27
1.2 Bases de données	36
2 Tarification de traité non-proportionnel en RC Auto	49
2.1 Mise en « <i>As-If</i> »	50
2.2 Mise à l'ultime	64
2.3 Montant ultime des paiements	76
2.4 Modélisation retenue	80
3 Transfert de risque à l'aide de la Théorie des jeux	85
3.1 Enjeux : Exemple du coût de la réassurance	86
3.2 Jeu à deux assureurs	104
3.3 Jeu à un assureur et un réassureur	122
3.4 Limites des approches	130

Conclusion	135
Glossaire	137
Bibliographies	140
A Détails des constructions d'indices	149
A.1 Détails de la construction de l'indice corporel	149
A.2 Détails de la construction de l'indice du nombre de sinistres	156
A.3 Méthodes de calcul de trois postes de préjudices	158
B Notions Supplémentaires	163
B.1 Les rentes en assurance non-vie	163
B.2 Conventions d'assureurs sur la branche RC Auto	166
B.3 Brève introduction aux contrats de réassurance	167
B.4 Théorie de l'utilité espérée	170
C Suppléments des résultats obtenus	173
C.1 Exemple d'application de la vision « <i>As-If</i> »	173
C.2 Résultats Algorithme Chain Ladder	173

Introduction

La réassurance est l'expression d'un lien de confiance entre deux sociétés : en échange d'un montant fixe, la première prend à sa charge une partie des engagements de la seconde sous certaines clauses et conditions de survenance. La distinction sémantique entre réassurance et tout autre échange de risque est due à la nature de l'aléa, à savoir les contrats d'assurance. De ces interactions naît un marché dont l'offre est régie par des agents économiques internationaux, souscripteurs de risques, nommés réassureurs, et dont la demande est aux mains des assureurs cessionnaires. Ce marché évolue logiquement selon certaines tendances ; entre 2021 et 2023, l'offre s'est durcie, les coûts ont augmenté et le placement des programmes de réassurance s'est complexifié. Le contexte économique, caractérisé par une forte inflation des coûts et par une fréquence élevée de la sinistralité climatique, a renforcé ce durcissement du marché. Dès lors, les assureurs ont tendance à se tourner davantage vers d'autres solutions de réassurance, extérieures à ce marché.

La « RC Auto » a été particulièrement exposée à ces augmentations de coûts de par l'organisation quasi-monopolistique de cette branche en réassurance. L'offre est concentrée sur un nombre réduit d'acteurs, ayant dès lors chacun une grande influence sur les prix de placement. La taille réduite de ce marché a amené la Direction Réassurance Cessions de Covéa à étudier de nouvelles alternatives.

L'existence d'un groupe d'assureurs mutualistes au sein de cet environnement concurrentiel permet de garantir des partenariats solides et bénéfiques à chacune de ses entités. L'objectif de ce mémoire est de s'appuyer sur ce point fort pour construire une solution de réassurance interne. À cette volonté, s'est ajoutée celle de s'affranchir des contraintes de programmes passés, pour rechercher l'optimalité. Composer avec un groupe d'assureurs suppose la considération d'avis multiples, de stratégies à la fois communes et individuelles, d'appétits au risque et capacités de souscription différents. Cette multiplicité d'interactions s'entremêle à la recherche d'une adéquation entre optimisation et réassurance. La raison d'être de la réassurance est de s'adapter aux divers besoins des assureurs, allant de l'accompagnement sur de nouvelles affaires à la diminution de l'exposition à la situation de ruine. Définir un optimum quantitatif capable de représenter l'ensemble des motivations de cessions de risque est l'un des défis auxquels ce mémoire a tenté d'apporter une réponse.

Le second défi de ce mémoire est la modélisation des interactions entre différents agents économiques, inhérentes à tout contrat de réassurance, qui peuvent précisément être modélisées par le domaine mathématique de la théorie des jeux. En effet, la théorie des jeux est un ensemble d'outils analytiques qui offrent une compréhension du phénomène de prise de décision face à un problème donné. La première recherche à l'origine de ce mémoire s'enquerrait de savoir si l'un de ces concepts permettrait de formuler une réponse à l'optimisation de réassurance. De fait, de nombreux liens existent entre ce sujet et la théorie des jeux. Chacun exprimant différentes conceptions de la réassurance, la question fut rapidement de savoir comment l'application de la théorie des jeux allait permettre de construire un programme de réassurance RC Auto d'un groupe d'assureurs mutualistes ?

La réponse à cette question sera traitée en trois temps. Dans un premier temps, le cadre de l'étude sera posé. La première partie du Chapitre 1 présente les enjeux et la définition de l'ensemble des spécificités de la garantie RC Auto impactant la modélisation. La seconde partie du chapitre est dédiée à la présentation de la base de données utilisée dans le mémoire. Puis, dans un deuxième temps (Chapitre 2), nous aborderons la modélisation des pertes extrêmes d'un assureur en RC Auto. Dénommée « tarification », car composée de méthodes classiquement utilisées à cette fin, l'objectif étant de calibrer un modèle collectif, pour chaque assureur du groupe, permettant d'obtenir, pour chacun, un niveau de prime pour tout type de contrat de réassurance. Dans un dernier temps, nous utiliserons ces modélisations de pertes comme base de construction du programme de réassurance interne au groupe. Le 3^{ème} chapitre abordera la mise en place de concepts de la théorie des jeux dans cette structure, en introduisant d'abord les concepts utilisés puis en présentant des applications au risque RC Auto étudié.

Chapter 1

RC Auto : garantie et données disponibles

1.1 La garantie RC Auto : définitions et caractéristiques

La branche de l'assurance automobile représente 10,1% des 238,4 Milliards EUR de cotisations recueillies par les assureurs français en 2021 (France Assureurs, 2022). Ce volume l'impose comme branche majeure de l'assurance de biens et de responsabilités. Covéa, groupe de sociétés d'assurance mutuelle, assurait en 2022 près de 20% du parc de véhicules en circulation et s'affirme ainsi comme l'acteur principal du marché. Le secteur de l'assurance automobile a émergé en 1930, et de très nombreuses lois ont successivement encadré son fonctionnement depuis bientôt un siècle. De par cet historique et le cadre strict mis en place, les affaires entrantes de cette branche marquent une augmentation relativement stable depuis 15 ans (autour de 2% par an pour le nombre de véhicules de particuliers et de 1,5% par an pour les cotisations perçues). Sur cette même période, le pourcentage de primes cédées aux réassureurs reste fixe, aux alentours des 12% (France Assureurs, 2022). Dans cette apparente stabilité, la concurrence entre les différents acteurs du marché prend une place des plus importantes. En plus de la maîtrise des cotisations acquises, leur gestion et leurs investissements se doivent d'être performants pour répondre à la fois aux engagements envers les assurés et à la pression du marché. Les placements dans la réassurance n'échappent pas à cette règle. Dans un premier temps, en amont de toute modélisation, une appréciation complète du risque de la « RC Auto » est nécessaire. À cette fin, l'ensemble de la chaîne se doit d'être présentée, de la composition du contrat d'assurance à la réassurance, afin d'identifier l'ensemble des enjeux qui se croisent aux différents niveaux.

1.1.1 Automobile et Responsabilité Civile

En premier lieu, une précision sémantique doit être opérée : le terme « automobile » est utilisé de manière abusive dans ce mémoire et dans le secteur de l'assurance. Le terme de « véhicule terrestre à moteur » serait plus adéquat, ou celui de véhicule respectant la définition faite de l'article L211-1 du Code des assurances : « tout véhicule automoteur destiné à circuler sur le sol et qui peut être actionné par une force mécanique sans être lié à une voie ferrée, ainsi que toute remorque, même non attelée ». Dans toute la suite de ce mémoire, le terme « automobile » sera conservé comme raccourci, mais utilisé au sens défini par le Code des assurances.

Les contrats d'assurance automobile sont distingués en deux types : les contrats basés sur un véhicule unique et les contrats de type flottes qui permettent à une seule personne physique ou morale de réunir plusieurs véhicules dans un seul contrat. Chaque contrat doit être rattaché à un véhicule et à une personne, qui, selon le principe de non-enrichissement de l'assuré, doivent former un binôme unique¹. Les garanties du contrat peuvent être de deux natures différentes, selon la nature de la victime du

¹Cependant, deux personnes différentes peuvent être assurées par des contrats différents sur le même véhicule.

sinistre. D'un côté, la garantie de responsabilité civile couvre les dommages causés à autrui par l'assuré, et de l'autre, les garanties de dommages (bris de glace, vol, incendie, dommages subis par le véhicule ou le conducteur) couvrent les dommages subis ou que l'on s'est causés soi-même.

Comme mentionné précédemment, le cadre juridique de la branche d'assurance automobile est particulier. Ainsi, depuis 1958 (Loi n°58-208), afin que chacun soit protégé des risques d'accident encourus lors de tout déplacement sur la voie publique, posséder une assurance couvrant la responsabilité civile est **une obligation**, tout manquement devenant pénalement répréhensible. Les assureurs deviennent alors garants des dommages causés à autrui par tous les automobilistes en règle, profitant d'un effet de diversification à l'échelle nationale ainsi que d'une forte diminution de l'effet d'antisélection. La notion de victime potentielle « exposée au risque d'accident de la circulation » permet de mettre en avant une particularité importante de toutes les garanties « responsabilité civile » : **la victime n'est connue de l'assureur qu'à partir du moment où l'accident est déclaré**. Ainsi, même si l'assureur possède des informations sur l'assuré (qualité de conduite, type de véhicules, nombre de kilomètres parcourus par an et autres qui servent à déterminer la valeur à attribuer au péril encouru), tous les éléments ayant un impact majeur sur le montant du sinistre (les caractéristiques de la victime ou les circonstances de l'accident) demeurent inconnus avant la survenance de celui-ci.

L'exposition sur un contrat est donc impossible à déterminer, certains sinistres pouvant s'exprimer en centaines d'euros quand d'autres s'exprimeront en dizaine de millions¹.

L'assuré cède sa « responsabilité civile ». La précision sémantique nécessite cette fois un détour juridique pour définir au mieux ce terme afin de comprendre l'exposition du contrat et les obligations de l'assureur. La responsabilité, du latin respondeo, are (« se porter garant, répondre de »), renvoie à la nécessité de répondre de ses actes. La responsabilité juridique de chaque individu se divise en deux catégories :

- La responsabilité pénale, dont l'objectif est de punir les auteurs d'une infraction, d'infliger une sanction et qui donc par définition n'est pas un engagement qui peut être couvert par un assureur.
- La responsabilité civile, dont l'objectif est d'offrir une réparation à la (resp. aux) victime(s) d'un dommage et qui nous intéresse dans ce mémoire.

La réparation d'un dommage à autrui dont un individu est à l'origine correspond au versement d'un dédommagement, c'est-à-dire une transaction monétaire du responsable qui doit indemniser la/les victimes en gage des dégâts causés. Apparaît dès lors la première limite de la responsabilité civile : réussir à mettre en adéquation une somme en euros et un dommage subi est une tâche à la difficulté très variable (**Exemple** : l'indemnisation d'un parechoc enfoncé sera déterminée par le prix de la réparation. Cependant, certains points comme l'attachement sentimental à une voiture de collection

¹Grand classique dans les exemples de sinistres exceptionnels, impossible à prévoir. Dans une nuit pluvieuse du 18 au 19 mars 1976, un instituteur, sociétaire de la MAIF, tombe en panne sur un passage à niveau. Sa voiture est immobilisée sur les rails et il ne réussit pas à la déplacer. Il se rend donc à la cabine téléphonique la plus proche pour trouver de l'aide et prévenir les autorités. Arrive alors un train de marchandise, qui percute la voiture, déraile sur plus de 100 mètres avant de s'effondrer dans le canal reliant la Marne et le Rhin qui se trouvait en contrebas. Le cheminot s'en sort légèrement blessé, mais les produits chimiques contenus dans les 21 wagons tombés se déversent dans le canal. Une petite liste des dommages causés, non exhaustive : le train, les rails, les marchandises transportées, la reconstruction du pont qui enjambait le canal, la dépollution du canal, les pertes causées aux exploitants du canal (navigation fluviale, élevage de poisson en aval), le détournement de tous les trains Paris-Strasbourg passant aussi sur cette voie (60 cars par jour pour relier les deux gares encadrants le lieu de l'accident), et la liste pourrait encore être développée plus en détails. Cet exemple se veut une démonstration du montant astronomique que peuvent atteindre les sinistres de responsabilité civile en comparaison à la prime payée pour l'assuré. Afin de conclure cette mise en perspective, l'instituteur payait 465 FF de prime annuelle, pour un montant d'indemnités estimées à 30 000 000 FF.

ou les promotions en cours chez le garagiste pourraient être considérés et complexifient la tâche. Alors, qu'en sera-t-il pour la perte d'un bras ?¹).

L'objectif est donc d'indemniser « Tout le préjudice, mais rien que le préjudice », en appliquant **le principe de réparation intégrale**. Cette position du droit français est un point central pour les assureurs : l'indemnisation ne peut être limitée par aucune valeur, elle dépend uniquement des dommages subis. Ainsi **les sinistres RC Auto ne peuvent légalement admettre aucun maximum**, constituant une exposition donc très particulière en termes de coûts.

En Droit Français, la responsabilité civile automobile est définie en dehors du Droit Commun, jugé insuffisant pour l'indemnisation du risque automobile au vu des différences de traitement entre les victimes selon l'existence ou non d'un lien contractuel².

Le 5 juillet 1985, la Loi Badinter, crée un régime spécifique pour tous les accidents de la circulation afin que tout préjudice causé soit forcément indemnisé.

Concrètement, ce régime se base sur le régime du Droit Commun mais la bascule se fait vers une « indemnisation automatique » des victimes. En effet, la condition d'existence d'un lien de cause à effet direct et immédiat entre la faute commise et les dommages subis est supprimée - si la faute n'a plus besoin d'être imputée à une personne, alors sa réparation s'exige dès qu'elle est subie.

Dès lors, la responsabilité civile d'un assuré est mise en cause et donc un dossier est ouvert lorsque 3 éléments sont réunis :

1. Un « fait générateur » : c'est-à-dire une faute commise. La faute peut prendre deux formes :

- La violation, volontaire ou non, d'une norme de Droit (**Exemple** : Un automobiliste ne marque pas l'arrêt à un STOP et cause un accident).
- Un comportement anormal, volontaire ou non, que n'aurait pas une personne raisonnable de même catégorie, placée dans la même situation (**Exemple** : Un automobiliste confond ses pieds droit et gauche, freine sur l'A7 et cause un accident).

La sémantique du terme « **faute** » se distingue ici de son sens commun, puisque celle-ci peut être commise directement par l'assuré (i.e. RC subjective³) mais également indirectement (i.e. RC objective⁴). En effet, deux types de responsabilités relèvent aussi de celle de l'assuré :

- La Responsabilité Civile Générale (RCG) du fait et des choses, toute chose peut engager la responsabilité de son gardien (i.e. celui qui a l'usage, le contrôle et la direction de la chose)
- La Responsabilité Civile Générale (RCG) du fait d'autrui (un parent est responsable pour ses enfants, un employeur est responsable pour ses employés, une association est responsable pour ses adhérents, chacun est responsable pour les animaux possédés. . .)

Ces variations de fait générateur font apparaître deux considérations essentielles pour un assureur lors du traitement de la garantie RC automobile :

¹Selon la Chasse-Partie de Henry Morgan (1671) l'indemnisation adéquate est de cinq cents écus ou six esclaves, sans distinction entre bras droit et gauche.

²Les obligations de moyens et de résultats d'un contrat offrent des caractérisations souvent immédiates de la faute alors qu'à l'inverse, certaines victimes échouent à prouver l'existence de la faute en cas d'absence de lien contractuel.

³« Tout fait quelconque de l'homme, qui cause à autrui un dommage, oblige celui par la faute duquel il est arrivé à le réparer. » (Code Civil, 1804, Article 1240)

⁴« On est responsable non seulement du dommage que l'on cause par son propre fait, mais encore de celui qui est causé par le fait des personnes dont on doit répondre, ou des choses que l'on a sous sa garde. » (Code Civil, 1804, Article 1242)

- Le contrat expose l'assureur également aux comportements des individus sous la responsabilité juridique de l'assuré et à tout mouvement du véhicule (**Exemple** : Un frein à main cesse de fonctionner durant la nuit, une voiture garée en pente heurte celle qui précède dans le stationnement).
 - Les différentes formes de caractérisation du fait générateur impliquent l'obligation de distinguer les contrats professionnels et individuels¹. La RCG du fait d'autrui, très importante pour les employeurs, augmente ainsi la probabilité d'accident². Dès lors, l'exposition au nombre de sinistres à considérer pour les contrats professionnels est, dès la définition de la responsabilité civile, bien plus importante que celle des contrats individuels.
2. Un « préjudice » : c'est-à-dire la perte d'un bien ou d'un avantage. Un préjudice doit avoir un caractère certain³, celui-ci ne doit être ni hypothétique, ni éventuel. Le préjudice peut avoir trois natures :
- Matérielle : atteinte au patrimoine (i.e. ce qui est directement appréciable en argent) de la victime. Le responsable doit indemniser l'ensemble des pertes subies et des gains manqués.
 - Morale : atteinte non patrimoniale (i.e. ce qui n'est pas directement appréciable en argent) de la victime.
 - Corporelle : atteinte à l'intégrité physique ou psychique de la victime. Le préjudice peut alors être à la fois patrimonial et non patrimonial.

Cette distinction est importante car elle correspond finalement à la nature du sinistre considéré par l'assureur. Si les préjudices moraux ne sont pas considérés en tant que tels dans la branche d'assurance automobile, la distinction « corporel / matériel » reste cependant essentielle. Intuitivement, l'évolution des sinistres ne sera pas la même : le montant d'un sinistre matériel est par définition appréciable en argent ; ainsi, l'évaluation précise du coût, le versement et la clôture peuvent être réalisés rapidement. Le fonctionnement des préjudices corporels demeure plus complexe.

3. Un « lien » quelconque entre la faute et le véhicule responsable définit autour de trois modalités :
- (a) L'implication du véhicule est obligatoire et le véhicule doit être « intervenu d'une manière ou d'une autre, de quelque manière que ce soit dans l'accident » (Cour de Cassation, 1987).
 - (b) L'imputation de l'accident au véhicule est obligatoire. L'imputation est cependant présumée pour les dommages de l'accident mais également pour les dommages survenus dans un temps voisin.
 - (c) Hormis le conducteur du véhicule responsable, tout autre individu est désigné comme victime de l'accident.

En fonction de la situation dans laquelle la faute a été commise, ce lien peut être altéré, ce qui occasionnera une certaine exonération du montant final de l'indemnisation à payer. Ainsi, en cas de faute partagée, une rupture partielle du lien peut avoir lieu et dans ce cas, un taux fixé selon le rôle

¹Cette différence provenant des définitions s'ajoute aux considérations plus classiques. Les contrats professionnels sont généralement des contrats « flottes », portant donc sur un nombre plus important de véhicules assurés (impliquant un nombre de sinistres plus important), peuvent concerner des transports de marchandises (impliquant un coût plus important en cas de sinistre) ou du transport d'individu. Ces éléments ne représentent en rien une liste exhaustive et certains contrats portent même parfois des risques trop spécifiques pour être assimilés aux autres.

²Pour considérer ce risque supplémentaire, les employeurs ont généralement l'obligation de préciser l'ensemble de conducteurs qui pourrait possiblement être placé sous sa responsabilité.

³Exception faite de la perte de chance qui représente la disparition certaine d'une éventualité favorable. Nadal serait indemnisé sur une partie du gain espéré à Roland Garros pour avoir subi un accident qui l'empêche de jouer, Djokovic a prouvé en 2023 que lui aussi devrait l'être, tout individu amateur ne le sera certainement pas.

causal des fautes est appliqué à l'indemnisation due. Au vu des deux premières modalités du lien entre faute et véhicule responsable, une rupture totale du lien de causalité n'est jamais possible.

Cependant, selon la nature des dommages, les exonérations ne sont pas toujours possibles :

- En cas de dommages matériels : la faute de la victime est toujours opposable et donc une rupture partielle est possible (**Exemple** : Un piéton avec des écouteurs traverse à un feu rouge sans regarder, aucun dommage corporel mais le contenu de son sac-à-dos est détruit).
- En cas de dommages corporels : la faute n'est opposable qu'aux conducteurs du véhicule responsable ; pour tout autre occupant de ce véhicule et du ou des autres véhicules tiers, leurs fautes ne leurs sont pas opposables ¹ et donc le lien ne peut être brisé (**Exemple** : Un chauffeur alcoolisé perd le contrôle, finit dans un fossé et se brise le bras, sa faute est opposable).

RÉCAPITULATIF : DES DÉFINITIONS JURIDIQUES QUI FAÇONNENT LA SINISTRALITÉ

Le terme « RC Auto » apparaît comme étant un terme aux multiples raccourcis. L'automobile considérée englobe la plupart des véhicules terrestres motorisés, et la responsabilité civile en jeu est spécifiquement définie en dehors du Droit Commun.

Ces raccourcis de langage ne seront pas rappelés dans la suite du mémoire mais le sens entendu de l'engagement de l'assureur sur la garantie « RC Automobile » est bien celui défini précédemment.

Une définition qui implique trois caractéristiques bien particulières :

- L'exposition de l'assureur est illimitée.
- Le montant de tout sinistre est majoritairement défini par un facteur totalement inconnu avant sa déclaration : la victime.
- Différentes sources d'indemnisation sont à distinguer dans les dommages corporels : patrimonial et non-patrimonial (impliquant des évaluations particulièrement complexes).

Un autre point essentiel est défini par la loi Badinter : les obligations de gestion des indemnisations par les assureurs. Ce point est abordé dans la partie suivante.

1.1.2 Le déroulé d'un sinistre RC Auto

La loi Badinter a également créé un cadre pour les versements des indemnisations. L'assureur du responsable d'un accident a pour obligation de faire une offre d'indemnisation à la victime² dans « un délai maximum de huit mois à compter de l'accident » (Loi Badinter, 1985, Article 12). Tout retard dans ce délai, ou tout montant « manifestement insuffisant » entraîne obligatoirement des pénalités très importantes pour l'assureur (Loi Badinter, 1985, Article 16 et 17). Si la victime accepte la proposition de l'assureur, l'indemnisation est versée et le sinistre est alors liquidé par « voie transactionnelle ». À l'inverse, si aucun accord n'est trouvé, la justice devra trancher et le sinistre sera liquidé, après jugement rendu, par « voie judiciaire ». Ainsi, l'assureur porte la responsabilité d'estimer et de proposer des indemnisations adéquates aux victimes ; alors comment les montants d'indemnisation sont-ils déterminés pour respecter ce cadre légal ? Dans cette situation, le référentiel juridique se doit de faire foi : l'indemnisation sera donc considérée par « postes de préjudice », c'est-à-dire selon chaque atteinte dédommageable identifiable.

¹En vérité, une distinction un peu plus délicate est omise ici : un statut de victime « super-protégée » peut modifier la règle, des précisions peuvent être trouvées dans le Glossaire pour le lecteur intéressé.

²En cas de décès, l'offre est faite aux proches de la victime (enfants, conjoint, etc.)

Estimation d'un sinistre RC Auto

La distinction matériel / corporel est de nouveau considérée : les préjudices matériels, donc directement appréciables en argent, ont automatiquement une valeur d'indemnisation¹. À l'inverse, l'identification et la valorisation de chaque poste de préjudice pour les sinistres corporels est une tâche plus complexe. Les sinistres corporels sont le plus souvent les sinistres les plus importants pour les assureurs, à hauteur de plusieurs millions, et pèsent lourd sur les bilans. L'indemnisation médiane attribuée aux proches d'une victime décédée approche 142 000 EUR², cette somme étant très variable selon la situation de la victime mais donne un ordre d'idée sur les enjeux monétaires. Les sinistres les plus coûteux sont les accidents responsables de séquelles corporelles très lourdes impliquant des frais conséquents et viagers. Selon la CCR Re and Addactis (2019), plus de 20% des indemnités sont consacrées à moins de 0,5% des victimes, et selon l'AFA (2008), la moitié des 4,1 Milliards EUR d'indemnités sont alloués à 5% des blessés. Les sinistres corporels sont donc le cœur de cible de la réassurance en RC Auto et comprendre le fonctionnement des indemnités versées est utile pour identifier l'ensemble des risques encourus par l'assureur.

Le système judiciaire s'appuie sur une règle claire : seule la Cour de cassation peut définir/créer des chefs de préjudice. Il incombe ensuite aux juges du fonds de fixer le montant alloué à chaque poste en fonction de l'affaire jugée. Cependant, sur le fondement du principe de réparation intégrale, le nombre de postes de préjudices indemnifiables n'a cessé d'augmenter, finissant même par remettre en question³ le principe d'égalité de traitement des victimes devant les tribunaux.

Afin de répondre à cette problématique, une première volonté de rationalisation des chefs de préjudice des dommages corporels⁴ se manifeste au début des années 2000. Le rapport Lambert-Faivre (2003) publié en 2003 sert de base à la référence définissant aujourd'hui encore les postes de préjudices des dommages corporels : le rapport Dintilhac (2005)⁵. Le point central qui sera finalement retenu est la « **triple division** » effectuée des postes de préjudices.

Une première distinction est faite selon la nature de la victime, victime directe s'il s'agit de la victime ayant directement subi le dommage et victime indirecte⁶ pour les proches de celles-ci. La deuxième distinction se fait sur la nature du préjudice, patrimonial ou extrapatrimonial. La dernière distinction repose sur la temporalité de l'évolution des dommages subis. En effet, après une blessure corporelle, la santé de la victime peut se modifier au cours du temps, parfois pour le pire, le plus souvent pour le meilleur grâce aux soins prodigués⁷. Un référentiel de temps est donc nécessaire pour considérer

¹Une négociation résiduelle pourrait subsister sur l'état de vétusté du bien, la valeur d'achat ou valeur à date, ou d'autres éléments, l'idée étant que des référentiels de valeur existent.

²Considérant une indemnisation pour un conjoint, deux parents et trois enfants mineurs selon le bilan annuel 2022 de l'AGIRA (2022).

³Les juristes parlent d' « anarchisme indemnitaire » et admettent que la définition des postes de préjudice est un « domaine du droit civil resté en France quelque peu en jachère » (Viney and Markesins, 1985). Les assureurs de leur côté parlent plus souvent de l' « inflation indemnitaire » disproportionnée des dommages corporels. ((AFA, 2008) et (APREF, 2008))

⁴*Du lien entre préjudice corporel et dommage corporel* : La nuance de sémantique juridique entre dommage et préjudice sera abusivement mise de côté dans ce mémoire. Les deux seront utilisés sans distinction pour désigner les faits, supposant le passage au droit automatique (des précisions sont disponibles dans le Glossaire).

⁵Ce rapport a mis quelques années pour s'imposer comme une référence, une Circulaire de la Direction des Affaires Civiles et du Sceau (n° 2007-05 du 22 février 2007) puis de multiples consécutions par la Cour de cassation ayant encouragé son utilisation. Finalement, l'arrêt CPAM de Dunkerque/« Rambur » du Conseil d'Etat rendu le 25 juin 2008 oblige tous les juges du fonds à déterminer les montants indemnisés selon les distinctions instaurées par le rapport Dintilhac. Les assureurs s'alignent donc et construisent leurs estimations d'indemnités de la même manière.

⁶Ou « victime par ricochet »

⁷**Exemple** : Le piéton renversé de la première partie, qui portait ses écouteurs en traversant à un feu rouge, perd l'usage de son bras droit, sans espoir de guérison. Après quelques mois de convalescence, il retrouve finalement des sensations, et après quelques années, il retrouve un bras fonctionnel.

au mieux les changements de situations, la « consolidation » étant alors définie comme « la date à partir de laquelle l'état de la victime n'est plus susceptible d'être amélioré d'une façon appréciable et rapide par un traitement médical approprié » (Mornet, 2020). Cette date est fixée lors de la visite d'un expert médical et peut varier grandement selon la victime, allant de quelques semaines à des dizaines d'années (notamment dans le cas de victime mineure où l'âge de la majorité est souvent choisi comme référence). Ainsi, à la consolidation, une nouvelle évaluation des dommages est menée et tout préjudice qui subsiste est considéré comme permanent et doit donc être indemnisé en tant que tel.

Considération faite de l'importance de la temporalité dans l'évaluation d'un sinistre, la loi Badinter laisse la possibilité à l'assureur de donner un caractère « provisionnel » (Loi Badinter, 1985, Article 12) de l'offre faite à la victime lorsque la consolidation dépasse le délai de 8 mois. La consolidation n'arrête pas pour autant toute considération de changement d'état puisque la victime peut demander réouverture de son dossier jusqu'à « dix ans à compter de la date de la consolidation » (Code Civil, 1804, Article 226). Cependant, elle permet de considérer une date à partir de laquelle l'évaluation des dommages et les modalités de paiements peuvent être considérées en globalité, par l'assureur et par la justice.

Au final, **8 classes de postes de préjudices sont identifiées** puis au sein de chacune d'entre elles, une évaluation du montant à attribuer est réalisée poste par poste. Afin de servir à l'évaluation de certains postes, une mesure des séquelles physiques a été introduite : l'Atteinte à l'Intégrité Physique et Psychique (AIPP)¹, un pourcentage fixé par le médecin expert qui exprime la réduction du potentiel physique et intellectuel de la victime. Une fois l'évaluation fixée, la dernière étape consiste à déterminer la méthode de versement de l'indemnité à la victime.

La figure 1.1 présente l'ensemble des phases qui précèdent le début du règlement d'un sinistre.

Versement(s) de l'indemnité d'un sinistre RC Auto

Deux possibilités : **le versement peut s'effectuer en rente ou en capital**. Le paiement sous la forme de capital correspond au versement unique d'un certain montant d'argent à une certaine date fixée. Le paiement sous la forme d'une rente correspond quant à lui au versement régulier pendant une durée donnée d'une somme d'argent définie. Les rentes accordées aux victimes sont conditionnées à la survie de celle-ci, les montant versés sont ainsi nommés arrérages ou annuités si les versements s'effectuent annuellement. Une rente peut être à terme échu (si le versement de l'arrérage s'effectue en début de période) ou à échoir (si le versement est effectué en fin de période). La valeur actuelle probabilisée d'une rente viagère à terme échu d'un arrérage de 1 EUR s'exprime sous la forme 1.1, en utilisant la notation suivante,

- x : l'âge de la victime.
- i : le taux d'intérêt de la rente.
- ${}_x p_t$: la probabilité de survie sur t année(s) d'une victime d'âge x selon une table de mortalité choisie.

¹Anciennement appelé taux d'Incapacité Permanente Partielle (IPP), la dénomination taux de Déficit Fonctionnel Permanent (DFP) est aussi utilisée. Ce second terme est un léger abus de langage, le DFP est un poste de préjudice dans la nomenclature de Dintilhac mais dont la méthode d'indemnisation recommandée repose sur des tables de conversion, attribuant une indemnisation de référence à différents niveaux d'AIPP. Un lecteur attentif aura remarqué l'utilisation de l'AIPP dans les précisions glossariennes sur les victimes « super-protégées ».

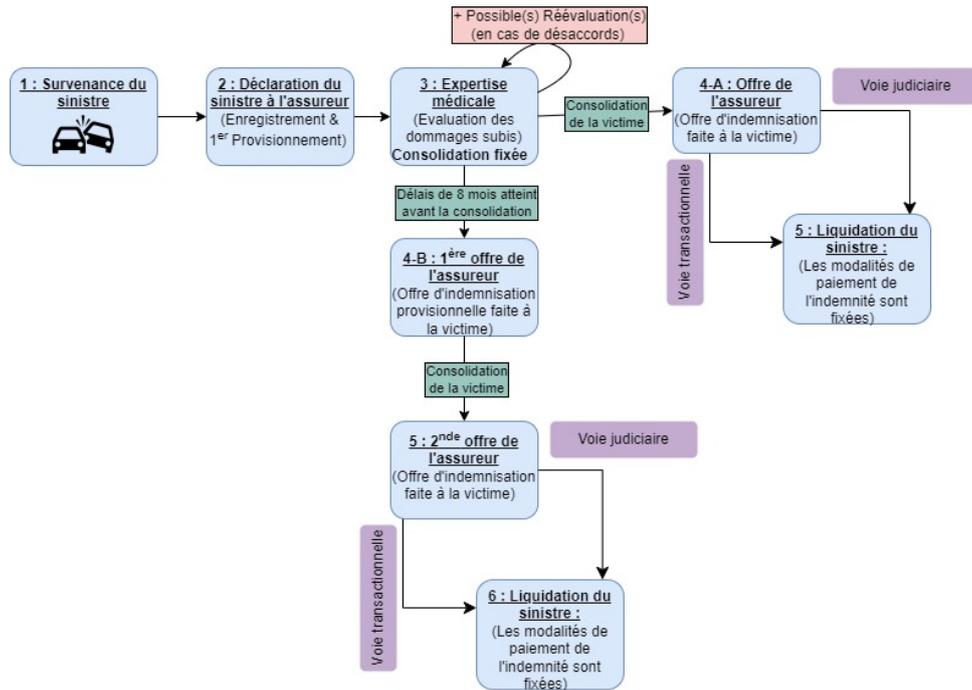


Figure 1.1: Récapitulatif : Vie d'un sinistre RC Auto

$$a_x = \sum_{t=1}^{+\infty} \frac{x p_t}{(1+i)^t} \quad (1.1)$$

Le sigle infini sert à signifier que la rente est définie sur l'ensemble de la vie de l'individu. Dans les faits, cette valeur est majorée selon la table de mortalité choisie par $w - x$, où w désigne l'âge maximum de la table.

Les deux formes de versements représentent chacune des avantages et des inconvénients présentés dans le tableau 1.1.

L'indemnisation de chaque poste de préjudice corporel sera donc assignée à l'une de ces deux méthodes de versement. Seulement, sur certains postes (appelés « **postes soumis à capitalisation** »), une forme « hybride » de versement est admise : **une rente peut être convertie en capital**.

Cette conversion de rente peut se faire à la demande de la victime, ou à la demande du juge (seul décideur de tous les montants et modalités d'indemnisations). La pratique commune pour réaliser cette conversion est d'utiliser un « barème de capitalisation ». Dans le cadre des dommages corporels des accidents de la circulation, trois barèmes « principaux » sont répertoriés et utilisés par la juridiction française : le Barème de Capitalisation de Référence pour l'Indemnisation des Victimes de la FFA, le Barème de l'université de Savoie et le Barème de la Gazette du palais qui s'est imposé lors de la majorité des décisions de justice. Chacun de ces barèmes fonctionne sur la même idée : fournir le « P€R » (Prix d'un Euro de Rente). C'est un coefficient dépendant de l'âge et du sexe d'un individu qui fournit une valeur actuelle d'une rente à l'arrérage de 1 EUR (formule ci-dessus), une simple multiplication du montant d'arrérage alloué à la victime par ce coefficient fournit alors le montant de capital¹ équivalent

¹Le terme capital peut parfois être trompeur, au sens où la définition première correspond plus à un ensemble de richesses, à une somme d'argent. Avec cette vision, une rente est un capital et la capitalisation n'est qu'une revalorisation

	Avantages		Inconvénients	
	Assureurs	Victimes	Assureurs	Victimes
Capital	Frais de gestion moindres. Evite de porter les risques de placements et de mortalité.	Dispose de l'ensemble de la somme due comme il le souhaite.	Versements de sommes conséquentes qui peuvent peser sur un bilan annuel.	Requiert une capacité de gestion de capital sur le long terme en cas de l'indemnisation d'un handicap à vie.
Rente	Faire coïncider la durée du préjudice avec la période d'indemnisation du préjudice. Fractionnement de la somme due.	Aucune gestion de la somme d'argent versée.	Exposition à des risques supplémentaires : risques de placements et de mortalité. Coûts de gestion importants.	Le versement du montant acquis en compensation est encadré, aucun contrôle sur un capital bloqué.

Table 1.1: Avantages et Inconvénients des formes de paiements

à celui dû sous la forme d'une rente.

La « RC Auto » est, pour toutes ces raisons, notoirement une branche longue. La clôture des sinistres ne peut avoir lieu qu'après des délais importants. Ces longues périodes restent très variables, allant de la durée d'une vie humaine quand l'indemnisation prend (en partie) la forme d'une rente viagère à quelques semaines pour une blessure superficielle. En moyenne, le temps d'attente entre la survenance et les règlements est de presque 2 ans lorsque l'offre est acceptée, mais ce délai s'élève à 69,5 mois lorsqu'une décision judiciaire est nécessaire¹ (dont resp. 9,7 et 21,6 mois d'attente avant la consolidation) (AGIRA, 2022)². Ces dates ne renseignent cependant pas sur la date de clôture du sinistre (i.e. la fin des règlements), événement aléatoire à valeur comprise entre la date du premier règlement (un seul versement en capital) et la date de décès de la victime. Au développement des sinistres s'ajoute les cas de réouverture de dossiers, si des manifestations tardives de séquelles d'accidents apparaissent. Ainsi, les sinistres de la branche RC Auto, de par leur nature corporelle et la gestion de rente (voir B.1) **présentent souvent des évolutions complexes**. Ces considérations apparaîtront dans la base de données de l'étude, et tous les points définis précédemment seront souvent à la base

en valeur actuelle d'un capital futur. Afin d'éviter la confusion, le terme capital sera employé dans la suite pour signifier le versement unique de l'indemnisation et le terme « rente capitalisée par barème » sera utilisé pour désigner un versement unique à la suite d'une valorisation effectuée en rente.

¹Cette différence très remarquable est aussi à pondérer par le fait que les tribunaux jugent tous les cas des accidents les plus « graves », au sens des montants d'indemnisation et de l'état de santé des victimes.

²Moyenne obtenue sur les dossiers d'accidents corporels indemnisés en 2020.

de développements surprenants et uniques des sinistres.

La date de consolidation, les discussions entre assureurs et victimes pour trouver un accord, ou l'attente de décisions judiciaires sont autant de facteurs qui créent ces délais importants. Mais des conventions (voir B.2) se sont mises en place entre les assureurs afin d'éviter que les victimes ne souffrent de l'attente de leur indemnisation.

RÉCAPITULATIF : LES SINISTRES GRAVES D'UNE BRANCHE LONGUE

Les sinistres étudiés seront caractérisés par :

- Une composante de préjudice corporelle importante, dont l'indemnisation est répartie sur 29 postes de préjudices.
- Des versements sous forme de rente, de rente capitalisée et de capital (définis pour chaque poste de préjudice).
- Des périodes d'évolutions et de paiements très étalées dans le temps.

Après cette présentation succincte du cadre général, le cadre technique de cette étude doit maintenant être introduit : l'ensemble des données utilisées doit être présenté, la compréhension et le traitement de celles-ci étant à la base de toute modélisation.

1.2 Bases de données de l'étude

L'étude menée dans ce mémoire est construite sur deux bases de données distinctes. La première contient une partie de l'historique des sinistres en RC Auto de toutes les entités d'assurance du groupe Covéa. La seconde est un mélange des données de Covéa et de données accessibles à tous qui a pour objectif de réunir l'ensemble des éléments renseignant sur l'exposition au risque de chacune des entités. La présentation de cette seconde base n'étant pas essentielle à la compréhension des méthodes utilisées, une introduction rapide sera faite dans cette partie puis des renvois aux annexes associées seront placés dans le corps du texte pour le lecteur intéressé lorsque des données spécifiques seront utilisées.

L'étude a été menée avec la volonté de considérer un point de vue « marché », c'est-à-dire en considérant uniquement les données communiquées / accessibles pour tous les acteurs du marché de la réassurance. L'objectif est de permettre une double comparaison : d'abord avec tous les tarifs des autres acteurs, ensuite avec les informations conservées en interne afin d'offrir rétrospectivement une validation et une compréhension plus pointue des résultats.

De par cette volonté, un élément essentiel de la première base de données doit être souligné : cette base est, dès sa construction, **orientée vers un certain type de tarification**. En effet, le contrat de réassurance existant pour lequel le format de la base a été créé induit un besoin spécifique de données qui peut différer du besoin occasionné par d'autres contrats. Des auteurs (Wahlin, 2012) font une distinction entre les contrats de réassurance selon le type de cession mise en place qui peut nous servir ici d'exemple pour exprimer cette orientation de la base. Certains contrats portent uniquement sur les sinistres aux montants les plus importants et sont définis par rapport à une vision « verticale » de la sinistralité, chaque sinistre étant perçu comme un montant unique. Par opposition, la vision « horizontale » de la sinistralité désigne les couvertures de réassurance portant aussi sur la fréquence et donc sur l'agrégat de sinistres. Cette distinction est schématique, la construction de certains types de contrats de réassurance peut en brouiller les pistes, mais elle permet de signaler que l'entièreté de la

sinistralité des assureurs n'a pas toujours d'intérêt selon les types d'accords avec les réassureurs. Ainsi, les besoins en données historiques changent selon le type de contrat. Le périmètre entier de la base de données et son orientation peuvent alors être redéfinis pour répondre à ces besoins. En conséquence, la base de données étudiée ne permet pas de tarifer tous les types de contrats de réassurance. Il est donc souvent nécessaire de préciser en amont le(s) type(s) de contrat(s) objectif(s), afin de s'assurer que les données étudiées sont en adéquation et répondent aux besoins de celui(ceux)-ci.

Des présentations complètes et précises des différents types de contrats de réassurance sont opérées dans de nombreux ouvrages (comme Wahlin (2012, Chapitres 4 et 5), pour une approche plus mathématique voir Blondeau and Partrat (2003, Chapitre 2, rédigé par A. Oudin) ou dans de nombreux mémoires traitant de réassurance (comme Pierre (2021, Première section)). Incorporer au corps de ce mémoire des reformulations de ces enseignements ne semblait pas nécessaire, l'hypothèse étant faite que les lecteurs ont déjà connaissance des différents contrats, traités, clauses et termes de réassurance. Une présentation succincte des contrats tarifés dans ce mémoire est tout de même placée en Annexe B.3.

Les traités en excédent de sinistres seront les contrats de réassurance principalement considérés dans ce mémoire.

NOTATIONS

De manière générale, en considérant p la portée du traité et f la franchise, les traités en excédent de sinistres seront notés :

$$pXSf$$

1.2.1 Base de sinistres

Le type de contrat étant maintenant fixé, l'orientation admise, les éléments qui caractérisent la base de données en RC Auto peuvent être définis plus en détails.

Périmètre et retraitements de la base de données

Les « sinistres d'intérêt » (i.e. ceux qui pourraient activer le traité) sont tous les sinistres dont le montant franchit, ou qui selon leur évolution pourrait franchir, la priorité f du traité¹. Ces sinistres d'intérêt pour le réassureur correspondent aux sinistres les plus graves de l'assureur, toute la base s'appuie donc sur un seuil choisi à partir duquel les sinistres sont « suffisamment graves » pour être considérés dans la transaction de réassurance.

Le choix de ce seuil dépend du type de traité, de sa franchise, de l'évolution de la branche mais également de la bonne volonté de partage d'historiques de l'assureur. Une convention de marché implique parfois que le seuil considéré corresponde à la moitié de la franchise, mais ne fait en rien office de généralité. Le seuil retenu sera désigné dans ce mémoire comme « seuil de référence », noté s_R .

La base de données des sinistres observés est construite sur des extractions des données renseignées dans les différentes bases de chacune des entités. Ces extractions sont ensuite traitées pour ne conserver que les sinistres qui dépassent un certain seuil, nommé « seuil d'extraction » et noté s_E . Ce seuil ne

¹L'utilisation du singulier est ici une simplification critiquable : dans les faits, les traités s'organisent en différentes tranches, les priorités sont donc plurielles mais celle de référence pour le début des cessions est la plus petite d'entre elles.

correspond pas au seuil de référence car il est fixé à une valeur plus basse, assurant la bonne maîtrise des données présentées aux marchés¹.

Les extractions de données sont réalisées à certaines dates choisies, les évolutions très longues et très variables des sinistres RC Auto obligeant à conserver cette composante temporelle dans les données. Ainsi, à chaque date d'extraction, trois valeurs sont consignées pour chaque sinistre d'intérêt : le montant payé, le montant provisionné, ainsi que leur somme.

NOTATIONS

Deux seuils :

s_R : le seuil de référence, seuil auquel les données sont partagées

s_E : le seuil d'extraction

Trois valeurs pour chaque sinistre :

$P_{i,j}^k$: le montant payé l'année j pour le sinistre k d'année de survenance i .

$S_{i,j}^k$: le suspens^a de l'année j pour le sinistre k d'année de survenance i .

$C_{i,j}^k := P_{i,j}^k + S_{i,j}^k$ la charge^b de l'année j du sinistre k d'année de survenance i .

Deux axes temporels :

$i = 1, \dots, I$, les années de survenance des sinistres.

$j = 1, \dots, J$, les années d'observation des sinistres.

Couramment, $J = I$ car lorsque les valeurs sont observées une année les sinistres survenus sont aussi ajoutés à la base et ces années sont translatées dans les années courantes.

^a *Glossaire*

^b *Glossaire*

Trois autres paramètres de la base peuvent alors être définis :

- Le choix de la valeur du sinistre comparée aux seuils.

Dans cette base, la charge sert de valeur de référence au franchissement des seuils. En effet, elle représente l'estimation de la valeur totale du sinistre à une date précise (et sa valeur totale si le sinistre est clos) et apparaît donc naturellement comme référence.

- Les conditions de maintien d'un sinistre dans la base.

Une précision nécessaire car les charges de sinistres évoluent quasiment à chacune des revalorisations du sinistre. Deux choix sont possibles : conserver les sinistres dont la charge redescend en dessous du seuil ou les exclure. La base étudiée retient la première option².

- La définition / considération d'évènements dans la base.

Un accident occasionnant plusieurs victimes pourrait être considéré comme un seul évènement, plusieurs indemnités distinctes seraient alors considérées dans un seul sinistre. La base étudiée est construite sur un raisonnement « par victime » et non « par accident », chaque sinistre représente donc une unique victime.

¹Également une illustration de l'asymétrie d'information entre assureur et réassureur.

²Ce choix est communément désigné comme une base de la forme « Grave un jour, Grave toujours ».

Le retraitement des données commence dès leur extraction. D'abord, car une valorisation spécifique de chaque sinistre est nécessaire. En effet, la clause de rente (Annexe B.3) d'un traité doit spécifier le taux d'actualisation et la table de mortalité selon lesquels toutes les indemnités versées sous forme de rentes doivent être valorisées. Ainsi, **les montants des sinistres qui sont cédés ne correspondent pas aux montants « véritablement » estimés/payés par l'assureur mais naissent d'un accord avec le réassureur**. Tous sont donc ré-évalués selon la clause du traité avant d'effectuer la comparaison aux différents seuils. Lorsqu'un sinistre franchit le seuil, s'engage la récupération de ses valeurs passées. En effet, le seuil n'est pas toujours franchi dès la première valorisation du sinistre mais lors d'une réévaluation plus tardive. Pourtant, c'est bien l'ensemble de l'évolution du sinistre qui doit être étudiée. Toutes les valeurs précédentes, jusqu'à la première valorisation, sont donc indispensables et doivent apparaître dans la base. Ces deux retraitements ne sont pas les seuls mais offrent un aperçu de la complexité de la création d'une telle base de données. Cette création est répétée pour chaque assureur du groupe, à partir de bases et de paramètres d'extraction propres à chacun d'entre eux¹. Une équipe travaille sur la création de ces bases et offre la représentation de la sinistralité extrême du groupe la plus précise possible, permettant ainsi à toutes les autres équipes d'utiliser des bases où les extractions sont toutes faites, retraitées et vérifiées. Les échanges avec cette équipe puis l'accès à ces bases ainsi qu'aux paramètres qui les définissent, ont permis de limiter grandement les retraitements à apporter aux données.

Les retraitements mis en œuvre ont été de 3 formes distinctes :

1. Une catégorisation des sinistres ; deux distinctions sont ajoutées à toutes les bases :
 - (a) La distinction entre les sinistres provenant de contrats professionnels et ceux qui proviennent de contrats individuels.
 - (b) La distinction entre les natures des dommages à l'origine des sinistres. Tout sinistre avec une composante de dommage corporel de plus de 80% est considéré comme un sinistre corporel.
2. Diverses vérifications :
 - (a) Vérifier la garantie concernée par chaque sinistre, seuls ceux provenant de la RC Auto doivent être conservés.
 - (b) Vérifier la présence de l'entièreté des valeurs du sinistre, de leur bon attachement à un numéro de sinistre unique, et identifier toutes autres valeurs manquantes.
 - (c) Vérifier le franchissement du seuil de référence par l'une des charges de chaque sinistre.
 - (d) Vérifier la bonne « appartenance » du sinistre : certains contrats, notamment de flottes peuvent ne plus être souscrits, tous les sinistres associés doivent donc être retirés de la base².
3. Une mise en forme semblable pour toutes les bases : De par leur composante temporelle, les valeurs de chaque sinistre peuvent s'exprimer sous la forme d'un vecteur³, et un ensemble de sinistres sous la forme d'une matrice⁴. Celle-ci peut être construite selon différentes considérations temporelles, offrant différentes représentations de la base, présentées au cours des lignes suivantes.

¹Nous ne mentionnons pas ici les différences de garanties qui peuvent exister entre les contrats d'assurance des différentes entités. Ces différences sont bien souvent très problématiques, car elles nuisent à la création de bases de données homogènes puisque les risques couverts ne sont pas les mêmes. D'autres retraitements sont alors parfois nécessaires. Cette difficulté peut être mise de côté dans notre cas, comme mentionné en section 1, la RC Auto est une garantie obligatoire qui par définition est donc présente dans tous les contrats automobiles vendus par chaque mutuelle du groupe.

²Par exemple, la souscription d'un contrat d'assurance avec le Réseau de Transport Electrique de la ville de La Rochelle qui ne serait pas renouvelé implique la mise en quarantaine de l'historique des sinistres de ce contrat.

³ $\in \mathbb{R}^d$, (où : $d :=$ année plus récente d'extraction – année plus ancienne d'extraction)

⁴ $\in M_{n \times d}$ (où : $n :=$ nombre de sinistres dans la base)

Présentation de la base de données

La base renseigne l'historique des sinistres du groupe Covéa de 2000 à 2022. Cependant, lors de la phase de retraitements des données, menée avec l'équipe à l'origine de celle-ci, certaines premières valeurs de sinistres très anciens se sont avérées irrécupérables à date de cette étude, la validité de la base a été limitée aux années 2007 à 2022. La base obtenue contient environ 400 sinistres.

Après les retraitements, quatre variables supplémentaires sont ajoutées aux valeurs de chaque sinistre : son numéro (identifiant unique), sa date de survenance, sa catégorie, et une indication sur son état de traitement. La base de données présente chaque sinistre sous la forme du tableau 1.2.

Entité	Survenance	N°Sinistre	Etat	Payés	Suspens	...	Payés	Suspens	...	Payés	Suspens
Entité1	2015	3	Ouvert	2007	2007	...	2016	2016	...	2022	2022
				0	0	...	30,47	1046,62	...	2028,32	96,91

Table 1.2: Sinistre 3 : Représentation en années comptables

Un même sinistre peut cependant s'exprimer sous d'autres formes¹. Dans la représentation du tableau 1.2, les années comptables font référence mais afin de comparer des sinistres d'années de survenance différentes, il est également possible de prendre les années de développement pour référence, comme dans le tableau 1.3.

Entité	Survenance	N°Sinistre	Etat	Payés	Suspens	Payés	...	Payés	Suspens	...	Suspens
Entité1	2015	3	Ouvert	1	1	2	...	8	8	...	16
				0,00	0,00	30,47	...	2028,32	96,91	...	0,00

Table 1.3: Sinistre 3 : Représentation en années de développement

Ainsi, la seconde année de développement d'un sinistre survenu en 2015 est l'année 2016 ; à partir de la 9^{ème} année de développement, soit 2023, toutes les valeurs sont nulles car non connues. De même, toutes les valeurs antérieures à la première valorisation sont nulles, y compris toutes les années précédant 2015 dans la vision années comptables.

Cette disposition particulière de la base de données donne lieu à une dénomination particulière : le « triangle de sinistres ». Dans les faits, seul un cumul des sinistres selon leur année de survenance crée un véritable triangle rectangle (la vision année de développement fixe l'angle droit en haut à gauche, la vision année comptable le fixe en haut à droite). Un abus de langage est cependant admis, et le terme triangle de sinistres est parfois utilisé sans qu'un cumul n'ait été effectué (une représentation de cet « effet triangle » est offerte par le tableau 1.4).

Caractéristiques				2007		2008		2009		...	2022	
Entité	Survenance	N°	Etat	Payés	Suspens	Payés	Suspens	Payés	Suspens	...	Payés	Suspens
Entite1	2007	1	Clos	0	0	100	2 536	176	2 514	...	1 501	0
Entite2	2009	4	Clos	0	0	0	0	19	3 051	...	208	0
Entite1	2015	3	Ouvert	0	0	0	0	0	0	...	2028,32	96,91
Entite2	2020	5	Ouvert	0	0	0	0	0	0	...	78	2 634

Table 1.4: Exemple : Organisation de la base en années comptables

¹L'utilisation du pluriel n'est pas fautive malgré l'unique présentation suivante. En effet, la gestion de base peut être facilitée par une présentation des sinistres « en colonne », les informations inscrites à chaque date d'évaluation sont reliées entre elle par le numéro de sinistre. Cette représentation est cependant moins lisible à la lecture et n'est donc pas présentée ici.

La quatrième variable ajoutée à chaque sinistre, renseignant sur l'état du sinistre, peut être assimilée à un facteur binaire : sinistre clos / sinistre ouvert¹. Cette distinction est importante car les sinistres clos ont déjà atteint leur valeur ultime² (i.e. la charge finale payée par l'assureur) et seront donc traités différemment des sinistres pour lesquels une estimation de cette charge est nécessaire. Cette distinction n'est cependant pas la seule qui mérite une attention particulière.

Au sein des sinistres clos, les sinistres aux paiements ultimes nuls ou très faibles **doivent être isolés**. Ces sinistres représentent des mouvements « artificiels » de capitaux, aucun montant n'a jamais été versé par l'assureur mais un provisionnement conséquent a tout de même été bloqué pendant un certain temps. Ce sont des situations exceptionnelles qui peuvent se produire lorsque la responsabilité d'un accident n'est pas certaine et qu'une décision de justice doit être rendue³. Ces sinistres très rares ont une évolution bien particulière qui diffère d'une manière assez extrême du cadre classique. Ainsi, selon la méthode utilisée et l'importance des mouvements artificiels, les montants ultimes des autres sinistres pourrait être « faussement » diminués.

Une autre « nature » de sinistre doit être considérée : les sinistres tardifs⁴. Ces sinistres sont très classiques en assurance, et bien présents en RC Auto, notamment sur les dommages corporels où certaines séquelles peuvent se déclarer des années plus tard⁵. La problématique centrale est que certains sinistres survenus lors des dernières années sont encore inconnus mais font pourtant bien partie du risque porté par l'assureur. La tarification de ce risque doit donc en tenir compte.

Un autre « effet tardif » est parfois présent dans les bases de données, spécifique à la réassurance. La nécessité de franchir le seuil d'exportation pour entrer dans la base implique parfois des difficultés de récupération de valeurs passées ; ainsi, certains sinistres entrent dans la base tardivement avec une première valeur très importante. Un sinistre entrant ainsi dans la base peut créer une évolution « anormale » de la sinistralité globale sur l'année comptable de son entrée. Ces sinistres entrés tardivement dans la base sont parfois aussi nommés « sinistres tardifs » ; afin de différencier les divers effets, le nom de « sinistres tardifs de seuil » sera préféré. Cet effet peut être grandement atténué en fixant un seuil d'extraction suffisamment bas, ce qui est le cas pour cette base.

Ces différentes considérations peuvent être quantifiées lors de la phase de représentation des données introduite dans les lignes suivantes.

La figure 1.2 offre en premier lieu une perspective générale de la base, présentant la répartition des sinistres selon leur année de survenance. Plusieurs choix permettent de faire varier la granularité : la/les catégorie(s) des sinistres, la/les entité(s), le seuil de référence retenu et la valeur des sinistres à y comparer (si plusieurs entités sont choisies toutes n'ont pas forcément le même seuil de référence

¹Lorsque cette information était manquante, un sinistre a été considéré comme clos lorsque les deux points suivants sont vérifiés :

- Valeur des suspens est nulle
- Aucune variation de la charge n'a été observée depuis 2 ans

²Exception faite de la réévaluation de l'état de certaines victimes pouvant entraîner une réouverture du dossier et l'attribution d'une nouvelle indemnisation.

³L'assureur peut décider de provisionner un montant, et finalement ne rien déboursier si la justice dégage l'assuré de toute responsabilité occasionnant alors un paiement nul.

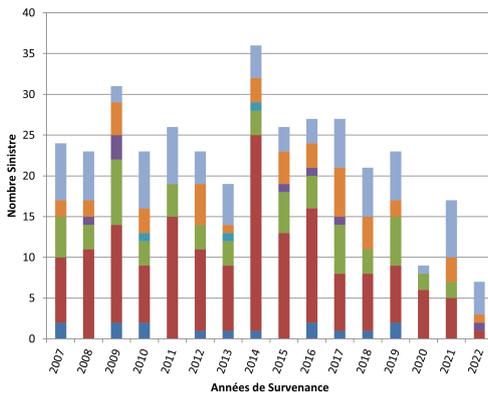
⁴*Glossaire*

⁵Un cas extrême : Un homme se rendant à un dîner subit un accident dont il sort indemne. Cinq ans plus tard, en construisant une maquette, le dos de cet homme se bloque : il est officiellement paralysé. Le déplacement de sa colonne était passé inaperçu puisqu'aucune radio n'avait été réalisée. Le sinistre est donc déclaré plus de cinq après la survenance de l'accident.

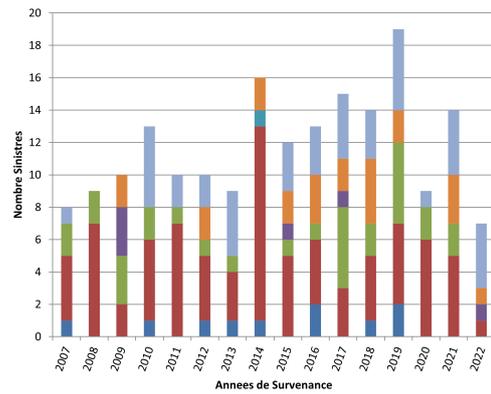
; assurer un seuil commun¹ offre une représentation plus « juste » du nombre de sinistres de chaque entité).

Toujours dans la perspective générale de la base, on peut étudier la répartition des sinistres selon la valeur de leurs charges et une/des entité(s) de provenance comme dans la figure 1.3.

Afin d'avoir une première intuition de la tendance des évolutions des sinistres, ces deux graphiques de répartitions du nombre de sinistres peuvent être comparés à une autre version d'eux-mêmes, considérant cette fois la dernière valeur de la charge des sinistres (2022 pour cette étude). Les figures 1.2 et 1.3 permettent ces deux comparaisons, en conservant toujours la granularité de toutes les entités, toutes les catégories.

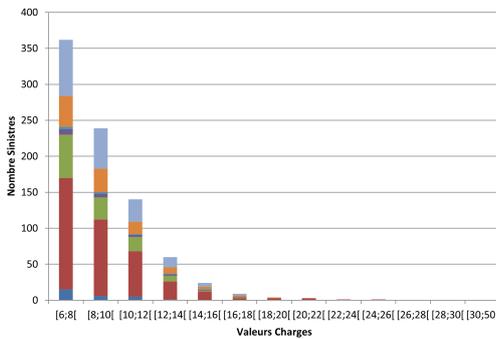


(a) Charges Maximales

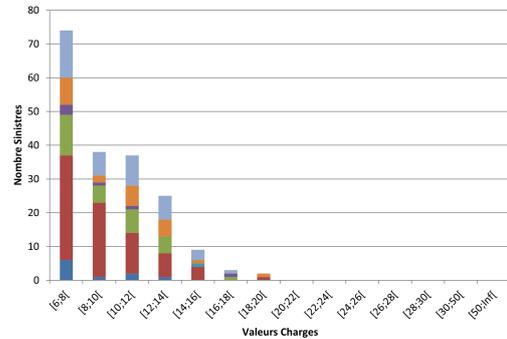


(b) Charges 2022

Figure 1.2: Répartition des sinistres selon les années de survenances - Toutes catégories - Charge supérieure à un seuil fixé



(a) Charges Maximales



(b) Charges 2022

Figure 1.3: Répartition des sinistres selon valeur des charges - Toutes catégories - Charge supérieure à un seuil fixé

Le nombre de sinistres ayant conservés une valeur au-dessus du seuil fixé est bien moins important en 2022. Une diminution globale de plus de 48% de ce nombre tend à donner l'intuition que les charges

¹Ce seuil doit être au moins supérieur au maximum des seuils d'extractions ; sous le seuil, il y aurait des données manquantes pour certaines marques, la comparaison serait totalement fautive.

de sinistres ont tendance à diminuer au cours du temps. Ces diminutions demeurent hétérogènes selon l'entité considérée, et surtout leurs importances s'amointrissent lorsque l'on s'approche de 2022. **Ces différents éléments semblent indiquer des provisionnements prudents.**

Quelques proportions de différents éléments de la base :

- Les sinistres matériels représentent, en nombre, un peu moins de 1% de l'ensemble de la base (et une proportion encore moins importante si l'on considère l'ensemble des charges 2022 de la base).
- Les sinistres corporels occasionnés par la garantie RC Auto de contrats professionnels représentent environ 8,5% de la base, mais quasiment 16,5% du total des charges maximales.
- Les sinistres sont clos à 27,5%, en moyenne, ce nombre fluctuant de manière très significative selon les entités, allant de 13,6% à 50%.
- Si l'on considère qu'une charge de moins de 150 000 EUR en 2022 est une valeur faible, environ 7% des sinistres de la base sont dans cette situation. Encore une fois, le nombre varie très fortement en fonction des entités, allant de 19,5% à 2,2%.

RÉCAPITULATIF : UNE BASE CONSTRUITE SUR 6 CARACTÉRISTIQUES

- Une certaine orientation vers la tarification d'un type de traité principal.
- Un seuil de référence.
- Un choix de valeur de sinistre à comparer à ce seuil de référence.
- Les conditions de maintien d'un sinistre dans la base.
- La définition d'un évènement.
- Une clause de rente définissant la méthode de valorisation des sinistres.

Limites restantes des données

La limite principale de la base de données provient de ce grand nombre de paramètres décrit ci-dessus et nécessairement fixé pour chaque entité du groupe. Ces derniers peuvent grandement compromettre la qualité de la base car les données ne peuvent être homogènes et comparables que si tous les paramètres sont exactement identiques. Or, le nombre de paramètres étant relativement important, cette condition nécessaire est bien souvent très contraignante. Selon les paramètres de la base de chaque entité, l'assimilation de tous les sinistres dans une seule base est parfois impossible (e.g. si la valeur de référence des sinistres comparés au seuil n'est pas la même ou si les dates d'extractions sont différentes) et les comparaisons bien souvent limitées (e.g. comparaison selon des seuils inférieurs au seuil d'extraction).

La considération de l'homogénéité des données entre particulièrement en résonance avec le problème du choix de seuil. Un problème très présent en réassurance, parfois même sur plusieurs niveaux lorsque de multiples degrés de gravité de sinistralité sont définis¹, mais elle s'exprime toujours sous la même forme : le « dilemme du seuil » ou l'obligation de faire un choix entre robustesse et précision. Plus le

¹Plusieurs notions de sinistres graves cohabitent chez les assureurs ; en effet, leur définition est souvent rattachée à un certain seuil fixé mais ceux-ci ne sont pas uniques. Par exemple, un seuil retenu en cession de réassurance peut ne pas correspondre au seuil choisi pour définir les sinistres « graves » lors de la tarification d'une branche. Ou parfois, au sein même d'une seule tarification, plusieurs seuils peuvent définir plusieurs niveaux de gravité.

seuil est faible, plus le nombre de sinistres considérés est important et offre donc plus de points pour réaliser des calibrages de meilleure qualité : le modèle est plus robuste. Cependant, l'augmentation du nombre de sinistres s'accompagne obligatoirement de l'augmentation de leur hétérogénéité occasionnant une perte de précision du modèle. À l'inverse, un seuil plus haut offre moins de données et donc des calibrages moins robustes. Néanmoins, cette fois, les données présentées sont plus homogènes et offrent un gain de précision dans le modèle.

À ces considérations générales se mêle le cas particulier des données de cette étude. L'homogénéité de sinistres en dommage corporel est complexe. Les différences de traitements, de besoins, d'évolutions de pathologies varient très fortement en fonction du type de préjudice subi par la victime. Les situations étudiées dans la base sont toujours des cas extrêmes et l'assimilation de ces différentes pathologies dans une seule base afin d'étudier une évolution commune peut être à l'origine de nombreux débats.

Le choix du seuil est cependant fait après concertation(s) de plusieurs acteurs ayant chacun un égard différent pour l'équilibre robustesse et précision. Cette décision est donc exposée à de multiples influences, mais qui parfois créent un déséquilibre certain dans la base. Dans notre situation, le seuil de référence retenu ne permet de fournir que trop peu de sinistres matériels pour les modéliser seuls. Or, les assimiler aux sinistres corporels porterait atteinte à l'homogénéité des données. Laisser l'évolution de sinistres matériels influencer celles des sinistres corporels aurait peu de sens. Une autre étude interne a donc été menée, en partant d'un seuil plus bas afin d'ajouter ensuite le risque porté au sein de la garantie RC Auto par le dommage matériel. La même méthode que celle présentée dans le chapitre 2 a été appliquée, en s'adaptant cette fois à des sinistres matériels. Ce mémoire présente uniquement l'étude orientée marché, tous les sinistres matériels sont donc écartés.

L'organisation de la base dans une vision « par victime » pour définir un événement aura un impact certain sur la tarification : la re-valorisation de chaque sinistre sera crédible et efficace mais la franchise sera appliquée plusieurs fois pour un sinistre concernant plusieurs victimes. Cette limite concerne deux sinistres bien précis qui donneront lieu à une attention particulière lors du calcul des sinistres ultimes (somme des ultimes obtenus) et du calibrage du modèle collectif sans être précisée outre mesure.

Un autre élément manquant à la base pourrait pourtant influencer à certains moments la tarification : la distinction des montants payés sous la forme de capital et ceux payés sous la forme de rente. À partir d'un certain montant, aucun sinistre n'est payé entièrement en capital, cela représenterait trop de risques pour la victime et l'assureur. Mais, aujourd'hui, aucun n'est non plus liquidé entièrement sous la forme de rente. Ainsi, pour chacun des sinistres, le coût « réel »¹ pour l'assureur n'est pas uniforme sur l'ensemble de son montant. L'analyse, le traitement et la modélisation de ce coût devrait donc s'adapter à cette différence mais cette granularité n'est pas disponible sur les données conservées.

Conscient de toutes ces limites, une attention toute particulière a été apportée à la qualité des données. Les nombreux retraitements (valeurs manquantes, ajout de variables de distinctions, suppression des sinistres aux paiements ultimes nulles et des sinistres matériels) et nombreuses vérifications (garantie d'origine, entières de l'historique de valeurs, franchissement de seuil) servent ainsi à garantir cette qualité essentielle aux étapes suivantes de ce mémoire.

1.2.2 Base d'évolutions du portefeuille

Le portefeuille de contrats d'assurance automobile évolue forcément au cours du temps. De nouvelles affaires sont souscrites, d'autres ne sont pas renouvelées et ainsi le risque porté par ce portefeuille

¹C.a.d le coût prenant en compte les frais de gestion mais aussi les rendements obtenus des provisionnements.

change. L'objectif de modélisation, qui se doit d'être une représentation du risque que l'assureur veut céder, doit donc tenir compte de ces variations.

En réassurance, deux métriques sont principalement utilisées (Blondeau and Partrat, 2003, Chapitre 5, rédigé par A. Valleron et P. Kutek) pour tenir compte de l'évolution d'un portefeuille automobile : le nombre de véhicules assurés¹ et l'assiette de prime². L'intérêt du nombre de véhicules est qu'il permet de représenter fidèlement les changements de la taille du portefeuille. Mais utiliser uniquement cette mesure revient à supposer que chaque véhicule représente exactement le même risque. À l'inverse, la variation des primes renseigne sur la qualité d'un portefeuille (e.g. un portefeuille comportant beaucoup de véhicules très puissants admet une prime moyenne plus importante) mais apporte des informations relativement vagues sur les variations de taille (l'assiette de prime peut rester stable si la prime moyenne augmente et que le nombre de contrats diminue). Sans présenter les données utilisées en entreprise, un aperçu de la vision « France entière » est fournie grâce aux données publiées par France Assureurs (2022), France Assureurs (2019) et la FFSA (2013) dans la figure 1.4³.

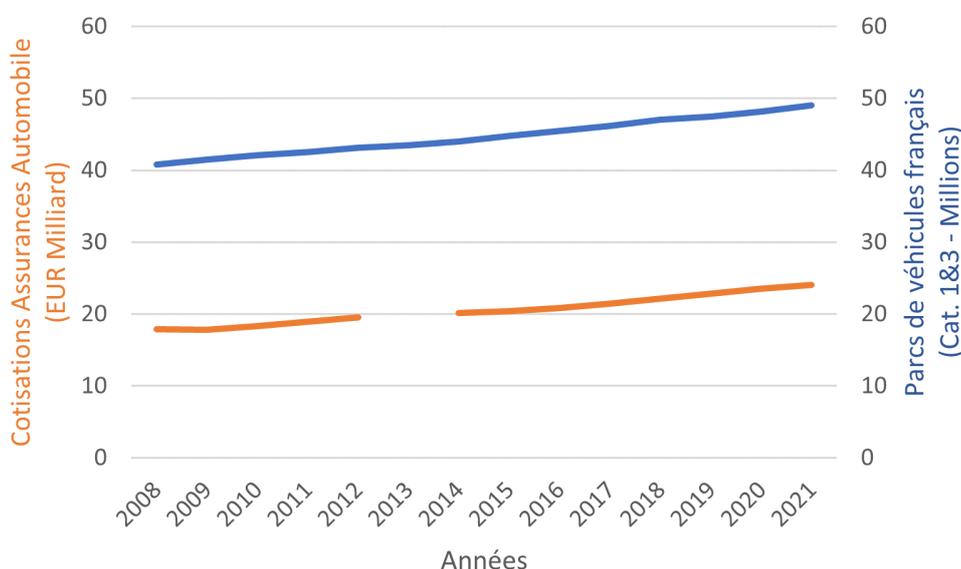


Figure 1.4: Cotisations et Nombre de véhicules - France

Une autre possibilité est d'étudier une combinaison de ces deux mesures d'évolutions en considérant le ratio Cotisations / Nombre de véhicules. Cette mesure offre une approximation grossière de la cotisation apportée par véhicule. Les données publiées à granularité plus fine de France Assureurs permettent d'obtenir ces ratios selon la catégorie de véhicule. Après comparaison (voir figure 1.5), ce ratio ne suit finalement pas la même évolution que la prime moyenne perçue par véhicule en catégorie 1. Mais cela met en valeur le fait que l'évolution des cotisations pour la garantie RC Auto est bien différente de celle des cotisations toutes catégories et doit donc bel et bien être considérée seule.

¹Parfois confondu avec le nombre de polices 3.4 du portefeuille, cependant une seule police peut contenir un grand nombre de véhicules (e.g. les contrats de flottes) qui peut aussi varier. Le nombre de polices est donc souvent considéré comme une mauvaise transcription de l'évolution du portefeuille.

²*Glossaire*

³L'observation du montant des cotisations d'assurance automobile perçue par les assureurs français est manquante en 2013.

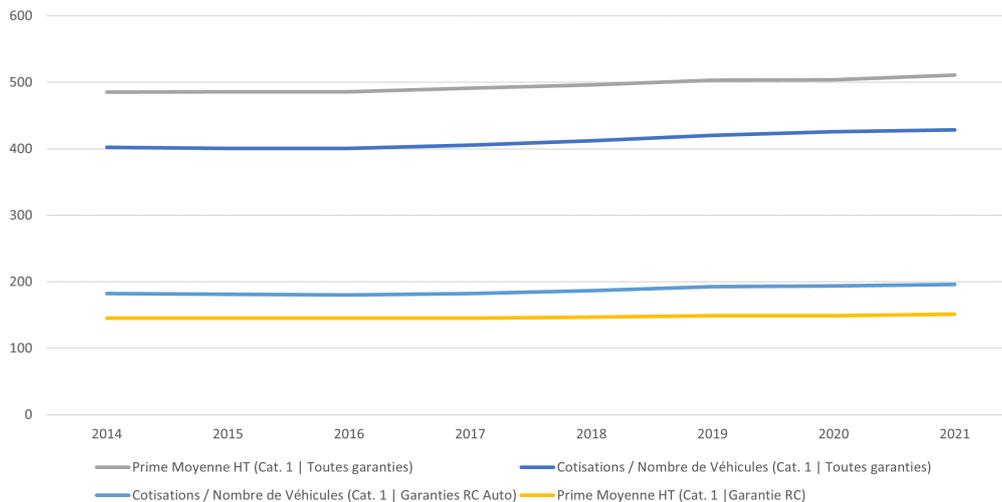


Figure 1.5: Primes Moyennes (HT) et Cotisations / Nombre de véhicules - France

Un portefeuille de contrat d'assurance automobile est également soumis à des changements « exogènes » : les jurisprudences concernant les indemnisations des victimes d'accidents de la circulation, les techniques médicales et technologies disponibles ou encore les normes de sécurité des véhicules¹. Le développement très long des sinistres corporels oblige à réaliser des études sur un grand nombre d'années ; ainsi, ces variations se feront forcément ressentir sur la vision long terme du risque porté par le portefeuille. Deux « natures » de variations auront un impact sur le risque du portefeuille : les variations de fréquence (i.e. le nombre d'accidents) et les variations de gravité (i.e. les coûts des sinistres). Cependant, ces deux phénomènes ne sont pas indépendants. Certaines innovations pourraient impliquer uniquement une augmentation de la survie d'accidentés à handicap très lourd. Cette variation de la « gravité » entrainerait alors une augmentation de la fréquence des sinistres sujets à la réassurance. Si la tendance de la fréquence peut paraître incertaine², celle du montant des indemnisations de dommages corporel est collectivement admise comme étant en hausse depuis plusieurs années (APREF, 2013).

La difficulté majeure est donc de quantifier l'impact de ces changements exogènes sur l'exposition de l'assureur. Un sujet conséquent, mais malheureusement aucune étude traitant de cette problématique dans son entièreté n'a été trouvée. La méthode proposée dans cette étude³ s'appuiera principalement sur l'évolution du coût moyen des sinistres corporels graves en RC Auto et sur l'évolution des accidents automobiles graves observés en France. Des données supplémentaires, précisées au fur et à mesure, enrichiront donc la base construite jusqu'ici. Afin de mener à bien l'appréciation de l'impact des évolutions externes et celles du portefeuille, une méthode classique en actuariat sera appliquée, nommée mise en « As-if », et constituera la première étape de la tarification du chapitre 2.

À ce stade de l'étude, une première caractérisation de l'exposition des assureurs du groupe a été réalisée. Les conditions d'engagement, les couvertures obligatoires et garanties possibles, les mesures

¹À titre d'exemple : Le nombre de décès sur la route s'élevait à plus de 10 200 victimes en 1990, ce même nombre environnant les 3200 victimes en 2022.

²La diminution du nombre de décès n'implique pas forcément celui du nombre d'accidents, et si cette baisse était observée elle serait à relativiser par l'augmentation du nombre de véhicules en circulation.

³Cette proposition de quantification des impacts de changements externes sur la fréquence et la sévérité du risque observé n'étant pas central pour cette étude, nous avons délibérément choisi une analyse « classique ».

d'exposition du portefeuille et la composition des sinistres ont été spécifiées.

Les définitions et le cadre initial sont posés. La suite consiste à modéliser les coûts auxquels peuvent être exposés les assureurs du groupe, c'est-à-dire les niveaux de pertes possibles en RC Auto et leurs fréquences d'apparition.

Dans le cadre de la réassurance, l'intérêt porte principalement sur les pertes extrêmes que peuvent atteindre les portefeuilles. Des méthodes de tarification de réassurance, adaptées à ce cadre précis, permettent justement de produire des milliers de scénarios (ou simulations) de pertes crédibles. À partir de celles-ci, l'ensemble des caractéristiques des coûts extrêmes de chaque assureur peuvent être étudiées (moments, quantiles, variations aux bornes, mesure de risque, etc.).

Ainsi, une fois ces simulations obtenues, l'étude de l'équilibre de réassurance interne et des sensibilités relatives à l'exposition aux pertes extrêmes des assureurs pourra commencer.

Chapter 2

Tarification de traité non-proportionnel en RC Auto

La tarification de traité non-proportionnel de réassurance sur des branches longues se déroule en 3 grandes étapes, chacune étant détaillée dans une section de ce chapitre. Plus précisément, la dernière section traite de sujets communs à toutes les branches de réassurance, les deux premières ayant pour objectif de retraiter les données afin de replacer les sinistres spécifiques des branches longues (temps de déclaration et /ou de développements particulièrement longs) dans un cadre plus classique. Une présentation succincte de l'ensemble du processus est d'abord effectuée en introduction, afin de mettre en valeur les objectifs, les déroulements et les connexions de chacune des parties.

L'objectif final est de représenter le risque porté par l'assureur par un modèle collectif 3.4, c'est-à-dire que si l'on considère N comme le nombre de sinistres survenus durant la période étudiée et X_i , $i = 1, \dots, N$ comme les montants de ces sinistres, alors sous les hypothèses :

(H1) X_i sont *i.i.d*

(H2) N indépendante des X_i , pour tout i

La charge totale des sinistres est modélisée par

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i & N > 0. \\ 0 & N = 0. \end{cases}$$

Cette représentation du risque permet d'obtenir la prime de traités non-proportionnels, selon le principe de prime retenu, à partir de multiples simulations du modèle.

Le modèle collectif considère, comme son nom l'indique, uniquement le « risque collectif » (Charpentier and Denuit, 2004a, Chapitre 6) : la charge et le nombre des sinistres se rapportent à l'ensemble du portefeuille et non à des polices uniques. Ainsi, à partir du « triangle de sinistres », l'objectif est de construire une vision homogène où tous les sinistres représentent des pertes indépendantes et crédibles pour le portefeuille lors de l'année d'observation.

La première modification nécessaire est une revalorisation des données, permettant de placer l'ensemble du risque étudié dans une vision artificielle où chaque année de survenance de sinistre correspond à

l'année courante. La valeur obtenue de chaque élément statistique est nommée valeur « As-If »¹. L'étendue temporelle très importante des sinistres RC Auto complexifie cette tâche, obligeant à considérer des dates éloignées du passé et du futur. La construction de cette vision s'appuiera sur deux indices. L'un cherche à retranscrire les changements du nombre de risques, l'autre se veut être une représentation des changements du coût du risque, sujet laissé en suspens dans le chapitre précédent. Cette étendue temporelle conséquente, et les nombreuses variations de développements impliquent bien souvent que la valeur finale d'un sinistre n'est pas celle de sa première évaluation. Ainsi la seconde section de ce chapitre présente et applique la méthode de Chain Ladder, permettant de projeter la valeur des sinistres sur les années futures pour en déduire une valeur finale, appelée valeur ultime. Cependant, comme indiqué dans le chapitre 1, chaque sinistre est défini selon plusieurs valeurs : le montant payé, le montant en suspens et la somme des deux, sa charge. La charge ultime du sinistre obtenue après l'application de la méthode de Chain Ladder dans la seconde étape est une projection de l'estimation de la valeur ultime du sinistre. Une étape supplémentaire consiste alors à transcrire ces valeurs estimées en montants payés par l'assureur au cours du temps. Une étape primordiale pour la prise en compte de l'effet de l'inflation, du coût du capital et des rendements. Les montants finaux ainsi obtenus représentent bien l'entièreté des coûts et peuvent alors servir au calibrage du modèle collectif.

2.1 Construction d'une vision « *As-if* »

2.1.1 Méthode retenue

L'objectif de cette section est de retraiter les données afin de construire une vision la plus homogène possible du portefeuille. Les sinistres doivent être placés dans une vision artificielle dans laquelle leur date de survenance correspond à l'année en cours. Cette mise en situation « As-If » est construite autour de trois éléments (Blondeau and Partrat, 2003, Chapitre 4 de L. Magnin) :

- **L'actualisation de la statistique** : supprimer l'impact de l'inflation monétaire afin de se placer sur une base d'unité monétaire constante.
- **Le redressement de la statistique** : constituer une base de portefeuille homogène, c'est-à-dire tenir compte des changements dans la nature des garanties accordées (niveau de franchise, nouvelles exclusions, etc.) et des changements en termes de profil de risque (capitaux en jeu, nombre de polices, risque porté par police, etc.).
- **La revalorisation de la statistique** : constituer un environnement homogène du risque, c'est-à-dire tenir compte de l'évolution du coût du risque (e.g. : changements coût matières premières nécessaires à une réparation, nouvelles méthodes de réparation, etc.) et du cadre juridique (e.g. nouvelles jurisprudences, recommandations d'indemnisations, etc.).

Tout actualisation, redressement ou revalorisation doit obligatoirement prendre en compte la composante temporelle des évolutions qui doivent être retranscrites.

Classiquement, ces changements sont ainsi réalisés à l'aide d'une série temporelle, aux valeurs réelles positives renseignées à chaque fin de période étudiée, nommée indice et notée $(I_t)_{t \in E}$, où E est l'ensemble des périodes considérées. Les variations entre différentes dates d'arrêtés constituent le point d'intérêt central d'un indice ; afin d'en rendre compte facilement, la pratique est de fixer à 100 la valeur de l'indice à une certaine date. Le passage de la valeur de la statistique en date i vers une

¹Par abus de langage, les sinistres « as-if » désignent les sinistres historiques dont les valeurs sont retraitées. L'abus de langage peut cependant parfois se poursuivre jusqu'à la formation du verbe « as-ifier » pour évoquer la mise en vision « As-If » du risque.

valeur en « vision date j » se fait par la multiplication de la valeur de la statistique avec le ratio de la valeur de l'indice en année j et de la valeur de l'indice en année i .

NOTATIONS

De manière générale, on peut noter :

- $I_{j/i} = \frac{I_j}{I_i}$: Le facteur de revalorisation de la date i à une vision en année j .
- $T^{AsIf_j} = T \times I_{j/i}$: La valeur « As-If » en date j d'une valeur réelle positive T , observée en date i .

L'ensemble de la valeur revalorisée est donc bien déterminé uniquement par les variations de l'indice sélectionné. Le plus souvent, un indice public est choisi, des indices publiés par l'INSEE ou France Assureur par exemple.

Classiquement, la mise en place de la vision « as-if » est faite par deux indices :

- **Indice sinistre** : reflète l'évolution des coûts des sinistres, c'est-à-dire l'inflation des différentes composantes des sinistres.
- **Indice prime** : reflète l'évolution des tarifs et des garanties originaux : c'est l'évolution de la prime originale moyenne.

Ce cadre ne peut cependant pas s'appliquer au cadre de la RC Auto, la considération seule de l'évolution de la prime moyenne laisserait des manques importants dans la bonne représentation de l'exposition du portefeuille (omission d'impacts exogènes). La proposition de cette étude est de conserver cette dichotomie, mais en s'appuyant cette fois sur l'hypothèse d'indépendance des coûts et nombres des sinistres du modèle collectif afin d'actualiser, de redresser et de revaloriser les données selon cette distinction.

L'indice « sinistre » est conservé pour rendre compte de l'évolution des coûts. Dans le cas des sinistres graves de la RC Auto étudiés ici, un dommage corporel est toujours la composante quasi-unique des coûts de chacun des sinistres ; par conséquent, l'indice « sinistre » sera nommé indice des dommages corporels. L'indice « prime » quant à lui, doit prendre une autre forme et servira à la modification du nombre de sinistre observés.

Le dernier point de méthode concerne la manière dont le facteur de revalorisation doit être appliqué. Dans le cas de la revalorisation des nombres de sinistres, l'application est classique : le ratio se fait entre la valeur de l'indice à l'année d'observation et l'année de projection. Mais pour appliquer de quelconques changements de valeurs aux coûts, **la distinction suspens / payés est essentielle**. En effet, les montants payés sont renseignés en valeurs cumulées dans la base de données, une revalorisation annuelle serait faussée puisqu'un paiement serait considéré comme entièrement effectué lors d'une année alors que ce paiement est en fait décomposé en plusieurs paiements successifs. Ainsi, la mise en valeur « as-if » sera faite sur les suspens et les paiements décumulés de chaque sinistre, à chaque date d'observation.

On peut définir le paiement effectué l'année j pour le sinistre k par

$$\Delta_{j,j-1}P^k := \begin{cases} P_{i,j}^k - P_{i,j-1}^k & \text{si } j = 2, \dots, J. \\ P_{i,1}^k & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.1)$$

NOTATIONS

Ce montant permet de noter :

- $\Delta_{j,j-1}P^{k,AsIf\Upsilon} = \Delta_{j,j-1}P^k \times I_{\Upsilon/j}$
- $S_{i,j}^{k,AsIf\Upsilon} = S_{i,j}^k \times I_{\Upsilon/j}$

La mise en « *as-if* » est donc faite sur $\Delta_{j,j-1}P^k$ et $S_{i,j}^k$ pour chaque sinistre et pour toutes les années j observées. La charge du sinistre demeure la valeur de référence, les paiements doivent donc être de nouveau cumulés, définissant 2.2, afin d'obtenir la charge « *as-if* » de chaque sinistre définie en 2.3.

$$P_{i,j}^{k,AsIf\Upsilon} = \sum_{l \leq j} \Delta_{l,l-1}P^{k,AsIf\Upsilon}. \quad (2.2)$$

$$C_{i,j}^{k,AsIf\Upsilon} = S_{i,j}^{k,AsIf\Upsilon} + P_{i,j}^{k,AsIf\Upsilon}. \quad (2.3)$$

NOTATIONS

Trois valeurs « *as-if* » pour chaque sinistre :

$P_{i,j}^{k,AsIf\Upsilon}$: le montant payé l'année j pour le sinistre k d'année de survenance i en vision « *As-If* » de l'année Υ .

$S_{i,j}^{k,AsIf\Upsilon}$: le suspens de l'année j pour le sinistre k d'année de survenance i en vision « *As-If* » de l'année Υ .

$C_{i,j}^{k,AsIf\Upsilon}$ la charge de l'année j du sinistre k d'année de survenance i en vision « *As-If* » de l'année Υ .

Dans cette étude, réalisée en juin 2023, Υ est égal à **2023**.

La structure temporelle particulière des données en RC auto joue aussi un rôle fondamental sur la méthode mise en place. L'illustration la plus simple de l'impact de cette temporalité est l'utilisation d'un « triangle » renseignant uniquement la date d'observation pour chaque sinistre selon les années de développements, illustration présentée dans le tableau 2.1.

N° Sinistre	Entité	Survenance	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	16
1	Entite1	2007	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	...	2022
4	Entite2	2009	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	...	
2	Entite1	2011	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	...	
3	Entite1	2015	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022			
5	Entite2	2020	2020	2021	2022								

Table 2.1: Sinistre : Représentation des années selon le développement

Après la mise en « *As-If* » décrite par les formules précédentes, ce tableau prend la forme du tableau 2.2, toutes les valeurs observées sont placées dans une vision 2023.

Pourtant, cette représentation de la sinistralité paraît « frauduleuse ». En effet l'objectif de « l'As-If » est de construire une vision où la date de survenance de chaque sinistre était 2023, alors le tableau 2.1 devrait prendre la forme de tableau 2.3.

N° Sinistre	Entité	Survenance	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	16
1	Entite1	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	...	2023
4	Entite2	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	...	2023
2	Entite1	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	...	2023
3	Entite1	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023	2023			
5	Entite2	2023	2023	2023	2023								

Table 2.2: Sinistre : Représentation des années selon le développement après « *As-If* » présenté

N° Sinistre	Entité	Survenance	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	11
1	Entite1	2023	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	...	2038
4	Entite2	2023	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	...	2038
2	Entite1	2023	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	...	2038
3	Entite1	2023	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030			
5	Entite2	2023	2023	2024	2025								

Table 2.3: Sinistre : Représentation des années selon le développement après « *As-If* » classique

Des « projections » des valeurs des sinistres dans les années futures sont donc nécessaires. L'indice de revalorisation cependant est construit pour rendre compte d'évolutions observées et mesurées. Des hypothèses doivent donc être faites afin de construire une vision future des valeurs, une vision prospective de l'indice des dommages corporels. La vision « *As-If* » retenue dans cette étude est pourtant bien celle présentée auparavant, conservant les valeurs des sinistres sous la forme du tableau 2.2, **les plaçant toutes en vision 2023**.

Ce choix est critiquable, et le format utilisant 2023 seulement comme année de survenance est une autre méthode possible. Ce choix est motivé par deux arguments :

- La distinction de la charge et des paiements : la charge est une estimation des coûts pour l'assureur alors que les paiements sont les coûts « réels ». Dès lors, appliquer l'inflation des coûts sur des charges suppose une équivalence d'évolution entre ces deux éléments, ce qui n'est pas vérifié dans les données observées (postulat démontré dans les sections suivantes).
- La bonne distinction des facteurs d'évolution des coûts afin d'analyser précisément leurs impacts respectifs. La méthode de Chain Ladder utilisée pour projeter des sinistres dans une vision de valeur ultime suppose que les données à projeter sont homogènes entre-elles. Toute inflation laissée dans les données devient alors une « inflation implicite » au sein du triangle, supposant que les coefficients obtenus par la méthode appliquent dans le même temps les développements des sinistres et leurs inflations futures. Au-delà du fait que l'inflation implicite retranscrite par la méthode subit l'influence des montants des sinistres selon les années de développement¹, la distinction entre les variations dues aux provisionnements manquants ou trop importants et les variations dues à l'inflation disparaît.

Ainsi, la vision du tableau 2.2 est retenue afin d'appliquer l'inflation plus tard, sur des coûts uniquement, et de rendre compte du rôle de chacun des facteurs d'évolutions. En effet, l'inflation des coûts sur une vingtaine d'années peut et aura un impact très important.

¹Voir section 2, partie 1

Cette vision des sinistres obtenue, une dernière modification est nécessaire. Dans les faits, **les sinistres ne sont pas revalorisés tous les ans** : les suspens et les paiements peuvent rester au même niveau uniquement car à date de comparaison, les modifications de valeurs n'ont pas été saisies dans les bases de données ou car ce sinistre n'a pas été revu par un gestionnaire durant l'année écoulée. Avec un indice admettant des valeurs différentes à chaque fin de période, deux visions « *As-if* » différentes pour ces valeurs pourtant identiques à l'origine vont être créées. D'une année sur l'autre, un mouvement « artificiel » (car sans raison d'avoir lieu) apparaît alors entre ces deux valeurs d'un même sinistre. Des mouvements aberrants qui deviennent problématiques si cela devait influencer les projections des valeurs ultimes. Ainsi, tant que les paiements et les suspens demeurent fixes, les valeurs « *As-If* » correspondantes sont modifiées *a posteriori* du changement de vision afin de conserver la valorisation la plus ancienne : la vision « *As-If* » des sinistres non-réévalués demeure ainsi fixe également.

La méthode retenue étant introduite, présentons maintenant les deux indices utilisés : l'indice des dommages corporels et l'indice du nombre de sinistres.

2.1.2 Construction d'indices adaptés¹

Indice des dommages corporels

L'objectif de cette partie est de construire un indice représentant les variations des coûts des sinistres occasionnés par des dommages corporels et présents sur le marché de la réassurance entre 2007 et 2023. Tous les acteurs d'assurance mettent en avant une augmentation des indemnités des dommages corporels très importante au cours des dernières années (APREF (2008), AFA (2008)). Comme mentionné à la fin du chapitre 1, les facteurs à l'origine de cette amplification sont extrêmement nombreux². Aussi, un unique indice public, comme les variations moyennes des coûts de santé ou l'augmentation des salaires dans ce secteur, ne semble pouvoir ni expliquer, ni représenter l'ampleur du phénomène. Un indice qui retranscrit directement l'augmentation des coûts doit donc être construit.

Le problème central dans la construction d'un tel indice découle de cette absence d'homogénéité entre les données étudiées. De fait, seuls les sinistres supérieurs au seuil de référence s_R , les plus extrêmes sont à considérer dans le cadre de notre étude. Ainsi, selon l'âge des victimes, le sexe ou encore la typologie des blessures subies, l'ensemble des indemnités nécessaires peut différer fortement (voir A.1.1 pour un exemple). Des différences très marquées d'indemnités des différents postes de préjudices impliquent une structure tout autant différente du sinistre et donc des augmentations de coûts qui ne sont souvent ni comparables entre elles ni comparables aux évolutions des sinistres plus « classiques » de dommages corporels.

Trouver le point d'équilibre entre les considérations spécifiques nécessaires à la bonne représentation des sinistres étudiés et le maintien d'un cadre suffisamment général afin que l'indice puisse tout de même s'appliquer à l'entièreté de la base est donc la difficulté principale de cette tentative de représentation d'un phénomène aussi large. Celle-ci se fera sur un ensemble d'hypothèses critiquables, mais toujours prises dans l'optique de se placer sur ce point d'équilibre.

La base de données étudiée ne peut servir de base pour la construction d'un tel indice car le nombre de sinistres observés par année est trop peu élevé (environ une dizaine de sinistres par année de survenance pour chaque entité). Cet échantillon obtenu au-dessus du seuil de référence choisi ne peut offrir une vision globale des variations des dommages corporels, chaque sinistre étant pourvu d'un rôle représentationnel trop important (une preuve graphique est faite en A.1.1). L'indice des dommages

¹Les données utilisées ont été extraites à l'aide de l'outil Open Source : « Plot Digitizer », outil de mesure permettant de convertir des données présentées graphiquement en tableau . <https://plotdigitizer.sourceforge.net/>

²Pour continuer la liste non-exhaustive du chapitre 1 : les variations des coûts de l'immobilier, des véhicules personnels et de la robotique impacteront ceux des équipements des véhicules et habitats adaptés.

corporels sera donc construit à partir de données publiques : des indices et des études publiées par des acteurs du marché se basant toutes sur des bases de données aux dimensions bien plus importantes.

Trois études publiées par des réassureurs seront utilisées comme sources principales :

- [1] Livre Blanc : L'indemnisation des préjudices corporels graves en RC Automobile, CCR Re and Addactis (2019)
- [2] Analyse de l'indemnisation du corporel grave pour la période 2015 à 2017 au sein du marché français, SCOR (2019)
- [3] *Motor Bodily Injury Landscape* – France, Swiss Re (2022)

Tout utilisation d'une étude doit être précédée de l'analyse de la base de données exploitée afin d'établir le bien-fondé de la comparaison avec l'évolution de celle constituée pour cette étude, placée en A.1.2.

Au-delà des limites de chacune de ces bases, « l'orientation marché » est une composante intrinsèque de chacune de ces études : une telle publication est obligatoirement orientée afin de servir de support à l'argumentaire d'un réassureur.

Conscient de toutes ces limites, l'indice est construit dans une volonté de représenter les variations des indemnisations des sinistres corporels graves. La distinction des postes de préjudice prescrite par le rapport Dintilhac est conservée dans cette approche. Deux constats, partagés à toutes les périodes dans toutes les études publiées, serviront de fondements aux hypothèses prises pour la construction de cet indice :

- (P1) La répartition des typologies de blessures n'est pas uniforme, particulièrement dans les cas graves qui sont étudiés ici. Plus de 80% des séquelles sont des traumatismes crâniens, quasiment 15% souffrent de lésions médullaires (paraplégie : 3% ou tétraplégie : 11%) et les 5% restant correspondent aux victimes restées dans un état végétatif.
- (P2) Trois chefs de postes de préjudices représentent à eux seuls plus de 80% des indemnisations accordées. L'Assistance Tierce Personne (ATP), la Pertes de Gains Professionnels Futures (PGPF) et les Dépenses de Santé Futures et Actuelles (DSF) sont ainsi les postes de préjudices les plus impactants sur le coût d'un sinistre pour un assureur.

Partant du constat (P2), l'indice sera construit par une moyenne pondérée de 4 indices, représentant respectivement l'évolution de l'ATP, des DSF, des PGPF et l'ensemble de tous les autres postes de préjudices. La construction de l'indice se divise en deux étapes :

- ★1★ Identifier les indices permettant de créer une telle représentation
- ★2★ Attribuer un poids à chaque indice pour chaque période d'observation

★1★ **Construction des indices** : Le choix a été fait d'utiliser des indices publics, afin de conserver uniquement l'utilisation de données publiques. Chaque indice est choisi pour représenter au mieux la méthode de calcul de l'indemnisation du poste de préjudice qui lui est attribué. Les méthodes de calculs correspondent à celles proposées par le Référentiel indicatif de l'indemnisation du préjudice corporel des cours d'appel de l'École Nationale de la Magistrature (2022) et par l'aide méthodologique proposée par Mornet (2022)¹, conseiller à la Cour de cassation. Certains éléments se rapportant notamment aux évolutions temporelles des décisions juridiques et aux rôles des médecins experts sont extraits des bilans annuels de l'AREDOC (2022) sur la nomenclature des postes de préjudices de la victime directe. La présentation de ces méthodes de calcul peut être trouvée en A.3.

¹Plus couramment appelé « Référentiel Mornet »

La présentation individuelle de chacun des trois indices sélectionnés, ainsi que la comparaison avec les variations recueillies dans l'étude [1] rallongeaient le corps de ce mémoire sans apporter d'éléments nouveaux. Ces présentations sont faites en A.1.3.

Tout en conservant une réserve par rapport aux évolutions exposées par la CCR, notamment du fait du seuil d'extraction très bas de leurs données et des impacts des typologies de blessures qui demeurent dans leur base, l'ensemble de l'augmentation du coût de chaque poste de préjudice n'est clairement pas capturé par l'indice choisi. Une pratique actuarielle permettant de répondre à cette problématique est d'ajouter les variations d'un second indice. Cet autre indice est nommé « *Super Imposed Inflation* » ou super-inflation (Blondeau and Partrat, 2003, Chapitre 5 de A. Valleron et P. Kutek), en ce sens que son unique but est d'apporter une inflation supplémentaire.

Identifier tous les facteurs expliquant la différence entre l'indice public utilisé et les variations de coûts observés reviendrait à dresser la liste de l'ensemble des éléments impactant ces frais. Une liste déjà évoquée et qui est impossible à construire exhaustivement. Certains éléments, dont le rôle est particulièrement avéré peuvent tout de même être mis en avant :

- Les mouvements du cadre juridique : De nouveaux préjudices apparaissent (e.g. l'assistance parentale), des méthodes d'attributions changent (e.g. l'augmentation du nombre de jours d'assistance annuel attribués par an au titre de l'ATP), les pratiques et demandes changent également (e.g. de plus en de demandes de versement sous forme de capital). Les exemples mentionnés ici et l'ensemble de la modification du cadre des indemnisations sont mis en avant dans la présentation du calcul d'indemnisation de trois postes de préjudices en A.3.
- Le cadre économique : Le cadre économique de l'indice diffère obligatoirement de celui du poste de préjudice (e.g les salaires ouvriers dans le secteur de la santé subissent des variations économiques plus nombreuses que celui des tierces-personnes assistantes). Ce point appuie la considération qu'un indice public ne pourra jamais représenter l'entièreté des variations d'un phénomène précis, l'objectif étant d'approximer ces variations.
- La forme de versement choisie :
 - **Les rentes** : De par leur nature, les versements en rente ont beaucoup évolué. L'essentiel des bouleversements de valeur proviennent : des changements du cadre réglementaire concernant l'indexation et le taux minimum d'actualisation, des changements des taux de placements et des changements de mortalité. Tous ces éléments sont définis et présentés plus en détails en B.1.
 - **Les rentes capitalisées par barème** : la demande de versement de capital étant en forte hausse, l'importance des barèmes de capitalisation l'est tout autant. Les variations dans ces barèmes auront des impacts très concrets sur les montants de rentes capitalisées et donc sur le montant total de l'indemnisation.

L'application de super-inflation nécessite une approche quantitative des variations à ajouter. Or, la conversion des éléments manquants de chaque indice dans une version quantitative n'est pas toujours possible, et est bien souvent sujette à interprétation. Trois indices de super-inflation ont été construits, chacun exprimant un des phénomènes mentionnés ci-dessus. Une présentation individuelle de ces trois indices, expliquant l'entièreté du processus pour atteindre la représentation du phénomène ciblé, est faite en A.1.4

La somme des variations de chaque super-inflation, chacune modulée par un certain poids¹, et des variations des indices publics choisis donne les variations retenues pour chacun des trois indices finaux des postes de préjudice. Les représentations des indices obtenus sont placées en A.1.4 également.

★2★ Poids de postes de préjudices : La seconde étape de la construction de l'indice des dommages corporels consiste à attribuer un poids à chacun des trois précédents : l'indice final sera une moyenne pondérée des variations présentées précédemment. Ces poids sont des représentations de « l'importance » de chacun des postes de préjudices dans le montant total des sinistres.

La proportion de l'indemnisation accordée à chaque poste par rapport à l'indemnisation totale est utilisé comme définition de cette « importance ». Seulement, ces proportions varient énormément selon la typologie des blessures ou encore l'âge de la victime. Les postulats (P1) et (P2) fournissent une base permettant de caractériser les attentes dans la répartition de ces proportions :

- Les blessures de la grande majorité de la base sont des traumatismes crâniens : la proportion de l'ATP sera donc particulièrement élevée.
- La somme des proportions de l'ATP, PGPF et DSF dépasse les 80%, la proportion des autres postes de préjudice est déterminée selon les pourcentages restants considérant tous les montants non inclus dans un des trois postes principaux.

Cependant, les évolutions temporelles des coûts de chacun des postes de préjudice impactent l'ensemble des proportions d'indemnisations accordées. Par exemple, si l'indemnisation de l'ATP augmente plus rapidement que l'indemnisation des PGPF alors, automatiquement, la proportion du montant versé au titre de l'ATP augmentera par rapport à celui des PGPF. Ainsi, déterminer l'évolution dans le temps des proportions de montants attribués à chacun de ces trois postes est une tâche complexe et a constitué l'essentiel du travail réalisé sur cet indice des dommages corporels. Une nouvelle fois, les études [3], [2], [1] serviront de points de références, auxquelles s'ajoutent des consultations d'experts en gestion de sinistres corporels graves pour assurer la cohérence avec les données de ce mémoire. L'ensemble des informations réunies sont succinctement résumées en A.1.5. Le tableau 2.4 est retenu comme l'expression des proportions des postes de préjudices entre 2005 et 2023.

En **rouge** les proportions extraites des différentes études, après un retraitement servant à construire une vision unique et homogène qui reste en accord avec toutes les études parcourues et les expertises des acteurs en charge de la gestion des sinistres corporels graves. Les points restants sont déterminés par interpolation linéaire.

¹Les poids sont calibrés, après consultation d'experts en gestion de sinistres corporels graves, sur la proportion des sinistres liquidés en rente et celle des liquidations en rente capitalisée.

Années	ATP	PGPF	DSF	Autres
2005	0.54	0.10	0.16	0.20
2006	0.54	0.10	0.16	0.20
2007	0.54	0.10	0.16	0.20
2008	0.54	0.10	0.16	0.20
2009	0.54	0.09	0.16	0.20
2010	0.54	0.09	0.16	0.20
2011	0.54	0.10	0.16	0.20
2012	0.55	0.10	0.15	0.20
2013	0.55	0.10	0.14	0.20
2014	0.56	0.10	0.14	0.20
2015	0.56	0.11	0.13	0.20
2016	0.55	0.12	0.13	0.20
2017	0.55	0.12	0.12	0.21
2018	0.54	0.13	0.13	0.20
2019	0.53	0.14	0.13	0.20
2020	0.52	0.15	0.13	0.20
2021	0.52	0.15	0.13	0.20
2022	0.52	0.15	0.13	0.20
2023	0.52	0.15	0.13	0.20

Table 2.4: Poids des Postes de Préjudice

Indice Final La partie des autres postes de préjudice sera modélisé par l'IPC - Ensemble des ménages - France - Ensemble hors tabac (INSEE, idBank : [001763852](#)), sans super-inflation. Un choix critiquable, qui ne représente pas l'évolution de ces postes, mais une simplification admise au vu du poids limité de ces postes dans les coûts et surtout nécessaire au vu de la complexité, de l'hétérogénéité et de l'enchevêtrement de toutes les évolutions présentes dans les différents postes.

L'indice des dommages corporels alors obtenu de 2005 à 2023 est présenté dans le tableau 2.5 à partir de 2010, en base 2010.

2010	2011	2012	2013	2014	2015	...	2018	2019	2020	2021	2022	2023
100.00	101.47	105.84	108.61	123.64	127.70	...	136.76	141.17	145.27	150.95	159.44	161.52

Table 2.5: Indice des Dommages Corporels

La figure 2.1 permet de comparer l'indice construit, l'indice obtenu sans les super-inflation et les indices obtenus à partir des évolutions des coûts moyens publiés dans les études [3], [2], [1].

L'indice des dommages corporels retenu présente une augmentation des coûts moyens plus importante que celle observée par Swiss Re, publiant un indice adapté à une typologie de blessure unique, mais moindre par rapport aux variations très importantes observées par la CCR et SCOR. La tendance de l'indice est relativement similaire à celle de SwissRe, seuls un saut en 2014 dû aux changements réglementaires dans le calcul du taux minimum garantie obligatoire et l'effet COVID19 très marqué pour SwissRe font transparaître des différences marquantes.

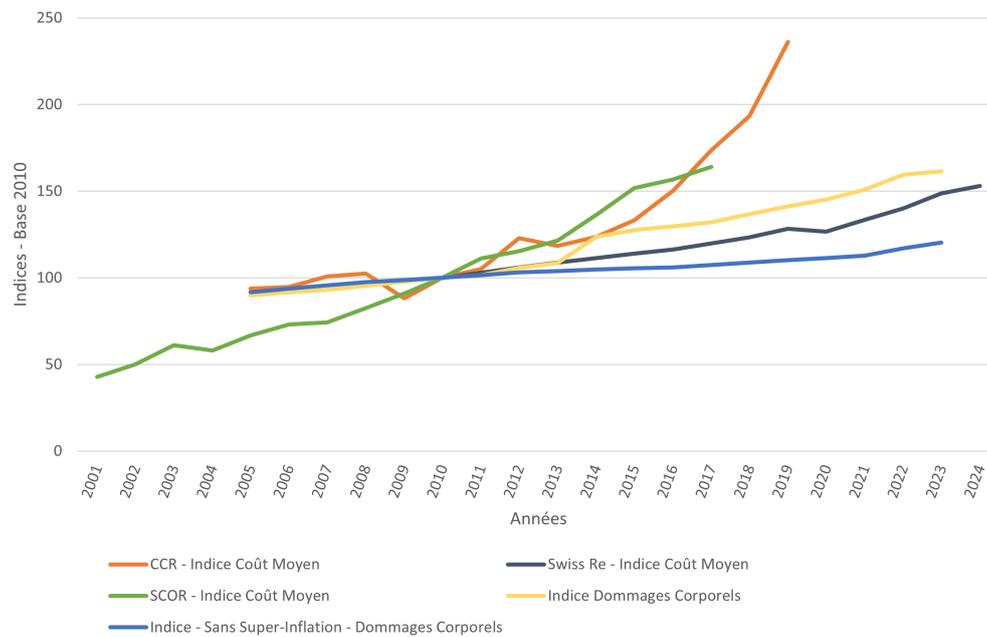


Figure 2.1: Comparaisons - Indices Dommages Corporels - Base 2010

Critiques : Les pistes d'améliorations dans la construction de cet indice sont nombreuses. D'abord, si l'on considère le même cadre de construction : chacun des indices publics choisis peut être à l'origine de débats. L'utilisation de l'interpolation linéaire comme seule méthode d'interpolation permet un gain de temps important mais implique une simplification tout aussi importante du phénomène évalué, certaines augmentations annuelles élevées de l'indice retenu (e.g. en 2014) paraissent peu crédibles pour une représentation réaliste des variations de coût : certaines méthodes de lissage de série temporelle pourraient permettre d'améliorer ce point.

Le cadre de construction lui même pourrait être changé ; en effet, l'hétérogénéité des victimes et des types d'indemnisations plaident en faveur de l'idée d'en faire cohabiter plusieurs. La première étape serait d'identifier un petit nombre de « profils-types » selon la typologie de blessure, l'âge et le montant d'indemnisation¹ accordé qui offrent une bonne représentation de l'ensemble des données. Chacun de ces profils types se verrait associer un indice adapté en charge de la revalorisation de l'ensemble du groupe rattaché au profil-type. L'utilisation de méthode de clustering et la construction d'un indice spécialisé à chacun des cas pourrait être le sujet de travaux futurs.

Indice du nombre de sinistres

Les données fondamentales dans la construction de cet indice sont présentées en A.2.

L'objectif est bien de rendre compte de tous les changements d'exposition par rapport au nombre de sinistres par an du portefeuille. Le ratio du nombre d'accidents graves par véhicule de première catégorie, développé en A.2, peut être utilisé à cet effet. Cependant, une faiblesse demeure : ce ratio ne tient pas compte de l'évolution du portefeuille. En s'appuyant sur les présentations de la fin du premier chapitre, le nombre de véhicules assurés dans le portefeuille permet d'ajouter cette composante. Ainsi, un indice est construit pour le portefeuille de chacune des entités en utilisant le produit des deux composantes mentionnées précédemment ; par simplicité, l'indice obtenu est nommé par la suite indice « de fréquence grave ».

¹Voir même l'évolution temporelle du montant d'indemnisation.

En notant t une année observée et I_t^{Freq} la valeur de l'indice de fréquence grave en t ,

$$I_t^{\text{Freq}} = (\text{Nombre de Sinistres Graves en } t) \times \left(\frac{\text{Nombre Véhicules Assurés en } t}{\text{Nombre Véhicules Parc Français en } t} \right).$$

L'indice représente finalement le nombre de sinistres graves obtenus si ces sinistres étaient distribués uniquement selon la proportion du parc des véhicules français assurés au sein du portefeuille. La comparaison de l'indice de fréquence créé et de celui publié par France Assureurs (2022) est placée dans la figure 2.2.

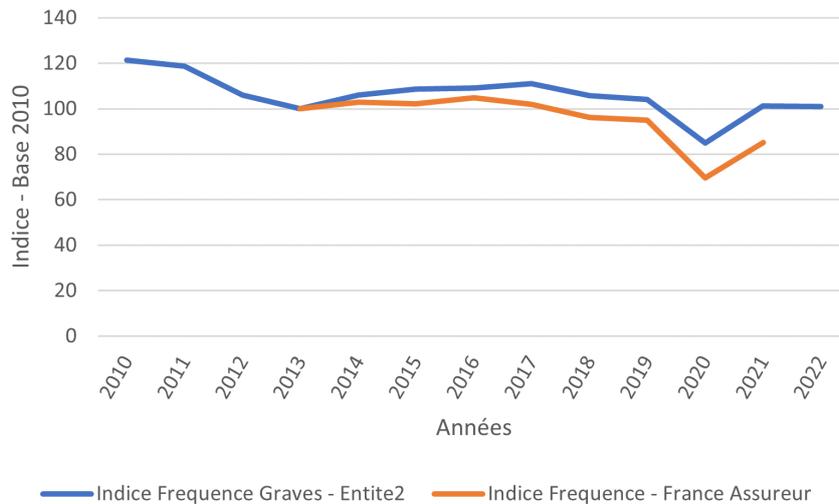


Figure 2.2: Comparaisons - Indices Fréquence Grave - Base 2010

La stabilité du nombre de sinistres graves entre 2013 et 2017 laisse place à l'augmentation du nombre de véhicules assurés sur ces années-là. À l'inverse, la diminution du nombre d'accidents graves lors des autres années n'est pas compensée par la croissance relativement lente du nombre de véhicules et implique donc des diminutions de la valeur de l'indice. L'impact des confinements en 2020 est également très visible, la valeur très basse de l'indice à cette date permettra un redressement à la hausse de la statistique pour cette année-là.

Cela permet de mettre en avant le comportement très inhabituel de l'année 2020, dans un grand nombre de sens et notamment dans celui qui nous intéresse : la sinistralité automobile. Une attention toute particulière devra donc être portée sur cette année, lors de la considération du nombre de sinistres annuels mais également lors de celle des charges agrégées qui subissent un effet nombre de sinistres.

Critique : La limite principale de cet indice est qu'il ne tient pas compte du « profil de risque » du portefeuille. Par exemple, l'arrivée dans un portefeuille de beaucoup d'individus aux comportements sinistrogènes devrait impliquer une hausse dans l'exposition globale du nombre de sinistres. Une approximation de ce phénomène est habituellement faite en utilisant les fluctuations des valeurs actualisées des primes, ou des primes par véhicule. Dans le cas de la RC Auto, l'utilisation de la prime acquise n'est pas toujours efficace, le caractère obligatoire de cette garantie et l'environnement concurrentiel sont deux facteurs qui expliquent en partie l'observation d'une grande stabilité des primes acquises actualisées par les entités du groupe Covéa.

Cet indice permet de mettre en place le redressement du nombre de sinistres, mais la méthode permettant d'obtenir ces nombres n'est pas encore définie. La prise en compte des sinistres tardifs et tardifs de seuil nécessite des notions introduites dans la section suivante, l'application de cet indice sera donc faite *a posteriori* de cette section. Afin d'offrir une présentation plus « pratique » de la mise en « *As-If* », l'application de l'indice des dommages corporels sur un sinistre tiré aléatoirement est réalisée dans la partie suivante.

2.1.3 Application de la vision « *As-If* » aux données

La présentation de cette mise en « *As-If* » est inspirée de Blondeau and Partrat (Chapitre 5 rédigé par A. Valleron et P. Kutek, 2003). L'unique objectif de cette représentation étant de faciliter la bonne compréhension de la méthode¹, seules les grandes lignes demeurent dans le corps de ce mémoire, les tableaux précisant la démarche sont placés en C.1.

Trois grandes étapes sont à distinguer :

Étape 1 : Considérer une vision décumulée du sinistre (tableau C.1).

Étape 2 : Multiplier le facteur de revalorisation en vision 2023 aux paiements annuels et suspens des années correspondantes (tableau C.2).

Étape 3 : Cumuler les paiements « *As-If* » obtenus (tableau C.3).

Une fois cette vision « *As-If* » appliquée à tous les sinistres, la répartition des charges change et doit être évaluée de nouveau. La figure 2.3, construite en symétrie de la figure 2.3, présente la répartition de la charge maximale de tous les sinistres en vision « *As-If* ».

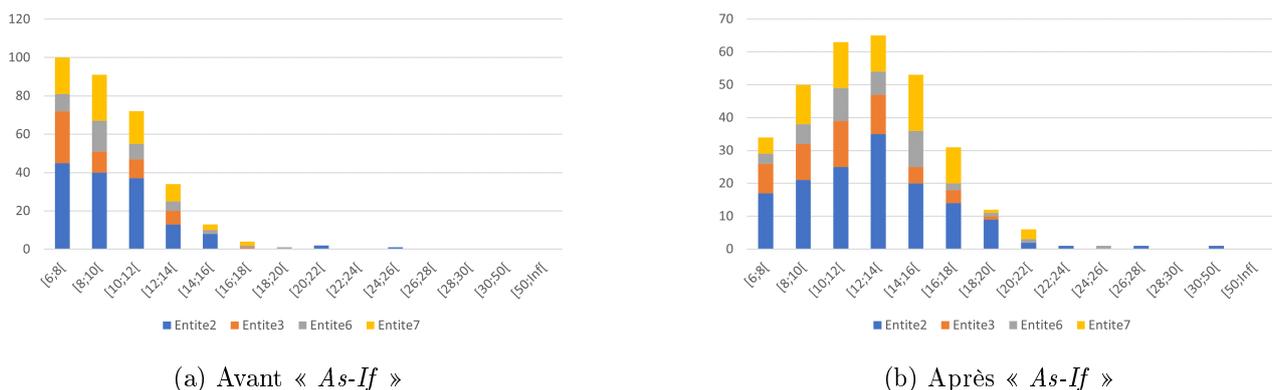


Figure 2.3: Répartition valeur de la charge maximale des sinistres corporels - Contrats individuels

L'effet de l'évolution de la branche sur le choix du seuil de marché a été mentionné dans le chapitre 1, sans pour autant préciser comment cette évolution était quantifiée : l'indice retranscrivant l'évolution des coûts joue également ce rôle. Considérer un seuil de valeur fixe pour toutes les années comptables

¹La mise en place « technique » est réalisée en utilisant la représentation en année comptable de la base, la mise en « *As-If* » est alors réalisée par multiplication de vecteurs colonnes, plus efficace avec l'utilisation du logiciel R.

s'avère problématique : par exemple, avec un seuil à 4 M EUR un sinistre d'une valeur de 3,9 M EUR en 2005 ne serait pas retenu alors qu'en vision « As-if » 2023 sa valeur dépasserait ce seuil. Or la charge « As-If » est bien celle qui fait référence de valeur dorénavant. Le seuil doit donc lui aussi être actualisé et revalorisé afin que tous les sinistres dont l'évaluation « As-If » annuelle franchit le seuil nominal retenu soient bien considérés dans la base. Dans une certaine mesure, le raisonnement s'inverse par rapport aux modifications apportées aux charges : un seuil nominal à partir duquel les sinistres ont de l'intérêt pour le traité est fixé, l'indice sélectionné « construit » une vision annuelle de ce seuil permettant de conserver toutes les charges « As-If » qui franchissent le seuil nominal retenu¹. Néanmoins, l'affirmation précédente est erronée. La composition particulière des charges, qui ne sont pas constituées entièrement de montants définis annuellement, impliquerait que certains sinistres pourraient ne pas être identifiés dans le cas d'un seuil annuel. Ce cas de figure problématique aurait lieu dès lors que la valeur annuelle d'une charge ne dépasse pas celle du seuil annuel, mais que sa valeur « As-If » franchit bien le seuil nominal. Avec les notations introduites précédemment, le problème peut être formalisé.

Si l'on note s_F le seuil nominal choisi, $(I_t)_{t \in E}$ l'indice sélectionné et E l'ensemble des années comptables considérées, Υ l'année cible, alors la problématique d'une valeur manquante dans la base valeur d'un sinistre en année j s'exprime sous la forme de deux inégalités (2.4) à vérifier.

$$\begin{cases} P_{i,j-1}^k + (\Delta_{j,j-1}P^k + S_{i,j}^k) < s_F \times I_{j/\Upsilon}. \\ P_{i,j-1}^{k,AsIf\Upsilon} + (\Delta_{j,j-1}P^{k,AsIf\Upsilon} + S_{i,j}^{k,AsIf\Upsilon}) \geq s_F. \end{cases} \quad (2.4)$$

Ce qui revient à²

$$\begin{cases} P_{i,j-1}^k \times I_{\Upsilon/j} < s_F - (\Delta_{j,j-1}P^k + S_{i,j}^k) \times I_{\Upsilon/i}. \\ P_{i,j-1}^{k,AsIf\Upsilon} \geq s_F - (\Delta_{j,j-1}P^{k,AsIf\Upsilon} + S_{i,j}^{k,AsIf\Upsilon}). \end{cases} \Leftrightarrow^3 \begin{cases} P_{i,j-1}^k \times I_{\Upsilon/j} < s_F - (\Delta_{j,j-1}P^k + S_{i,j}^k) \times I_{\Upsilon/j}. \\ P_{i,j-1}^{k,AsIf\Upsilon} \geq s_F - (\Delta_{j,j-1}P^k + S_{i,j}^k) \times I_{\Upsilon/j}. \end{cases}$$

Ainsi, dès lors que (2.5) est vérifiée, une valeur qui devrait être considérée dans la base est manquante.

$$P_{i,j-1}^{k,AsIf\Upsilon} \geq s_F - (\Delta_{j,j-1}P^k + S_{i,j}^k) \times I_{\Upsilon/j} > P_{i,j-1}^k \times I_{\Upsilon/j}. \quad (2.5)$$

Un exemple numérique, très improbable (voire impossible), permet cependant d'illustrer simplement ce cas de figure. Un sinistre est clos la 6^{ème} année de son développement, année correspondant à l'année cible. La première année, l'assureur paye 1 M EUR, 500 K EUR la cinquième année, sans jamais saisir de provisionnement. Les coefficients de passage en valeur « As-If » sont de 150% entre la 1^{ère} et 6^{ème} année, de 101% entre la 5^{ème} et 6^{ème} année. Le seuil de référence est fixé à 2 M EUR, et est revalorisé à 1,98 M EUR la 5^{ème} et 1,33 M EUR la 1^{ère} année. Dans ce cas bien particulier, (2.5) est vérifiée.

¹Le seuil nominal est multiplié par $I_{i/\Upsilon}$, avec i l'année pour laquelle le seuil est souhaité et Υ l'année cible dans laquelle la vision « As-If » est construite.

² $I_{i/\Upsilon} = I_{\Upsilon/i}^{-1}$

³ $(\Delta_{j,j-1}P^k + S_{i,j}^k)$ correspond à la partie de la charge définie pour l'année j qui est revalorisée et redressée par $I_{\Upsilon/i}$.

$$\begin{cases} P_{i,4}^k = 1,5 \text{ EUR M.} \\ s_F - (\Delta_{5,4}P^k + S_{i,5}^k) \times I_{\Upsilon/j} = 1,495 \text{ EUR M.} \\ P_{i,4}^k \times I_{\Upsilon/j} = 1,1 \text{ EUR M.} \end{cases}$$

Le sinistre n'entre jamais dans la base car $1 < 1,33$ et $1,5 < 1,95$ et pourtant en valeur « As-If », la charge vaut 2,05 M EUR et dépasse donc le seuil de 2 M EUR.

Une solution simple à cette problématique est de ne retenir que le seuil minimal des seuils annuels pour chacune des années comptables considérées. La complexité de gestion de seuils annuels disparaît alors en même temps que la problématique précédente. Soient,

$$I_{\Upsilon/max} := \max_{i \in E} I_{\Upsilon/i} \text{ et} \\ I_{max/\Upsilon} := 1/I_{\Upsilon/max}.$$

Le seuil minimal est donc le produit de s_F et $I_{max/\Upsilon}$, l'existence d'un sinistre manquant dans la base décrite par les inégalités précédentes devient (2.6).

$$\begin{cases} P_{i,j-1}^k \times I_{\Upsilon/max} < s_F - (\Delta_{j,j-1}P^k + S_{i,j}^k) \times I_{\Upsilon/max}. \\ P_{i,j-1}^{k,AsIf\Upsilon} \geq s_F - (\Delta_{j,j-1}P^k + S_{i,j}^k) \times I_{\Upsilon/j}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Comme $I_{\Upsilon/max} \geq I_{\Upsilon/j}, \forall j \in E$ et $(P_{i,j-1}^k \times I_{\Upsilon/max}) \geq P_{i,j-1}^{k,AsIf\Upsilon}$, les deux inégalités de (2.6) ne peuvent jamais être vérifiées ensemble.

Un point peut maintenant être précisé : la relation entre ce seuil nominal, s_F , choisi comme référence pour toutes les années comptables et les seuils déjà connus s_E et s_M . Dans la vision de l'assureur, le minimum du seuil nominal revisité peut servir de borne supérieure pour s_E et s_M peut donc correspondre à la valeur nominale considérée comme référence. Dans une vision « marché », les seules valeurs disponibles sont celles qui ont franchi s_M . Par conséquent, s_M doit être le minimum du seuil nominal faisant référence pour les charges « As-If ». Le seuil de marché est donc multiplié par $I_{\Upsilon/max}$ pour former le seuil final, s_F , à partir duquel les sinistres sont conservés pour la tarification.

NOTATIONS

- $s_F := s_M \times I_{\Upsilon/max}$: nommé « seuil final », correspondant au seuil à franchir pour les charges « As-If » des sinistres.
- « Sinistres d'intérêts de la tarification » : Sinistres dont la charge « As-If » est supérieure à s_F .

Les sinistres étudiés sont maintenant tous valorisés dans une vision homogène et sélectionnés selon un seuil de valeur équivalente. Cependant, la majorité¹ des sinistres n'ont pas atteint leur valeur finale et subiront des évolutions diverses. L'objectif de cette section est d'attribuer à chaque sinistre une estimation de l'ensemble des paiements effectués au titre de cette indemnisation par l'assureur.

¹À l'exception des 28% de sinistres clos mentionnés au premier chapitre.

2.2 Mise à l'ultime

La première étape consiste à estimer la valeur ultime de la charge de chaque sinistre. L'objectif est donc d'estimer les engagements restants envers les victimes et ainsi de prévoir la charge finale, un objectif atteint communément par des méthodes et techniques de provisionnement. Trois effets doivent donc être pris en compte :

- Les sinistres connus pour lesquels les suspens n'étaient pas suffisants : la charge augmente tardivement dans la durée de vie du sinistre. La globalité de cette dynamique est considérée dans le provisionnement, nommée « *IBNER* ».
- Les sinistres qui sont déclarés tardivement ; la globalité de cette dynamique est nommée « *IB-NYR* ».
- Les sinistres connus pour lesquels les suspens étaient trop importants : le paiement final de l'assureur est moins important et nécessitait un engagement moindre.

L'étude de différentes méthodes de provisionnement n'est cependant pas le sujet de ce mémoire, seule « la méthode la plus simple et la plus utilisée » sera mise en œuvre dans cette tarification : la méthode Chain Ladder. Des comparaisons et des études d'impact sur les charges ultimes obtenues avec l'utilisation d'autres méthodes de provisionnement occasionneront des travaux futurs.

Dans la majorité des cas, les méthodes de provisionnement s'appuient sur une vision agrégée des sinistres, permettant de représenter la dynamique globale. Des hypothèses supplémentaires et une méthode précise seront ensuite nécessaires pour transférer ces résultats dans une dynamique individuelle avec une projection ultime pour chaque sinistre de la base. La vision proposée agrège selon les années de survenance et considère les années de développement en colonne, prenant ainsi la forme d'un triangle. Parfois nommée « triangle de développements de charge », ou « triangle *run-off* »¹ cette représentation permet de distinguer les montants connus, placés dans la partie supérieure, et les montants pour lesquels une projection est nécessaire, placés dans la partie inférieure.

L'introduction formelle du « cadre structurel mathématiques » des problèmes de provisionnement, nécessitant une filtration engendrée par le processus stochastique des charges et des informations exogènes, ne paraissait pas pertinente par rapport aux travaux réalisés². Le cadre retenu dans ce mémoire sera celui d'origine de cette méthode, orienté « pratique » et entièrement déterministe, n'obéissant donc à aucune dynamique probabiliste en appliquant toujours les mêmes formules à toutes les situations. Ces considérations motivent la dénomination « algorithme de Chain-ladder » de Wüthrich and Merz (2015).

2.2.1 Algorithme de Chain Ladder

Cette partie est principalement construite à partir de la lecture de Wüthrich and Merz (2015, Chapitre 1), Charpentier and Denuit (2004b, Chapitre 13) et Louis (2010, Chapitre 3) dont les informations sont succinctement présentées.

Notations: Le triangle considéré est construit sur deux axes temporels :

- $i = 0, \dots, I$: correspond à l'indice des années de survenance³
- $j = 0, \dots, J$: correspond à l'indice des années de développement⁴

¹Car seule l'exposition actuelle est considérée, aucune entrée de nouveaux contrats n'est modélisée.

²Le lecteur pourra se reporter à Wüthrich and Merz (2008), section 1.2.

³ $i = 2007, \dots, 2022$ dans notre étude, mais la translation admise ici permet de simplifier les écritures qui suivent.

⁴ $J = 15$ dans notre étude.

Par simplification de présentation, couramment on suppose $J = I$.

Deux montants sont considérés et peuvent être placés dans un triangle :

- $X_{i,j}$: montant des paiements¹ effectué après j année(s) de développement pour l'année de survenance i .
- $Z_{i,j} := \sum_{k=0}^j X_{i,k}$: montant cumulé des paiements effectués après j année(s) de développement pour l'année de survenance i .

Les deux parties du triangle, inférieure et supérieure, sont distinguées selon la notation :

- $\mathcal{D} := \{X_{i,j}, i + j \leq I, 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J\}$, l'ensemble des paiements observés.
- $\mathcal{D}^c := \{X_{i,j}, i + j > I, 0 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J\}$, l'ensemble des paiements à estimer.

Une fois ces notations posées, deux facteurs supplémentaires peuvent être définis :

- $\lambda_{i,j} := Z_{i,j+1} / Z_{i,j}$: le facteur de développement de l'année de survenance i et de développement j .
- $\gamma_{i,j} := Z_{i,j} / Z_{i,J}$: la cadence de règlement² après j années de développement pour l'année de survenance i .

Trois axes de lectures sont disponibles sur ce type de triangle (Wüthrich and Merz, 2015) ; chacune apporte une information différente :

Hypothèses: Ce cadre déterministe implique des hypothèses très fortes qui reposent principalement sur deux hypothèses fondamentales :

- La première année de survenance est entièrement développée : tous les montants cumulés ultimes sont atteints en un nombre J d'années.
- Un portefeuille homogène est considéré, sur lequel la loi des grands nombres peut s'appliquer.

La première est souvent supposée implicitement et les hypothèses de la méthode sont plus classiquement présentées dans la forme suivante.

- (H1.1) Le risque étudié est stable : absence d'inflation, aucun changement de structure de portefeuille, de garanties ou de franchise des contrats ni dans la politique de gestion de sinistres.
- (H2.1) Les délais de survenance et de règlement d'un sinistre sont indépendants des années de survenance. Autrement dit, le développement d'un sinistre est indépendant de son année de survenance, ou encore $\lambda_{i,j}$ est indépendant de i .

Une formulation simplifiée est présentée dans Charpentier and Denuit (2004b).

- (H1.2) Les années de survenance sont indépendantes entre elles.
- (H2.2) Les années de développement sont les variables explicatives du comportement des sinistres futurs.

¹Le terme « paiement » est une simplification couramment utilisée.

²La distinction « règlement » et non « paiement » a son importance, notamment en référence à la note précédente.

Algorithme: En partant de (H2), présumant que le déroulement d'un sinistre ne dépend que de l'année de déroulement, l'idée de la méthode Chain Ladder est de supposer,

$$\forall 0 \leq i \leq I, I - i \leq j \leq J, \quad Z_{i,j+1} \approx \lambda_j \times Z_{i,j}.$$

Pour un certain $\lambda_j > 0$, nommé coefficient de développement¹, dont l'estimation repose sur les observations passées, contenues dans \mathcal{D} , et correspond au rapport des totaux des éléments communs de deux colonnes successives. Soit,

$$\hat{\lambda}_j := \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} Z_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} Z_{i,j}}, \quad 0 \leq j \leq J - 1.$$

Lorsque $I = J$, les hypothèses de cette méthode impliquant que les $\gamma_{i,j}$ sont indépendants de i . Des $\hat{\gamma}_j$, représentant le taux de règlement des charges ultimes, peuvent être définis pour $j = 0, \dots, J - 1$,

$$\hat{\gamma}_j = \prod_{k=j}^{J-1} \frac{1}{\hat{\lambda}_k}, \quad 0 \leq j \leq J - 1. \quad ^2$$

NOTATIONS

L'ensemble des coefficients de développement et des cadences de règlement sont placés dans des vecteurs de $\mathbb{R}^{+ J-1}$

- $\hat{\lambda} := (\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_{J-1})^t$: le vecteur des coefficients de développement observés.
- $\hat{\gamma} := (\hat{\gamma}_0, \dots, \hat{\gamma}_{J-1})^t$: le vecteur des cadences de règlement observées (entièrement déterminées par le vecteur $\hat{\lambda}$ observé).

Remarques: La méthode Chain Ladder peut être présentée par d'autres perspectives, Wüthrich and Merz (2015) mettent en avant la proximité de cette méthode avec l'utilisation d'un modèle linéaire généralisé « log-poisson » pour la modélisation de chaque année de développement. Charpentier and Denuit (2004b) expriment le calibrage retenu par la méthode comme une moyenne pondérée, en considérant :

$$\omega_{i,j} := Z_{i,j}.$$

$$\omega_{\cdot,j} := \sum_{i=0}^{I-j-1} Z_{i,j}.$$

La formule suivante est obtenue,

$$\hat{\lambda}_j = \sum_{i=0}^{I-j-1} \lambda_{i,j} \times \frac{\omega_{i,j}}{\omega_{\cdot,j}}.$$

Chaque facteur de développement est considéré en proportion de l'importance de la charge agrégée de l'année i sur toutes les charges considérées de développement j . Dès lors, des variantes de la méthode de Chain ladder peuvent être caractérisées par des variations de ces pondérations. Classiquement, Charpentier and Denuit (2004b) mentionnent deux possibilités :

¹Aussi appelé coefficient de passage et parfois coefficient de déroulement, ou en anglais « *link-ratio* » et « *CL factor* ».

²En effet, si $I = J = n$, alors : $Z_{i,n} = \prod_{k=n-i}^{n-1} \hat{\lambda}_k \times Z_{i,n-i} \Rightarrow Z_{i,n-i} = (1 / \prod_{k=n-i}^{n-1} \hat{\lambda}_k) \times Z_{i,n}$.

- Accorder plus de poids aux années récentes et moins aux années éloignées.
- Lier les pondérations à l'exposition : des poids associés au nombre de contrats ou à la prime acquise. Le choix du nombre de véhicules ou de l'indice du nombre de sinistres défini en 2.1.2, paraîtrait plus adapté.

Néanmoins, les limites de l'algorithme doivent être identifiées afin d'étudier de possibles variantes offrant de meilleurs résultats.

Revue des critiques: Cette méthode offre une conception simpliste de la problématique du provisionnement, permettant une compréhension rapide du schéma développé mais impliquant l'admission de certains biais.

- L'incertitude est majoritairement présente sur les années les plus récentes : $J - 1$ facteurs estimés sont multipliés. Une incertitude d'autant plus importante quand le développement est long et le montant des premières observations est faible, subissant en plus un effet de sinistres non déclarés. L'étude des dommages corporels rentrerait bien dans ce cas de figure, avec des paiements très étalés dans le temps.
- L'utilisation de données uniques :
 - Le dernier facteur de développement est calibré par une seule observation composée du ratio de deux données anciennes.
 - L'année de survenance la plus récente n'est caractérisée que par une unique valeur de charge, qui sert de base pour toutes les estimations des charges suivantes cette année-là. Le mémoire de Louis (2010) présente un exemple de l'impact de la variation de ce montant et souligne la problématique du cas d'un montant nul impliquant une charge nulle à toutes les années de développement.
- Une stabilité difficile à estimer : la méthode est déterministe et ne permet donc pas d'obtenir des mesures de précision des estimations faites des coefficients et des charges ultimes.
- La robustesse : La méthode manque de robustesse, c.a.d est sujette aux perturbations par des sinistres aux comportements inhabituels. Des sinistres extrêmes peuvent donc être problématiques. Les poids de l'estimateur sont calibrés sur les montants atteints; ainsi, un seul sinistre très lourd caractérisé par une évolution bien particulière exercera une influence très importante sur le coefficient et donc sur le développement de toutes les autres charges. Ce cas est observé régulièrement sur les données de réassurance en RC Auto, le nombre de sinistres n'est jamais très élevé et l'analyse se concentre sur les charges les plus élevées qui dans le cas des corporels marquent régulièrement des variations importantes.
- Les hypothèses fortes prises à l'application de l'algorithme marquent dès la mise en place un certain nombre de limites.
 - Les cadences de paiements sont supposées être semblables pour toutes les années de survenance. La mise en « *As-If* » fait transparaître des variations très fortes des coûts mais les méthodes de paiement resteraient parfaitement identiques dans le temps ? Imposer un schéma de développement identique pour toutes les années de survenance paraît peu crédible, sans même considérer les changements dans les politiques de gestion des assureurs, la fluctuation du cadre juridique pourrait être un argument limitant suffisant.

- Imposer que la forme ultime de montants soit atteinte après un nombre J d'années est parfois problématique. Notamment sur les branches longues, ou les déroulements peuvent s'écouler sur des dizaines d'années. Augmenter les années de développement s'accompagne de la considération d'historiques plus anciens. Une situation complexe : les retraitements à réaliser nécessitent des hypothèses importantes, la fiabilité des données ne peut pas toujours être assurée.

Ces trois dernières limites admettent cependant des solutions. La littérature est abondante sur l'augmentation de la robustesse de l'algorithme de Chain ladder, quelques notions de Verdonck et al. (2009) seront présentées dans la dernière partie de cette section. Les hypothèses fortes peuvent être atteintes par des retraitements de données préalables et certaines vérifications permettent d'assurer la bonne existence d'un cadre.

Vérification : L'indépendance des $\lambda_{i,j}$ de i , (H2), peut être étudiée par l'étude de la corrélation de Spearman entre les λ_j ou graphiquement : les points $(Z_{i,j}, Z_{i,j+1})$ pour chaque année j doivent faire apparaître une droite passant par l'origine.

Enfin la limite d'un nombre d'années maximum pour atteindre la forme ultime peut être levée par l'utilisation d'un coefficient supplémentaire, nommé « tail factor ».

2.2.2 Tail Factor

Le « tail factor », ou facteur de queue de développement, noté λ_{ult} représente les variations manquantes dans la projection du montant cumulé final par une méthode de provisionnement. Ce facteur est utile lorsque J années sont insuffisantes pour rendre compte de l'entièreté du phénomène que l'on souhaite projeter et qu'il est impossible d'augmenter ce nombre d'années¹. Guy Carpenter (2019) présente dans la figure 2.4 des estimations du déroulements des paiements de la charge ultime pour la garantie RC Auto en France.²

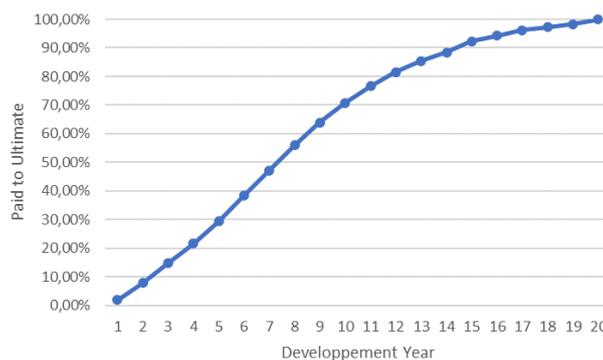


Figure 2.4: Cadence de paiement - Sinistres Corporels en RC Auto

Les paiements nécessiteraient donc une analyse sur au moins 20 ans pour obtenir une estimation précise des montants payés à l'ultime. La projection des paiements cumulés pourrait être réalisée par l'algorithme de Chain Ladder sur 10 ans de développement et l'ajout d'un facteur de queue de

¹Les raisons de cette impossibilité peuvent être multiples : absence d'accès, absence de fiabilité, retraitements impossibles quant à la formation de données homogènes, etc.

²Malheureusement, sans préciser la base de données utilisée pour faire ces mesures.

développement pour prendre en compte la dizaine d'années¹ restante. Le facteur de queue s'appliquerait alors pour obtenir : $\forall 0 \leq i \leq I, Z_{i,ult} = Z_{i,J} \times \lambda_{ult}$.

Deux questions doivent être traitées :

- Comment identifier des variations qui ne seraient pas prises en compte lors du développement de Chain Ladder ?
- Comment réaliser le calibrage de ce facteur ?

Une notion intrinsèque, et souvent centrale, à toute utilisation de « tail factor » est le jugement d'expert.

Ainsi, des variations sont reconnues manquantes dans l'analyse lorsque les coefficients de développement λ_j ne convergent pas vers 1 lorsque j converge vers J . Mais aucune mesure ou valeur d'écart n'est officielle, l'appréciation de la non-convergence est laissée au seul jugement pratique d'un actuinaire expérimenté.

Le calibrage d'un facteur de queue est une question plus complexe, de nombreuses « familles » de méthodes de calibrages existent, mais quatre sont principalement identifiables :

1. Les méthodes de Bondi consistant à utiliser le dernier facteur λ_{J-1} comme valeur de référence pour celle(s) à suivre.
2. Les méthodes dites « de marché » consistant à utiliser des coefficients de développement publiés pour construire ceux qui manquent aux données étudiées.
3. Les méthodes déterministes consistant à calibrer la bonne proportion des provisions globales qui sera finalement incluse dans les montants cumulés payés.
4. Les méthodes paramétriques consistant à supposer l'existence d'une relation entre les coefficients de développement permettant de construire une courbe représentant leurs variations et qui extrapole le comportement ainsi capturé².

Une revue complète des différentes méthodes existantes au sein de ces familles, et de quelques autres plus originales, est faite dans le document de référence du « CAS Tail Factor Working Party (2013) ». L'utilisation d'un « tail factor » n'a pas été retenue lors de l'application de l'algorithme à nos données, la description de l'ensemble de ces possibilités de calibrages ne paraissait alors plus nécessaire. Cette décision peut paraître contradictoire avec les développements présentés dans la figure 2.4 et le choix de réaliser une projection sur 15 ans. La convergence des coefficients de développement est cependant bien caractérisée à partir d'une dizaine d'années. Cela provient principalement du cadre particulier dans lequel l'algorithme de Chain ladder est appliqué.

2.2.3 Méthode en RC Auto

La distinction du coût et du nombre de sinistres est toujours présente : deux algorithmes de Chain ladder seront donc appliqués. Le premier sert à obtenir une estimation de la charge ultime agrégée par survenance des sinistres et le second sert à atteindre une projection du nombre de sinistre(s) par années de survenance étudiées.

Les deux triangles étudiés sont donc forcément construits à partir de données différentes, en reprenant les notations précédentes :

¹Tous les sinistres ne sont pas parfaitement réglés en 20 ans, ce nombre reste approximatif sur l'ensemble de la base.

²La construction d'une telle courbe peut se faire à l'aide du calibrage d'une loi, d'un modèle linéaire généralisé, ou en considérant des splines : des méthodes qui se recoupent et qui sont bien nombreuses. Un exemple de calibrage selon une méthode paramétrique est donné dans Louis (2010) et dans l'article <https://freakonometrics.hypotheses.org/2307>.

- **Pour le triangle de nombres** : $Z_{i,j} = \sum_k \mathbb{1}_{\{C_{i,j}^{k,AsIf} > s_F\}}$, $\forall 0 \leq i \leq I, \quad 0 \leq j \leq J - i$.
- **Pour le triangle de charges** :¹ $Z_{i,j} = \begin{cases} \sum_k \left((C_{i,j}^{k,AsIf} - s_F)^+ \times \mathbb{1}_{\{C_{i,j-1}^{k,AsIf} > s_F, C_{i,j+1}^{k,AsIf} > s_F\}} \right), & 1 \leq j < J - i \\ \sum_k (C_{i,j}^{k,AsIf} - s_F)^+ \quad , & j = J - i \quad \text{ou} \quad j = 0. \end{cases}$

Ces choix de données laissent transparaitre deux originalités qui diffèrent de l'application usuelle de Chain Ladder. La première provient du principe fondamental de la tarification en réassurance, notamment avec l'approche du modèle collectif² qui se base uniquement sur les « sinistres d'intérêts », c.a.d les sinistres dont la valeur a franchi un seuil retenu pour parfaire l'équilibre robustesse / précision mentionné dans le premier chapitre. Toutes les données étudiées en réassurance sont tronquées. Par conséquent, les lois calibrées pour le modèle collectif le sont également. Le caractère « grave un jour, grave toujours » de la base, assurant le bon traitement de l'ensemble des sinistres, devient cependant problématique lorsque l'on veut étudier uniquement l'évolution des sinistres d'intérêts. Deux types de variations, présentes dans la base et impactant l'algorithme, devraient être ignorées :

1. Les variations de sinistres dont la charge est sous le seuil de marché : seules les évolutions des charges au-dessus du seuil sont représentatives du phénomène tronqué qui veut être observé.
2. Les variations de franchissement du seuil de marché : après une augmentation ou une diminution de la charge, seules les évolutions des charges qui demeurent au-dessus du seuil (donc au moins deux années consécutives) doivent être conservées.

La seconde originalité provient du choix de la charge comme valeur de référence pour étudier les évolutions de la valeur des sinistres. La projection de la charge ultime s'appuie sur la projection des paiements cumulés et des suspens. Conserver les suspens permet de prendre en compte la totalité du premier et troisième effet recherché, c.a.d l'entièreté de la stratégie de provisionnement de l'assureur : si un assureur tend à être très prudent et à réaliser beaucoup de « *boni* »³ une certaine diminution de la charge doit être projetée afin de construire une perspective réaliste de la charge ultime. L'enjeu du triangle est d'offrir une représentation d'estimations de la valeur, la charge ultime obtenue correspondant à la projection ultime de l'estimation de la valeur du sinistre. De cette considération découle plusieurs impacts :

1. Les cadences de règlement ne sont pas des cadences de paiement : ces cadences représentent l'évolution des variations dans les estimations des charges des sinistres.
2. La limite temporelle de la méthode Chain Ladder s'applique à la durée nécessaire d'obtention d'estimations stables des charges des sinistres et non à la durée de liquidation totale du sinistre.

Cette distinction de seuil répartit les trois effets recherchés lors de cette projection entre les deux triangles projetés. Les sinistres tardifs désignent aussi les sinistres tardifs de seuil et donc l'ensemble des *IBNYR* et des *IBNER* impliquant un franchissement de seuil sont pris en compte par le développement du triangle de nombre de sinistres. Les variations des *IBNER* et de « sur-provisionnement » des charges supérieures au seuil sont pris en compte dans le développement du triangle de charge.

¹ $(x)^+ := \max(x, 0)$

²Un anglicisme est souvent admis pour désigner cette approche comme l'approche « fréquence-sévérité », en référence à « frequency-severity » qui désigne respectivement le coût et le nombre annuel de sinistres.

³*Glossaire* 3.4

L'environnement particulier des charges de RC Auto est propice à l'apparition de comportements extrêmes des sinistres lourds. La robustesse de l'algorithme est donc mise à mal dans le triangle de charges, principalement par deux facteurs qui se combinent :

- Les charges retenues sont celles qui restent au-dessus du seuil : peu de sinistres sont finalement présents dans les développements.
- L'analyse porte sur des sinistres corporels extrêmes, qui pour de nombreuses raisons¹, marque des variations qui le sont tout autant.

De nombreuses autres méthodes ont été dérivées de l'algorithme de Chain ladder pour essayer de corriger ses limites. La frontière entre adaptation de la méthode et innovation est fine et ces recherches s'apparentent vite à des considérations de nouvelles techniques de provisionnement. L'objectif de ce chapitre est de conserver une tarification simple et efficace, qui s'appuie toujours sur des considérations algorithmiques.

Verdonck et al. (2009) apportent des perspectives intéressantes, notamment une technique permettant d'identifier et de retraiter des « *outliers* », appelés données aberrantes et qui correspondent à une variation d'un sinistre trop particulière pour offrir une représentation du cadre général. Cette approche nécessite cependant de supposer les paiements $X_{i,j}$ distribués selon une loi de Poisson « *overdispersed* ». Or, cette hypothèse n'est pas directe dans un triangle composé de charge et oblige à quitter la perspective purement « algorithmique » de la méthode. L'identification des comportements anormaux et irreproductibles de sinistres sera, pour un temps, laissée aux « dires d'experts » qui s'appuient majoritairement sur l'analyse des facteurs de développement individuel.

Les facteurs de développement individuel : Les facteurs de développement individuel, noté $\lambda_{i,j}^k$, marquent l'évolution de la charge d'un sinistre et sont définis comme le ratio de la charge d'un sinistre d'une année sur l'autre. Formellement, le facteur est défini par

$$\lambda_{i,j}^k := \frac{C_{i,j+1}^{k,AsIf}}{C_{i,j}^{k,AsIf}}, \quad \forall k, \quad \forall 0 \leq i \leq I, \quad \forall 0 \leq j \leq J.$$

Les facteurs de développement apparaissent alors comme des moyennes pondérées des facteurs de développement individuel avec $\Omega_{i,j}^k = C_{i,j}^{k,AsIf}$ et $\Omega_{i,j} = \sum_k C_{i,j}^{k,AsIf}$,

$$\lambda_{i,j} := \sum_k \lambda_{i,j}^k \times \frac{\Omega_{i,j}^k}{\Omega_{i,j}}.$$

La variation individuelle d'un sinistre sur une année de survenance est donc considérée en proportion du montant que représente sa charge par rapport à l'ensemble des charges des sinistres ayant la même année de survenance.

La considération de la granularité individuelle des sinistres permet de présenter les estimations des coefficients de développement de l'algorithme de Chain ladder en RC Auto comme une moyenne pondérée de moyennes pondérées. L'égalité (2.7) permet de mettre en avant l'importance de la bonne compréhension des poids individuels.

$$\hat{\lambda}_j = \sum_{i=0}^{I-j-1} \lambda_{i,j} \times \frac{\omega_{i,j}}{\omega_{\cdot,j}} = \sum_{i=0}^{I-j-1} \left(\sum_k \lambda_{i,j}^k \times \frac{\Omega_{i,j}^k}{\Omega_{i,j}} \right) \times \frac{\omega_{i,j}}{\omega_{\cdot,j}}. \quad (2.7)$$

¹Rétablissement ou aggravement inattendu de la victime, action subrogatoire en cas de responsabilité minimisée de l'assuré, mouvement de l'encadrement des provisionnements obligatoires des rentes, mouvements des taux de rendements, et autres raisons déjà évoquées à l'origine de variations importantes des paiements ou plus souvent des suspens.

Mais tous les facteurs de développement individuel ne sont pas à considérer : la troncature des données doit aussi être prise en compte. La formule (2.7) exprime le fait que l'algorithme de Chain Ladder étudie les variations des années de développement successives, entre j et $j + 1$, la formule des facteurs de développement individuel doit donc être modifiée pour que l'égalité soit vraie.

$$\lambda_{i,j}^k = \frac{C_{i,j+1}^{k,AsIf}}{C_{i,j}^{k,AsIf}} \times \mathbb{1}_{\{C_{i,j+1}^{k,AsIf} \geq s_F, C_{i,j}^{k,AsIf} \geq s_F\}}. \quad (2.8)$$

La valeur de 2.8, spécifique au cadre étudié, implique également une modification des poids $\omega_{i,j}$ et $\omega_{.,j}$ définis à partir de $C_{i,j}^{k,AsIf} \times \mathbb{1}_{\{C_{i,j+1}^{k,AsIf} \geq s_F, C_{i,j}^{k,AsIf} \geq s_F\}}$

Si certains de ces facteurs sont jugés inadéquats à l'expression des comportements des charges futures, trois possibilités de retraitement sont envisagées :

- Supposer l'absence de variations : fixer la valeur du facteur à 1. Ce choix entraîne une modification de la charge. Par exemple, si la variation entre l'année j et $j + 1$ du sinistre « 3 » survenu l'année i est jugée inadéquate, la charge est modifiée telle que $C_{i,j}^{3,AsIf} = C_{i,j+1}^{3,AsIf}$, et les poids ω et Ω doivent être recalculés avec ces nouveaux montants.
- L'exclusion du sinistre, si l'entièreté de son évolution parait irreproductible. Un choix qui entraîne de nouveau une modification de la charge. Pour le même exemple du sinistre « 3 » survenu l'année i , $C_{i,j}^{3,AsIf} = 0, \forall j$, et les poids ω et Ω doivent être recalculés avec ces nouveaux montants.
- Fixer la valeur du facteur à celle de la médiane des autres facteurs de développement individuel à la même année de développement. La charge individuelle est modifiée en conséquence, toujours sur le même exemple : $C_{i,j=1}^{3,AsIf} = C_{i,j+1}^{3,AsIf} / \text{médiane} \left(\lambda_{i,j}^k, \forall k, \forall 0 \leq i \leq I \right)$.

Au delà de ces retraitements individuels, deux variations de l'algorithme de Chain Ladder sont parfois observées, notamment dans un but de présenter des points de comparaison au déroulé de la méthode classique.

Moyenne uniforme des facteurs de développement :

$$\hat{\lambda}_j := \frac{1}{I-j} \times \lambda_{i,j}, j = 0, \dots, J-1.$$

Cet algorithme a peu d'intérêt pour la projection de provisionnement car toute variation très différente aura un impact fort même si le montant du sinistre est moindre. Cependant, la méthode est parfois utilisée pour étudier la dispersion des facteurs de développement $\lambda_{i,j}$ (Louis, 2010).

Médiane des facteurs de développement :

$$\hat{\lambda}_j := \text{médiane} \left(\frac{Z_{i,j+1}}{Z_{i,j}}, i = 0, \dots, I \right), j = 0, \dots, J-1.$$

Verdonck et al. (2009) s'appuient sur des démonstrations faites dans la littérature, notamment Hampel et al. (2005), pour encourager l'utilisation de la médiane comme statistique plus robuste que la moyenne. Dans cet article, l'utilisation de la médiane sur les montants agrégés ne sert que d'une première étape de « retraitement » identifiant de premières données aberrantes. La médiane des données non agrégées permettrait d'atteindre des niveaux de « charges équivalent à ceux trouvés par l'algorithme de Chain Ladder lorsque les points aberrants ont été supprimés » : ces considérations

encouragent l'utilisation de la troisième catégorie de retraitement. Cependant, les valeurs des sinistres étudiées ici marquent une distinction centrale avec l'article de Verdonck et al. (2009) : les suspens demeurent des considérations annuelles impliquant parfois une étude d'observations non incrémentales même en conservant des paiements cumulés.

Obtention de la vision individuelle des charges : L'application de Chain Ladder dans le cadre de la RC Auto ajoute une hypothèse supplémentaire: la supposition est faite que les coefficients de développement $\hat{\lambda}_j$ obtenus sur des données agrégées peuvent représenter l'évolution individuelle de tous les sinistres non clos. En effet, l'objectif est d'obtenir une vision de la charge ultime de chaque sinistre. Ainsi, la distinction d'état des sinistres joue ici un rôle clef. Toutes les méthodes de projection de charges ultimes ne sont appliquées que sur les sinistres non-clos, afin d'appliquer des $\hat{\lambda}_j$ selon l'année de survenance et d'obtenir la valeur de la charge ultime de chaque sinistre.

2.2.4 Mise à l'ultime des données

Coût des sinistres :

Le triangle est agrégé selon la méthode introduite dans la section précédente, et se présente sous la forme du tableau 2.6.

i,j	1	2	3	4	5	6	...	16
2007	100	118,32	108,68	100,11	85,09	...		45,27
2008	192,46	183,23	165,61	154,73	...			
.			
.			
.			
2015	72,40	119,22	115,91	...				
.				
.				
.				
2020	1,00	39,28	31,91					
2021	30,30	45,13						
2022	22,75							

Table 2.6: Triangle des charges supérieures à s_F - Sinistres corporels - Contrats Individuels

- **Vérification :** Analyse des représentations des points $(Z_{i,j}, Z_{i,j+1})$ du triangle, figure 2.5. La première année de développement semble clairement être la plus problématique. L'organisation des nuages de points des autres années de développement semble indiquer que l'utilisation de l'algorithme de Chain Ladder est possible.
- **Coefficient de Développement :** Les principaux retraitements des coefficients de développement ont pris deux formes :
 - Exclusion de la variation d'un sinistre permettant d'ignorer le premier facteur de développement de l'année 2020. Cette année présente un effet de déclaration tardive particulièrement fort, provenant certainement de l'impact des confinements, présentant alors un $\lambda_{i,j}$ non représentatif. (Les facteurs de développement des six premières années de développement du triangle sont présentés dans la figure 2.6, qui démontre bien la nécessité d'exclusion de celui de 2020.)

- Retraitement de 17 facteurs de développement individuel ($\approx 5\%$ des sinistres) par la médiane de ces facteurs lors de la même année de développement, présentant des « *boni* » trop importants pour qu'une telle situation puisse se reproduire.

Les coefficients de développement retenus sont présentés dans le tableau 2.7

Développement j	1	2	3	4	5	6	7	...	12	13	14	15
$\hat{\lambda}_j$	1,503	0,976	0,973	0,969	0,961	0,925	0,973	...	0,990	0,995	0,941	1,0003

Table 2.7: Coefficient de Développement - $\hat{\lambda}_j$

La figure 2.7 compare ces coefficients à ceux obtenus à partir du triangle formé de l'agrégat des charges de tous les sinistres, y compris celles en dessous du seuil. Pour une comparaison plus adéquate, les mêmes retraitements sont appliqués à ce second triangle. La différence des cadences de règlement, $\hat{\gamma}_j$, est très marquée : le retraitement des facteurs a un impact très fort. L'estimation de la charge ultime est jugée plus stable, la considération de « *boni* » est grandement diminuée mais des niveaux équivalents de représentation de charge ultime apparaissent après 10 ans de développement.

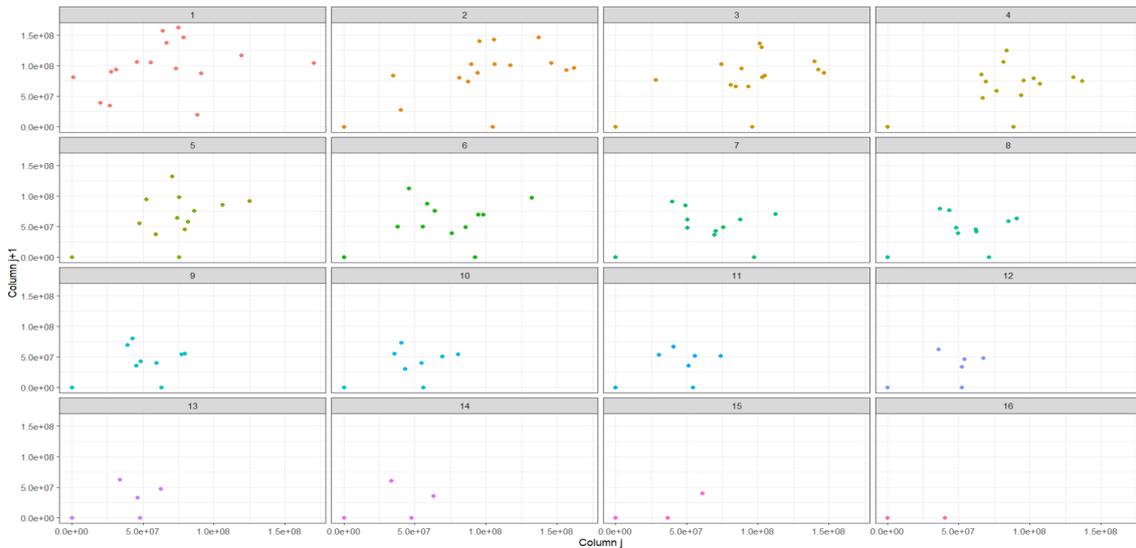


Figure 2.5: Comparaisons des points $(Z_{i,j}, Z_{i,j+1})$

Les coefficients $\hat{\lambda}_j$ présentés dans la figure 2.7 sont stables rapidement, appuyant la « non-nécessité » d'un « *tail factor* ». La figure C.1 placée en C.2 appuie l'hypothèse de stabilité, les facteurs de développement convergeant vers 1 dès la 7^{ème} année de développement.

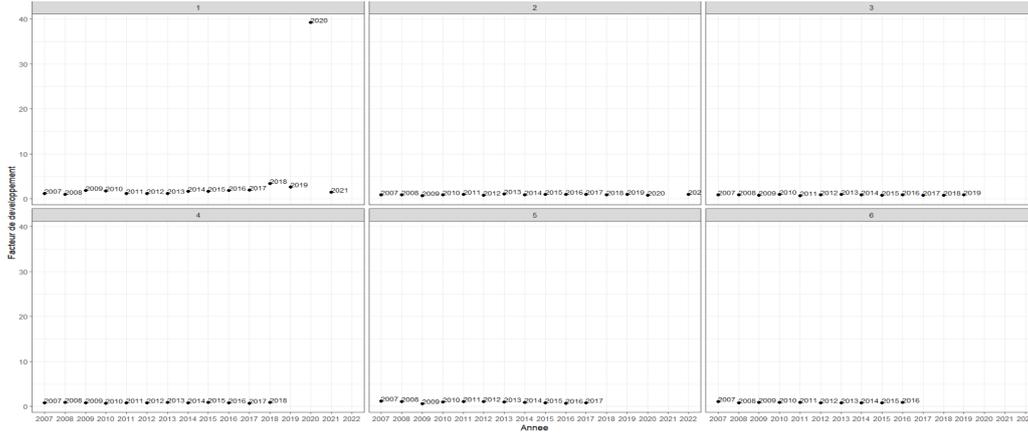
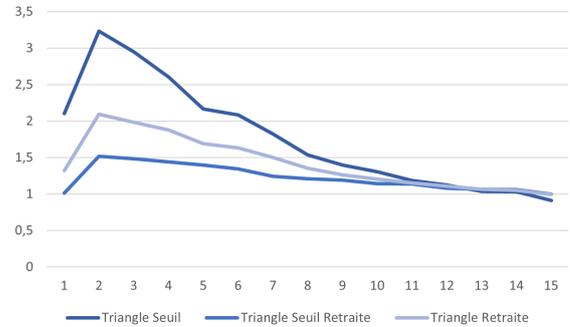


Figure 2.6: Facteurs de Développement - $\lambda_{i,j}$



(a) Les : $\hat{\lambda}_j$



(b) Les : $\hat{\gamma}_j$

Figure 2.7: Comparaison : Triangle considéré en RC Auto, seuil s_F , et triangle agrégé de tous les sinistres

Nombre de sinistres :

Le nombre de sinistres est déterminé pour chacune des entités de Covéa. Le triangle obtenu prend la forme du tableau 2.8.

i,j	1	2	3	4	5	6	...	16
2007	4,00	6,00	7,00	7,00	5,00	...		2,00
2008	5,00	6,00	5,00	5,00	...			
.			
.			
.			
2015	2,00	2,00	2,00	...				
.			
.			
.			
2020	0,00	1,00	1,00					
2021	5,00	4,00						
2022	4,00							

Table 2.8: Triangle des charges supérieures à s_F - Sinistres corporels - Contrats Individuels

Les coefficients de développement sont de la forme du tableau 2.9.

Développement j	1	2	3	4	5	6	7	...	12	13	14	15
$\hat{\lambda}_j$	1,40	0,93	1,02	0,96	0,95	0,97	0,91	...	1	1	1	1

Table 2.9: Coefficient de Développement - $\hat{\lambda}_j$

L'étude complète est semblable à celle réalisée précédemment, celle-ci est donc placée en C.2.

La valeur ultime de tous les sinistres étudiés est maintenant connue, mais dans une vision homogène et sans inflation du coût du risque. Une étape supplémentaire est donc nécessaire pour modéliser l'ensemble des paiements effectués par l'assureur.

2.3 Montant ultime des paiements

L'algorithme de Chain Ladder permet d'obtenir les estimations des charges ultimes agrégées puis un transfert est effectué pour obtenir les charges ultimes de chaque sinistre. Mais la composition des charges a aussi un rôle important ; or, à part à cette date ultime, les charges ne sont pas composées uniquement de paiements. Et pourtant, ce sont bien les indemnités versées (i.e. les paiements de l'assureur) qui subissent l'inflation future et sont à l'origine d'un certain rendement selon le provisionnement effectué. Ce sont ces flux financiers qui doivent être modifiés pour passer d'une vision où toutes les années étudiées sont valorisées sur l'année cible (tableau 2.2) à une vision où les flux sont projetés, correspondant au déroulement naturel d'un sinistre ayant eu lieu lors de l'année cible (tableau 2.3). Dans un premier temps, la méthode pour calibrer les cadences de paiement sera présentée puis, dans un second temps, quelques méthodes permettant de projeter les flux de paiement seront introduites.

2.3.1 Cadences de paiement

La charge ultime obtenue après Chain Ladder correspond au paiement ultime, la cadence de paiement fournie à chaque date correspondant à la proportion payée de ce montant ultime, noté $\rho_{i,j}^k$. Intuitivement, sur le triangle \mathcal{D} , tous les montants de paiements sont connus et peuvent donc servir à déterminer les cadences de paiement,

$$\rho_{i,j}^k := \frac{P_{i,j}^{k,AsIf}}{C_{i,ult}^{k,AsIf}}. \quad (2.9)$$

Cependant, une particularité des sinistres corporels lourds intervient ici : la liquidation totale du sinistre n'est atteinte qu'après un très grand nombre d'années. Ainsi, l'étude des cadences définies ci-dessus amène très rarement à des niveaux de paiement atteignant les 100 % de la charge ultime. Des méthodes permettant d'extrapoler ces cadences de paiement permettraient d'appliquer des déroulés de liquidation de sinistres plausibles et sans « saut » de pourcentages observés de charge payée. Ainsi, des hypothèses supplémentaires doivent être prises pour permettre le développement des cadences sur \mathcal{D}^c et dans un cadre temporel plus large, afin d'assurer une liquidation totale et crédible de tous les sinistres.

Deux éléments sont à déterminer :

- Un nombre d'années maximum où tous les montants ultimes seront atteints : plus le nombre est important, plus l'impact de l'inflation future, porteuse de beaucoup d'incertitudes, sera important. Un nombre trop petit cependant implique des paiements annuels très importants sur

les dernières années, situation peu crédible, particulièrement dans le cadre de versements de rente. Soit J_2 le nombre d'années de développement considéré pour l'atteinte de la liquidation ultime de tous les sinistres. En conservant la définition de \mathcal{D} , le triangle supérieur des éléments connus, le nombre de données inconnues est dorénavant plus important : un rectangle s'ajoute $\mathcal{R} := \{X_{i,j}, i + j > J, 0 \leq i \leq I, J < j \leq J_2\}$.

- Une méthode qui permettrait de projeter les paiements de chaque sinistre sur $\mathcal{D}_2^c := \mathcal{D}^c \cup \mathcal{R}$. Cette méthode est soumise à de nombreuses contraintes : ne tenir compte que des sinistres d'intérêts, s'adapter à des cadences de paiements très diverses¹, parfois à des paiements négatifs².

Appuyé par 2.4, le nombre d'années fixant la liquidation totale des sinistres est au minimum de 20 ans, nombre retenu pour cette étude. La méthode de projection des cadences de paiement se fait sur trois étapes :

Étape 1 : Construire $\hat{\rho}_j$, estimation d'une cadence de paiements suivie par toutes les années de survénance et utilisée ensuite pour projeter les cadences de règlement sur $\mathcal{D}_2^c \setminus \mathcal{R}$. Cette construction nécessite de choisir une méthode « d'agrégation » des $\rho_{i,j}^k$. Deux possibilités sont généralement envisagées : la moyenne et la médiane. La première option est présentée ici.

$$\hat{\rho}_j := \begin{cases} \max \left(\rho_{j-1}, \text{moyenne} \left\{ \rho_{i,j}^k \times \mathbb{1}_{\{C_{i,j-1}^{k,AsIf} > s_F\}} \times \mathbb{1}_{\{C_{i,j}^{k,AsIf} > s_F\}}, \forall k \right\} \right) & , \text{ si } 1 \leq j \leq J. \\ \text{moyenne} \left\{ \rho_{i,j}^k \times \mathbb{1}_{\{C_{i,j}^{k,AsIf} > s_F\}}, \forall k \right\} & , \text{ si } j = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Le maximum récursif permet de définir des cadences de paiement croissantes, implicitement supposant que tout paiement négatif est impossible³ mais surtout qui permet de rendre le calibrage des cadences plus robuste aux variations d'un nombre réduit de sinistres lorsque j tend vers J .

Étape 2 : Construire les $\hat{\rho}_j$ pour projeter les cadences de règlement sur $\mathcal{D}_2^c \setminus \mathcal{D}^c$. La valeur $\hat{\rho}_{J_2-1}$ est fixée à 1, à cette date, tous les sinistres sont liquidés à 100%. Par conséquent, la construction des $\hat{\rho}_j$ sur l'intervalle $[J, J_2 - 1]$ est un problème d'interpolation. De multiples méthodes existent pour résoudre ce type de problèmes ; toujours pour maintenir l'objectif d'une tarification simple et rapide, **l'interpolation linéaire** a été retenue pour cette étude.

Dans les faits, la problématique d'interpolation peut être transformée en une problématique de retraitements plus générale des $\hat{\rho}_j$: une loi peut être calibrée⁴ pour construire un développement de paiements plus homogène et utiliser la queue de la loi pour fournir les valeurs manquantes ; des méthodes de splines pourraient aussi être envisagées.

Étape 3 : Ajuster des cadences de paiement individuelles. Les cadences de paiements sont définies pour chaque sinistre, selon la connaissance que l'on a des paiements déjà effectués.

$$\text{Sur } \mathcal{D}_2^c, \quad \hat{\rho}_{i,j}^k := \begin{cases} \max \left(\hat{\rho}_j, \rho_{i,j}^k \right) & , \text{ si } J - i < j \leq J_2. \\ \max \left(\hat{\rho}_{J-i}, \rho_{i,J-i}^k \right) & , \text{ si } j = J - i. \end{cases}$$

Le maximum permet de conserver les observations précédentes dans le cas où la liquidation du sinistre est plus rapide que la vision agrégée retenue, ainsi un sinistre déjà clos le restera.

¹Certaines rentes viagères sont versées sur 50 ans, d'autres majoritairement capitalisées peuvent être écoulees en 8 années.

²En cas de responsabilité contestée par exemple.

³Une hypothèse qui n'est pas forcément aberrante, ce cas de figure est particulier et se produit rarement.

⁴Généralement, une loi exponentielle.

L'ensemble des proportions $\rho_{i,j}^k$ et $\hat{\rho}_{i,j}^k$ sont ensuite multipliées par $C_{i,ult}^{k,As-If}$ permettant d'obtenir la répartition des paiements théoriques de tous les sinistres.

La faiblesse de cette méthode réside dans les paiements très importants que subissent certains sinistres liquidés très lentement lors de la projection. Par exemple, un sinistre composé d'une rente viagère pourrait être liquidé à moins de 40% au bout de 15 ans, et la projection retenue peut provoquer un « saut artificiel » à 70% de charge payée lors de la 16ème année de développement. Le paiement annuel serait alors extrêmement élevé, caractérisant une situation peu crédible. Cependant, cette méthode a l'avantage de pouvoir traiter l'inflation sur les paiements annuels (Δ) et d'en identifier clairement l'impact.

2.3.2 Inflation future

L'objectif de cette partie est de construire une représentation de l'inflation future. Des acteurs économiques majeurs (e.g. la [Banque de France](#), l'[OCDE](#), la [Banque Centrale Européenne](#)) poursuivent ce même objectif et offrent des hypothèses d'évolutions. Deux points de cette étude marquent cependant des différences majeures avec ces projections : l'inflation concerne uniquement les indemnités des dommages corporels et celle-ci doit être projetée sur J_2 années (i.e. sur 20 ans). Les perspectives présentées par les grands acteurs économiques sont bien souvent réalisées sur un maximum de 3 à 5 ans. Ce mémoire n'a pas la prétention d'offrir une vision du niveau de celle des équipes traitant de ce sujet très complexe pour des organisations mondiales mais bien uniquement de présenter quelques visions crédibles, pratiquées par certains actuaires, qui permettent de tarifier correctement le risque RC Auto. L'enjeu de cette partie est donc de construire une vision prospective, sur 20 ans, de l'indice des dommages corporels.

Cas n°1 : Supposer une inflation constante.

Une simplification souvent mise en place est de supposer une variation constante de l'inflation au cours des années futures étudiées. Simplification très importante puisqu'il est impossible qu'un tel phénomène se produise, mais très pratique car l'ensemble de la projection est alors réalisé par le calibrage d'un seul nombre. La justification principalement avancée consiste à présenter une évolution variant autour d'un point d'équilibre au cours d'une période assez longue. Seules quelques différences marginales par rapport à ce point seraient donc manquées, l'essentiel de la tendance serait donc bien capturé. Deux méthodes sont principalement envisagées :

- Utiliser la moyenne (ou la médiane) des variations passées comme référence de calibrage. Cela revient à poser l'hypothèse que les variations des N dernières années vont se reproduire dans le futur. Le nombre N étant choisi par un actuaire expérimenté.
- Utiliser un autre indice comme référence de calibrage. L'idée est d'abord d'étudier les variations d'un autre indice dont des valeurs plus récentes existent ou dont des hypothèses de projections sont données par des acteurs économiques (typiquement le taux d'inflation est souvent utilisé comme indice de référence). Puis une méthode de comparaison est établie, permettant d'utiliser l'évolution du second indice comme repère pour celui que l'on souhaite projeter. Par exemple :
 - Utiliser la corrélation entre les variations, élément fournissant un facteur à appliquer aux variations projetées de l'indice de référence.
 - Calibrer un modèle linéaire sur la différence des variations selon la composante temporelle.

Cas n°2 : Ne pas supposer une inflation constante.

La perte de cette simplification oblige à des considérations plus complexes de projection de série temporelle. L'entièreté de l'indice doit être modélisée afin ensuite de pouvoir en réaliser une projection. Toutes les méthodes classiques de projection de série temporelle peuvent donc être envisagées ici, par exemple :

- Calibrage d'un modèle linéaire.
- Calibrage d'un modèle ARIMA.
- Utiliser un modèle de taux.

2.3.3 Ultime des paiements des données

Les cadences de paiements obtenues sont présentées dans la figure 2.8, une interpolation linéaire fournit les cadences retenues pour la projection des paiements.

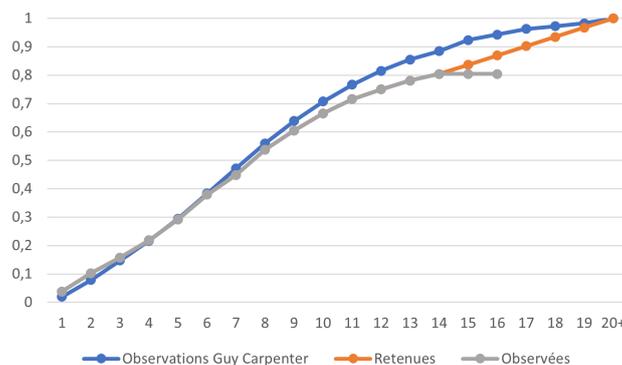


Figure 2.8: Cadences de Paiements des charges supérieures au seuil s_F

Cette représentation fait apparaître certaines pistes d'amélioration pour des tarifications futures : l'interpolation linéaire ne permet pas de bien représenter le phénomène observé et l'hypothèse de liquidation totale en 20 ans pourrait être réfutée.

Inflation : Une hypothèse d'inflation constante est retenue pour les coûts des sinistres corporels, à partir de la moyenne des 10 dernières années de l'indice, soit un taux d'inflation égal à 3,4%.

La valeur ultime de tous les sinistres dont la charge est supérieure à s_F peut maintenant être construite. La figure 2.9 présente l'effet des trois retraitements de valeurs sur la somme des charges de ces sinistres d'intérêts.

Les valeurs de tous les sinistres d'intérêts sont maintenant fixées, dans une vision homogène, qui tient compte de l'inflation future et des politiques en œuvre au sein des différentes entités. Les sinistres devraient dorénavant vérifier toutes les hypothèses nécessaires à la construction d'un modèle collectif. Le calibrage des deux lois de probabilité qui le compose (la fréquence et la sévérité) est étudié dans la partie suivante.

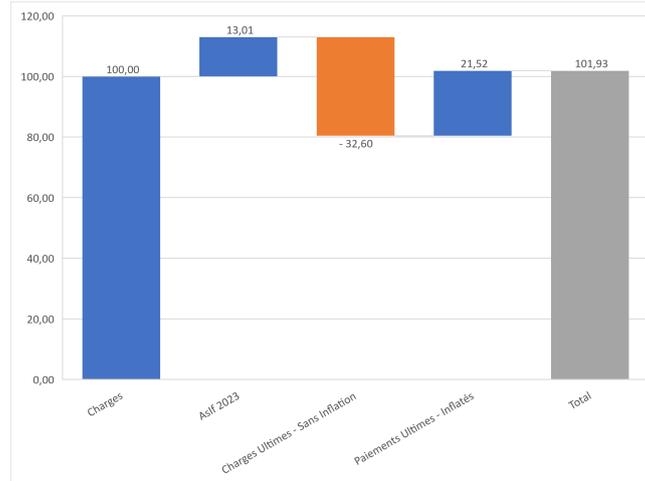


Figure 2.9: Cadences de Paiements des charges supérieures au seuil s_F

2.4 Modélisation retenue

L'avantage principal du modèle collectif, par rapport au modèle individuel, est de fournir une représentation facile à interpréter et à simuler sans pour autant perdre en crédibilité de représentation du risque. Certaines informations du portefeuille sont par contre perdues : une même police à l'origine de nombreuses pertes serait considérée comme un seul montant de sinistre très important dans un modèle individuel alors que dans notre cas, chaque sinistre déclaré par cette police est considéré indépendamment des autres. De plus, l'hypothèse d'indépendance entre coût et sévérité n'est pas automatique et doit faire l'objet d'une attention particulière. Une notion supplémentaire peut s'ajouter : le modèle collectif calibré ici est **statique**. La variable S ne représente le montant agrégé des charges que sur une date précise, date de réalisation de l'étude, sans avoir aucune considération pour les pertes futures.

De nombreux ouvrages explicitent plus en détails les différences entre modèle collectif et individuel ainsi que l'ensemble des propriétés du modèle collectif statique choisi en référence pour ce mémoire. À celui de Charpentier and Denuit (2004a) cité en introduction de ce chapitre, peuvent s'ajouter Deelstra and Plantin (2014, Chapitre 1) et Kaas et al. (2008, Chapitre 3). Afin d'éviter un allongement de ce mémoire par des reformulations de ces écrits, les propriétés fondamentales de modèle collectif ne seront pas rappelées.

Le calibrage de lois de probabilité sur des données observées n'est pas le centre de ce mémoire. Ce sujet est pourtant au centre de toute modélisation de risque et tarification en réassurance. Des ouvrages et des mémoires y sont entièrement dédiés. Aussi, aucun rappel ni sur les lois possibles, ni sur les outils de mesure d'effectivité d'un calibrage ne seront faits dans cette étude. La décision a été prise de présenter uniquement les résultats obtenus lors de la réalisation du calibrage sur nos données. Une présentation de toutes les lois de probabilités usuelles est faite dans Hogg and Klugman (1984). Des présentations plus spécifiques aux lois utilisées en réassurance ainsi que des outils de mesures d'adéquation des lois aux données sont faites dans les mémoires suivants : Pierre (2021), Poulin (2012) et Deprey and Godzinski (2007).

La modélisation du coût des sinistres est de plus en plus réalisée par des calibrages de « lois multiples ». Une première loi modélise les premières données puis à partir de certain(s) seuil(s) la loi change, pour s'adapter à l'extrême des sinistres graves par exemple. Le calibrage de telle composition

de lois n'a pas encore fourni de résultats prouvant la nécessité d'ajouter cette complexité aux données étudiées. Si ce sujet est un centre d'intérêt du lecteur, les mémoires de Pierre (2021) et Deprey and Godzinski (2007) traitent des questions de lois multiples et de relations avec les seuils pour les données de réassurance.

2.4.1 Calibrage d'un modèle collectif

Dans le cas ici-présent, l'hypothèse d'indépendance du coût et du nombre de sinistres est bien vérifiée, un modèle collectif peut être appliqué.

Coût des sinistres La figure 2.10 compare les fonctions de répartition de lois de probabilité dont les paramètres ont été calibrés par la méthode du maximum de vraisemblance. La similitude graphique entre les courbes permet de s'assurer du bon calibrage et de la crédibilité des ajustements. La loi de Pareto généralisée semble mieux s'adapter aux données, notamment sur la queue de distribution.

Le tableau 2.10 compare certaines mesures de qualité du calibrage réalisé. La p-value obtenue par la loi de Pareto généralisée semble contre-indiquer son utilisation. Malgré une valeur de « *Mean Square Error* » bien plus élevée que les autres, les critères d'information d'Akaike et bayésien encouragent à retenir cette loi pour modéliser les coûts.

La figure 2.11 présente les QQ-Plots obtenus pour les calibrages réalisés. Ces observations semblent indiquer des évaluations de charges trop importantes pour la loi log-normale et plus équilibrées pour la loi de Weibull.

D'après toutes ces informations la loi de Weibull semble être la plus adaptée pour modéliser les coûts. Dans les faits, les coûts de cette branche sont plus souvent approchés par des loi log-normale et de Pareto (généralisées ou non).

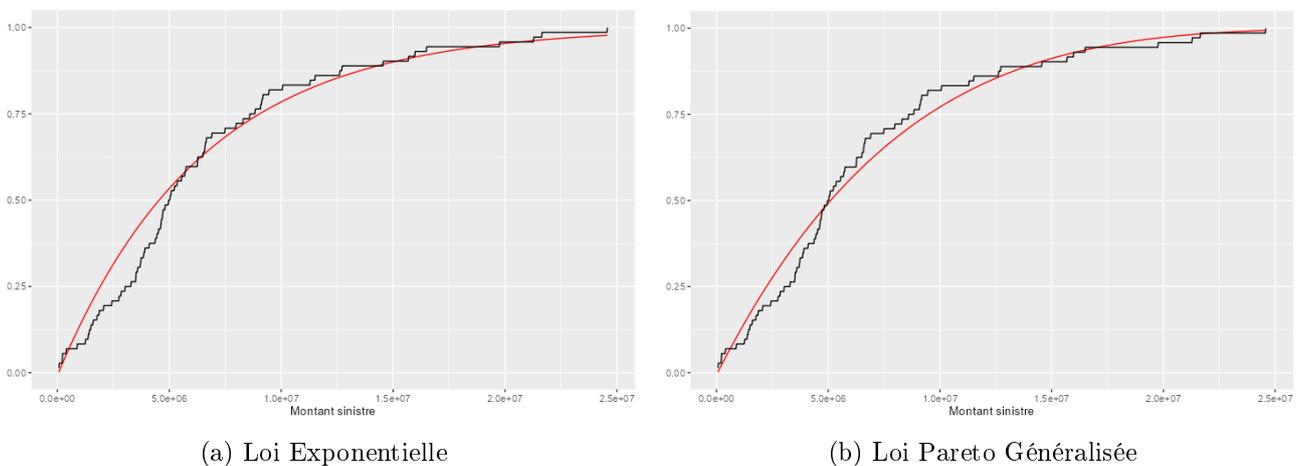


Figure 2.10: Calibrage de fonction de répartition

Distribution	Test Kolmogorov-Smirnov P-Value	MSE	AIC	BIC
Log-Normal	0,07	0,40	2427,32	2431,88
Weibull	0,07	0,10	2403,80	2408,36
Pareto Généralisée	0,13	0,15	2404,78	2409,33

Table 2.10: Mesures des calibrages réalisées

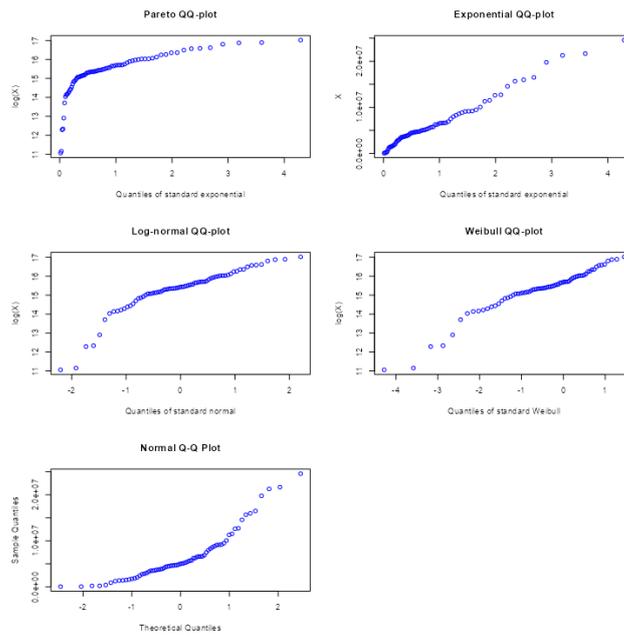
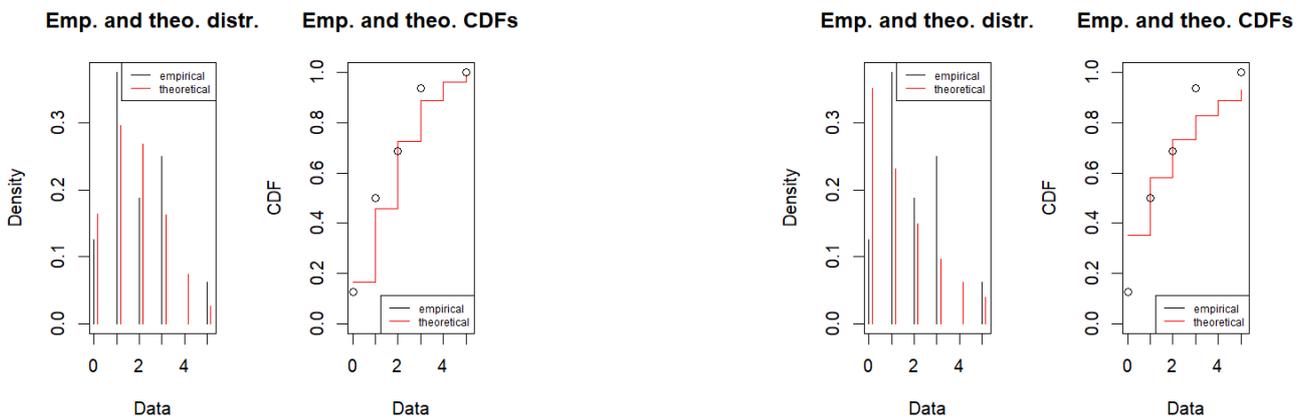


Figure 2.11: QQ-Plots

Nombre de sinistres La figure 2.12 présente les fonctions de distribution et densité des lois étudiées. Les similitudes avec la loi de poisson semblent plus nombreuses.

La figure 2.13 présente les QQ-plots obtenus. Encore une fois, les observations semblent être réparties plus fidèlement autour de l'axe diagonal du QQ-plot de la loi de poisson.

D'après toutes ces observations, la loi de poisson est finalement retenue.



(a) Loi Poisson

(b) Loi Négative Binomiale

Figure 2.12: Calibrage Nombre de Sinistres

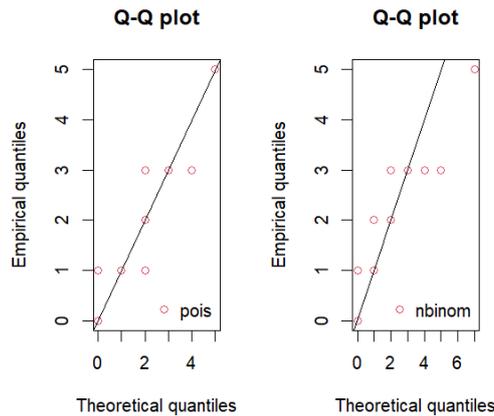


Figure 2.13: QQ-Plots

2.4.2 Obtention d'un tarif

À partir des lois calibrées présentées dans la section précédente, la tarification d'un traité de réassurance peut maintenant être mise en place. En reprenant les notations utilisées pour décrire le modèle collectif S en introduction, la tarification est construite sur la **méthode de Monte-Carlo** en trois étapes :

Étape 1 : Choisir la définition du « coût de la réassurance », c.a.d. choisir le **principe de prime** qui doit être appliqué pour associer un tarif aux variables aléatoires représentant le risque que l'on observe. Les principes de primes constituent un sujet à part entière, occupant une place centrale dans la gestion de risque. L'objectif d'obtenir des primes correspondant bien au risque que celles-ci sont censées couvrir a impliqué la création d'un bon nombre de principes et d'axiomes. Malgré l'enjeu que représente le choix d'un principe de prime, ce sujet est en dehors du cadre de ce mémoire et sa bonne compréhension a majoritairement été construite sur deux lectures : Bühlmann (1970, Chapitre 4) pour une présentation des grands principes fondamentaux et Wang, Young, and Panjer (1997) pour le développement de nouveaux principes. Deux principes « traditionnels » sont tout de mêmes rappelés afin de permettre une bonne illustration des étapes suivantes de la tarification. En considérant Y la variable aléatoire représentant la charge agrégée du réassureur, $\sigma(Y)$ l'écart-type de cette variable aléatoire, et α une constante positive nommée chargement, la prime de réassurance peut se définir :

- Selon le principe de l'espérance : $P = (1 + \alpha) \times \mathbb{E}[Y]$.
- Selon le principe de l'écart type : $P = \mathbb{E}[Y] + \alpha \times \sigma(Y)$.
- Selon le principe de la variance : $P = \mathbb{E}[Y] + \alpha \times \sigma(Y)^2$.

À partir de cette étape, la tarification obtenue dépend donc du niveau α de chargement.

Étape 2 : Le contrat de réassurance à tarifier. Tous les paiements effectués par le réassureur dépendent entièrement du type de contrat choisi et des paramètres qui lui sont associés (franchise, portée, nombre de reconstitution(s), proportion de primes cédées, etc.). Ainsi, l'entièreté du contrat doit être spécifié pour construire la variable Y (définie ci-dessus) depuis le modèle collectif de charge agrégée S . Le Chapitre 1 évoque la limitation des choix possibles de contrats due à l'orientation de la base de données, par conséquent nous donnerons ici l'exemple d'un traité $pXSf$ (avec reconstitution infinie et gratuite). La variable Y est alors définie selon la relation (2.11).

$$Y = \sum_{i=1}^N \min(\max((X_i - f), 0), p) . \quad (2.11)$$

À partir de cette étape, la tarification obtenue dépend donc des paramètres du contrat choisi, ici p et f .

Étape 3 : Les simulations. Au vu de l'expression du principe de prime, la méthode de Monte-Carlo s'applique et une approximation de la prime peut être formulée à partir de la réalisation de nombreuses simulations. Soit n le nombre de simulations effectuées (pour ce mémoire, n est fixé à 10 000), l'algorithme de tarification est décrit ci-dessous.

Algorithm 1 Tarification d'un traité de réassurance - Modèle Collectif

Simuler n fois N selon la loi du nombre de sinistres calibrée : (N_1, \dots, N_n) obtenus.

for $j \in 1, \dots, n$ **do**

Simuler N_j fois X_i selon la loi du coût des sinistres calibrée : $(X_1^{N_j}, \dots, X_{N_j}^{N_j})$ obtenus.

Appliquer le traité de réassurance : charge agrégée du réassureur Y_{N_j} obtenue.

Exemple : $Y_{N_j} = \sum_{i=1}^{N_j} \min(\max((X_i^{N_j} - f), 0), p)$

end for

(Y_1, \dots, Y_n) obtenus.

Application de la méthode de Monte Carlo : la prime de réassurance P est obtenue.

EXEMPLE : $P = (1 + \alpha) \times \sum_{i=1}^n Y_i$

À ce stade de l'étude, un modèle collectif a été calibré sur les sinistres individuels RC Auto de chaque entité du groupe, permettant de déterminer la prime pure et le prix de tout traité de réassurance (défini au-dessus d'un certain seuil) selon un principe de prime choisi.

Dans ce processus de tarification, des milliers de simulations sont réalisées à partir de chaque modèle collectif afin d'obtenir un prix grâce aux méthodes de Monte-Carlo.

Dès lors qu'un prix est fixé, une nouvelle question émerge logiquement : quel serait le « meilleur » programme de réassurance ? Cette question est à la base d'un champ de recherche très large : l'optimalité des traités de réassurance. De nombreuses réflexions et des réponses abondantes sont apportées autant dans la pratique que dans la littérature. Le chapitre suivant étudie l'application de certaines de ces propositions, basées sur la théorie des jeux.

Chapter 3

Transfert de risque à l'aide de la Théorie des jeux

Certains types de chargement sont des constantes immuables des échanges sur le marché de la réassurance, le réassureur n'acceptant jamais des affaires tarifées au niveau de la prime pure. La « tension » d'un marché peut en partie s'exprimer par des exigences croissantes des réassureurs concernant ces coûts. L'ensemble des prix de la réassurance augmentent et cette situation incite d'autant plus les assureurs à se tourner vers d'autres solutions. La construction d'un programme de réassurance pour un groupe d'assureurs oblige à composer avec de multiples assureurs : plusieurs stratégies, appétits de risque, capacités de souscription doivent interagir et s'aligner pour permettre de créer ce programme commun. Cette contrainte supplémentaire peut néanmoins être considérée comme un encouragement à la construction d'autres solutions : la réassurance interne. Si un assureur s'oriente vers une stratégie plus risquée¹, alors certains risques pourraient être conservés au sein du groupe, permettant ainsi de maîtriser entièrement et d'éviter certains coûts de friction dans les résultats du groupe.

La grande particularité du cas étudié ici, par rapport à la recherche de structures optimales de réassurance, est que cette recherche doit être étendue à un groupe d'assureurs et ne porte donc ni sur un unique traité, ni sur un unique assureur. Les interactions entre les assureurs doivent donc être considérées dans cette optimisation. La théorie des jeux est un domaine mathématique qui étudie justement des modèles mathématiques qui permettent de formaliser les interactions entre plusieurs agents². Plus précisément, la théorie des jeux est un ensemble d'outils analytiques qui visent à offrir une bonne compréhension du phénomène de prise de décision face à un problème donné. Les origines de la théorie des jeux remontent selon certains au XVIIème siècle, dans des écrits de Blaise Pascal ou Christiaan Huygens, mais celle-ci prend véritablement racine dans des études économiques d'oligopoles réalisées au cours du XIXème siècle (Cournot (1838), Edgeworth (1881), Bertrand (1883)). Elle devient cependant une discipline à part entière seulement à partir du milieu du XXème siècle, avec la publication du livre « *Theory of Games and Economic Behavior* » de von Neumann and Morgenstern (1944). Depuis, ce domaine s'est grandement développé et de plus en plus d'outils et de concepts permettant de nouvelles analyses des prises de décisions ont été découverts. Des recherches régulièrement récompensées par des prix Nobel³. Une revue historique plus détaillée est faite dans l'ouvrage de Peters (2015). Suivant cette évolution prolifique, les champs d'application de la théorie des jeux se sont eux-aussi diversifiés et ne se limitent plus seulement à l'économie : la biologie, les transports, les réseaux, mêmes les sciences politiques utilisent ces notions pour développer de nouvelles perspectives.

¹Stratégie risquée, qui nécessite de vérifier certaines conditions de contrôle, un sujet traité au cours des pages suivantes.

²*Glossaire*

³Plus d'une dizaine attribués dans le domaine de l'économie.

De nombreux liens ont également été construits entre la recherche d'optimalité des programmes de réassurance et la théorie des jeux. La première partie de ce chapitre s'attache ainsi à démontrer la bonne adéquation entre les concepts de la théorie des jeux et le fonctionnement de la réassurance.

En premier lieu, certaines notions théoriques sont introduites puis illustrées ensuite par un exemple simple qui atteste du bienfondé de leur application à ce champ de recherche.

Enfin, les « sous-problématiques » qui composent le questionnement de la construction de programme de réassurance interne sont identifiées. Après mise en perspective, des solutions sont ensuite mises en avant au travers d'un « état de l'art » permettant de considérer les résultats déjà atteints et les hypothèses fondatrices obligatoires.

3.1 Enjeux : Exemple du coût de la réassurance

La présentation de certains concepts de la théorie des jeux qui suit est en grande partie inspirée des ouvrages de Osborne and Rubinstein (1994) et Peleg and Sudhölter (2007) ainsi que certains travaux de Dutang (2012, 2021).

3.1.1 Jeux des coûts : notions de théorie de jeux

Un **jeu** est une description de l'ensemble des interactions entre plusieurs joueurs : leurs intérêts, les contraintes subies, l'ensemble des actions qui peuvent être réalisées. Trois éléments permettent de construire un jeu :

- $E = \{1, \dots, n\}$: l'ensemble des joueurs.
- $\mathcal{A} := (A_i)_{i \in E}$, où A_i désigne l'ensemble des actions possibles pour le joueur i , supposé non-vide pour tout i .
- $v := (v_i)_{i \in E}$, où $\forall i, v_i : \prod_{j \in E} A_j \longrightarrow \mathbb{R}$: appelée fonction caractéristique du joueur i qui associe une valeur à chaque **état de jeu** (i.e. lorsque les stratégies choisies de tous les joueurs sont connues). Cette valeur est souvent désignée comme le **gain** du joueur i .

Un jeu s'exprime ainsi comme un triptyque : (E, \mathcal{A}, v) .

La **stratégie** d'un joueur désigne les choix des actions que celui-ci souhaite réaliser parmi A_i . La **solution** d'un jeu est une description des réalisations possibles de celui-ci permettant de spécifier un critère selon lequel une stratégie est préférable à une autre pour chaque joueur.

Selon les types d'interactions étudiées, des éléments centraux de la nature du jeu sont à distinguer, différentes grandes « classes » de jeu pouvant alors servir de référence.

Élément 1 : Complétude de l'information, la circulation de l'information au sein du jeu. L'information entre les joueurs est dite **complète** lorsque tous les participants sont tous omniscients des possibilités d'actions de tous les joueurs, des gains résultants et des motivations de chacun. Par opposition, l'information entre les joueurs est **incomplète** dès lors que l'une de ces conditions est manquante. Une subtilité est parfois ajoutée en désignant l'information comme **parfaite** lorsque tout l'historique des décisions de chacun des joueurs est disponible, l'imperfection de l'information est une nouvelle fois définie par opposition. Dans le cas d'une forme d'information incomplète, la notion de symétrie permet de distinguer les jeux où tous les joueurs ont accès aux mêmes informations (jeux à information **incomplète symétrique**) et ceux où certains joueurs ont accès à plus de connaissances que les autres (jeux à information **incomplète asymétrique**).

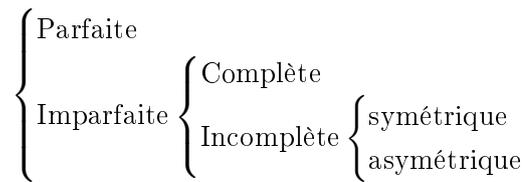


Table 3.1: Schéma - Description de la circulation de l'information

Dans la littérature, les jeux sont généralement supposés à information complète, voire parfaite, une hypothèse parfois difficilement tenable dans l'analyse de relations entreprise-client. Par exemple, les assurés n'ont pas connaissance de l'entièreté des historiques des tarifs d'assurance RC Auto de tous les assureurs du marché ni même de l'entièreté de leurs motivations.

Élément 2 : Séquence de jeu, l'ordre de choix d'actions de chaque joueur est un autre point décisif de chaque jeu. Les jeux **statiques**¹ modélisent les situations où tous les joueurs fixent leurs stratégies simultanément et en une fois pour toute la durée du jeu. À l'inverse, un jeu est **dynamique**² lorsque l'ordre de jeu permet à certains joueurs de décider en fonction du choix des autres. Certains (parfois tous) joueurs modifient leur choix d'actions ou en réalisent de nouvelles tout au long du déroulement temporel du jeu. Quatre grandes classes sont distinguées au sein des jeux dynamiques : les jeux répétés (le même jeu est répété sur plusieurs phases en sachant que l'historique des résultats intermédiaires est conservé), les jeux différentiels³ (une ou plusieurs variables déterminant l'état du système du jeu évoluent dans le temps selon une équation différentielle. Chaque joueur peut influencer certains paramètres de l'équation et poursuit l'objectif de placer le jeu dans l'état qui l'intéresse. Deux classes de jeux sont distinguées selon si l'équation est définie en temps discret ou en temps continu), les jeux de la théorie de l'évolution (application de la théorie des jeux à l'étude de l'évolution de populations en biologie).

Élément 3 : Les possibilités d'actions, la dimension de A_i correspond au nombre de choix possibles du joueur i . Dans le cas où l'ensemble des actions possibles est fini, c'est-à-dire que tous les A_i sont des ensembles discrets, le jeu est alors nommé jeu **fini**⁴ et l'ensemble des actions possibles contient ($\text{card}(A_1) \times \dots \times \text{card}(A_n)$) éléments. Un jeu est dit continu lorsque les A_i sont des ensembles **continus** et non plus discrets (e.g. des intervalles de prix, de quantité, de temps, etc.)

Élément 4 : La distinction entre joueur et agent prenant part au jeu. L'entité de base de tout jeu est le joueur. Cependant, joueur et agent ne sont pas forcément indissociables : un joueur pourrait tout autant désigner un groupe d'individus porteurs de décision qui trouvent un accord préalable et choisissent de coopérer pour présenter une stratégie commune. Une dissociation est faite entre les jeux où la coopération est permise, logiquement nommés jeux **coopératifs**, et ceux où l'ensemble des actions étudiées est basé sur les actions de joueurs individuels, nommés jeux **non-coopératifs**. Les jeux construits dans cette première forme étudient l'ensemble des actions jointes de tout groupe d'agents⁵, l'objectif de chaque groupe étant de maximiser le bien-être de chacun de ses membres. Lorsque la création de **coalition** (i.e. groupe de joueurs) n'est pas autorisée, seules les actions individuelles sont étudiées et chacun défend son intérêt propre. Cette distinction est fondamentale car cela implique des

¹Parfois nommé jeux « stratégique » par anglicisme, le terme anglais correspondant étant « *Strategic Games* »

²Ou jeu « extensif », de nouveau par anglicisme car le terme anglais est « *Extensive Game* »

³Ou jeux dynamiques à variable(s) d'état(s)

⁴Certains ajoutent l'hypothèse que le nombre d'agents prenant part au jeu est lui aussi fini. Un jeu au nombre d'agents-joueurs infini paraissait peu vraisemblable, cette hypothèse est supposée implicite.

⁵En admettant l'existence de « groupe de 1 individu ».

conceptions du jeu bien différentes. Les jeux coopératifs sont axés sur ce que les coalitions peuvent atteindre, la distribution des gains réalisés par les coalitions est traitée dans un second temps. Les jeux non-coopératifs, eux, considèrent en premier lieu toutes les possibilités d'actions de chacun des joueurs. Cette différence de points d'intérêt peut être illustrée par un exemple simple d'un jeu de plateau classique : cinq joueurs individuels ont chacun pour objectif de construire des bâtiments rapportant un certain nombre de points que chacun souhaite maximiser. Cinq catégories de ressources sont disponibles et nécessaires de manière plus ou moins importante pour construire un bâtiment. Cependant, chaque individu ne peut produire qu'une seule catégorie de ressource, toutes les autres ne peuvent être obtenues que par des échanges avec les partenaires de jeu. Dans ce cas de figure, si l'on considère un jeu non-coopératif alors, à chaque tour, peut-être que chaque joueur présentera un vecteur de facteur de conversion (entre sa catégorie de ressource et les quatre autres) pour lequel celui-ci serait prêt à accepter un échange, lui permettant de construire petit à petit sa cité. Si ce jeu est considéré comme un jeu collaboratif alors, à chaque tour, les nombres de points que peuvent atteindre au maximum chacune des coalitions est considéré. Puis, une fois les choix de formation (ou non-formation) de coalition faits, la répartition des points obtenus est discutée entre les joueurs individuels de la coalition.

La forme de ce type de jeu coopératif, c'est-à-dire ceux pour lesquels une monnaie valorisée de la même manière par tous les joueurs permet une répartition directe des gains, peut être simplifiée par la paire (E, μ) , en considérant :

- $E = \{1, \dots, n\}$: l'ensemble des joueurs.
- $\mu : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction qui associe une valeur réelle à chaque sous-ensemble de E . (Couramment, $\mu(\emptyset) = 0$ est assumé pour chaque jeu de ce format)

Cette forme donne des significations bien particulières à certains termes: la stratégie d'un joueur désigne la coalition que celui-ci choisit et une solution correspond à une répartition des gains effectués par les coalitions qui se sont formées. L'arrangement de formation(s) de coalition(s) retenu, maximisant les gains collectifs, sera nommé **solution du marchandage** (la notion de marchandage provient du partage des gains : les intérêts de tous les agents sont opposables, chacun veut en récupérer le plus possible).

Ces quelques notions étant introduites, la question est maintenant de cibler quel type de jeu permettrait de construire un programme de réassurance optimal ? Cette étude se focalise en premier lieu sur les interactions entre assureurs d'un même groupe qui cherchent à créer une solution de réassurance interne. **Les prises de décisions sont ainsi d'abord réalisées entre plusieurs assureurs avant d'arriver à l'étape d'échanges et de décisions avec le marché de la réassurance** ; ce sont bien ces décisions faites en dehors de la consultation d'un marché que nous voulons modéliser.

Les agents étudiés sont donc des assureurs mais sont tous considérés depuis le point de vue d'une direction transverse dont l'objectif est bien de construire un programme de réassurance satisfaisant chacun d'entre eux. Cette position particulière permet de garantir l'hypothèse d'information parfaite dans le jeu : l'historique, les motivations et les actions envisagées de chaque joueur individuel¹ sont communiqués à cette direction.

Un traité de réassurance en RC Auto est le plus souvent souscrit annuellement. Cette convention de marché encourage la considération de jeux statiques ou jeux répétés si l'on veut prendre en compte le résultat des traités passés (notamment pour le mécanisme de « payback », voir Annexe B.3).

Envisager des jeux finis paraît compromis : les possibilités de souscription de réassurance sont infinies.

¹Désigne les agents qui sont à l'origine du jeu, le terme "agent-joueur" paraissait moins intelligible.

Les types de traités, les franchises, les portées, le nombre de reconstitutions sont autant de paramètres qui permettent d'adapter un programme aux motivations de chaque assureur. Même si chacun est soumis à de nombreuses contraintes (par exemple, de moyen ou de réglementation) les choix de traités et donc de programmes restent infinis. Cependant, une limite fondamentale de l'application algorithmique transparaît : la discrétisation des ensembles continus est obligatoire. Ainsi, même des jeux qui en théorie devraient être considérés comme continus seront finalement des jeux finis aux cardinaux d'espaces d'actions possibles le plus élevé possible pour représenter au mieux cette situation continue.

Ces réflexions nous amènent à nous interroger sur le dernier élément de catégorisation d'un jeu. Plusieurs perspectives s'affrontent, les relations entre les assureurs considérés sont plus complexes que la dichotomie coopération / non-coopération. Agents du même secteur, ces entreprises demeurent concurrentes et poursuivent l'objectif de présenter les meilleurs résultats du marché. Cependant, ces assureurs ont choisi d'évoluer au sein du même groupe, et partagent tous la même vision mutualiste : tous pourraient envisager de travailler en collaboration avec des partenaires de confiance (les autres membres du groupe) si cela permet de servir au mieux les intérêts des sociétaires. Un point central de la théorie des jeux, inhérent à tous les modèles, est l'hypothèse de **rationalité** des agents. Tous les joueurs sont donc supposés faire preuve de « bon sens », un caractère dont aucune définition précise et applicable à tout type de situation ne peut être exprimé facilement. Un nouveau questionnement, qui pourrait permettre de trancher entre jeu coopératif / non-coopératif, apparaît : est-ce un comportement « raisonnable » pour un assureur de construire un programme de réassurance avec un concurrent ?

À ce questionnement qui pouvait paraître naïf, une réponse par la positive transparaît dès lors que les grands principes de l'assurance sont considérés. Car dans les faits, la coopération permet de profiter d'un effet de mutualisation du risque en amont de la cession, occasionnant donc diminution du coût des primes. Des exemples de telles coopérations existent, la programme ARCAM cité au début de ce mémoire en est un. Un détour va cependant être réalisé pour apporter une réponse plus précise, ainsi que pour illustrer de nouveaux éléments de la théorie des jeux, car un premier jeu simple va être introduit : **le jeu du coût de la réassurance**.

Ce jeu est en grande partie inspiré des articles de Lemaire (1991) et de Borch (1962a).¹

L'objet de ce jeu est le coût de la réassurance ; afin de comparer plusieurs situations, le même principe de prime doit être appliqué tout au long de celui-ci. Le choix a été fait de conserver un principe « classique » : le principe de l'écart-type. En considérant Y la variable aléatoire représentant la charge agrégée du réassureur, $\sigma(Y)$ l'écart-type de cette variable aléatoire, et α une constante positive, la prime de réassurance prend la forme de (3.1).

$$P = \mathbb{E}[Y] + \alpha \times \sigma(Y). \quad (3.1)$$

L'obtention de cette variable aléatoire Y , puis de la méthode utilisée pour obtenir le tarif d'un traité d'excédent de sinistre, sans reconstitution, a été détaillée dans la dernière section du chapitre précédent. Les modèles collectifs construits précédemment et les mêmes méthodes sont utilisés ici pour obtenir les primes de réassurance. Les paramètres des traités intervenant dans ce jeu doivent tout de même être précisés.

Le jeu repose entièrement sur une hypothèse simplificatrice : supposons qu'il existe un unique réassureur qui accepte tous traités d'excédent de sinistres dès lors que $\alpha = 30\%$. Afin d'offrir des perspectives plus réalistes, supposons que trois entités du groupe souhaitent souscrire

¹**Attention** : Pour faciliter la lecture, cet exemple considère des valeurs arrondies, certaines différences mineures peuvent ainsi apparaître.

un traité similaire : 10 XS 10. Dans ce cas, le jeu du coût peut se concentrer sur cet unique traité, considérant trois joueurs individuels dont les primes de réassurance sont renseignées dans le tableau 3.2 ¹.

Joueurs :	Entité 3	Entité 5	Entité 7
Coûts : 10 XS 10	134	65	287

Table 3.2: Primes de réassurance - Exprimées en base 100 sur la prime de l'entité 1

Les trois joueurs sont en fait trois entités du groupe Covéa. Le groupe étant constitué d'une petite dizaine d'entités distinctes, chacune souscrit à un programme de réassurance qui lui est propre. Afin de conserver un exemple simple, seulement trois entités sont considérées (dénommées entité 3, 5 et 7).

Ajoutons la possibilité de coopérer entre les assureurs, le réassureur souscrit alors le risque d'une coalition d'entités. Le jeu prend donc le format d'une paire (E, c) avec $\text{card}(E) = 3$ et donc c définie sur 2^3 valeurs (sachant que $c(\emptyset) = 0$).

Joueurs :	Entité 3	Entité 5	Entité 7	Entités 3&5	Entités 3&7	Entités 5&7	Entités 3&5&7
Coûts : 10 XS 10	134	65	287	176	387	325	424

Table 3.3: Jeu du coût de la réassurance - Forme Paiements

Le jeu présenté dans cette forme n'est pas entièrement explicite, la coopération entre les entités est envisageable en fonction des économies que celle-ci représente. La forme d'un tel jeu de coût est facilement modifiable, une représentation en « jeu d'économie » (« *saving game* ») est obtenue en considérant (E, μ) avec μ obtenu selon (3.2).

$$\mu(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S), \forall S \subseteq E. \quad (3.2)$$

Joueurs :	Entité 3	Entité 5	Entité 7	Entités 3&5	Entités 3&7	Entités 5&7	Entités 3&5&7
Economies : 10 XS 10	0	0	0	22	34	27	61

Table 3.4: Jeu du coût de la réassurance - Forme Économies

Ce jeu présente bien un exemple de l'intérêt de la coopération entre les assureurs pour l'achat de traités de réassurance. Cette application se généralise facilement, le point central est que ce jeu est dit **superadditif** car celui-ci vérifie l'équation 3.3.

$$\forall T, S \subseteq \mathcal{P}(E), \text{ tel que } S \cap T = \emptyset \text{ alors } \mu(S \cup T) \geq \mu(S) + \mu(T). \quad (3.3)$$

Cette propriété provient directement de la sous-additivité de l'écart-type. Le principe de prime choisi implique que les primes de réassurance sont aussi sous-additives. Soient Y_1 et Y_2 les variables aléatoires représentant les charges d'un réassureur pour deux entités distinctes, et P_1, P_2 les primes respectivement perçues en échange.

$$P_1 + P_2 = \mathbb{E}[Y_1 + Y_2] + \alpha \times (\sigma(Y_1) + \sigma(Y_2)) \geq \mathbb{E}[Y_1 + Y_2] + \alpha \times (\sigma(Y_1 + Y_2)). \quad (3.4)$$

¹Pour plus de clarté, l'exemple ne présente que 3 entités car cela est suffisant pour exprimer l'ensemble des concepts utilisés dans ce mémoire. L'entité 1, dont la prime sert à réaliser le changement en base 100 de toutes les autres, n'apparaît donc pas.

La sous-additivité de l'écart-type peut être vue comme l'expression de l'effet de la mutualisation des risques, recherchée par les réassureurs et profitable aux assureurs lorsqu'une coopération est en place. La rationalité d'un joueur individuel n'est donc pas mise à mal, même bien au contraire, dans un modèle de jeu coopératif. Un point, inhérent au concept de ces jeux, reste pourtant toujours en suspens : est-ce qu'un assureur « rationnel » s'engagerait dans un partenariat sans connaître les économies réalisées à titre individuel ?

Ce questionnement met en avant une nouvelle problématique pour les jeux collaboratifs : l'absence de vision individuelle. En effet, même si les agents mettent en place des partenariats, leurs intérêts demeurent divergeants quant au partage des avantages obtenus : chacun veut en récupérer le plus possible. Cette limite admet cependant une solution pour les jeux coopératifs statiques : la **forme statique**.

Un jeu coopératif statique est exprimé dans sa forme statique lorsque celui-ci est représenté par un triptyque $(E, (\Sigma(S))_{\emptyset \neq S \subseteq E}, v)$ respectant les propriétés suivantes :

- (1) $E = \{1, \dots, n\}$, un ensemble non vide et fini, nommé l'ensemble des joueurs.
- (2) $\forall S$ tel que, $\emptyset \neq S \subseteq E$, $\Sigma(S)$ est un ensemble non-vide et représente l'ensemble de toutes les actions possibles de la coalition S (sous-ensemble de E).
- (3) $v := (v_i)_{i \in E}$, $v_i : \Sigma(E) \rightarrow \mathbb{R}$, fonction caractéristique du joueur i qui associe une valeur réelle à chaque état de jeu.
- (4) Si $T, S \subseteq \mathcal{P}(E)$, tel que $T \cap S = \emptyset$ alors $\Sigma(S) \times \Sigma(T) \subseteq \Sigma(S \cup T)$.

Deux points principaux peuvent être soulignés :

- L'utilisation de la notation $\Sigma(E)$ pour désigner l'ensemble de toutes les situations où tous les joueurs ont choisi leur stratégie.
- La proximité entre cette forme des jeux coopératifs et celle de la forme classique des jeux, permettant de désigner tout autant les jeux non-coopératifs.

Afin d'appuyer ce second point, abordons la passage d'un jeu non-coopératif **statique et fini** en un jeu **coopératif statique et fini**. Soit $g = (E, (A_i)_{i \in E}, (h_i)_{i \in E})$ un jeu non-coopératif fini. Pour tout S tel que, $\emptyset \neq S \subseteq E$, définissons $A^S = \prod_{i \in S} A_i$, ensemble des vecteurs de $|S|$ actions appartenant chacune aux actions réalisables d'un joueur de la coalition S, soit un vecteur de la forme (3.5).

$$\{v, v = (v_1, \dots, v_s) \text{ tel que } \forall i \in S, v_i \in A_i \text{ et } |S| = s\}. \quad (3.5)$$

La formation de la coalition S est une stratégie *commune* : chacun des joueurs accordent sa stratégie individuelle pour en construire une collective. Mais toute stratégie commune peut finalement s'exprimer comme une loi de probabilité sur A^S ¹ (qui est un ensemble fini dont on connaît le cardinal, comme produit cartésien d'ensemble fini). Définissons $\Sigma(S)$ comme l'ensemble de toutes les stratégies communes de la coalition S, donc de toutes lois de probabilité envisagées sur A^S .

¹L'apparition d'une « loi de probabilité » est due à la considération de stratégies *mixtes*. La stratégie mixte d'un joueur désigne la décision de suivre un choix pris au « hasard » parmi les actions à sa disposition. Plus précisément, certains choix d'actions (appelés stratégies pures) sont présentés à un joueur et celui-ci attribue un certain poids à chaque option. Une stratégie mixte correspond finalement à une distribution de probabilités sur l'ensemble des stratégies pures. Ce concept est ici transposé aux stratégies communes, les éléments de A^S représentant les stratégies communes « pures ».

Par la suite, pour éviter une certaine lourdeur de symbole mathématiques, nous évoquerons les **coalitions non-individuelles** pour désigner les coalitions S qui vérifient (3.6).

$$S \text{ tel que } \emptyset \neq S \subseteq E \text{ et } |S| \geq 2. \quad (3.6)$$

Parmi les coalitions non-individuelles, $\epsilon^S \in \Sigma(S)$ désigne une stratégie commune. Mais une telle stratégie représente finalement un accord d'engagements entre les joueurs inclus dans S . $\Sigma(E)$ rend compte de toutes les stratégies possibles de tous les joueurs, prenant même en compte les cas de multiples coalitions non-individuelles et distinctes au sein du jeu. La fonction caractéristique d'un joueur peut alors être définie sur l'ensemble $\Sigma(E)$ selon (3.7).

$$\forall i \in E, v_i(\epsilon^E) = \sum_{a \in A^E} \epsilon^E(a) h_i(a); \forall \epsilon^E \in \Sigma(E). \quad (3.7)$$

Avec tous ces éléments, la situation peut bien être modélisée par le jeu coopératif $(E, (\Sigma(S))_{\emptyset \neq S \subseteq E}, v)$.

Ainsi, un jeu non-coopératif **statique et fini** peut être retranscrit en un jeu **coopératif statique et fini**. Les accords entre agents pour former des coalitions sont ainsi les éléments permettant de faire le lien entre jeu non-coopératif fini et statique et jeu coopératif semblable. Afin d'assurer le maintien des engagements au cours du jeu, certains auteurs ajoutent parfois l'hypothèse de clauses dissuadant toute rupture de coalition (e.g. une amende extrêmement importante en cas de désistement). L'existence d'un tel lien pourrait être une piste à suivre pour envisager la problématique choisie sous un axe non-coopératif. Mais surtout, ces accords sont au centre de la vision individuelle d'un jeu coopératif, ceux-ci sont même le fondement de toute solution de jeu. Soit ϵ une solution d'un jeu coopératif à n joueurs individuels, $(E, (\Sigma(S))_{\emptyset \neq S \subseteq E}, v)$, alors il existe ϵ^E telle que : $\epsilon = (v_1(\epsilon^E), \dots, v_n(\epsilon^E))$.

Reprenons notre exemple de jeu, avec le jeu du coût de réassurance dans sa forme jeu d'économie. Supposons que l'accord « distribution des économies réalisées à parts égales » convienne aux trois assureurs, nous obtenons alors la représentation en forme statique du tableau 3.5.

Joueurs :		Coalitions Individuelles	Entités 3&5	Entités 3&7	Entités 5&7	Entités 3&5&7
Économie : 10 XS 10	Entité 3	0	11	17	0	20
	Entité 5	0	11	0	13	20
	Entité 7	0	0	17	13	20

Table 3.5: Forme Économies - Partage à parts égales

Cette situation de traitement égalitaire ne paraît cependant pas très équitable ni réaliste, l'assureur payant le plus de primes serait en droit de demander un remboursement plus important pour que l'économie relative soit respectée entre partenaires. Un autre accord pourrait être la « distribution des économies selon les poids des primes de réassurance payées ». Nous obtiendrions alors la répartition du tableau 3.6.

Joueurs :		Coalitions Individuelles	Entités 3&5	Entités 3&7	Entités 5&7	Entités 3&5&7
Économie : 10 XS 10	Entité 3	0	15	11	0	17
	Entité 5	0	7	0	5	8
	Entité 7	0	0	23	22	36

Table 3.6: Forme Économies - Partage selon poids des primes payées

Mais supposons maintenant que l'entité numéro 7 - le joueur individuel le plus important en termes d'apport de capital - exige de recevoir au moins 80% des économies réalisées dans toute coalition dont celui-ci fait partie. Nous obtiendrions la répartition du tableau 3.7.

Joueurs :		Coalitions Individuelles	Entités 3&5	Entités 3&7	Entités 5&7	Entités 3&5&7
Économie : 10 XS 10	Entité 3	0	15	7	0	8
	Entité 5	0	7	0	5	4
	Entité 7	0	0	27	22	49

Table 3.7: Forme Économies - Partage selon la contrainte de l'entité 7

Dans cette situation, les entités 3 et 5 n'ont alors plus d'intérêt de coopérer avec l'entité 7 : toutes deux réaliseraient plus d'économies au sein d'une autre coalition. Certaines demandes de répartition sont donc inadmissibles : la stabilité des partenariats doit toujours permettre de maintenir le caractère rationnel de chaque joueur. Ainsi, certaines solutions d'un jeu coopératif sont parfois impossibles. La prochaine étape consiste à introduire certains concepts de la théorie des jeux qui permettent d'identifier clairement ces « fausses-solutions ».

3.1.2 Jeux des coûts : Propriétés de solutions

Une solution est une répartition du gain et comme mentionné précédemment prend la forme d'un vecteur de $\mathbb{R}^{|E|}$. Ce terme est ainsi couramment désigné comme « vecteur de bénéfices » (« *payoff vector* »). Soit $\epsilon := (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, vecteur de bénéfice du jeu coopératif superadditif ($E = \{1, \dots, n\}, \mu$), ϵ_i étant la valeur distribuée au joueur individuel i après formation des coalitions.

Ensembles de Solutions

L'ensemble des vecteurs de bénéfices réalisables est noté $\epsilon^*(E, \mu)$ et défini tel que,

$$\epsilon^*(E, \mu) = \left\{ \epsilon \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{1 \leq i \leq n} \epsilon_i \leq \mu(E) \right\}. \quad (3.8)$$

La notion de « bénéfices réalisables » peut être facilement généralisée à toute coalition non-individuelle. Pour toute ces coalitions, un vecteur de bénéfices est S-réalisable s'il appartient à $\{x \in \mathbb{R}^{|S|} \mid \sum_{1 \leq i \leq |S|} x_i \leq \mu(S)\}$ ($\epsilon^*(E, \mu)$ correspond à l'ensemble des vecteurs E-réalisables).

Soit ϵ une solution de (E, μ) , de nombreuses propriétés sont souhaitables pour les vecteurs de bénéfices :

(I) La symétrie : La solution est dite symétrique si pour toute contribution semblable à une coalition collective S , chaque joueur est rémunéré de manière semblable.

Soit, pour toute permutation, notée π : $\mu(\pi(S)) = \mu(S) \Rightarrow \forall i, \epsilon_{\pi(i)} = \epsilon_i$.

(II) L'optimalité : La solution est dite efficiente si : $\sum_{i \in E} \epsilon_i = \mu(E)$. L'ensemble des solutions optimales est noté : $\epsilon(E, \mu)$, parfois désigné comme l'ensemble des « *preimputations* » ou l'ensemble des vecteurs de bénéfices Pareto-optimum¹.

¹Le concept d'optimum de Pareto est assez rare dans les jeux coopératifs, les coalitions pouvant échouer à trouver un accord qui permettrait pourtant d'atteindre un tel point. Pourtant si $\epsilon \in \epsilon(E, \mu)$, la vision définie dans la théorie du marchandage de Nash est bien retrouvée ici,

$$\nexists y \in \epsilon^*(E, \mu), \text{ tel que } \forall i \neq i_0 \ y_i \geq \epsilon_i, \text{ et } y_{i_0} > \epsilon_{i_0}.$$

- (III) **La contribution marginale** : Pour chaque joueur i , définissons sa contribution marginale à une coalition S (dont celui-ci fait partie) comme : $b_i^S(E, \mu) := (\mu(S) - \mu(S \setminus \{i\}))$. La contribution maximale (resp. minimale) d'un joueur est alors définie comme $b_i^{max}(E, \mu) := \max_{S \subseteq E} (b_i^S(E, \mu))$ (resp. $b_i^{min}(E, \mu) := \min_{S \subseteq E} (b_i^S(E, \mu))$).¹
- La solution est dite acceptable pour le joueur i si : $b_i^{min}(E, \mu) \leq \epsilon_i \leq b_i^{max}(E, \mu)$. Une solution est dite **acceptable** lorsqu'elle l'est pour tous les joueurs.²
- (IV) **Ignorer les joueurs inefficients** : Un joueur est dit inefficent dans une coalition non-individuelle S si : $\mu(S) = \mu(S \setminus i) + \mu(i)$ (i.e. ce joueur n'améliore en rien la situation des autres, sa contribution marginale correspondant à ses gains en dehors de toute autre coalition). Un vecteur ϵ de bénéfice S -réalisable ignore les joueurs inefficients si : $\epsilon_i = \mu(i)$ pour chaque joueur inefficent.
- (V) **La rationalité individuelle** : La solution est dite individuellement rationnelle si : $\epsilon_i \geq \mu(i)$. L'ensemble des solutions individuellement rationnelles sont parfois désignées par l'ensemble des « *imputations* » de (E, μ) . Cette propriété implique la précédente (voir Kikuta (1976)).
- (VI) **La rationalité collective** : La solution est dite collectivement rationnelle si

$$\forall S \subseteq E, \sum_{i \in S} \epsilon_i \geq \mu(S).$$

Le core d'un jeu est une notion centrale pour caractériser l'ensemble des solutions. L'idée du core est à peu près analogue à celle de l'équilibre de Nash : identifier toutes les solutions stables, c'est-à-dire les solutions où aucune déviation (i.e. changement de stratégie) d'un joueur ne pourrait lui être profitable. Le core d'un jeu (E, μ) , noté $C(E, \mu)$, est défini comme l'ensemble de toutes les solutions collectivement rationnelles, soit

$$C(E, \mu) = \left\{ \epsilon \in \epsilon^*(E, \mu) \mid \sum_{i \in S} \epsilon_i \geq \mu(S), \forall S \subseteq E \right\}. \quad (3.9)$$

Le core d'un jeu peut aussi être défini à partir de la notion de « domination de stratégie », le core représentant l'ensemble des stratégies pour lesquelles il n'existe pas de coalition au sein de laquelle tous ses joueurs réaliseraient un gain plus important, c'est à dire

$$C(E, \mu) = \{ \epsilon \in \epsilon^*(E, \mu) \mid \nexists \emptyset \neq S \subseteq E, \exists y \text{ vecteur } S\text{-réalisable et tel que } y_i > \epsilon_i, \forall i \in S \}. \quad (3.10)$$

Le core d'un jeu admet de nombreuses propriétés intéressantes. La première est que cet ensemble est convexe et fermé (car créé à partir de $(2^n - 1)$ équations linéaires). Mais principalement, toute solution appartenant au core vérifie les propriétés d'efficience (II), d'acceptabilité (III), de rationalité individuelle (V) et évidemment collective (VI).

Reprenons notre exemple de jeu, le jeu du coût de réassurance dans sa forme jeu d'économie, en ajoutant les propriétés étudiées précédemment. Soit τ une solution du jeu du coût de réassurance, $\tau \in \mathbb{R}^3$ où τ_1 représente les économies accordées à l'entité 3, τ_2 celles de l'entité 5 et τ_3 celles de l'entité 7. Étudions les implications des trois propriétés vérifiées par le core.

¹Précision importante : les coalitions individuelles sont bien considérées dans ces calculs (une telle coalition privée d'un joueur est alors associée à l'ensemble vide).

²Ce concept sert à prendre en compte les limites d'exigence de chacun des joueurs : aucun ne pourra exiger plus que l'économie maximale ajoutée par sa présence et chacun est toujours en droit de demander les gains que sa seule présence suffit à produire.

- (II) L'efficacité implique : $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 61,36$.
 (V) La rationalité individuelle implique trois inégalités : $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \geq 0$
 (VI) La rationalité collective implique également trois inégalités :

$$\begin{cases} \tau_1 + \tau_2 \geq 22,41 \\ \tau_1 + \tau_3 \geq 33,66 \\ \tau_2 + \tau_3 \geq 26,95 \end{cases}$$

Toutes ces inégalités doivent être vérifiées par tous les éléments du core ; celui-ci caractérise les solutions assurant la stabilité de toutes les coalitions selon (3.11).

$$\begin{cases} \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 61,36 \\ 0 \leq \tau_1 \leq 34,41 \\ 0 \leq \tau_2 \leq 27,7 \\ 0 \leq \tau_3 \leq 38,95 \end{cases} \quad (3.11)$$

Ainsi, la situation où l'entité 7 exigerait d'obtenir 80% des économies atteintes est bien une solution en dehors du core, une solution donc inenvisageable.

Deux points demeurent problématiques avec le core d'un jeu :

- Cet ensemble peut être vide : l'existence de solutions n'est pas certaine et doit faire l'objet d'une attention particulière.
- Cet outil analytique fournit précisément un ensemble de solutions, toutes stables, mais qui ne renseigne pas pour autant précisément ce que chaque agent pourra gagner dans ce jeu.

D'autres concepts d'ensembles de solutions ont été développés pour les jeux coopératifs : l'ensemble de marchandage (« *The bargaining set* »), le noyau (« *The kernel* ») ou encore le *nucleolus*. Tous ces concepts sont construits autour du principe suivant : si une sous-coalition (i.e. un groupe au sein d'une coalition) avait un intérêt à fonctionner indépendamment, la menace de la mise en place d'une autre sous-coalition constituée d'autres joueurs individuels pourrait suffire à maintenir l'existence de cette coalition. Le core suppose lui que si une quelconque coalition venait à être dissoute, le jeu prendrait fin. Une distinction peut donc être faite entre ce qu'une coalition S peut obtenir lorsque $E \setminus S$ ¹ est indifférent à son gain et à l'inverse, lorsque $E \setminus S$ cherche à agir sur les gains de la coalition S . Cependant, nous venons de voir qu'un jeu construit sur la réassurance entre assureurs est superadditif : tous les assureurs ont un intérêt collectif à coopérer. Ainsi, ces autres ensembles de solutions ne sont pas traités car seuls deux types de comportements peuvent être problématiques :

- Le comportement d'un joueur souhaitant **la scission d'une coalition** : Si (IV) est vérifiée, une sous-coalition ne pourra attribuer de gains plus importants à ses agents, l'ajout de joueurs constituant à chaque fois une augmentation (ou en tout cas jamais une perte) du gain. Ce cas de figure peut donc être résolu.
- Le comportement d'un joueur **refusant la création d'une coalition** : ce problème peut être ignoré car ce comportement se heurte au caractère rationnel supposé. En effet, supposons qu'un assureur refuse de coopérer car cela impliquerait un gain relatif trop important de son concurrent. Cette considération n'existe pas, la vision d'un jeu coopératif se faisant toujours en deux phases

¹La notation $E \setminus S$ désigne l'ensemble E privé de ses éléments appartenant aussi à l'ensemble S.

: la première considère que la création de la coalition impliquant un gain plus important est bénéfique, puis la seconde phase assure « l'équité » du partage des gains. En réalité, cette situation est pourtant bien crédible et rationnelle, impliquant donc une certaine limite des jeux coopératifs. Cependant si (I) est vérifiée : peu importe l'ordre d'entrée d'un joueur individuel dans une coalition, son gain sera le même. Cette propriété met à mal l'argument de l'attribution de gains marginaux « non-mérités » mais ne résorbe pas totalement cette limite des jeux coopératifs : un assureur pourrait toujours ne pas souhaiter offrir une opportunité d'économie de coûts à un concurrent, au détriment de ses propres gains. La modélisation d'un groupe d'assureurs mutualistes, s'inscrivant dans une vision de partenariats profitables, peut constituer un argument (arbitraire mais néanmoins acceptable) pour convenir de la suffisance d'une telle résorption de cette limite.

Une dernière caractéristique des solutions reste à aborder : la relation des solutions de différents jeux. L'intérêt de cette relation provient de la considération d'un cadre plus général. En effet, les jeux coopératifs ne sont pas seulement réduits aux jeux superadditifs ; lorsque la propriété de monotonie (i.e. $\forall \emptyset \neq S \subseteq T, \mu(S) \leq \mu(T)$) n'est pas vérifiée, la maximisation des gains peut impliquer la création de plusieurs coalitions distinctes. Dans une situation d'équilibre construite sur plusieurs coalitions, le jeu peut être subdivisé en « sous-jeux », un pour chacune des coalitions formées dans la solution de marchandage. Chacun de ces sous-jeux respecte la propriété de monotonie, leur solution de marchandage étant la coalition formée par l'ensemble des joueurs. La considération de plusieurs jeux, construits autour de la même fonction caractéristique, amène à ajouter une propriété souhaitable pour le vecteur de bénéfices :

(VII) L'additivité entre jeux : Une solution est dite additive entre deux jeux, lorsque :

Si (E, μ_1) et (E, μ_2) sont deux jeux, alors pour tout i , $\epsilon_i(\mu_1 + \mu_2) = \epsilon_i(\mu_1) + \epsilon_i(\mu_2)$.

Solution Unique

Maintenant que les sept propriétés « souhaitables » d'une solution sont introduites, intéressons nous aux concepts fournissant une unique solution. De tels concepts revêtissent un intérêt particulier : ceux-ci permettent de convenir d'une clef de répartition des gains entre les assureurs dès le début du jeu. La solution la plus connue est nommée « valeur de Shapley », deux autres méthodes de répartition de gains (moins utilisées et extraites de Dutang (2021)) sont aussi présentées dans cette partie.

(1) La méthode de Moriati :

Soit un jeu coopératif statique fini (E, μ) , la solution ϵ de la méthode de Moriati est exprimée selon (3.12).

$$\forall i \in E, \epsilon_i = \frac{\mu(\{i\})}{\sum_{j \in E} \mu(\{j\})} \times \mu(E). \quad (3.12)$$

L'idée derrière cette valeur est de répartir la valeur atteinte par la coalition de l'ensemble des agents en proportion des valeurs atteintes à titre individuel. Cette valeur vérifie les propriétés (I), (II) et (V).

Cette méthode ne peut cependant pas s'appliquer à tous les formes de jeu ; dès lors que les $\mu(\{i\})$ sont nuls, la valeur n'a plus de sens.

Dans notre exemple, sous forme de paiements, on obtient la solution du tableau 3.8 (ce qui correspond bien aux économies présentées dans le tableau 3.6).

Méthode Moriati	Proportions Attribuées	Économies Réalisées	Paiements À Effectuer
Entite 3	0,3	16,9	117,0
Entite 5	0,1	8,2	56,8
Entite 7	0,6	36,2	250,7

Table 3.8: Jeu du coût de la réassurance - Solution de la méthode de Moriati

(2) La méthode des profits résiduels :

Soit un jeu coopératif statique fini (E, μ) , la solution ϵ de la méthode des profits résiduels est exprimée selon (3.13).

$$\forall i \in E, \epsilon_i = \mu(\{i\}) + \frac{\mu(\{i\}) + b_i^E(E, \mu)}{\sum_{j \in E} \mu(\{j\}) + b_j^E(E, \mu)} \left(\mu(E) - \sum_{j \in E} \mu(\{j\}) \right). \quad (3.13)$$

L'idée derrière cette valeur est de répartir les gains réalisés par la coalition de l'ensemble des agents selon la proportion des gains marginaux que chacun apporte à cette coalition.

Cette solution est intéressante car les propriétés (I) à (VI) sont vérifiées. Seule la propriété 3.1.2 d'additivité entre plusieurs jeux n'est pas maintenue.

Dans notre exemple, sous forme d'économies, on obtient la solution du tableau 3.9.

Méthode Profits Résiduels	Proportions Attribuées	Economies Réalisées	Paiements à Effectuer
Entite 3	0,3	20,9	113,0
Entite 5	0,3	16,8	48,2
Entite 7	0,4	23,6	263,3

Table 3.9: Jeu du coût de la réassurance - Solution de la méthode de profits résiduels

(3) La valeur de Shapley :

Soit un jeu coopératif statique fini (E, μ) , la solution ϵ correspondant à la valeur de Shapley s'exprime selon (3.14).

$$\forall i \in E, \epsilon_i = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq E} \frac{(\text{card}(S) - 1)! (\text{card}(E) - \text{card}(S))!}{\text{card}(E)!} \times b_i^S(E, \mu). \quad (3.14)$$

La valeur de Shapley correspond à l'unique solution vérifiant (I),(II),(III) et 3.1.2 dont Shapley a démontré l'existence en 1953.

Cette valeur peut être interprétée comme l'attribution à chaque joueur individuel de l'espérance (arithmétique) de son gain lorsque tous les ordres de formation de la coalition E sont équiprobables. Dans une vision plus « computationnelle », supposons que les joueurs individuels prennent part à la coalition E un par un, chacun se voyant octroyée l'entière du gain marginal apporté à la coalition. Tous ces ordres de création de la coalition sont associés à un poids équivalent $(\frac{1}{\text{card}(E)})$, formant ainsi le montant de gain attribué à chacun des joueurs individuels.

Le choix de cette solution est particulièrement intéressant car elle vérifie toujours (I) à (V) et 3.1.2. Cependant, (VI) n'est pas automatiquement vérifiée car cette valeur n'appartient pas toujours au core du jeu, ce qui doit constituer un point d'attention particulier lors de son utilisation.

Un cas particulier existe : les jeux coopératifs convexes. Soit (E, μ) un jeu coopératif statique fini, ce jeu est dit convexe si celui-ci vérifie (3.15).

$$\forall S \subseteq T \subseteq E, \forall i \notin T, \quad \mu(T \cup \{i\}) - \mu(T) \geq \mu(S \cup \{i\}) - \mu(S). \quad (3.15)$$

Ces jeux sont ceux pour lesquels l'incorporation de nouveaux joueurs individuels dans une coalition rapporte d'autant plus de gains que la coalition comporte déjà un nombre important de joueurs. Les jeux coopératifs de cette forme admettent un core toujours non-vide incluant toujours la valeur de Shapley. Un tel cas de figure est cependant assez rare, l'exemple du coût de réassurance ne vérifie pas cette propriété (l'entité 7 apporte une contribution marginale moins importante à la coalition {entité 3, entité 5} qu'à la coalition {entité 3}).

Dans notre exemple du jeu de coût de la réassurance, la valeur de Shapley peut être déterminée à partir du tableau 3.10.

Joueurs		$\{i\}$	Entités 3&5	Entités 3&7	Entités 5&7	Entités 3&5&7
b_i^S	Entité 3	0	22,41	33,66	0	34,41
	Entité 5	0	22,41	0	26,95	27,7
	Entité 7	0	0	33,66	26,95	38,95
Poids de S	$\frac{(card(S)-1)!(card(E)-card(S))!}{card(E)!}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Table 3.10: Jeu du coût de la réassurance - Construction de la valeur de Shapley

La solution obtenue est présentée dans le tableau 3.11.

Méthode	Valeur de Shapley	Economies Réalisées	Paielements à Effectuer
	Entite 3	20,8	113,1
	Entite 5	17,5	47,5
	Entite 7	23,1	263,9

Table 3.11: Jeu du coût de la réassurance - Solution de la valeur de Shapley

Les solutions obtenues par la méthode des profits résiduels et par la valeur de Shapley sont proches, alors que celle obtenue par la méthode de Moriarty fournit une répartition radicalement différente : les gains sont répartis pour que la proportion des économies réalisées par rapport aux coûts initiaux de chacun soient égaux (environ 12,6 %). Dans cette situation, l'entité 5, plus petite que les deux autres, réalise ainsi une économie bien moins importante que les autres en valeur absolue. Cette vision s'oppose à celle qui répartit les gains selon les marges permises par la participation de chacun dans la coalition. Dans ce cas, l'entité 5 reçoit plus de gains et l'entité 7 voit sa part diminuer car la présence des ces deux joueurs est bien nécessaire pour créer une coalition à 3 joueurs.

Déterminer si une répartition est plus « juste » qu'une autre ne repose que sur des arguments de négociations et de stratégies de coopération entre agents. Si la justesse d'une répartition pouvait se définir, quantitativement, comme celle qui vérifie le plus de propriétés souhaitables, alors la valeur de Shapley serait toujours le concept sélectionné. Mais en réalité, les cas de figures sont bien plus

complexes, et un assureur de grande taille faisant partie d'une coalition et prenant à sa charge l'entière responsabilité de la gestion des cessions pourrait exiger une répartition selon la proportion des primes payées (qui l'avantagerait).

Toute une palette de concepts et de notions de la théorie des jeux sont dorénavant introduits pour les jeux coopératifs et non-coopératifs. Les caractérisations principales des différents types de jeux ont été présentées. La liaison entre jeu coopératif et non-coopératif nous a conduit à la caractérisation des solutions, d'abord dans leur ensemble puis dans des répartitions précises remplissant un nombre de propriétés souhaitables. Le jeu du coût de la réassurance a permis d'illustrer l'intérêt principal de la coopération d'assureurs pour la réassurance : **la mutualisation des risques**. Mais ce phénomène ne suffit pas à garantir la convexité du jeu ou à le prémunir de certaines limites que peuvent atteindre les stratégies coopératives : toute solution doit être l'objet d'une attention particulière afin d'en assurer la stabilité.

Ce premier jeu offre pour autant une vision « simpliste » de la réassurance : un unique traité, fixé dès le début du jeu, est étudié ; un réassureur unique et magnanime accepte toutes les affaires qui lui sont présentées. Dans un tel cas de figure, aucune réponse à notre problématique ne peut être apportée. Celle-ci demeure : **comment optimiser le programme de réassurance d'un groupe d'assureurs ?**

De nombreuses considérations, absentes du premier jeu, dérivent de cette problématique. Trois grandes « sous-problématiques » peuvent être identifiées, nourrissant de nombreux liens entre les unes et les autres :

- **Une « infinité » de traités possibles.** Le chapitre 1 évoquait la réduction à un certain type de contrat de réassurance : les traités en excédent de sinistres. Pourtant, même en se concentrant sur ces traités, la variation de la franchise, de la portée ou du nombre de reconstitutions laisse une infinité de possibilités de traités à envisager et comparer entre eux pour en déterminer le plus adapté aux besoins d'un assureur.
- **L'aléa des assureurs.** Le commerce des assureurs est basé sur l'incertain : le montant des charges est inconnu et de ce montant dépend entièrement celui de la réassurance. Le modèle construit au cours du chapitre 2 permet de représenter cette exposition au risque de chacune des entités du groupe. L'optimisation doit être réalisée à partir de ce modèle afin d'assurer la bonne adaptation du programme proposé à la situation de chacune des entités. **Une notion d'aléatoire doit donc faire partie du jeu choisi.** Classiquement, les jeux stochastiques sont définis en ajoutant une variable aléatoire \mathcal{W} représentant « l'état du monde ». Les fonctions caractéristiques de chaque joueur dépendent ensuite de cette variable aléatoire : $v_i : \prod_{j \in E} A_j \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$. Un jeu est alors formé par le quadruplet $(E, (A_i)_{i \in E}, \mathcal{W}, (v_i)_{i \in E})$. Dans notre cas cependant, une variable aléatoire est nécessaire pour chaque joueur, représentant pour chacun le niveau de pertes (ou de richesse) auquel celui-ci se trouve. **Le jeu devra donc être dans une forme stochastique dépendant d'une suite de variables aléatoires**, $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_i)_{i \in E}$, permettant de représenter l'état du monde sur lequel les fonctions caractéristiques de chaque joueur pourront être construites.
- **Le comportement des assureurs.** Comment modéliser l'appréciation que fait un agent de sa situation ? L'ensemble de la théorie des jeux s'appuie sur l'idée de « préférence ». Le sujet était sous-jacent au jeu du coût de la réassurance : tous les joueurs souhaitent maximiser leurs gains et valorisent tous l'argent de prime économisé de la même manière. Pourtant, cette situation est-elle crédible ? Economiser 50 EUR sur 100 EUR, c'est une belle affaire, sur EUR 1 M, cela

peut être perçu comme insignifiant. Cette logique de préférence se généralise, chaque assureur est engagé sur un certain niveau de risque : quelles appréciations se réalisent ici ? Comme mentionné précédemment, pour un assureur, le rôle fondamental de la réassurance est de céder une partie de son risque ; cette question joue donc un rôle essentiel pour déterminer un niveau de partage de risque optimal. La modélisation de l'appréciation d'un agent, de ses préférences entre différentes situations, sera réalisée par l'utilisation de fonctions d'utilités. Ce concept, et plus généralement la théorie de l'utilité introduite par von Neumann and Morgenstern (1944), classiques en sciences actuarielles, sont présentés dans l'Annexe B.4.

Les besoins de la solution proposée à la problématique commençant à se préciser, la construction d'un « État de l'art » de l'optimisation de la réassurance pourrait permettre de découvrir des éléments concrets, des exemples et des modèles conduisant à la formulation plus précise d'une réponse.

3.1.3 État de l'art

Un avertissement semblait nécessaire au début de cette partie : les lignes suivantes ne sont qu'une représentation de la vision de leur auteur, à cette date, sur « l'état de l'art » de l'optimisation de la réassurance. Ce sujet est extrêmement vaste, et a donné lieu à de très nombreux travaux scientifiques. Durant les recherches réalisées pour ce mémoire, de nombreuses pistes et développements ont été laissés de côté afin de focaliser l'entièreté des efforts sur le lien entre optimisation de programme de réassurance et théorie de jeux. Au sein même de cette jonction, de très nombreux articles abordent la résolution de ce problème sous une multiplicité de perspectives. Les lignes suivantes n'ont pas d'autres ambitions que de présenter, de manière organisée, une liste des articles et travaux rencontrés. L'objectif de ces recherches était double :

- Identifier des travaux théoriques dont le cadre correspondait au problème rencontré et permettait ainsi de construire une application cherchant à y apporter une réponse concrète.
- S'assurer que tous les enjeux subsidiaires de cette problématique étaient également bien identifiés. En cas de manquement, le cadre choisi n'aurait pas permis d'apporter une réponse complète.

La compréhension complète et la capacité de reproduction des résultats énoncés ci-dessous n'ont jamais fait partie de la ligne de conduite des recherches menées. Certaines imprécisions ou approximations, concernant les articles qui n'ont pas été retenus pour construire la réponse à la problématique, pourraient être présentes au cours des lignes suivantes. Le cas échéant, ces imprécisions sont involontaires, aucune « réduction » des travaux mentionnés ci-après n'est souhaitée ou souhaitable.

Une distinction notoire est à faire entre les problèmes d'optimisation de réassurance, reprenant les termes de Kravych (2005) : certains se définissent par une approche « exogène » : un type de contrat(s) est donné, l'objectif est de déterminer sa (leurs) forme(s) optimale(s). D'autres sont définis dans une approche « endogène » : l'entièreté du risque est vue comme une transformation du risque total, l'objectif est de déterminer la transformation optimale. Même si parfois certaines publications explorent ces deux approches en parallèle, cette distinction demeure fondamentale. Dans le premier cas, le premier enjeu est de définir les paramètres du type de contrat sélectionné puisqu'ensuite c'est à partir de ces paramètres que l'optimisation est réalisée. Dans le second, l'ensemble de la réassurance est perçu comme une paire $(P, I(X))$: P correspondant à la prime payée par l'assureur en échange de la cession d'une transformation, notée $I(X)$, de la variable aléatoire de ses pertes X . L'optimisation porte sur cette fonction $I(X)$ et se réalise, la plupart du temps, à partir de plusieurs contraintes qui lui sont associées : continuité, différentiabilité et à la dérivée bornée (notamment afin de créer une « annulation » de l'aléa moral : assurer que l'assureur et le réassureur ont tous deux pour objectif de minimiser la perte X (Deelstra and Plantin, 2014, Chapitre 3)).

Le terme « optimisation » a été utilisé de (très) nombreuses fois, sans pour autant jamais préciser son sens « qualitatif ». **Quel est la définition d'un programme de réassurance optimal ?** Cette question se heurte à la raison d'être de la réassurance : s'adapter à certains besoins d'un assureur. Mais ces besoins sont multiples et les raisons d'être de la réassurance le sont donc tout autant (sans en dresser une liste exhaustive, certaines ont déjà été mentionnées précédemment : accompagnement sur de nouvelles affaires, diminution de l'exigence en capital réglementaire, de l'exposition à la ruine et à la variabilité des résultats). Trouver une méthode quantitative, permettant de retranscrire ces différentes facettes, et à partir de laquelle une position de réassurance pourrait être optimisée est à l'origine de certains mémoires d'actuariat. Ray (2011) se sert de la notion de « création de valeur », définie comme étant la différence entre le coût de la réassurance net et l'économie réalisée par la diminution des exigences de capitaux propres requis. Jeminet (2012) formule un lien encore plus clair avec les règles prudentielles de Solvabilité II et utilise comme critère le ratio entre la moyenne (réalisée sur les scénarios de simulations servant à la tarification) des gains de capitaux réglementaires requis (« SCR ») et la moyenne des résultats cédés (i.e. la différence entre les cotisations cédées et les prestations remboursées). Dans la littérature, trois grands principes d'optimisation ont pu être identifiés : la maximisation de l'utilité espérée (i.e. « expected utility », concept introduit en B.4), la minimisation du risque conservé (un risque qui doit, bien sûr, être quantifié¹ en amont), et la combinaison des deux principes précédents : l'utilité espérée est maximisée tout en recherchant à minimiser le risque conservé par l'assureur.

Les premiers travaux sur l'optimisation de la réassurance semblent remonter à De Finetti (1940) cherchant à optimiser le niveau de rétention d'un traité en quote-part (forme exogène) par la minimisation de la variance (mesure de risque choisie) du risque conservé en considérant un coût de réassurance fixe, égal à l'espérance (principe de prime d'espérance) de la charge cédée (cadre semblable à celui du modèle de Markowitz pour l'optimisation de portefeuille). Borch (1960a)² reprend ce cadre d'optimisation, sans se contraindre aux traités en quote-part afin d'étudier la forme endogène du problème, et démontre que les traités stop-loss sont le type de contrat optimal pour un assureur. Cependant, si le principe de prime retenu est celui de la variance (et non celui de l'espérance), Kaas et al. (2002) démontrent que dans ce cadre, la forme de quote-part serait la plus optimale pour l'assureur. Ainsi, une seconde démonstration est faite : l'importance fondamentale du choix dans la définition du coût de la réassurance (i.e. le principe de prime), cette décision ayant un impact majeur sur les résultats atteints. Ces premiers résultats ont ensuite été développés dans de nouveaux cadres : Ohlin (1969) généralise ces résultats sur une forme de mesure de risque plus globale que la variance, Kaluszka (2001) utilise le principe de prime de l'écart-type pour aboutir à un traité optimal prenant la forme d'un mélange entre quote-part et stop-loss. Krvavych (2005) généralise ce cadre d'étude moyenne-variance à tous les principes de primes fondamentaux en le reformulant comme un « problème d'optimisation non linéaire convexe » résoluble par des « méthodes de programmation linéaire »³. De nombreux autres cadres d'optimisation de la vision endogène ont été développés et ont permis d'aboutir à de nouveaux résultats, notamment avec le développement de nouvelles mesures de risque. Par exemple, Hans (1979) propose la maximisation de la probabilité de ruine comme une mesure de risque et Cai and Tan (2007) utilisent la VaR et TVaR à cette même fin. Ces généralisations permises par de nouvelles notions ne

¹La mesure de risque est un sujet ayant également (si ce n'est plus) fait couler beaucoup d'encre car la quasi-totalité du domaine financier est concerné. Réaliser un état de l'art sur ce domaine, si tenté que cela soit possible, pourrait permettre de rendre compte des nombreuses notions appliquées par la suite aux problématiques d'assurance et de réassurance. Cependant, de telles considérations dépassant le cadre de ce mémoire, l'étude a été restreinte aux mesures déjà connues et étudiées classiquement en actuariat.

²Le nom de Karl Henrik Borch sera cité quelques fois. Ce papier fait partie de toute une série de publications à la base de quasiment toutes celles qui suivront dans ce domaine. Peu d'attention semble avoir été accordée à ses travaux dans un premier temps, des collections de ceux-ci seront re-publiés 30 ans plus tard.

³L'obtention de tous les résultats présentés dans cette partie ne fait pas l'objet de ce mémoire, les descriptions des méthodes et des principes utilisés ne sont donc pas traités.

sont cependant pas les seules à élargir le cadre du problème. Certains travaux sur la forme optimale d'assurance, comme ceux de Raviv (1992) puis ceux de Bernard and Tian (2010) qui y associent la minimisation de la VaR, permettent de formuler clairement la possibilité d'équivalence avec la vision endogène d'un problème de réassurance (la relation assureurs-assurés peut, dans certains cadres, être assimilée à la relation assureurs-réassureurs).

Un problème majeur subsiste : seule la vision de la cédante est considérée dans cette optimisation. Pourtant, tout contrat de réassurance n'est par essence qu'un accord commun entre un assureur et des réassureurs : considérer un seul agent ne peut représenter une telle situation. D'autant plus que les objectifs de chacun peuvent être perçus comme opposés : lorsque le réassureur paye, l'assureur reçoit. Vajda (1962) illustre cette différence d'intérêt : appliquant ce cadre moyenne-variance (sur le risque porté) à un réassureur, les traités quote-part apparaissent alors comme optimaux (et non les stop-loss). Borch (1960c) considère déjà cette problématique : l'optimisation est faite à partir des utilités espérées d'un assureur et d'un réassureur. La négociation entre ces deux agents est alors modélisée par un jeu coopératif. Ces travaux sont, pour beaucoup d'auteurs, perçus comme fondateurs¹ en ce qu'une perspective plus complète du problème d'optimisation est construite : l'objectif devient l'atteinte d'une situation de partage de risque optimale. Borch (1960b) généralise ses premiers travaux (passant de deux à un nombre n d'agents), puis Lemaire (1977) les prolonge en intégrant des descriptions de concept de la théorie des jeux, comme celle d'utilité non-transférable, et plus tard produit des exemples concrets d'application (Lemaire, 1991). Ces articles s'appuient sur les jeux coopératifs stochastiques : l'étude de solutions Pareto-optimales des utilités espérées fournit un ensemble de solutions admissibles, ensemble réduit par les solutions admises de jeux coopératifs. Cette vision de la problématique est ensuite dérivée dans d'autres cadres d'optimisation en faisant varier le critère d'optimalité, les hypothèses de création du jeu ou les concepts utilisés pour réduire les ensembles de solutions Pareto-optimales. Ainsi, Embrechts et al. (2018) considèrent l'optimisation de ce problème dans la perspective d'une minimisation de la VaR. Dans un premier article, Jiang et al. (2019) ajoutent la notion de « croyances hétérogènes » qui sert à rendre compte de différentes estimations possibles du même risque de perte selon les agents (introduite par Wilson (1968) dans une vision de relation coopérative entre agents). Et dans un second, Jiang et al. (2021) repartent du cadre de Borch (1960c) pour réaliser une optimisation endogène en appliquant, en amont de la maximisation coopérative d'utilités espérées, une sélection des formats des contrats admissibles par minimisation de la VaR ou TVaR.

L'hypothèse de coopération entre assureur et réassureur, nécessitant un cadre particulier d'assureur coopérant pour créer des solutions de réassurance, peut être supprimée pour que les intérêts opposés soient retranscrits dès la recherche de solutions. Borch (1962b) utilise ainsi le concept d'équilibre compétitif, déterminant l'équilibre entre la demande et l'offre de réassurance, comme autre méthode d'étude des ensembles Pareto-optimaux. Une conception développée par la suite dans de nombreux articles, notamment pour étudier les implications en termes de calcul de primes, comme Bühlmann (1980) et Gerber and Pafumi (1998). Les publications de Aase (2002) et Aase (2009) comparent ces deux approches et leur ajoute la notion de « croyances » des agents. Boonen (2015) caractérise l'équilibre compétitif d'un problème de partage de risque sous la contrainte de minimisation de mesure de risque de distorsion (« distortion risk measure »).

Dans cette même perspective de modéliser l'état compétitif, les jeux non-coopératifs stochastiques ont été utilisés pour modéliser ces interactions. Citons à titre d'exemple les travaux de Lemaire and Quairiere (1986) sur les « chaînes de réassurance » (modélisant le phénomène de rétrocession) et Powers and Shubik (2006) (qui démontrent que le nombre optimal du réassureur sur un marché correspond

¹Les travaux de Arrow (1963), non étudiés par l'auteur de ce mémoire, sont aussi régulièrement cités comme fondateurs, et pourraient donner de nouvelles perspectives aux résultats de ce mémoire.

quasiment à la racine carrée du nombre d'assureurs). D'autres articles, comme Warren et al. (2012) et Polborn (1998) se concentrent davantage sur la relation assurés/assureurs, en supposant un modèle d'oligopole régissant le fonctionnement du marché, mais étudient plus particulièrement l'atteinte d'un niveau de prime optimale, adaptée à un tel marché. Le choix d'un jeu non-coopératif stochastique a connu un nouvel essor important, mais sous une forme particulière : la forme des jeux dynamiques. D'abord, les travaux de Chan and Gerber (1985) qui constituent une situation de monopole pour un réassureur en changeant l'ordre de jeu : le réassureur joue en premier pour fixer une « intensité de prix » (i.e. un facteur de chargement multiplicatif appliqué à la couverture demandée par l'assureur selon le principe de prime d'espérance) puis l'assureur cherche à maximiser son utilité espérée. Cheung et al. (2019) généralisent cette première étude, considérant des principes de primes plus généraux et la VaR comme mesure de risque. Pour autant, les jeux couramment désignés comme « dynamiques » concernent exclusivement les jeux différentiels dans lesquels le surplus (i.e. le résultat conservé) de l'assureur est modélisé par un processus stochastique (impliquant une forme de jeu continu). Dans ce cadre d'optimisation, les joueurs peuvent modifier leurs stratégies à tout instant $t \geq 0$, selon les informations à leurs dispositions et lorsque l'information est complète, les solutions peuvent être associées à « une équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman ». L'application de ce cadre ne correspond pas au fonctionnement actuel de la réassurance, basé sur un unique renouvellement annuel¹, ces jeux ont donc été mis de côté dans ce mémoire. Ce champ est pourtant celui qui connaît le développement le plus important ces dernières années, en terme de problème d'optimisation de réassurance sous forme endogène. Quelques références ont tout de même été recensées, entre autres : Taksar and Markussen (2003), Ben Dbabis (2012) et Li et al. (2020).

Le recensement de l'ensemble de ces publications élargit finalement les possibilités de réponses à la question posée. Toute réponse apportée dépendra fortement des critères d'optimisation retenus et des paramètres optimisables. La plupart des articles traitent de la vision endogène du problème ; pourtant, la vision appliquée de ce mémoire est bien exogène : le type de contrat est déjà restreint et connu. De plus, la recherche effectuée dans ce mémoire est entièrement quantitative, un autre défi s'ajoute : la « conversion » de ces études théoriques vers des conceptions purement applicatives. La construction d'un algorithme, comme réalisation du jeu théorique choisi, permettrait de présenter une solution directement appliquée aux réalisations des variables aléatoires de pertes modélisées pour chaque entité. Les « sous-problématiques » précédemment identifiées commencent à se préciser :

- **Une « infinité » de traités possibles.** Cette problématique est intrinsèque au choix de la vision endogène dans cette étude. Toute solution et donc comparaison de traités d'un même type doit s'organiser autour de deux éléments :
 - L'identification des paramètres d'optimisation des traités : quelles sont les valeurs / clauses de contrat variables sur lesquelles porteront l'optimisation ?
 - La discrétisation des espaces continus dans lesquels ces paramètres prennent leur valeur.
- **L'aléa des assureurs.** La modélisation de l'incertitude revient à considérer différents scénarios (ou « états du monde ») représentant des réalisations possibles de variables aléatoires impactant les fonctions caractéristiques des joueurs. À cette fin, les simulations des modèles collectifs obtenues au Chapitre 2 pourront servir de base aux différents « états du monde ». Cependant, la quasi-totalité des articles étudiés se concentrent sur le surplus de l'assureur et non sur les pertes subies. Le surplus permet de considérer le niveau de capital initial de l'assureur, information majeure car déterminante dans l'estimation de toute exposition au risque. Proportionnellement : plus un assureur dispose d'un capital important, plus celui-ci peut se permettre des expositions aux pertes importantes. Au-delà, le surplus d'un assureur offre une bien meilleure visualisation

¹Pour la majorité des contrats, mais non l'entièreté, certains sont basés sur des engagements temporels plus importants.

de la situation d'un assureur : une perte du même montant n'aura pas le même impact selon le niveau de capital impacté par celle-ci (e.g. deux assureurs perdent chacun EUR 4 M, le premier avait un niveau de fond propre à EUR 3 M et se retrouve en situation de ruine, le second lui possédait EUR 20 M de fonds et peut supporter seul un tel cas extrême).

- **Le comportement des assureurs.** La perception d'une même situation est différente pour chaque assureur : selon la position occupée sur le marché, sa taille (en terme de primes perçues et de capital disponible) ou encore sa stratégie (une volonté de conserver plus de risque (i.e. amateur de risque - « risquophile ») ou l'inverse (i.e. averse au risque - « risquophobe »)). Ainsi, un calibrage individuel sera nécessaire pour les fonctions d'utilités : une fonction d'utilité précise doit être assignée à chaque entité.

D'autres « sous-problématiques » ont aussi pu être identifiées :

- **L'optimalité**, l'enjeu central : quel critère d'optimalité doit être sélectionné ?
- La souscription de réassurance met en opposition les intérêts d'un assureur et de réassureurs. Le premier accepte donc certaines contraintes pour prouver sa bonne foi (i.e. rassurer sur le risque d'aléa moral) et le second s'engage à « partager le sort de la cédante ». Toute cette relation s'appuie sur un niveau de « confiance », s'établissant sur le long terme et particulièrement complexe à modéliser. Alors comment cette relation peut-elle justement être modélisée ? De nombreuses simplifications de la réalité ont pu être croisées précédemment : supposer le réassureur non pas comme un joueur mais comme une entité prête à souscrire des affaires sous certaines conditions de rentabilité, utiliser un jeu coopératif (supposant que le réassureur n'a pas de résultat s'il ne trouve pas d'accord avec l'assureur), utiliser un jeu non-coopératif ou encore un jeu non-coopératif conditionné par l'existence de certains accords permettant la translation en jeu coopératif. La problématique choisie nous amène cependant à nous concentrer sur les solutions internes, même si supposer une coupure totale entre un groupe d'assureurs et le marché de la réassurance paraît peu crédible.

Toutes les notions nécessaires ont ainsi été introduites, et l'ensemble des problématiques sous-jacentes au problème posé au début de ce mémoire ont été énoncées : les simplifications de la réalité construites pour formuler notre réponse peuvent dorénavant être présentées.

3.2 Jeu à deux assureurs

Nous commençons par réduire nos considérations à **un groupe de deux assureurs** pour simplifier l'analyse.

Une « solution interne de réassurance » correspond à la situation dans laquelle les deux assureurs du groupe s'accordent sur un partage du risque : l'un accepte de porter une partie de celui du second. En plus de ses propres engagements, celui-ci utilise ses fonds propres pour augmenter son exposition au risque en contrepartie d'une prime versée par son coopérateur. Un des deux assureurs a donc un double rôle : assureur (pour les engagements envers ses assurés) et réassureur (pour les engagements envers le second assureur). Nous admettons une seconde simplification : la formation de contrat « réciproques » (i.e. les assureurs sont à tour de rôle cessionnaire et réassureur) n'est pas considérée, toute transaction se fait à sens unique. Ajouter l'option de réciprocité impliquerait la perte du caractère **statique** du jeu, ce qui n'est pas souhaitable au vu du grand nombre d'hypothèses supplémentaires qui seraient dès lors nécessaires dans la modélisation du déroulement de ce jeu.

Le modèle construit dans les articles de Borch (1960b) et Lemaire (1977) fournit la base de notre réponse. Comme mentionné précédemment, nous nous intéressons à la modélisation des interactions au sein d'un groupe d'assureurs décisionnaires. Quelques précisions sont nécessaires quant à la nature du groupe étudié dans ce mémoire pour appréhender au mieux la formulation de jeu choisi. Covéa est un groupe constitué de plus d'une dizaine d'entités distinctes proposant des contrats d'assurance en tout genre. Parmi toutes ces entités, 6 souscrivent des contrats contenant des garanties RC Auto et seront donc au centre de cette partie.

Parmi ces 6 entités deux points majeurs sont à considérer :

- Des différences majeures de tailles¹ existent, trois sont des sociétés bien connues, de grande échelle, et trois autres sont de taille plus modeste.
- Des relations historiques existent entre certaines de ces entités², des liens privilégiés qui s'expriment notamment en réassurance : une société de grande taille accepte de conserver à sa charge certaines tranches basses du programme d'une société d'envergure plus modeste.

Le jeu construit doit donc forcément faire apparaître ces deux points, d'abord dans les comportements et stratégies de chacune de ces entités mais aussi dans leurs interactions. Dans un premier temps, la revendication de partenariats entre plusieurs mutuelles françaises a encouragé et justifié le choix d'un modèle coopératif. Cependant, en pratique, **la coopération est-elle bien profitable aux deux assureurs ?**

3.2.1 Formulation du jeu

Un jeu stochastique coopératif est donc construit.

Soit $E = \{1, 2\}$, l'ensemble des joueurs individuels. Au total, le jeu compte trois joueurs : les deux assureurs et leur coalition. Chacun des joueurs est nommé J_i , $i \in \{1, 2, \{1, 2\}\}$. Un raccourci est fait pour faciliter la lecture : le terme « joueurs » est utilisé pour désigner les « joueurs individuels, » ($J_{\{1,2\}}$ sera désigné comme « la coalition »). Sans perte de généralité, mais également par facilité de désignation, J_1 désigne le joueur au rôle d'assureur/réassureur et donc J_2 le joueur assureur/cessionnaire.

Pour chaque joueur, $i \in E$, les simulations de pertes extrêmes (faites à partir du modèle collectif calibré pour cet assureur dans le chapitre précédent) ont été récupérées ainsi que les montants de primes estimées. Les variables suivantes sont définies, pour $i \in E$:

- Le montant de primes estimées pour l'assureur i lors de l'exercice analysé est noté Π_i . La constante $\eta \in [0, 1]$ est définie comme la proportion estimée de la portion de prime consommée par les sinistres attritionnels. La valeur de η est fixée par l'étude de la proportion des pertes modélisées sur l'historique des pertes globales de l'assureur (obtenues à partir de l'historique des primes et des ratios $\frac{S}{P}$ revalorisés).
- ω_i : le niveau de capital de départ du joueur, avant la perception de primes ou le paiement de sinistres (calibré sur la proportion des fonds propres disponibles des assureurs).
- Soit $u_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la fonction d'utilité de J_i .

¹En terme de sociétaires, de chiffres d'affaire et de capitaux propres.

²Si la fondation du groupe Covéa a eu lieu en 2003, celles de la plupart des mutuelles qui le compose sont antérieures à 1950.

- Soient n_i le nombre de sinistre(s) de J_i , $X_{i,j}$, $1 \leq j \leq n_i$, la j -ème perte de J_i . Les n_i et les $X_{i,j}$ **sont des variables aléatoires** qui bâtissent le caractère stochastique du jeu. Ces variables prennent donc des valeurs différentes selon « l'état du monde », définie comme une réalisation de celles-ci. Ainsi, chaque simulation du Chapitre 2 caractérise ces réalisations et chacune sert à renseigner une valeur de n_i et les valeurs de $X_{i,j}$, $1 \leq j \leq n_i$ associées. **La sous-problématique de l'aléa des assureurs est donc intrinsèque au jeu et couverte par ces variables aléatoires.** Ces notations permettent de définir l'aspect théorique du jeu, en conservant une certaine simplicité d'écriture, tout en sachant que la méthode de Monte-Carlo sera appliquée sur les simulations de ces variables pour réaliser les calculs numériques.

Le terme « partage de risque » peut dorénavant prendre un sens plus précis. Dans ce jeu, un tel transfert est obligatoirement réalisé par un traité de réassurance. La décision a été prise de retenir les traités de type excédent de sinistre et stop-loss.

L'ajout des traités stop-loss (alors même que le Chapitre 1 mentionne l'adaptation des données à l'unique format XS) est permis grâce à l'hypothèse simplificatrice admettant un montant de sinistres attritionnels constant (tous les paiements effectués pour ceux-ci sont supposés égaux à $\eta \times \Pi_i$, $i \in E$). La translation de la franchise et la limite des traités stop-loss par ce même montant constant permet de concentrer le traité sur la partie aléatoire du risque, sans perdre sa généralité : des paiements certains peuvent s'échanger à prix comptant.

La précision du type de traité étant faite, la réponse à la première « sous-problématique » peut être formulée : quels sont les paramètres à optimiser ?

1 : Paramètres de traités

Classiquement, trois paramètres à optimiser sont souvent considérés pour les traités XS : la franchise, la portée et le nombre de reconstitutions.

Cependant, comme décrit dans le Chapitre 1, les traités en RC Auto sont souscrits à des **limites infinies**. La portée n'apparaît ainsi plus comme un paramètre nécessaire.

Le nombre de reconstitutions offre une protection contre l'exposition au nombre de sinistres extrêmes. Le cadre étudié est celui de la réassurance interne : une simplification dans la gestion des paiements entre assureurs serait raisonnablement envisageable. Les contrats sont ainsi supposés à **reconstitution infinie et gratuite**.

La franchise est donc au centre de l'étude : l'objectif est de déterminer le seuil de cession optimal. Ce modèle est néanmoins construit pour prendre en compte les interactions entre les deux assureurs : la décision du chargement à appliquer lors de la tarification du traité peut donc aussi être un paramètre. Ces deux paramètres suffisent à exprimer l'ensemble du marchandage entre les deux assureurs : le premier répond à la question de « combien de risques sont transférés ? » et le second « à quel prix se fait l'échange ? ».

Un point est toujours en suspens : comment la relation entre chargement et coût de réassurance est-elle régie ? Cette connexion est réalisée à l'aide d'un principe de prime, dont la force d'impact sur l'optimisation de traité a été évoqué dans l'état de l'art réalisé précédemment, démontrant la grande importance de ce choix. Cependant, dans cette étude, l'objectif est de pouvoir comparer des traités entre-eux, d'analyser les mouvements relatifs exécutés dans un cadre comparable. Ainsi, la décision a été prise de rester sur un principe de prime classique : **le principe de l'écart-type**.

Soit $i \in E$, les valeurs suivantes peuvent être définies.

- La notation des deux paramètres est fixée ainsi :
 - d : la franchise du traité de réassurance choisi.
 - κ : le taux de chargement appliqué pour la tarification.

Tout traité, une fois sa nature précisée, peut donc être désigné par la paire (d, κ) .

- Dans une application algorithmique, les espaces d'existence des paramètres doivent être discrétisés. Les notations de ces espaces de valeurs testées sont :
 - D : l'espace des franchises.
 - K : l'espace des taux de chargement.
- La valeur de la perte cédée, correspondant à la variable aléatoire de charge supplémentaire pour l'assureur acceptant de porter le risque,

$$X_i^{re} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{i,j} - d)^+ , & \text{si un traité XS est choisi.} \\ \left(\left(\sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j} \right) - d \right)^+ , & \text{si un traité stop-loss est choisi.} \end{cases}$$

- D'après le principe choisi, la prime de réassurance d'un contrat est noté P^{re} et définie selon l'égalité (3.16).

$$P^{re} = \mathbb{E}[X_2^{re}] + \kappa \times \sigma(X_2^{re}). \quad (3.16)$$

Ainsi, le montant de X_2^{re} (qui est une variable aléatoire¹) dépend du niveau d choisi, et le montant de P^{re} dépend de X_2^{re} et de κ .

1 : PARAMÈTRES DE TRAITÉS

Les paramètres « optimisables » des traités :

- d : la franchise du traité de réassurance choisi.
- κ : le taux de chargement appliqué pour la tarification.

La tarification retenue des traités :

- X_2^{re} : la charge cédée par le joueur 2 ayant le rôle de l'assureur cessionnaire.
- P^{re} : la prime payée en échange du transfert de risque.

La forme de jeu statique est conservée : tous les échanges de risque sont réalisés en **simultané**. La représentation du jeu est construite sur deux valeurs temporelles :

En $t = 0$, le temps d'initialisation du jeu. Les joueurs évaluent les échanges de risque possibles : l'objectif est de trouver le plus *optimal*.

Les variables suivantes sont définies, pour $i \in E$:

¹Car dépendante de n_i et $X_{i,j}$. X_2^{re} est une transformée du modèle collectif.

- $P_i(0) = \Pi_i \times (1 - \eta)$, nommé la « **prime des graves** ».

Ce montant est l'estimation des primes restantes après paiements de tous les sinistres attritionnels. Les scénarios étudiés dans ce jeu sont forcément basés sur les simulations de sinistres **extrêmes**. Ainsi, considérer qu'un assureur possède l'entièreté de la prime acquise de cet exercice pour répondre à ces indemnisations exceptionnelles serait une source d'erreur. Les sinistres attritionnels représentent, en cumulé, un montant de paiements plus important. L'utilisation de la prime des graves est une méthode pour garantir la prise en compte de l'entièreté de la sinistralité.

- $X_i(0) = \sum_{j=1}^{n_i} X_{i,j}$, **la charge extrême** de J_i en $t = 0$.

Considérée comme une variable aléatoire, ses réalisations correspondent aux simulations du modèle collectif calibré de J_i , obtenues dans le chapitre précédent.

- $S_i(0) = \omega_i + P_i(0) - X_i(0)$, **le surplus** de J_i en $t = 0$.

En $t = 1$, les stratégies des joueurs sont fixées : l'échange a lieu (i.e. le versement de la prime et la cession de la charge).

Les valeurs des variables précédentes changent :

- Les primes des graves,

$$\begin{cases} P_1(1) = P_1(0) + P^{re}, \text{ pour } J_1. \\ P_2(1) = P_2(0) - P^{re}, \text{ pour } J_2. \end{cases}$$

- Les charges des graves,

$$\begin{cases} X_1(1) = X_1(0) + X_2^{re}, \text{ pour } J_1. \\ X_2(1) = X_2(0) - X_2^{re}, \text{ pour } J_2. \end{cases}$$

- Les surplus : $S_i(1) = \omega_i + P_i(1) - X_i(1)$, $i \in E$. Ce qui correspond aux égalités

$$\begin{cases} S_1(1) = \omega_1 + (P_1(0) - X_1(0)) + (P^{re} - X_2^{re}), \text{ pour } J_1. \\ S_2(1) = \omega_2 + (P_2(0) - X_2(0)) + (X_2^{re} - P^{re}), \text{ pour } J_2. \end{cases}$$

Le jeu se concentrant sur la relation entre assureurs, une seconde « sous-problématique » est encore en suspens ; étudions ses possibles résolutions.

2 : Comportement des entités

La préférence des joueurs est exprimée par une fonction d'utilité : l'objectif est de rendre compte de l'appétence au risque de l'entité. Les liens entre les fonctions d'utilité et les mesures d'appréhension du risque sont présentés dans l'Annexe B.4.

Les fonctions sont organisées par « familles » qui vérifient certaines propriétés et sont construites sur un certain nombre de paramètres. Le calibrage de ces paramètres s'avère particulièrement complexe, les mouvements de quelques dixièmes pouvant occasionner des variations importantes dans le comportement modélisé. S'ajoute à cette sensibilité la nature de la fonction d'utilité : selon si cette fonction exprime une préférence entre des niveaux de revenu, des niveaux de richesse ou des niveaux de consommation, son calibrage en sera totalement changé. Dans cette étude, l'objectif était de trouver des

valeurs de référence de cette deuxième nature pour chacune des classes de fonction d'utilité considérées. Les grilles de valeurs utilisées, trouvées dans des articles reconnus, ont été critiquées et **l'ensemble du calibrage retenu pour les fonctions d'utilité de chacun des joueurs est critiquable**. De telles hypothèses étaient cependant nécessaires.

Dans cette étude, deux grands types de fonction d'utilité sont considérés.

1. Les fonctions d'utilité CARA :

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u(x) := \frac{1 - \exp(-\rho \times x)}{\rho}.$$

Cette classe de fonctions vérifie les propriétés suivantes :

- Fonction CARA : plus ρ prend une valeur haute, plus le joueur sera averse au risque.
- Fonction IRRA : plus le joueur obtient un niveau de capital élevé, moins il aura tendance à investir dans des actifs risqués. L'aversion au risque augmente avec l'augmentation de capital, ce qui est un comportement peu crédible.

Ces fonctions d'utilité présentent des avantages et des inconvénients :

• Les Avantages :

- L'aversion au risque d'un joueur s'exprime clairement : directement depuis la valeur d'un seul paramètre.
- Ces fonctions permettent de prendre en compte les situations de ruine : l'utilité attribuée peut être négative si le surplus d'un joueur l'est aussi. La gravité de la ruine (i.e. le niveau de surplus négatif) est aussi prise en compte.

• Les Inconvénients :

- Les différences de niveau d'utilité sont très peu marquées dès lors que les surplus atteignent des valeurs positives élevées. Cette progression marginale très lente est problématique pour le critère d'optimisation choisi.
- Au vu du caractère IRRA, la modélisation comportementale est discutable.

Le grille de calibrage provient de Rabin (2000), exprimant dans la première colonne le pari « 50-50 »¹ qu'un joueur est prêt à faire lorsque son utilité est au moins égale au ρ de la seconde colonne. Ce tableau 3.12 n'a d'autre objectif que celui de fournir des valeurs de référence pour le calibrage de jeu étudié ici.

2. Les fonctions d'utilité CRRA

$$u : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, \quad u(x) := \begin{cases} \frac{x^{1-r}}{1-r}, & \text{si } r \neq 1. \\ \ln(x) & , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions de la classe vérifient les propriétés suivantes :

- Fonction DARA : plus le montant perçu augmente, plus le joueur est amateur de risque.
- Fonction CRRA : même si le niveau de capital du joueur bouge, le joueur conserve la même aversion au risque.

¹Le joueur est prêt à engager le montant à gauche du « / » si la chance d'empocher le montant de droite est de 50%.

Engagement / Gain Potentiel	ρ
100 / 101	0,000099
100 / 105	0,000476
100 / 110	0,0009084
100 / 125	0,0019917
100 / 150	0,0032886
1 000 / 1 050	0,0000476
1 000 / 1 100	0,0000908
1 000 / 1 200	0,0001662
1 000 / 1 500	0,0003288
1 000 / 2 000	0,0004812
10 000 / 11 000	0,000009
10 000 / 12 000	0,0000166
10 000 / 15 000	0,0000328
10 000 / 20 000	0,0000481

Table 3.12: Fonction d'utilité CARA - Valeurs de références (Rabin, 2000)

Ces fonctions d'utilité présentent des avantages et des inconvénients :

- **Les Avantages :**

- Conservent la même facilité de calibrage (un seul paramètre) mais permettent une modélisation comportementale plus crédible.
- Les différences de niveau d'utilité se maintiennent à des montants de surplus plus importants : le critère d'optimisation choisi peut s'appliquer.

- **Les Inconvénients :**

- Les situations de ruine ne sont pas prises en compte : l'attribution de valeur à la fonction d'utilité en cas de surplus négatif doit être définie en avance. Dans cette étude, tout surplus négatif se voit attribuée une valeur de fonction d'utilité nulle. Une limite importante apparaît : la notion de gravité de ruine est perdue.
- Vision moins intuitive de l'aversion au risque du joueur.

Le grille de calibrage provient de Holt and Laury (2002), exprimant le nombre d'options sans-risque prises par un agent au cours d'un questionnaire. Ce tableau 3.13 n'a d'autre objectif que celui de fournir des valeurs de référence pour le calibrage de jeu étudié ici.

Les variables aléatoires de chaque joueur étant spécifiées, l'évaluation qui en est faite l'étant également, la dernière « sous-problématique » peut être traitée.

3 : Critère d'optimisation

Le choix a été fait de reprendre l'un de ceux cités dans un article de Lemaire (1977). Le critère d'optimisation sera donc le produit des différences d'utilités espérées de chacun des joueurs. La décision d'étudier le produit et non la somme des différences d'utilités espérées n'est pas la plus répandue dans les articles étudiées. Cependant, ce critère s'adapte à une application concrète. En effet, si un des joueurs ne réalise aucun gain d'utilité espérée lorsque la coopération est envisagée, alors la différence de ses utilités espérées est nulle. Le critère attribue une valeur nulle à cette situation

Nombre de choix sans-risque	Espace du paramètre relatif	Expression de l'appétit
0-1	$r < -0,95$	extrêmement amateur de risque
2	$-0,95 < r < -0,49$	très amateur de risque
3	$-0,49 < r < -0,15$	amateur de risque
4	$-0,15 < r < 0,15$	neutre au risque
5	$0,15 < r < 0,41$	légèrement averse au risque
6	$0,41 < r < 0,68$	averse au risque
7	$0,68 < r < 0,97$	très averse au risque
8	$0,97 < r < 1,37$	extrêmement averse au risque
9-10	$r > 1,37$	« <i>stay in bed</i> »

Table 3.13: Fonction d'utilité CRRA - Valeurs de références (Holt and Laury, 2002)

(multiplication par 0) : les **deux joueurs** doivent donc nécessairement gagner en utilité espérée pour que l'échange de risque obtienne une valeur supérieure à 0 au critère sélectionné.

Cette propriété de réciprocité de gains n'est pas automatique lorsque la somme des différences d'utilités espérées est choisie. Une position extrêmement profitable pour un joueur peut apparaître comme optimale alors même que celle-ci pourrait entraîner une diminution de l'utilité espérée du second joueur.

Afin de présenter une certaine formalisation du critère d'optimisation, une notion supplémentaire doit être introduite : $U_i(t)$ est nommée **l'utilité** du joueur i au temps t . $U_i(t)$ correspond à l'utilité espérée du surplus du joueur i au temps t et est définie selon l'équation (3.17).

$$\forall i \in E, U_i(t) = \mathbb{E}[u_i(S_i(t))] = \begin{cases} \int u_i(\omega_i + P_i(0) - X_i(0)) dF_i(X_i(0)) & \text{si } t = 0. \\ \int u_i(\omega_i + P_i(1) - X_i(1)) dF_1(X_1(0)) dF_2(X_2(0)) & \text{si } t = 1. \end{cases} \quad (3.17)$$

Le critère d'optimisation sélectionné s'exprime dans l'équation (3.18).

$$\max_{\kappa \in K, d \in D} (U_1(1) - U_1(0)) \times (U_2(1) - U_2(0)). \quad (3.18)$$

Remarque : Une seconde « sous-problématique » est prise en compte ici : la gestion de l'aléatoire. La considération faite des utilités espérées, définies à partir des fonctions de distribution (F_i) des pertes, construit l'entière du modèle sur les modèles collectifs du chapitre précédent.

À titre d'illustration, l'application de la méthode de Monte-Carlo / le calcul numérique effectué pour l'utilité du joueur 1 au temps 0, en considérant n_i^w et $X_{i,j}^w$ les réalisations w de n_i et $X_{i,j}$ ¹, est

$$U_1(0) = \frac{1}{|\mathcal{W}|} \times \sum_{w \in \mathcal{W}} u_1(\omega_1 + \Pi_1 \times (1 - \eta) - \sum_{j=1}^{n_i^w} X_{i,j}^w).$$

¹ w correspond à l'« état du monde », et donc $w \in \mathcal{W}$, \mathcal{W} étant l'ensemble des états possibles. Ce qui est en tout point équivalent à dire que l'on considère la simulation numéro w avec $w \in [1, n]$, n étant le nombre de simulation effectuée.

3^{bis}: Contrainte réglementaire

Inspirée par Jiang et al. (2021), la décision a été prise d'ajouter une « contrainte réglementaire » au jeu, basée sur une mesure de risque choisie. L'objectif est de modéliser l'ensemble des contraintes qui interagissent sur un assureur. Plus précisément, cette pression supplémentaire sert à prévenir deux types de comportements problématiques :

- Dans ce jeu, le rôle de réassureur implique le gain d'une marge certaine en espérance ; un assureur pourrait alors avoir la stratégie d'accepter beaucoup plus de charges puisque cette action rapporte plus que ce qu'elle ne coûte. La contrainte joue donc un rôle de **contrôle des charges supplémentaires acceptées**.
- Abandonner une certaine marge revient à céder un certain avantage : un assureur amateur de risque pourrait donc être enclin à ne jamais entrer dans ce jeu de réassurance. Pourtant, ce joueur pourrait porter des engagements trop importants par rapport à son chiffre d'affaires ; celui-ci serait alors dans l'obligation de souscrire de la réassurance. La contrainte joue donc un rôle de **contrôle des engagements obligatoires**.

Cette contrainte est construite sur la Value At Risk ¹ de la charge de chacun des joueurs, celle-ci doit être inférieure à la prime acquise pour un niveau 99,5%. Toute charge ne vérifiant pas la contrainte implique une utilité nulle. La formalisation est faite dans l'équation (3.19).

$$\forall i \in E, t \in \{0, 1\}, \quad U_i^{CR}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } VaR_{99,5\%}(X_i(t)) > \left(P_i(t) \times \frac{1}{1-\eta} + \omega_i\right). \\ U_i(t), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.19)$$

3 : CRITÈRE D'OPTIMISATION

- La valeur de référence est l'utilité espérée du surplus de chaque joueur, nommée utilité et notée $U_i(t)$.
- Toutes les valeurs d'utilité des joueurs sont contrôlées par une « contrainte réglementaire », exprimée dans l'équation 3.19.
- Le traité optimal, pour chacune des natures étudiées, s'exprime dans l'équation (3.20).

$$(d^*, \kappa^*) = \arg \max_{\kappa \in K, d \in D} (U_1^{CR}(1) - U_1^{CR}(0)) \times (U_2^{CR}(1) - U_2^{CR}(0)). \quad (3.20)$$

3.2.2 Solution de marchandage

Remarque : La solution de marchandage de ce jeu correspond finalement à trouver un traité optimal (i.e. qui vérifie 3.20).

Comme exprimé au début de cette partie, au sein du groupe d'assureurs étudié, deux « sous-groupes » sont à distinguer : les mutuelles de grande taille (i.e. un grand nombre de sociétaires et des capitaux propres très élevés) et les mutuelles de taille plus modeste. Généralement tous les assureurs sont

¹La Value At Risk (VaR) correspond à la fonction quantile,

$$\forall \alpha \in [0, 1], \quad VaR_\alpha(X) = q_\alpha(X) = \inf\{t \in \mathbb{R}, F_X(t) \geq \alpha\}$$

supposés averses au risque, cependant une véritable dichotomie entre ces deux « sous-groupes » d'entités existe dans ce rapport au risque : l'aversion des premiers est bien moins marquée que celle des seconds. Par simplification, seuls deux calibrages des paramètres des fonctions d'utilité seront réalisés : un pour chacun de ces « sous-groupes ».

Le cadre général fixé est présenté dans le tableau 3.14 et la situation initiale de chacune des entités est présentée dans le tableau 3.15.

Nombre de Simulations par calcul d'utilité	8000
Valeur de η	0,7
Dimension de K (chargements)	31 (uniformément de 0 à 150%)
Dimension de D (franchises)	301 (uniformément de EUR 0 à 30 M)

Table 3.14: Situation Initiale - Utilités des entités

Classe de fonction		Entite 1	Entite 2	Entite 3	Entite 4	Entite 5	Entite 6
Fonction utilité CARA	Utilité Initiale	0	71,2	93,5	0	0	112,5
	ρ	0,00048	0,00017	0,00017	0,00048	0,00048	0,00017
Fonction utilité CRRA	Utilité Initiale	0	27,7	34,4	0	0	39,1
	r	0,8	0,3	0,3	0,8	0,8	0,3

Table 3.15: Situation Initiale - Utilités des entités

Les deux « sous-groupes » sont ici clairement identifiables, d'abord par les coefficients choisis mais surtout par les valeurs d'utilités. D'un côté, les assureurs de grande taille ({Entité 2, Entité 3, Entité 6}), peu averses au risque et dont les niveaux d'utilités sont élevés. De l'autre, les assureurs de taille plus modeste ({Entité 1, Entité 4, Entité 5}), très averses au risque et dont l'utilité est nulle. Ces valeurs nulles impliquent deux considérations :

- La contrainte réglementaire, à l'origine de ces valeurs nulles, prend le rôle **d'incitation à la cession de risque** pour ce sous-groupe. En effet, tout contrat de réassurance permettant à l'une de ces entités d'avoir une utilité positive apparaît dès lors « préférable » à sa situation actuelle.
- Des rôles entre les entités du groupe sont « naturellement » définis. Les assureurs à l'utilité déjà nulle ne peuvent prendre de risque supplémentaire : la contrainte réglementaire continuerait de s'appliquer et leurs utilités stagneraient à 0. Par conséquent, seul les joueurs appartenant au groupe des entités de grande taille peuvent avoir le rôle de réassureur dans ce jeu.

Avec la considération de ces deux « sous-groupes », quatre cas de figure pouvaient avoir lieu dans un jeu entre deux assureurs : deux assureurs du même sous-groupe négocient un traité et un assureur de chacun des deux sous-groupes négocient un traité (cas de figure doublés par l'inversion des rôles J_1 , J_2 entre les entités). Cependant, au vu des rôles « naturels », seul deux cas de figures sont possibles :

- **Un assureur de grande taille coopère avec un assureur de taille plus modeste.** Dans ce cas les rôles sont fixés : celui du premier correspond au joueur 1 (J_1 , assureur/réassureur) et le rôle du second est celui du joueur 2 (J_2 , assureur/cessionnaire)

- **Un assureur de grande taille coopère avec un autre assureur de grande taille.** Dans ce cas, les rôles sont interchangeables. La simplification admise de ne pas considérer de traité réciproque s'oppose ici à cette interchangeabilité des rôles : un choix doit être fait dans la création du traité.

Cette situation initiale peut paraître extrême : la différence d'utilité entre les situations des assureurs du même groupe est très marquée. Mais ce jeu n'apprécie que la perception du « besoin » de réassurance pour chacune des ces entités. Ces différences n'expriment finalement qu'un besoin bien plus marqué de réassurance pour les petites entités. De par la nature de la branche RC Auto, l'exposition en terme de coût atteint des montants extrêmement importants, un risque qui incite particulièrement les assureurs de taille modeste à chercher des niveaux de rétention bas et justifie l'expression d'un tel besoin dans ce jeu.

Le besoin de réassurance ressenti est tout de même limité par la situation (i.e. équilibre entre prime et sinistres) de l'assureur : un S/P détérioré implique une confrontation plus rapide à des niveaux de prix de cession trop importants que dans le cas où le résultat brut permet d'acheter des traités aux franchises plus basses.

Ce jeu permet donc d'étudier une relation déjà bien existante entre les compagnies du groupe Covéa : les liens de confiance qui connectent une entité de grande taille avec une entité de taille plus modérée. Le niveau d'utilité de l'assureur cessionnaire repose finalement sur trois facteurs : son besoin de réassurance, son appréciation de celui-ci et le résultat de son portefeuille. Le niveau d'utilité de l'assureur réassureur quant à lui s'appuie sur les gains obtenus, par la prime de réassurance et par l'effet de mutualisation, et de l'appréciation de ceux-ci. Étudions maintenant comment ces éléments interagissent entre eux au travers des modèles collectifs simulés de chaque entité.

Jeu à 2 assureurs aux rôles fixés :

Les entités 3 et 5 sont choisies aléatoirement. Le cas de la **fonction d'utilité CRRA** est d'abord présenté.

La première considération porte sur le core du jeu, permettant de caractériser les solutions et de vérifier leur existence. À cette fin, l'ensemble des primes ($P_1(0) + P_2(0)$) et l'ensemble des charges ($X_1(0) + X_2(0)$) sont réparties selon une proportion aléatoire entre les deux joueurs. En terme de contrat de réassurance, ces répartitions correspondent à des échanges de *quote-parts* aux primes nulles entre joueurs. Les utilités atteintes par chaque joueur sont alors calculées, et représentées dans le graphique 3.1.

Les deux niveaux d'utilité de J_2 , sans (U2(x2)SC) et avec (U2(x2)AC) contrainte réglementaire sont affichés sur ce graphique. L'ensemble des points rouges correspond aux utilités atteintes lorsque J_1 se voit attribuer plus 98% des primes et charges présentes dans le jeu. Ces points représentent bien les situations « les plus préférables » pour les deux joueurs et valident l'attribution des rôles : l'assureur de grande taille doit être celui qui augmente son risque porté.

Le core du jeu correspond à tous les points **positifs** qui se placent **à droite de l'axe vertical** (U1(x1)) représentant le niveau initial d'utilité du J_1 . Tout point vérifiant ces deux conditions est bien **collectivement rationnel**.

L'impact de la contrainte réglementaire peut être représenté en faisant varier uniquement le montant de charges attribué à chaque joueur (les primes restent semblables). Sur la figure 3.2, les points bleus

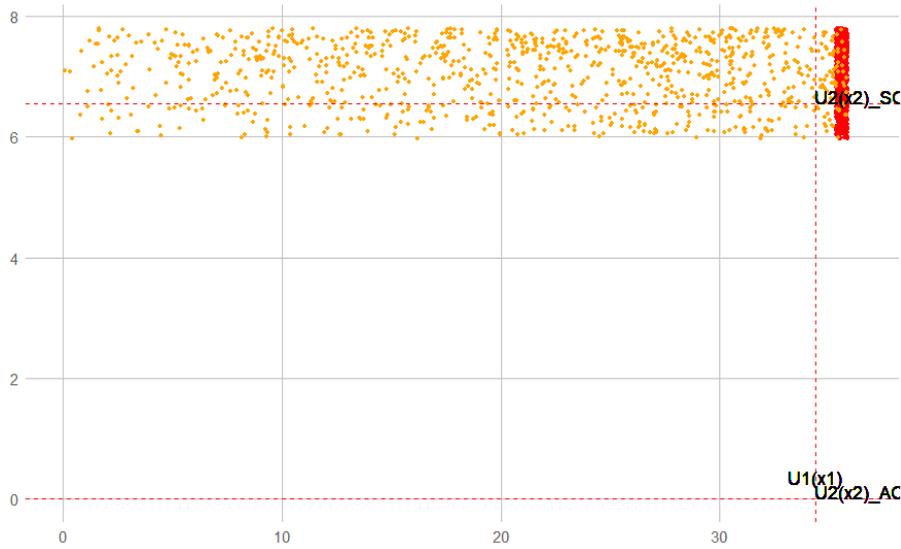


Figure 3.1: Échanges de quote-parts gratuits - Fonctions CRRA

(resp. vert) sont ceux pour lesquels J_1 voit sa charge augmenter (resp. diminuer) par rapport au niveau initial. Dès lors qu'un certain niveau de charge est atteint pour J_2 , son utilité tombe à 0.

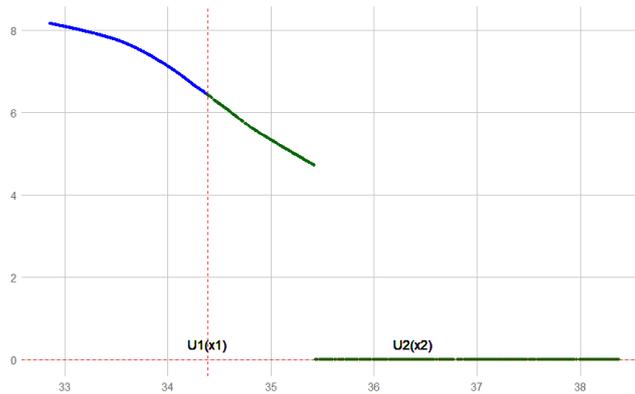
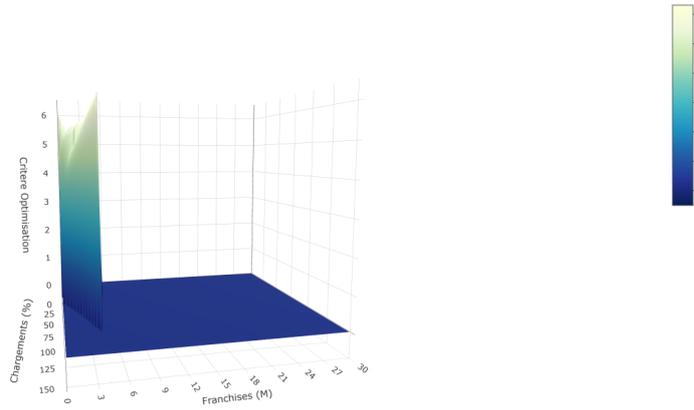


Figure 3.2: Utilité de la répartition des charges

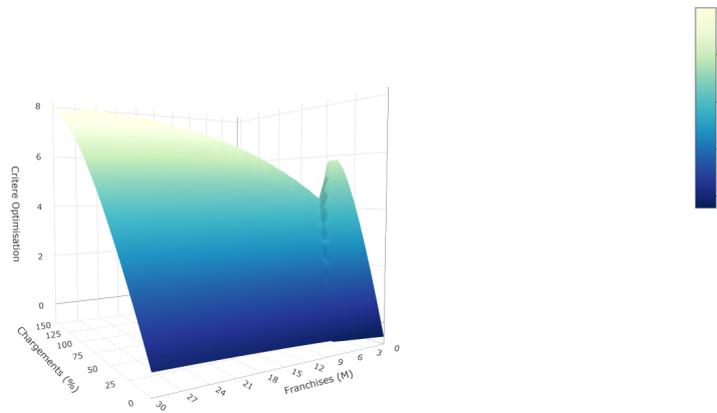
Maintenant que l'existence de solutions est prouvée, reste à savoir si celles-ci peuvent être atteintes à partir des traités non-proportionnels sélectionnés. Le critère d'optimisation est calculé, pour chaque élément $\kappa \in K$ et $d \in D$, permettant d'obtenir les représentations en trois dimensions de la figure 3.3a pour les traités XS et la figure 3.3b pour les traités *stop-loss*.

L'impact de la contrainte réglementaire est particulièrement visible sur les traités XS, la chute du critère d'optimisation à 0 étant due à l'absence de gain du second joueur. De plus, la comparaison entre ces deux graphes permet de mettre en avant que les traités *stop-loss* permettent d'atteindre des valeurs de critères plus élevées, alors même que les extrêmes ne sont pas atteints dans l'ensemble $(K \times D)$ considéré.

Les traités optimaux, obtenus avec une fonction d'utilité CRRA entre les entités 3 et 5 sont présentés dans le tableau 3.16.



(a) Traité XS



(b) Traité SL

Figure 3.3: Valeur du critère d'optimisation - Fonction CRRA

Entités 3 et 5 - Fonctions CRRA		
	XS	Stop Loss
(d^*, κ^*)	(4,2 , 95%)	(25,4 , 150%)
Critère Optimisation	6,31	7,98
Niveau Utilité J_1	36,13	36,48
Niveau Utilité J_2	3,60	3,78

Table 3.16: Traités optimaux, entités 3 et 5

Les représentations en trois dimensions permettent aussi de représenter les gains d'utilité réalisés par chacun des joueurs selon les chargements et les franchises choisies. La figure 3.4 offre cette représentation pour le joueur 2 et la figure 3.5 celle du joueur 1.

La répartition de ces gains retranscrit bien les différents mouvements du critère d'optimisation qui était visible sur la figure précédente (effet de la contrainte réglementaire, gonflement du critère pour des traités stop-loss à franchise basse et chargement bas ¹).

¹Ce saut de valeur est abordé plus en détails à la fin du chapitre.

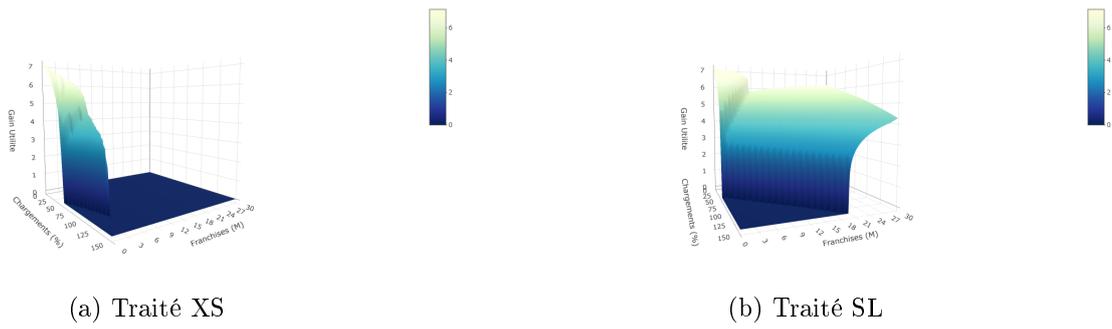


Figure 3.4: Gain d'utilité - Joueur 2 - Fonction CRRA

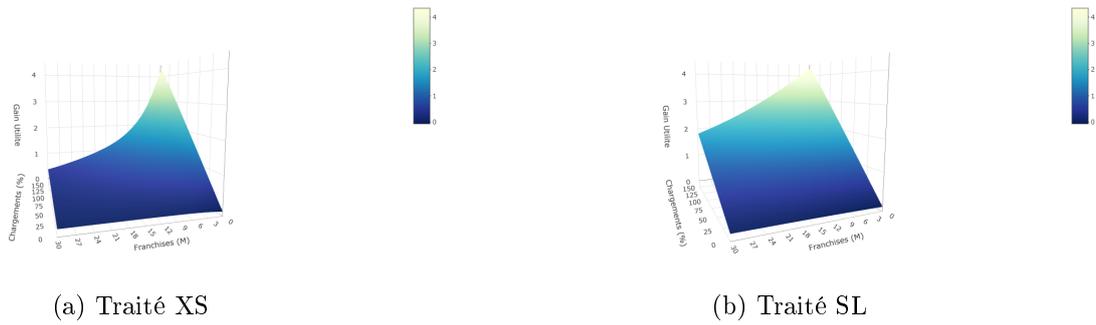


Figure 3.5: Gain d'utilité - Joueur 1 - Fonction CRRA

La même étude est réalisée à partir de la **fonction d'utilité CARA**. Les résultats obtenus sont bien plus volatiles, la figure 3.6 représente bien les niveaux beaucoup plus variés d'utilités atteignables pour les joueurs.

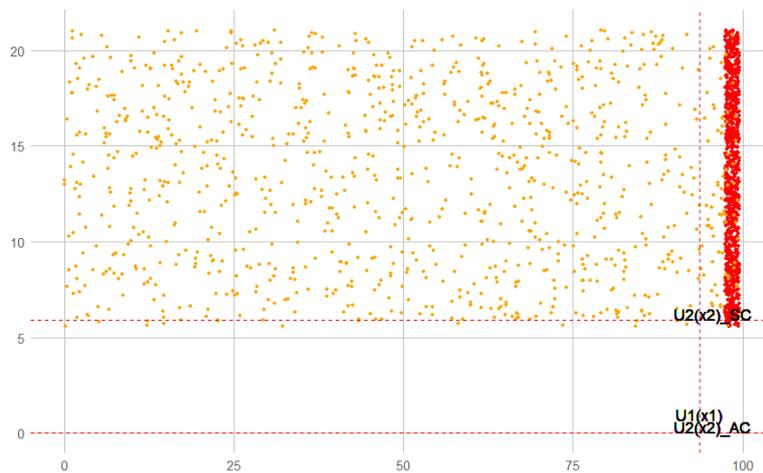


Figure 3.6: Échanges de quote-parts gratuits - Fonctions CARA

De plus, lors de la considération des traités non-proportionnels, la plupart des valeurs du critère d'optimisation sont négatives, un seul traité de chaque type paraît bénéfique pour les deux joueurs (présenté dans le tableau 3.17).

Entités 3 et 5 - Fonctions CARA		
	XS	Stop Loss
(d^*, κ^*)	(1,7 , 30%)	(6,5 , 30%)
Critère Optimisation	8,49	8,49
Niveau Utilité J_1	96,50	96,51
Niveau Utilité J_2	2,94	2,93

Table 3.17: Traités optimaux, entités 3 et 5

Ces observations éclectiques, malgré une apparente stabilité des traités optimaux aux variations de la valeur de ρ , incitent à mettre de côté la fonction d'utilité CARA pour le reste de l'étude.

Jeu à 2 assureurs aux rôles interchangeables :

Les entités 2 et 6 sont choisies aléatoirement. Le cas de la **fonction d'utilité CRRA** est présenté.

Le core de chaque jeu est représenté dans la figure 3.7. L'atteinte de situations profitables aux deux joueurs paraît dès lors plus complexe. Dans les faits, avec les niveau d'aversion au risque choisi, aucune solution de marchandage ne peut être trouvée à partir du critère d'optimisation sélectionné. La mise en place d'un traité non-proportionnel entre les deux joueurs implique quasiment toujours des gains d'utilité négatifs (voir la figure 3.8).

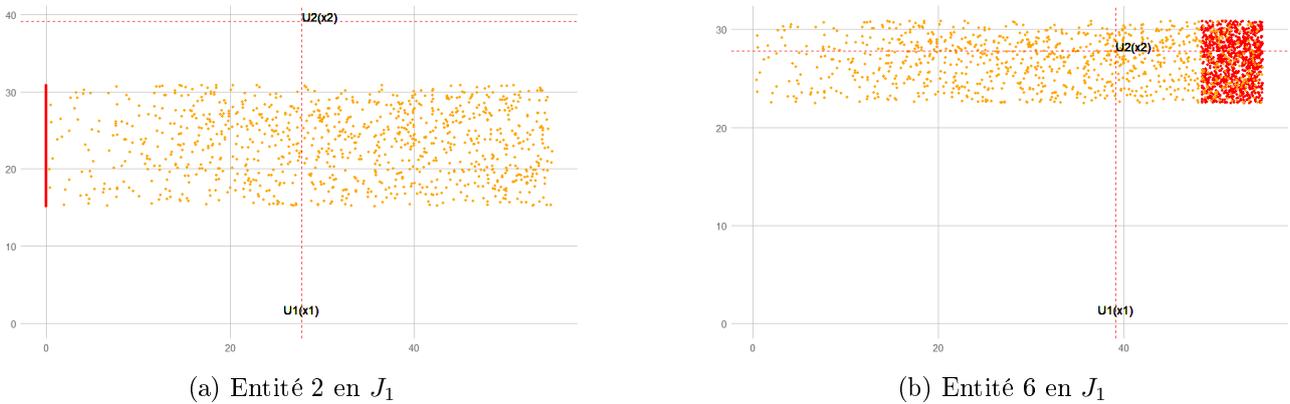


Figure 3.7: Échanges de quote-parts gratuit - Fonction CARA

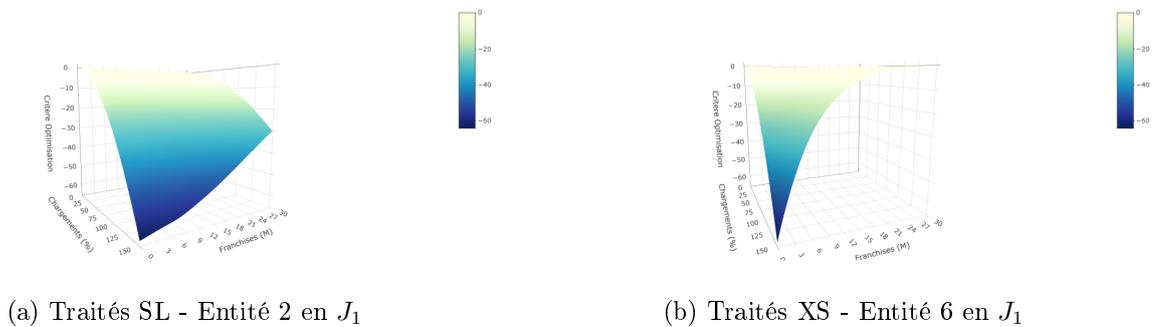


Figure 3.8: Valeur de critère d'optimisation

Trois points sont cependant à notifier :

- Si l'aversion au risque est renforcée pour les deux joueurs (par exemple au niveau de celui des assureurs de taille plus modeste) alors des traités non-proportionnels d'excédent de sinistres optimaux peuvent être formés, dans toutes les assignations de rôle.
- Lorsque le premier calibrage de l'aversion au risque est maintenu : l'optimal de la coopération interne entre assureurs de grande taille s'appuie sur des échanges à des taux de chargement très faibles.
- Si des échanges entre assureurs de grande taille ont lieu, les gains d'utilité sont au mieux minimales, au pire nuls.

L'illustration de ces trois points est faite dans le tableau 3.18.

Entités 2 et 6 - Fonctions CARA		
Traités XS	Entité 2 en J_1	Entité 6 en J_1
(d^*, κ^*)	(23,7 , 0%)	(5,2 , 5%)
Critère Optimisation	1 e-05	0,020
Gain Utilité J_1	0,0007	0,0969
Gain Utilité J_2	0,0175	0,2147

Table 3.18: Traités optimaux, entités 2 et 6

La gestion de ces contrats optimaux nécessite l'identité du joueur 1. Or, la cession de résultat directe d'un assureur à un autre, de taille similaire et compétiteur sur les mêmes marchés, est une situation discutable. La bonne étude de ce type de jeu et de l'optimalité dans cette configuration nécessiterait au moins la prise en compte de la possibilité de réciprocité dans les traités. Cela pourrait constituer un axe futur de développement ; cependant, les gains d'utilité minimales ou nuls et l'absence total de ce type de lien au sein du groupe étudié ont justifié la mise à l'écart de ce type de jeu.

Les solutions de marchandage sont donc atteintes **uniquement dans le cas des jeux aux rôles assignés** (présentées dans les tableaux 3.16 et 3.17). Une question reste cependant en suspens : quelle devrait-être la répartition des gains atteints ? Ce point optimal est atteint d'un commun accord, une transaction supplémentaire pourrait être nécessaire pour assurer une position équitable à chacun des acteurs de l'accord.

3.2.3 Partage des gains

La distinction majeure avec le jeu évoqué dans la partie précédente est que cette fois, chaque joueur a une vision différente des gains. En théorie des jeux, ce type de jeu coopératif est dit à « utilité non-transférable ». Les valeurs d'utilité gagnées lors de la création de ce traité optimal ne peuvent pas être échangées par les joueurs. L'expression la plus imagée de cette situation est de se représenter chaque joueur comme valorisant les gains dans une monnaie différente, le résultat obtenu diffère pour chacun et aucun accord ne peut être fixé.

Le jeu peut être exprimé en gain d'utilité ; en reprenant la situation du tableau 3.16, le tableau suivant est obtenu.

	Traité Optimal	Entite 3	Entite 5	Entite 3 et 5
Gains d'Utilité	XS	0	0	5,35
	Stop Loss	0	0	5,87

Lemaire (1977) évoque la possibilité d'utiliser la théorème de Borch pour résoudre la problématique des utilités non-transférables. Ce théorème permet de déterminer des « coefficients de passage » entre les utilités, (i.e. de fixer les taux de change entre la monnaie de chaque joueur). Cependant, une autre solution a été retenue dans ce mémoire. Peleg and Sudhölter (2007) évoquent le cas particulier des jeux coopératifs aux utilités non-transférables mais dans lesquels une monnaie existe pour laquelle les deux joueurs s'accordent sur sa valeur. Supposons dans le cadre modélisé ici que l'euro est une monnaie perçue de la même manière par tous les joueurs.

Peleg and Sudhölter (2007, p.211) font état d'un théorème permettant le passage du core d'un jeu se trouvant dans le cas évoqué précédemment, et le core d'un jeu coopératif à utilité transférable. Pour mettre cette translation en place, les fonctions d'utilité considérées doivent être continues et strictement monotones. Ces propriétés sont bien vérifiées pour les r choisis de nos fonctions CRRA, alors d'après le théorème de la bijection ces fonctions sont inversibles. Les niveaux d'utilité gagnés par chacun des joueurs peuvent être convertis en euro (valeur de la fonction inverse de la fonction d'utilité au point de la différence des utilités). Dès lors, le jeu obtenu retrouve une forme de jeux à utilité transférable.

Le jeu converti en EUR (Millions) prend alors la forme du tableau suivant.

	Traité Optimal	Entite 3	Entite 5	Entite 3 et 5
Gains (EUR M)	XS	0	0	1,53 (dont 1,34 pour J_1)
	Stop Loss	0	0	2,01 (dont 1,77 pour J_1)

À partir de ce format de jeu, toutes les méthodes pour déterminer des solutions « équitables » à un jeu peuvent être appliquées. De toutes les méthodes définies, tant que la restriction de l'étude à 2 joueurs est maintenue, seule la valeur de Shapley peut être appliquée. Le tableau de solution 3.19 est obtenu.

Méthode	Gains J_1 (EUR M)	Gains J_2 (EUR M)
Valeur de Shapley - XS	0,767	0,767
Valeur de Shapley - Stop Loss	1,004	1,004

Table 3.19: Jeu à 2 assureurs - Répartition des gains

Le J_1 a donc reçu une part plus importante des gains de la coalition, le J_2 serait en droit de demander une certaine part des bénéfices engendrés par la création du traité de réassurance. Le gain de J_1 correspond finalement au gain de capital « ressenti » lors du versement de la prime de réassurance. Dans le cas du traité stop loss par exemple, J_2 pourrait demander $(1,004 - 0,230) = 0,774$ EUR M supplémentaire et 0,57 EUR M pour le traité XS.

Le versement d'une partie des bénéfices réalisés par un réassureur envers un assureur est une pratique existante sur le marché de la réassurance. D'autant plus que dans ce jeu, les traités optimaux atteints ont des taux de chargement importants au vu du principe de prime de l'écart-type choisi. Ainsi,

l'équilibre est trouvé entre les deux joueurs en considérant des traités aux coûts importants, mais dont une partie des bénéfices est reversées ensuite.

3.2.4 « Vision binomiale de groupe »

Les résultats obtenus pour les deux entités 3 et 5 peuvent être généralisés par l'étude de toutes les combinaisons de binômes possibles au sein du groupe. Nous avons vu que dans ce jeu, les binômes d'assureurs du même « sous-groupe » ne peuvent aboutir à des coopérations pérennes (soit par manque de gain d'utilité probants, soit par manque d'aversion au risque). Seuls les 9 binômes inter-« sous-groupe » sont donc à étudier. Du fait que les 3 assureurs de grande taille ont un niveau de fonds propres permettant d'envisager tous les types de traités de ce jeu envers chacun des 3 autres joueurs, une observation transparait : pour chaque J_2 , les traités optimaux sont les mêmes peu importe le J_1 . La seule distinction entre les binômes avec J_2 fixé est le niveau d'utilité du J_1 formant la coopération (tableau 3.20).

Entités 4 en J_2 - Fonctions CRRA		
Pour tout J_1	XS	Stop Loss
(d^*, κ^*)	(3,4 , 50%)	(7, 65%)
Niveau Utilité J_2	3,29	3,60
Entité 2 en J_1		
Critère Optimisation	1,51	1,81
Niveau Utilité J_1	28,26	28,31
Entité 3 en J_1		
Critère Optimisation	1,36	1,64
Niveau Utilité J_1	34,79	34,83
Entité 6 en J_1		
Critère Optimisation	1,29	1,56
Niveau Utilité J_1	39,47	39,51

Table 3.20: Traités optimaux, Entités 4 en J_2

La création d'un programme interne au groupe nécessite un critère permettant de choisir quels sont les binômes qui doivent être formés au sein de celui-ci. Si la maximisation des gains d'utilité était choisie, tous les traités seraient mis en place avec l'entité 2 comme réassureur. Cependant, cela suppose que cette entité ait un niveau de fonds propres suffisant pour porter trois traités distincts mais surtout les niveaux d'utilités atteints dépendent de l'ordre dans lequel ces contrats sont signés (le premier bouge le niveau de capital de l'entité 3, le calcul d'optimalité du second traité devrait être fait à partir de ces nouveaux niveaux). Supposer un seul traité par assureur de grande taille ne paraît pas aberrant, mais, dans les faits, des liens plus ou moins forts existent entre ces entités. Le « monde réel » et la prise en compte des coopérations passées et existantes impliquent déjà un fonctionnement selon certains binômes entre les assureurs. La solution de marchandage de cette vision binomiale du groupe d'assureurs mutualistes prend le forme du tableau 3.21.

Cette solution de marchandage, après un partage des gains selon la valeur de Shapley, permet d'atteindre les gains du tableau 3.22 pour ce groupe d'assureurs mutualistes.

¹Versée par J_1 à J_2

Type de traité	Entités 3 et 5		Entités 6 et 4		Entités 2 et 1	
	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss
(d^*, κ^*)	(4,2 , 95%)	(25 , 150%)	(3,4 , 50%)	(7 , 65%)	(10 , 105%)	(28 , 150%)
Critère Optimisation	6,31	7,98	1,29	1,56	4,18	5,05
Niveau Utilité J_1	36,13	36,51	39,47	39,51	29,45	29,57
Niveau Utilité J_2	3,60	3,74	3,29	3,60	2,55	2,85

Table 3.21: Traités optimaux, vision binomiale du groupe

Type de traité	Entités 3 et 5		Entités 6 et 4		Entités 2 et 1	
	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss	XS	Stop Loss
Gains J_1 avant répartition (EUR M)	1,34	1,77	0,16	0,18	1,22	1,36
Gains J_1 (EUR M)	0,77	1,004	0,14	0,19	0,63	0,71
Gains J_2 (EUR M)	0,77	1,004	0,14	0,19	0,63	0,71
« Sur-Prime » (EUR M) ¹	0,57	0,77	0,02	-0,01	0,59	0,65

Table 3.22: Répartition des gains, vision binomiale du groupe

La mécanique du versement de J_1 envers J_2 doit elle aussi être généralisée car dans certains cas, le gain du second joueur est plus important que celui du premier : une prime supplémentaire devrait être payée. Ce montant échangé entre J_1 et J_2 est ainsi nommé « sur-prime » dans ce tableau.

Un dernier point transparait bien dans le tableau 3.22 : l'efficacité des traités stop-loss dans les échanges modélisés. Ce type de contrat permet des gains plus importants pour tous les joueurs, dans tous les cas.

Solution

La solution de ce jeu à deux assureurs serait donc d'instaurer une « sur-prime », garante d'offrir une situation « équitable » et « souhaitable » à tous les joueurs.

3.3 Jeu à un assureur et un réassureur

Le manque de crédibilité de l'absence totale d'interaction entre un groupe d'assureurs et le marché de la réassurance a déjà été soulignée plus tôt dans cette étude. Alors, maintenant qu'un jeu permet de modéliser un équilibre de réassurance interne, nous pourrions essayer d'aller plus loin et de rendre possible l'existence de telles interactions, c'est-à-dire ajouter des solutions de transferts de risque vers un marché de réassurance externe. Nous nous intéressons donc dorénavant à **la relation assureur - réassureur**, le réassureur étant un agent du marché et l'assureur une des entités du groupe.

Dans la recherche d'une solution de réassurance entre ces deux acteurs, une bonne partie du cadre introduit précédemment peut être réutilisé. Cependant, une distinction fondamentale, impliquant de nombreux changements, doit être considérée : la vision du réassureur. Dès l'introduction, l'existence du marché de la réassurance était énoncée, les interactions et la concurrence entre ses acteurs ne sont pas prises en compte ici. Pourtant, ces éléments sont essentiels, d'autant plus que pour chaque traité, de nombreux acteurs de ce marché sont mobilisés : chacun accepte une part du traité, des cessions à 100% vers un unique réassureur relèvent d'accords réalisés en dehors de ce marché. Ainsi, au sein de celui-ci, tous les réassureurs n'occupent pas la même position : certains sont dits « leaders » (i.e. réalisent des tarifications, proposent et négocient le prix des traités puis acceptent des positions d'apériteurs) et les « suiveurs » (i.e. acceptent de souscrire des parts de traité, selon clauses et prix négociés par

l'apériteur). Ce fonctionnement renforce le caractère oligopolistique de ce marché, un petit nombre d'acteurs concentrent le pouvoir décisionnel de l'offre alors que de nombreux acheteurs se présentent.

Le jeu choisi, ne considérant qu'un seul réassureur, ne peut représenter ces distinctions. Cependant le réassureur modélisé sera entendu comme une « représentation » d'une entité « marché de la réassurance », ses caractéristiques et objectifs souhaitables sont celles de l'offre de ce marché.

Ces considérations mettent à mal la vision coopérative mise en place dans le jeu précédent, une coopération entre un assureur et le marché semble peu crédible. Le lien de confiance et le « partage de sort » sont certes deux éléments centraux de la relation assureur / réassureur ; cependant, une opposition fondamentale régit ce commerce : la marge, la différence entre prime commerciale et prime pure de la charge cédée. Un jeu non-coopératif doit donc être construit.

3.3.1 Formulation du jeu

Comme mentionné précédemment, le cadre de jeu et les notations définies sur les deux premiers points de la section 3.2.1 peuvent être utilisés ici aussi. Ainsi, nous considérons un ensemble de deux joueurs $E = \{1, 2\}$, J_1 est le réassureur et J_2 l'assureur.

Chaque entité du groupe possède les mêmes niveaux de primes et de capital de départ.

Les charges de chaque assureur demeurent des variables aléatoires dont les états (i.e. leurs valeurs possibles) sont définis par les simulations des modèles collectifs réalisées au chapitre précédent.

Les traités considérés sont définis selon les mêmes paramètres.

Les préférences des entités sont exprimées par les mêmes fonctions d'utilité.

Primes, charges et surplus conservent les mêmes notations et définitions pour chaque joueur. Le jeu est conservé dans une forme **statique**, construit sur deux valeurs temporelles $t = 0, 1$, et **stochastique**, les surplus étant des variables aléatoires dont les moments sont calculés par application de la méthode de Monte-Carlo.

La vision non-coopérative implique cependant un changement nécessaire dans le critère d'optimisation : chaque joueur défend son intérêt propre. Conservant un cadre similaire, l'objectif de chacun sera de **maximiser son utilité** (i.e. maximiser l'utilité espérée de son surplus). L'objectif de J_i s'exprime donc par la formule des lignes suivantes.

$$\begin{aligned} (d^*, \kappa^*) &= \arg \max_{\kappa \in K, d \in D} U_i(1) \\ &= \arg \max_{\kappa \in K, d \in D} \mathbb{E}[u_i(P_i(1) - X_i(1))] \\ &= \arg \max_{\kappa \in K, d \in D} \int u_i(P_i(1) - X_i(1)) dF_1(X_1(0)) dF_2(X_2(0)). \end{aligned}$$

Le capital initial du réassureur est supposé nul, l'objectif des J_i correspond à l'équation (3.21).

$$(d^*, \kappa^*) = \begin{cases} \arg \max_{\kappa \in K, d \in D} \mathbb{E} \left[u_1 \left((P_1(0) - X_1(0)) + (P^{re} - X_2^{re}) \right) \right] & \text{si } J_1. \\ \arg \max_{\kappa \in K, d \in D} \mathbb{E} \left[u_2 \left((\omega_i + P_2(0) - X_2(0)) + (X_2^{re} - P^{re}) \right) \right] & \text{si } J_2. \end{cases} \quad (3.21)$$

Chaque joueur a donc un objectif qui lui est propre. Dans cette vision simplifiée de la relation, le point d'opposition entre assureur et réassureur est unique : le coût de la réassurance. Au travers de leurs fonctions d'utilité, chacun des joueurs a une vision du transfert de risque et de cette opposition qui lui est propre.

Dans le jeu étudié ici, le coût de la réassurance est entièrement exprimé dans son format le plus simple : la marge entre prime pure et prime commerciale, c'est-à-dire le produit des chargements par l'écart type de la charge cédée.

Cette observation peut s'exprimer au travers d'un cas particulier, **supposons que les fonctions d'utilité des joueurs sont linéaires** (i.e. $u(x) = x$), ce qui correspond au cas où les deux joueurs sont indifférents à la prise de risque.

En suivant cette hypothèse, du fait que les paramètres d'optimisation ne jouent aucun rôle sur les surplus des joueurs au temps 0 et que la prime de réassurance est une constante obtenue selon un certain principe (principe de l'écart-type ici), les objectifs de chacun des joueurs se simplifient selon l'équation (3.22).

$$(d_{\vee}^*, \kappa_{\vee}^*) = \begin{cases} \arg \max_{\kappa \in K, d \in D} (P^{re} - \mathbb{E}[X_2^{re}]) & \text{si } J_1 \\ \arg \max_{\kappa \in K, d \in D} (\mathbb{E}[X_2^{re}] - P^{re}) & \text{si } J_2 \end{cases} = \begin{cases} \arg \max_{\kappa \in K, d \in D} (\kappa \times \sigma(X_2^{re})) & \text{si } J_1. \\ \arg \min_{\kappa \in K, d \in D} (\kappa \times \sigma(X_2^{re})) & \text{si } J_2. \end{cases} \quad (3.22)$$

L'hypothèse des utilités linéaires permet donc de se ramener au cas des jeux non-coopératifs les plus « classiques » : un **jeu à somme nulle**. L'un des deux joueurs souhaite maximiser une fonction bornée (appelée fonction de gain ou fonction de paiement du jeu) et l'autre souhaite la minimiser. Le jeu peut ainsi être formulé par :

- $E = \{1, 2\}$, l'ensemble des joueurs.
- $A_i = K \times D$, pour $i \in 1, 2$, les ensembles d'actions des joueurs sont confondus avec l'ensemble des traités possibles.
- La fonction de gain est définie sur les actions des joueurs, soient κ_i le niveau de chargement choisi par J_i et d_i la franchise choisie par J_i . Alors la fonction de gain du jeu prend les valeurs¹.

$$g(\kappa_1, \kappa_2, d_1, d_2) = \begin{cases} \kappa_1 \times \sigma(X_2^{re}(d_1)) & \text{si } \kappa_1 = \kappa_2 \text{ \& } d_1 = d_2, \text{ les joueurs ont trouvé un accord.} \\ \emptyset & \text{sinon, les joueurs n'ont pas trouvé d'accord.} \end{cases}$$

Trois points importants transparaissent :

- Au vu de la nécessité de l'accord des deux parties, les variations d'un seul couple (κ, d) suffisent à présenter l'ensemble des situations atteignables par ce jeu.
- Dans une perspective où toutes les situations serait acceptable pour un joueur : aucun équilibre ne serait trouvé. En effet, si le réassureur accepte tout alors l'assureur aurait toujours intérêt à obtenir un niveau de chargement plus bas, ou une franchise plus haute pour minimiser les gains espérés du réassureur. De même dans la situation inverse, si l'assureur acceptait toutes les situations, le réassureur aurait des gains plus important avec un niveau de chargement plus important ou une franchise plus basse. Aucune position ne peut donc inciter les deux joueurs à ne pas souhaiter dévier de celle-ci.
- A l'inverse, dans une perspective où un joueur admet un seul accord possible, ce point est forcément l'équilibre puisque les deux joueurs préfèrent réaliser des gains minimales plutôt que rien du tout.

¹Le terme $X_2^{re}(d)$ est équivalent à X_2^{re} , cette notation a uniquement pour but de souligner le rôle de la franchise dans la fonction de gain.

Un jeu autant simplifié n'apporte ainsi aucun élément de réponse sur l'existence d'un traité souhaitable pour les deux joueurs mais permet tout de même de mettre en avant l'enjeu principal de ce jeu : trouver les limites de chacun des joueurs, c'est-à-dire **déterminer les contrats acceptables** pour l'assureur et pour le réassureur : les choix qui calibrent ces possibilités sont finalement à l'origine des solutions.

La première caractéristique choisie est la modélisation de l'appréciation du risque par les joueurs. Une **fonction d'utilité CRRA** est maintenue pour le comportement de l'assureur, comme en 3.2.1, et une **fonction d'utilité linéaire** sera utilisé pour le réassureur. Ce choix s'inscrit dans la volonté d'avoir un acteur représentatif du « marché de la réassurance » : une entité qui subit la concurrence d'autres non représentées dans ce jeu et vers laquelle les assureurs se tournent pour trouver un appétit au risque plus important que le leur.

La seconde caractéristique est le maintien de la **contrainte réglementaire**, régie par l'équation 3.19 jouant un rôle de recherche de stabilité et d'incitation à la réassurance pour les assureurs. Chaque assureur sera donc soumis à trois effets :

- Le prix de la réassurance : la prime de grave dont dispose chaque assureur n'est pas infinie et doit compenser les pertes graves conservées ainsi que la prime de réassurance.
- La perception du prix : les fonctions d'utilité incitent à des utilisations différentes de cette prime de grave selon le niveau d'aversion au risque d'un assureur.
- Le besoin de réassurance : modélisé par la contrainte réglementaire qui pénalise les expositions à des niveaux de pertes trop importantes pour le portefeuille.

Afin de permettre la comparaison entre les assureurs et de simplifier la lecture, la maximisation des gains d'utilité sera considérée au lieu de la maximisation des utilités nominales. Les objectifs des joueurs se formalisent donc selon (3.23).

$$(d^*, \kappa^*) = \begin{cases} \arg \max_{\kappa \in K, d \in D} (\kappa \times \sigma(X_2^{re})) & \text{si } J_1. \\ \arg \max_{\kappa \in K, d \in D} (U_2^{CR}(1) - U_2^{CR}(0)) & \text{si } J_2. \end{cases} \quad (3.23)$$

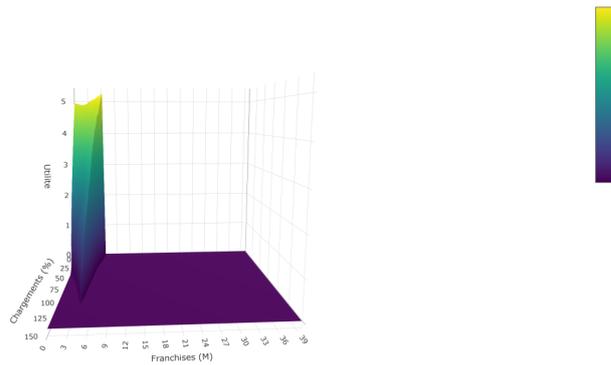
3.3.2 Solutions

L'entité 5 est choisie arbitrairement, la même étude étant menée sur chacune des 6 entités comparées précédemment.

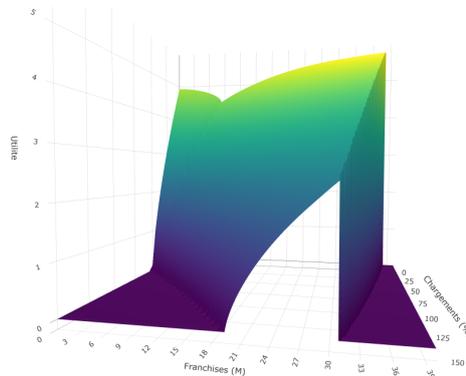
Des représentation des gains d'utilité atteignables, en fonction des deux paramètres choisis, sont présentés dans la figure 3.9.

L'effet de la contrainte réglementaire est bien visible : les gains sont nuls dès lors que le niveau de rétention est trop important. Cette chute se décale en fonction du niveau de chargement : en effet, plus le prix est important, plus la perte de l'assureur conserve des quantiles élevés. Ainsi, la plus haute des franchises permettant des gains d'utilité diminue quand les chargements augmentent.

L'aversion au risque encourage la cession : la limite basse des franchises correspond au montant où charge conservée et prime de réassurance consomment entièrement la prime des graves. L'assureur préfère ainsi céder l'entièreté de cette partie de la prime perçue afin d'obtenir un surplus de portefeuille moindre mais bien plus stable. Évidemment, plus les chargements augmentent, plus les primes sont conséquentes et la plus basse des franchises permettant des gains d'utilité augmente.



(a) Traités XS



(b) Traités Stop-Loss

Figure 3.9: Entité 5 en J_2 - Gain d'utilité - Fonction CRRA

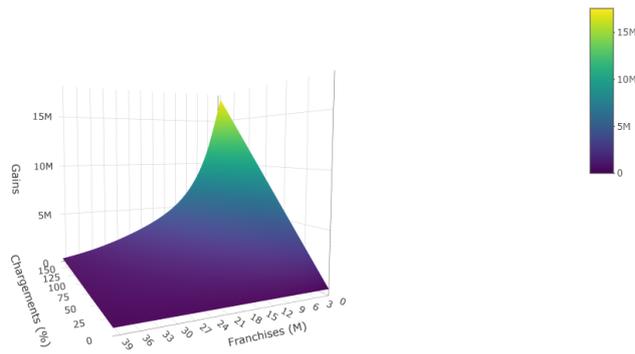
Pour tout niveau de chargement, les gains d'utilité maximum sont atteints sur la tranche de franchise qui précède l'entrée de la contrainte réglementaire. Ainsi, l'assureur ayant pour objectif de maximiser son utilité poursuit la volonté de céder sur les franchises les plus hautes qui lui sont permises.

Les effets du besoin et du prix de la réassurance se combinent et forment les représentations de la figure 3.9. Ces effets ont des rôles bien différents selon le type de traité : la contrainte réglementaire s'active pour des niveaux de franchise bien plus bas sur les traités XS que sur les traités Stop Loss. La charge conservée augmente plus rapidement lorsque la franchise augmente dans le cas des traités XS et donc les quantiles de la loi des pertes agrégées sont diminués bien plus fortement par un traité de type stop loss. Une observation sensée puisque ces derniers s'appliquent directement sur la charge agrégée.

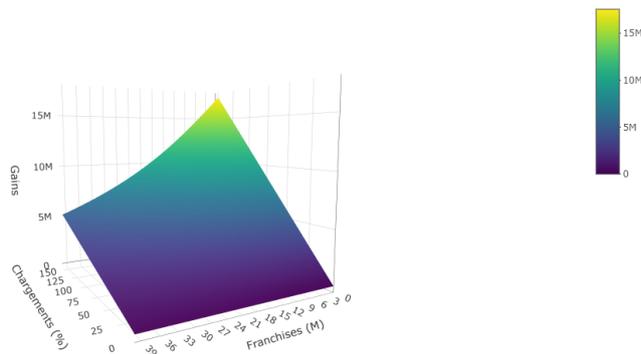
Dans les deux cas, des gains sont constatés : l'intérêt à trouver un accord entre les deux joueurs existe bien puisque le réassureur s'assure des gains dès lors qu'un contrat est signé.

Dans un format similaire aux figures précédentes, les gains du réassureur en fonction des contrats sont présentés dans la figure 3.10.

Dans ce cas de figure, un ensemble de solutions (i.e. un ensemble de contrats acceptables pour les deux joueurs) est identifié. Ainsi, pour chacune des entités, cet ensemble se formalise comme le produit cartésien de deux segments appartenant respectivement à K et D . Cependant, comme nous l'avons mentionné précédemment, les objectifs des deux joueurs ne sont pas semblables ; alors, comment



(a) Traités XS



(b) Traités Stop-Loss

Figure 3.10: Entité 5 en J_2 - Gain de J_1 : réassureur - Fonction Linéaire

trouver un point d'équilibre dans cette relation compétitive nécessitant l'existence d'un accord ?

La solution proposée est celle présentée par Chan and Gerber (1985), reprise dans Cheung et al. (2019) et développée dans une direction plus « mathématique » par Deprez and Gerber (1985) : **l'équilibre de Stackelberg**.

L'équilibre de Stackelberg est utilisé dans les situations où les joueurs ne jouent pas en même temps : certains jouent en premier (nommés « *leaders* ») et d'autres (nommés « *followers* ») adaptent leurs stratégies en fonction de l'état du jeu après ces premières décisions. Ce type d'équilibre n'est donc applicable qu'à des jeux au déroulement ordonné, des jeux qui ne sont donc pas de forme statique.

Chan and Gerber (1985) présentent un jeu où le réassureur joue en premier puis ensuite l'assureur adapte sa stratégie. La justification de cette position de force conférée aux réassureurs s'appuie principalement sur le nombre réduit d'acteurs approvisionnant l'offre du marché de la réassurance. Cette prise de position est discutable, cependant la situation actuelle se prête à ce type de jeu : le marché étant de plus en plus tendu, les réassureurs ont de plus en plus la main sur les tarifs et les apériteurs profitent du statut oligopolistique de ce marché.

Ainsi, dans ce jeu, le réassureur jouera en premier en fixant le prix de la réassurance (i.e. le taux de chargement) et l'assureur jouera ensuite en fixant le niveau de franchise. Au vu des fonctions objectifs

choisies, le réassureur choisira le taux de chargement qui maximise son gain et l'assureur choisira la valeur qui maximise son utilité.

L'hypothèse d'information complète étant maintenue, le réassureur a connaissance de l'objectif de l'assureur mais également des gains d'utilité qu'il pourrait atteindre.

Dans les simulations, un niveau de franchise qui maximise l'utilité du joueur 2 existe pour chaque niveau de chargement fixé. Par conséquent, le joueur 1 choisit parmi cet ensemble de contrats celui qui lui offre le gain le plus important. Ce contrat choisi correspond à l'équilibre de Stackelberg de ce jeu.

L'équilibre de Stackelberg est construit dans la continuité de l'équilibre de Nash. En reprenant les notations de la section 3.1.1, E étant un jeu à n -joueurs et v_i la fonction caractéristique d'un joueur i . Un vecteur de stratégies $a^* := (a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$ est un équilibre de Nash si pour tout $i \in E$, (3.24) est vérifiée.

$$\arg \max_{a_i \in A_i} v_i(a_i, a^* \setminus a_i). \quad (3.24)$$

Comme énoncé précédemment, cet équilibre correspond à un point où aucun joueur n'a d'intérêt à dévier. Dans la continuité, un vecteur de stratégies $a^* := (a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$ est un équilibre de Stackelberg pour un jeu comprenant un seul leader (le joueur 1) si a_1^* est la solution de (3.25).

$$\sup_{a_1 \in A_1} v_1(a_1, a_{-1}^*(a_1)). \quad (3.25)$$

et $a_{-1}^*(a_1)$ est un équilibre de Nash pour un sous-jeu **statique** de $n - 1$ joueurs supposant l'action a_1 déjà réalisée.

Dans notre cas, la présence d'uniquement deux joueurs simplifie les écritures précédentes, le sous-jeu sur lequel un équilibre de Nash doit être construit ne contenant finalement que le joueur numéro deux.

La stratégie d'un joueur désigne le choix d'un traité et donc un couple de valeurs (κ, d) , les fonctions caractéristiques des joueurs prennent la forme de l'équation (3.26).

$$v_i(a_1, a_2) = \begin{cases} \kappa \times \sigma(X_2^{re}(d)) & \text{si } i = 1 \text{ et } a_1 = a_2. \\ U_2^{CR}(1) - U_2^{CR}(0) & \text{si } i = 2 \text{ et } a_1 = a_2. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.26)$$

Dans le postulat formulé par l'équilibre de Stackelberg, le réassureur devient décisionnaire du niveau de chargement et l'assureur du niveau de franchise. La définition des stratégies est ainsi modifiée, chaque joueur définissant un seul paramètre. La solution de l'équilibre de Stackelberg se simplifie alors jusqu'à retrouver la forme de contrat décrit précédemment. En effet,

$$\begin{aligned} \kappa^* &= \sup_{a_1 \in A_1} v_1(a_1, \arg \max_{a_2 \in A_2} v_2(a_1, a_2)) \\ &= \sup_{\kappa \in K} v_1(\kappa, \arg \max_{d \in D} [U_2^{CR}(1) - U_2^{CR}(0) | \kappa]) \\ &= \sup_{\kappa \in K} \kappa \times \sigma(X_2^{re}(d)), \quad d = \arg \max_{d \in D} [U_2^{CR}(1) - U_2^{CR}(0) | \kappa]. \end{aligned}$$

Les résultats obtenus, pour les six entités du groupe, sont renseignés dans le tableau 3.23.

À partir de ces traités, trois observations principales peuvent être faites :

Type de traité	Entité 1		Entité 2		Entité 3		Entité 4		Entité 5		Entité 6	
	XS	SL	XS	SL	XS	SL	XS	SL	XS	SL	XS	SL
Franchise (M)	8,2	38	4,2	42	0	0	3,2	6,6	4	30	0	0
Chargement (%)	150%	150%	5%	5%	5%	5%	55%	75%	105%	150%	5%	5%
Gain d'utilité (J_2)	1,27	3,88	0,22	0,19	-0,09	-0,09	2,50	2,74	2,99	4,27	-0,10	-0,10
Gain du réassureur (M) (J_1)	9,51	3,93	1,08	1,13	0,71	0,71	1,83	2,12	7,90	7,25	1,04	1,04

Table 3.23: Traités Choisis - Équilibre de Stackelberg

- Deux entités ne trouvent pas d'accord avec le réassureur, la « meilleure » solution débouchant tout de même sur un gain d'utilité négatif. Dans les faits, pour les trois entités de grande taille, des taux de chargement extrêmement bas sont nécessaires pour qu'un contrat puisse être créé. Cette situation paraît peut crédible, voire impossible en réalité. Cette observation peut s'interpréter de trois manières différentes (ou par un mélange des trois) :
 - Les contrats étudiés ne sont pas adaptés pour des assureurs de cette envergure. En effet, les contrats construits supposent des cessions complètes de risque à partir d'une franchise. Mais en réalité, des acteurs économiques de taille importante peuvent rechercher des couvertures uniquement sur un ou deux sinistres qui suffisent à diminuer la volatilité des pertes.
 - Le calibrage de l'aversion au risque de ces entités peut être remis en question. Un paramètre r plus important pourrait permettre des échanges bénéfiques et crédibles.
 - La négociation entre assureur et réassureur est une tâche des plus ardues dont la modélisation simplifiée par l'équilibre de Stackelberg n'est pas vérifiée pour ces agents.
- Des chargements à 150% sont acceptés par certaines entités, ce seuil ayant été choisi comme seuil maximal de niveaux de chargement envisageables. Selon les simulations réalisées, ces joueurs pourraient potentiellement accepter des niveaux encore plus élevés ; le graphique 3.10 met en avant ce phénomène. Cependant, dépasser ce seuil paraissait aberrant au vu du principe de prime choisi.
- Le taux de chargement choisi est toujours le plus élevé possible, le taux le plus haut pour lequel un gain d'utilité subsiste encore. L'explication de ce phénomène est intrinsèquement liée aux contrats choisis par l'assureur lorsqu'un niveau de chargement fixé peut être étudié plus en détails.

La figure 3.11 représente les contrats apportant un gain d'utilité maximal à l'entité 5 pour chaque niveau de chargement.

Un phénomène transparait : à partir d'un certain coût de réassurance le maximum de gain d'utilité fait un saut brusque, passant d'un des franchises les plus basses envisagées à la franchise maximale permise par la contrainte réglementaire. La diminution de ce maximum est aussi due à la contrainte réglementaire : une prime de réassurance devenant de plus en plus chère implique une exposition aux pertes plus importante.

Ainsi, dès que ce saut est effectué, l'optimum du réassureur se trouve forcément au point de chargement le plus élevé possible. Trois nouvelles observations découlent de celles-ci.

- L'assureur est bloqué dans un cercle des plus coûteux : plus la réassurance est chère, plus celui-ci est obligé de baisser sa rétention pour respecter la contrainte réglementaire.
- Les sauts dans l'appréciation des gains (fonction d'utilité CRRA) sont bien généralisées à tous les assureur de taille modeste. Les assureurs de taille plus importantes n'étant à l'inverse pas concernés, ces joueurs ne valorise que des gains d'utilité minimales sur des taux de chargement très faibles.

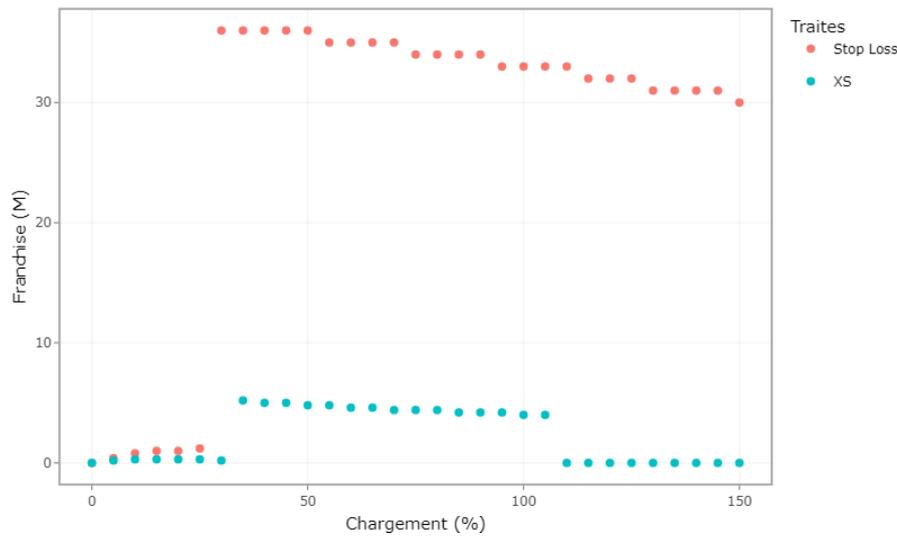


Figure 3.11: Jeu 2 - Franchises choisies par J_2 - Entité 5 - Fonction CRRA

- Ce phénomène de seuil dans l'appréciation du coût de la réassurance est très lié au niveau d'aversion du joueur (paramètre r). La figure 3.12 montre bien cette relation et notamment la genèse du phénomène, avant que le paramètre r n'atteigne une valeur de 0,48 le joueur ne désire pas souscrire de contrat. Ensuite, lorsque l'aversion au risque augmente : la valeur des chargements au moment du saut est croissante, impliquant que la valeur de la franchise au moment du saut est de plus en plus faible¹. En effet, plus l'assureur est averse au risque, plus ce joueur cherchera à maintenir un niveau de cession important, quitte à supporter des coûts plus importants. Ainsi, un saut tardif (i.e. à un niveau de chargement élevé) avec une valeur de franchise basse exprime l'appétit / le besoin de réassurance du joueur.

Le surplus d'un assureur a aussi un impact sur la répartition de cet appétit de cession. Lorsque le niveau de prime est artificiellement augmenté, le joueur a des moyens supplémentaires et le recours à la réassurance a lieu à partir d'un niveau d'aversion moins important. Cependant, les rétentions sont maintenues à des valeurs plus hautes : l'appétit de cession sur des tranches basses, plus travaillantes, disparaît. Des niveaux de chargement plus importants sont prêts à être supportés pour maintenir cette stratégie de cession. L'ensemble du besoin de l'assureur est donc modifié : un recours plus rapide à une réassurance sur des tranches plus élevées.

Solutions

La mise en comparaison de ce jeu avec le précédent incite à éviter de recourir au marché de la réassurance sur des traités en excédent de perte pour les compagnies de taille modeste. Les utilités atteintes sont toujours plus élevées lors de la coopération, avant même que le partage des gains ait eu lieu. Cette solution n'est cependant pas aussi catégorique pour les traités stop-loss, même le partage des gains ne parvient pas toujours à compenser l'avantage d'utilité valorisé en euros du second jeu.

3.4 Limites des approches

Les limites de ces deux jeux peuvent être classées en deux catégories : les possibles instabilités de résultat et les points de développement envisagés.

¹Cette implication provient du fait que plus la réassurance est chère, plus le niveau d'utilité maximal du joueur se placera sur le niveau de franchise maximal permis par la contrainte.

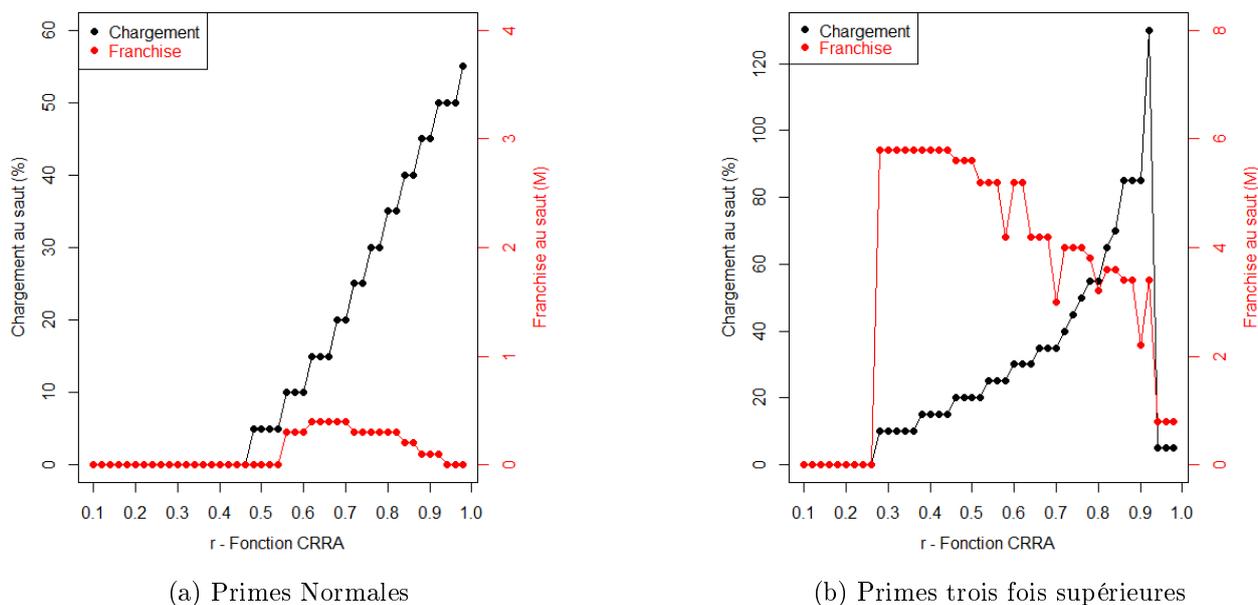


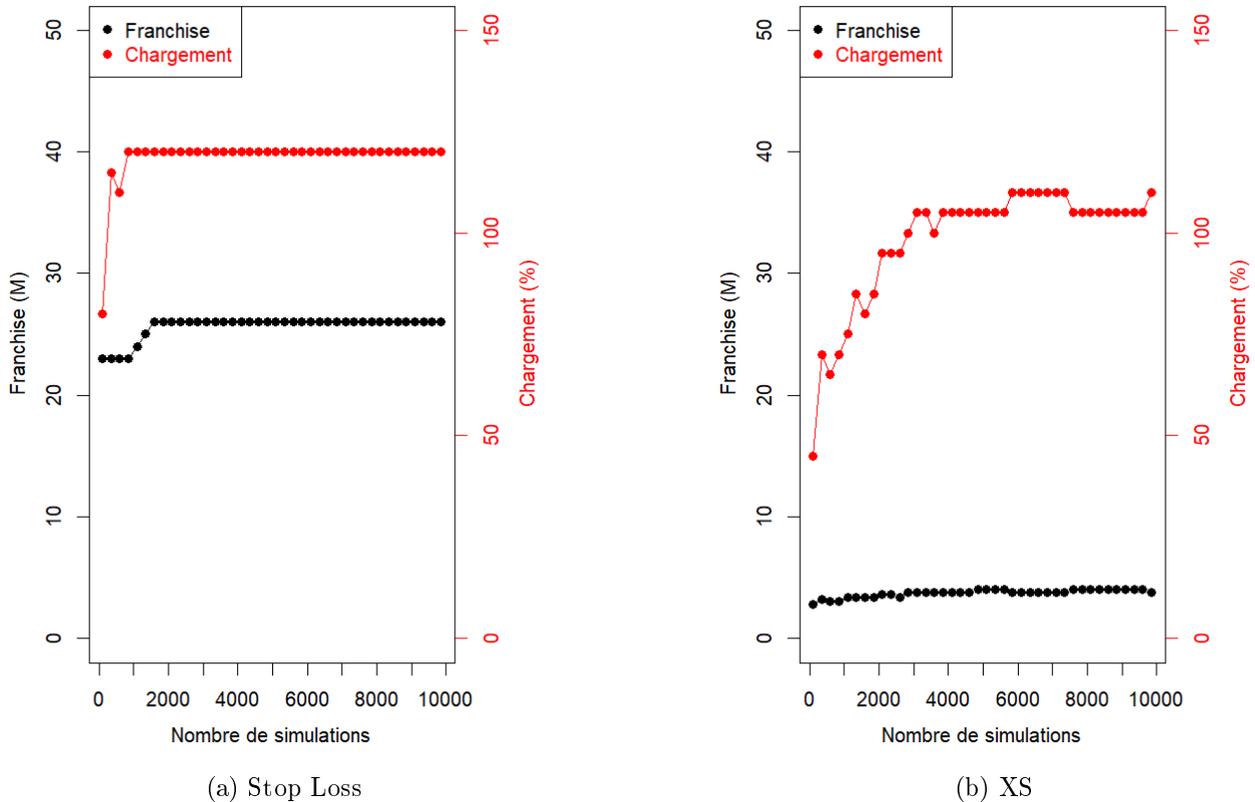
Figure 3.12: Jeu 2 - Traité XS - Suivi des Franchises - Entité 5 - Fonction CRRA

Stabilité : Les jeux construits impliquent chacun un grand nombre d'hypothèses et de paramètres fixés. La remise en cause de ces partis pris impacte souvent très fortement les résultats.

- Le principe de prime. L'importance fondamentale de cette hypothèse était déjà évoquée dans la section 3.1.3 et s'est vue confirmée dans les observations réalisées. La considération du principe de la variance entraîne forcément des montants de chargements beaucoup faibles, la réassurance devenant beaucoup plus rapidement trop coûteuse pour permettre des gains d'utilité à un assureur. La différence entre écart-type et variance étant d'autant plus importante lorsque la charge cédée est plus volatile, les franchises envisagées demeurent à des niveaux élevés. Dans ces conditions, comme attendu, tous les résultats changent.
- Le niveau de quantile choisi pour la contrainte réglementaire. L'intervention de cette contrainte joue un rôle décisif sur l'ensemble des équilibres trouvés sur les deux jeux. Aussi, si le niveau de confiance retenu n'était pas de 99,5% mais de 90%, la contrainte ne sévirait qu'à partir de niveaux d'exposition bien plus importants et tous les résultats observés changeraient.
- Le nombre de simulations du modèle collectif. Des simulations dérivent le caractère stochastique et l'étude des surplus. Ainsi, la convergence des résultats selon leur nombre est un point essentiel pour en assurer la pérennité.

Dans le second jeu, la figure 3.13 présente l'étude de cette convergence pour l'entité 5. La stabilité des résultats est vite atteinte pour les stop loss, celle du traité en excédent de sinistre est plus tardive.

- Le paramètre d'aversion au risque. Les tables de référence utilisées dans la section 3.2.1, offrant l'adéquation entre des caractéristiques comportementales et des valeurs de paramètre d'aversion ne sont cependant pas construite pour être appliquées à des compagnies d'assurance. Dans les faits, établir une correspondance entre l'appétit au risque d'un agent économique et un unique paramètre entre 0 et 1 n'est pas une tâche évidente.

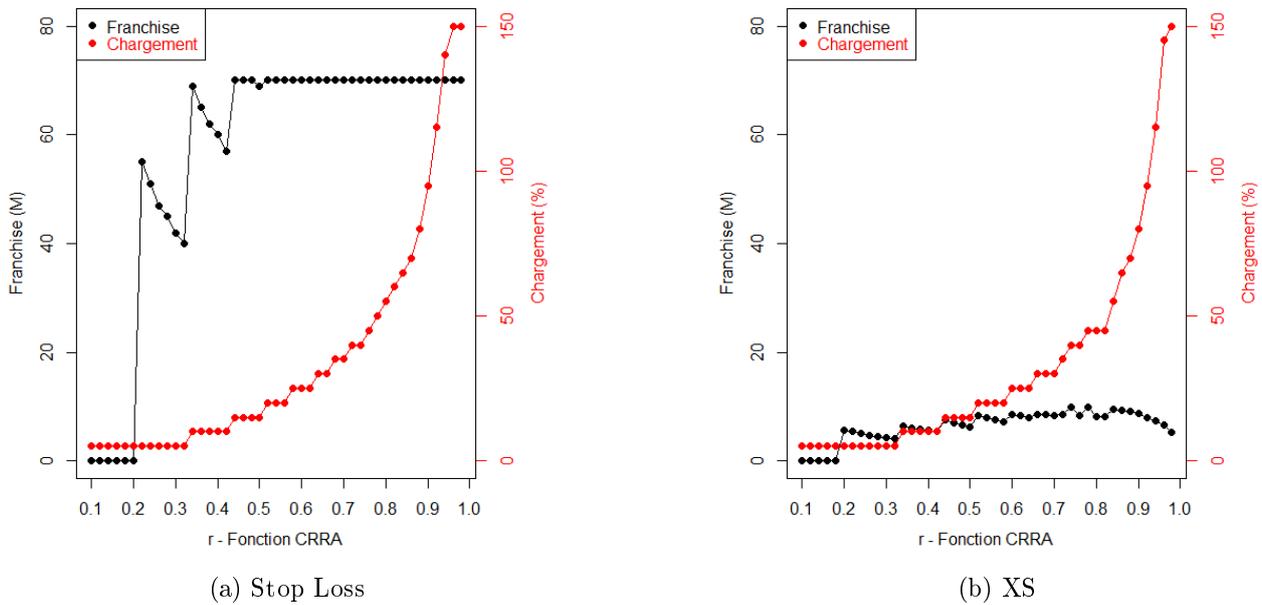
Figure 3.13: Jeu 2 - Entité 5 en J_2 - Fonction CARA

L'impact du mouvement de ce paramètre a été étudié sur le second jeu, la figure 3.14 fait état des résultats obtenus. Un niveau de franchise maximale est vite atteint, la différence est faite sur les chargements qui augmentent jusqu'à atteindre le niveau maximal. La contrainte réglementaire est enclenchée toujours à peu près au même niveau de franchise, la différence est que plus l'assureur est averse au risque, plus des gains d'utilités peuvent aussi avoir lieu à des niveaux de chargement plus élevés : le joueur 2 est prêt à supporter des coûts plus importants. Le réassureur choisit donc des taux de chargement de plus en plus importants.

- Les fonctions d'utilité retenues. Comme nous l'avons précisé, les fonctions d'utilité envisagées exprimaient toutes deux certaines limites qui ne doivent pas être mises de côté dans l'analyse des résultats obtenus. Si les fonctions CARA ont été écartées pour l'instabilité des niveaux d'utilités atteignables, elles laissent au demeurant les situations de ruine des assureurs uniquement sanctionnées par une utilité nulle. La pénalisation de ces situations par des niveaux d'utilité négatifs en place d'un suivi de l'exposition par une contrainte réglementaire pourrait occasionner de nouveaux travaux de développement. Cette piste n'est cependant pas la seule.

Développements : Les jeux étudiés pourraient occasionner de nouveaux développements.

- L'augmentation du nombre de joueurs dans le premier jeu permettrait de détailler de nouvelles problématiques sur le fonctionnement de groupes d'assureurs. La vision "binomiale" décrite dans ce mémoire est celle qui est en place actuellement, mais des constructions de programmes faisant état de compétitions entre les joueurs lors de la création des coalitions pourrait fournir des ententes différentes. Cette piste a été écartée au vu du grand nombre d'hypothèses supplémentaires

Figure 3.14: Jeu 2 - Entité 2 en J_2 - Fonction CARA

qui deviennent nécessaires. Une application sur un plus grand nombre de joueurs implique des contrôles sur chacune des interactions, des contrats réciproques, des ordres de préférence lorsque plusieurs assureurs font la même offre de réassurance ou lorsque le niveau d'exposition contraint à limiter les traités à souscrire.

- La relation assureur / réassureur du second jeu est simplifiée et certaines limites demeurent dans ce modèle de relation ; la liste suivante, non-exhaustive, en fait état.
 - Le maintien de l'information complète alors que l'incomplétude de l'information peut être un enjeu central des négociations. De nombreux éléments sont tout de même partagés entre assureur et réassureur, néanmoins un accès total aux préférences de l'assureur peut paraître démesuré.
 - Les phases multiples de négociations. Classiquement, les traités sont négociés après plusieurs allers-retours entre assureur et réassureur, les informations partagées étant modifiées à chacune de ces phases (nouveaux sinistres ou nouveaux développements, nouvelles garanties, etc.). Cette pratique pourrait donner lieu à des jeux se déroulant sur plusieurs phases.
 - Les négociations se déroulent parfois sur plusieurs branches, certains réassureurs acceptant un pourcentage d'un programme sous condition d'un pourcentage sur une autre branche. Ces traités construits sous condition ne sont pas considérés dans ce mémoire.
- Les contrats ont été simplifiés pour que leur définition repose sur deux paramètres. Le nombre de ces paramètres pourrait être augmenté, notamment pour les traités en excédent de perte pour lesquels les clauses de reconstitution pourraient être ajoutées. Cette option implique des temps de computation plus long et surtout une représentation moins graphique des résultats. Cependant, cela pourrait offrir une vision différente de l'optimal de ces traités, avec des couvertures plus variables.

Un dernier point peut être souligné : l'absence d'algorithme d'optimisation. Dans les faits, ces travaux réalisent une comparaison de grande échelle entre un peu moins d'un millier de traités mais

aucun algorithme ne recherche le traité optimal par itération. Les fonctions objectifs des jeux ne sont pas toujours différentiables, ce qui complexifie l'application de ce type d'algorithmes. Cependant, en supposant le caractère unimodal de la fonction objectif, une optimisation du type de la méthode du nombre d'or a été testé. Ce genre d'algorithme plus empirique est cependant vite mis à mal par le nombre de paramètres : un seul évolue sur les itérations, l'autre doit être fixé sur une certaine grille de valeur. Ce genre de développement permettait de réduire de manière assez significative le temps de computation, sans pour autant enrichir réellement les résultats présentés. Ces pistes d'amélioration ont donc été mises de côté.

Conclusion

Nous souhaitons déterminer si la théorie des jeux permettrait de construire un programme de réassurance RC Auto pour un groupe d'assureurs.

La première étape consistait à appréhender l'ensemble du cadre de cette branche. Pour de nombreuses raisons, celle-ci implique une exposition illimitée qui s'étale sur de longues périodes et se base principalement sur des rentes de dommages corporels aux estimations et gestions délicates.

Ces complexités se reflètent dans la modélisation et suscitent de nombreux retraitements, d'abord pour rendre compte de l'inflation particulière des dommages corporels mais également pour atteindre la forme ultime des paiements effectués. Les difficultés de modélisation ont cependant toutes été résolues, en privilégiant toujours des méthodes simples et robustes. Les réponses proposées ont pris la forme d'un indice de revalorisation spécifique aux dommages corporels, d'une application particulière de l'algorithme de Chain-Ladder et d'une gestion des cadences de paiements extrapolés.

Enfin, des lois de probabilités ont été calibrées sur les données modifiées, permettant ainsi d'étudier des milliers de réalisations de la sinistralité de chacun des assureurs du groupe. Ces modèles collectifs constituent les matériaux fondamentaux pour analyser les pertes potentielles, tarifier les traités de réassurance sur les tranches hautes mais aussi pour amorcer la recherche d'un programme de réassurance optimal.

Le point de vue choisi dans la construction de ce programme était celui d'un groupe d'assureurs. Utilisant des principes de la théorie des jeux, deux cas de figures ont été étudiés : la cession de risque entre deux membres du groupe et la cession entre un membre et un réassureur. Le premier prend la forme d'un jeu coopératif dans lequel l'objectif est de maximiser le produit des gains d'utilité espérée. Le second, quant à lui, est formulé comme un jeu non-coopératif dans lequel le réassureur possède un ascendant qui lui permet de fixer le prix des traités.

L'élaboration de structure de réassurance en interne se conclut sur la nécessité d'adjoindre l'échange d'une « sur »-prime à la souscription d'un traité. Cette « sur »-prime (qui peut être positive ou négative) garantit le maintien d'un cadre équitable et juste pour tous les assureurs. Le principe d'équilibrer les intérêts perçus lors d'un transfert de risque par une transaction monétaire supplémentaire n'est pas novateur, mais son importance est appuyée par nos résultats.

Le second jeu amène à la conclusion que le réassureur, cherchant à maximiser ses gains, choisira toujours le niveau de chargement le plus élevé parmi ceux qui restent admissibles pour l'assureur, occasionnant donc des niveaux de franchise plus élevés. Ce jeu met en exergue l'importance capitale du niveau d'aversion au risque de l'assureur et de sa capacité de souscription, définissant sa résilience face aux prix de la réassurance et son appétit pour des franchises basses. Indéniablement, ces paramètres impactent et définissent le besoin de réassurance d'une entité d'assurance.

La coopération se révèle être toujours profitable lorsque des traités en excédent de sinistres sont considérés. Si les franchises sont plus élevées, les chargements appliqués sont toujours plus bas. Les échanges de « sur »-primes permettent de réaliser des économies pour les cédantes et donc d'atteindre

des gains plus importants pour toutes les entités, mais aussi, bien sûr, pour le groupe puisque les coûts de ces transferts à l'échelle globale sont quasi-nuls.

Cependant, ces résultats ne sont pas aussi catégoriques lorsque des traités en excédent de perte annuelle entrent en jeu. Lorsque le niveau de chargement est déjà maximal, l'absence de coopération offre des franchises plus hautes et des gains d'utilité plus importants. Lorsque la taille de la cession est importante, impliquant des chargements maximaux, la neutralité au risque du « marché » en fait le choix le plus rationnel. Le cadre coopératif n'est compétitif que dans les cas où les échanges entre joueurs sont faits à des taux de chargement et taille de transfert moins élevés. Mais même dans ce cas, l'ajout d'une « sur »-prime négative peut faire pencher la balance et encourager le choix d'un réassureur « marché ».

Plusieurs limites ont été constatées au cours de l'étude, sur l'orientation de la base de données, sur la gestion de l'inflation ou encore sur le critère d'optimisation et l'équilibre compétitif retenu dans les jeux. Au même titre, certaines pistes de développement ont été mises de côté, notamment lors de la mise à l'ultime, de la projection de l'inflation, du calibrage des modèles collectifs puis dans le nombre de joueurs considérés dans les jeux construits.

Ce mémoire ne constitue en aucun cas une étude exhaustive de l'optimisation de structures de réassurance, mais poursuit l'objectif d'offrir une base modeste de réflexions pour de futurs travaux réalisant la connexion entre ce domaine et la théorie des jeux. De nombreux autres critères d'optimisation sont à explorer, d'autres équilibres sont à trouver et de nouveaux jeux pourraient être appliqués. À l'image des jeux différentiels qui ouvrent une fenêtre sur un monde de réassurance continue.

Glossaire

Acronymes

AGIRA : Association pour la Gestion des Informations sur le Risque en Assurance.

AFA : Association Française de l'Assurance.

AIPP : Atteinte à l'Intégrité Physique et Psychique.

AIS : Abbreviated Injury Scale.

APREF : Association des Professionnels de la Réassurance En France.

AREDOC : Association pour l'étude de la Réparation du Dommages Corporels.

ATP : Assistance Tierce Personne.

BAAC : Bulletin d'Analyse des Accidents Corporels.

CCR : Caisse Centrale de Réassurance.

DSF : Dépenses de Santé Futures.

DFP : Déficit Fonctionnel Permanent.

EMEA : *Europe Middle East and Africa*.

FA : France Assureurs.

FFSA : Fédération Française des Sociétés d'Assurances.

IBNER : *Incurred But Not Enough Reported*.

IBNYR : *Incurred But Not Yet Reported*.

i.i.d : indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d*).

IPP : Incapacité Permanente Partielle.

OCDE : Organisation de Coopération et de Développement Économique.

ONISR : Observatoire National Interministériel de la Sécurité Routière.

PSAP : Provision pour Sinistres à Payer.

PGPF : Pertes de Gains Professionnels Futures.

Mots-Clés

Accident de la circulation : En terme juridique, l' " accident " est entendu comme un événement soudain, fortuit, et non-volontaire de la part de l'auteur du dommage (tous les "accidents" provoqués intentionnellement sont donc bien exclus et retombent dans le Droit Commun et la responsabilité pénale).

L'ajout de " circulation " sert à désigner un lieu de l' " accident ", un lieu qui doit donc être destiné à la circulation, privé ou public.

Agent : Terme utilisé en prolongement de celui « d'agent économique » ; défini comme : « une personne physique ou morale prenant des décisions qui participent à l'activité économique ». L'agent est donc une personne, physique ou morale, en charge de prendre des décisions dans le problème considéré. Un agent peut donc être un individu, un animal, une entreprise, etc.

Assiette de Prime : l'assiette de prime désigne la somme annuelle de toutes les primes encaissées (ou estimées si le montant des encaissements n'est pas encore connu).

Boni / Mali : Un " boni " est déclaré lorsqu'une économie de dépense par rapport aux prévisions est réalisée (i.e. lorsque les provisionnements d'un assureur étaient surestimés). Dans ce cas de figure, des pertes d'opportunités doivent aussi être prise en compte.

A l'inverse, lorsque les dépenses dépassent les prévisions faites, un " mali " est déclaré.

Charge d'un sinistre : La charge d'un sinistre est aussi appelée « évaluation » du sinistre. Si le sinistre est clos, la charge correspond à la valeur totale des indemnités payées par l'assureur. Si le sinistre n'est pas clos, la charge correspond au montant hypothétique des indemnités payées et à payer. Cette évaluation est réalisée par l'assureur pour chaque dossier de sinistre, dont la vision dépend donc d'un moment t donné (dans les notations de ce mémoire, l'année $i + j$ fait office de période de référence).

Contrat / Police : Le contrat d'assurance est un lien juridique qui unit les différentes parties (assureur, assuré, bénéficiaire). La police d'assurance est l'écrit qui constitue la preuve de ce contrat d'assurance.

Cotisation : Cotisation est utilisé dans ce mémoire comme un synonyme parfait de prime.

Exercice : Le terme exercice est utilisé comme « exercice comptable » qui par extension abusive désigne une plage temporaire d'un an, du 1er janvier au 31 décembre.

Modèle collectif : Autrement appelé parfois modèle probabiliste, ou désigné comme l'approche fréquence – sévérité. Le terme modèle collectif sera préférée dans cette étude.

Préjudice / Damage : Le dommage corporel relève du fait, c'est-à-dire ce qui est objectivement constatable. Le préjudice quant à lui relève du droit, il s'agit d'un « réceptacle » permettant le passage de la constatation réelle à l'atteinte aux droits d'un individu. Ainsi, c'est bien l'existence du préjudice qui permet d'exiger réparation d'un dommage subi. Donc, « il peut y avoir « dommage » sans « préjudice », en revanche, tout « préjudice » prend source dans un « dommage ». Cependant, cette nuance de sémantique juridique a été abusivement mise de côté dans ce mémoire, préjudice et dommage ont tous deux désignés les faits.

Sinistres d'intérêt : Sinistres dont le montant pourrait, ou a déjà, activer un traité de réassurance. Un ensemble assimilé à l'ensemble des sinistres dont la charge revalorisée est supérieure au seuil fixé pour la tarification revalorisée.

Sinistres graves : Les sinistres souvent appelés « sinistres graves » ou parfois, par raccourci et léger abus de langage, « sinistres importants » désignent les sinistres aux montants les plus importants. La notion de gravité est donc rattachée à une vision entièrement monétaire. Les deux dénominations précédentes seront utilisées comme de parfaits synonymes dans ce mémoire.

Sinistres tardifs : Un sinistre est dit tardif lorsque son exercice de survenance est antérieur à son exercice 3.4 de déclaration.

Suspens d'un sinistre : Le montant en suspens d'un sinistre est utilisé comme synonyme de montant provisionné. Ce montant est donc celui de la provision Dossier / Dossier, ou encore celui d'une vision "PSAP" d'un unique sinistre.

Valeur Ultime : Par un léger abus de langage, désigne la charge ultime d'un sinistre, c'est à dire la charge payée par l'assureur lorsque l'on suppose ou observe le sinistre entièrement clos.

Victime « super-protégée » : Dans le cadre de la Loi Badinter, une victime « super-protégée » est une victime remplissant l'un des critères suivants :

- Invalide à hauteur de 80 % et plus (i.e. plus de 80 % d'AIPP)
- Âgée de moins de 16 ans au jour de l'accident
- Âgée de plus de 70 ans au jour de l'accident

S'agissant des victimes « super-protégées », leur faute ne leur est opposable que dans le cas où elles auraient recherché volontairement le dommage (i.e. suicide). Pour les autres, leur faute ne leur est opposable que dans le cas d'une faute inexcusable qui est la cause exclusive de l'accident (« inexcusable » et « exclusif » étant deux mots forts qui environnent le jamais). (Cour de Cassation, 1995)

Bibliographie - Études et Données de Marchés

- AFA (2008). Livre Blanc sur l'indemnisation du dommage corporel. Livre Blanc - Rapport d'accompagnement décisionnel.
- AGIRA (2022). Rapport Annuel. Rapport d'activité. URL: [agira.asso.fr](https://www.agira.asso.fr).
- APREF (2008). Pour une meilleure indemnisation des corporels graves en France. Livre Blanc - Rapport d'accompagnement décisionnel.
- APREF (2013). Indemnisation des dommages corporels : analyse et perspectives. Rapport d'étude.
- Banque de France (June 2023). Les indices obligataires. URL: <https://www.banque-france.fr/statistiques/taux-et-cours/les-indices-obligataires> (visited on 06/01/2023).
- CCR Re and Addactis (2019). L'indemnisation des préjudices corporels graves en RC Automobile. Livre Blanc - Rapport d'accompagnement décisionnel.
- FFSA (2013). La revue de l'année 2012. Rapport de marché.
- Fichier BAAC (2005). Bases de données annuelles des accidents corporels de la circulation routière - Années de 2005 à 2021. Bases de données. URL: <http://data.worldbank.org/indicator/SP.DYN.LE00.FE.IN>.
- France Assureurs (2019). L'Assurance Française, Données clés 2018. Rapport Annuel.
- France Assureurs (2022). L'Assurance Française, Données clés 2021. Rapport Annuel.
- Guy Carpenter (2019). EMEA Motor Study - Section 5 : France. Rapport d'expert.
- Munich Re (2011). Severe bodily injury claims in europe. Rapport d'expert by D.Mayr.
- ONISR (2023a). Bilan 2022 de la sécurité routière. URL: <https://www.onisr.securite-routiere.gouv.fr/etat-de-linsecurite-routiere/bilans-annuels-de-la-securite-routiere/bilan-2022-de-la-securite-routiere> (visited on 08/21/2023).
- ONISR (2023b). Estimation du nombre de blessés graves et de blessés légers en France métropolitain. Rapport Méthodologique - A. Pestour.
- QBE Re (2021). L'étude des sinistres corporels affinée par l'observation des clos. Rapport d'expert - France.
- SCOR (2013). Analyse de l'indemnisation du Corporel Grave dans une perspective européenne. Newsletter Technique by J.M. Houisse.
- SCOR (2019). Analyse de l'indemnisation du corporel grave pour la période 2015 à 2017 au sein du marché français. Rapport d'expert - RESPONSABILITE CIVILE AUTOMOBILE by J.M. Houisse.
- Swiss Re (2022). Motor Bodily Injury Landscape – France. Rapport d'expert - France by B. Audoye and M. Devos.

Bibliographie - Juridique

- AREDOC (2022). La nomenclature des postes de préjudices de la victime directe. Rapport Annuel.
- Code Civil (1804). Code Civil. URL: https://www.legifrance.gouv.fr/codes/article_lc/LEGIARTI000032041571#:~:text=Tout%20fait%20quelconque%20de%20l,est%20arriv%C3%A9%20%C3%A0%20le%20r%C3%A9parer..
- Cour de Cassation, A. P. (1995). Cour de Cassation, Assemblée plénière, du 10 novembre 1995, 94-13.912. URL: <https://www.legifrance.gouv.fr/juri/id/JURITEXT000007034785/>.
- Cour de Cassation, C. c. (1987). Cour de Cassation, Chambre civile 2, du 28 janvier 1987, 85-17.327. URL: <https://www.legifrance.gouv.fr/juri/id/JURITEXT000007018038>.
- Cour de Cassation, C. c. (2004). Cour de cassation, Chambre civile 2, 8 juillet 2004, 03-16.173. URL: <https://www.legifrance.gouv.fr/juri/id/JURITEXT000007047896/>.
- Cour de Cassation, C. c. (2013). Cour de Cassation, Chambre civile 2, 28 février 2013, 11-25.446-11-25.927. URL: <https://www.legifrance.gouv.fr/juri/id/JURITEXT000027127235>.
- Cour de Cassation, C. c. (2019). Cour de Cassation, Chambre civile 2, 23 mai 2019, 18-16.651. URL: <https://www.legifrance.gouv.fr/juri/id/JURITEXT000038567443/>.
- Crozet, Y., Bagard, V., and Chevasson, G. (2003). Valeur de la vie humaine et sécurité routière : de l'incubation à l'émergence de nouvelles préférence collectives. *Transports : économie, politique, société* 422, pp. 359–367.
- Dintilhac, J. (2005). Rapport du groupe de travail chargé d'élaborer une nomenclature des préjudices corporels. Groupe de travail.
- Ecole Nationale de la Magistrature (2022). Référentiel indicatif de l'indemnisation du préjudice corporel des cours d'appel. Aide méthodologique.
- Lambert-Faivre, Y. (2003). Rapport sur l'indemnisation du dommage corporel. Groupe de travail.
- Loi Badinter (1985). Loi n° 85-677 du 5 juillet 1985 tendant à l'amélioration de la situation des victimes d'accidents de la circulation et à l'accélération des procédures d'indemnisation. URL: <https://www.legifrance.gouv.fr/loda/id/LEGITEXT000006068902>.
- Loi n°58-208 (1958). Loi n°58-208 du 27 février 1958 relative à l'Institution d'une obligation d'assurance en matière de circulation de véhicules terrestres à moteur. URL: <https://www.legifrance.gouv.fr/jorf/id/JORFTEXT00000878373#:~:text=Loi%20n%C2%B058%20D208,VEHICULES%20TERRESTRES%20A%20MOTEUR%20%2D%20L%C3%A9gifrance>.
- Mornet, B. (2020). L'indemnisation des préjudices en cas de blessures ou de décès. Aide méthodologique.
- Mornet, B. (2022). L'indemnisation des préjudices en cas de blessures ou de décès. Aide méthodologique.
- Viney, G. and Markesins, B. (1985). La réparation du dommage corporel. Essai de comparaison des droits anglais et français. Paris : Economica.

Bibliographie - Actuarielle et Scientifique

- Aase, K. K. (2002). Perspectives of Risk Sharing. *Scandinavian Actuarial Journal* 2002.2, pp. 73–128.
- Aase, K. K. (2009). The Nash bargaining solution VS Equilibrium in a reinsurance syndicate. *Scandinavian Actuarial Journal* 2009.3, pp. 219–238.
- Ben Dbabis, M. (2012). Modèles et méthodes actuarielles pour l'évaluation quantitative des risques en environnement Solvabilité II. PhD thesis. Université Paris Dauphine.
- Bernard, C. and Tian, W. (2010). Insurance Market Effects of Risk Management Metrics. *The Geneva Risk and Insurance Review* 35.1, pp. 47–80.
- Bertrand, J. (1883). Theorie mathematique de la richesse sociale. *Journal de savants* 67.
- Blondeau, J. and Partrat, C. (2003). La Réassurance, Approche technique. Assurance, Audit, Actuariat. Economica.
- Boonen, T. J. (2015). Competitive equilibria with distortion risk measures. *ASTIN Bulletin* 45.3, pp. 703–728.
- Borch, K. H. (1960a). An Attempt to Determine the Optimum Amount of Stop Loss Reinsurance Reinsurance. *Transactions of the 16th International Congress of Actuaries*.
- Borch, K. H. (1960b). Reciprocal Reinsurance Treaties. *ASTIN Bulletin* 1.4, pp. 170–191.
- Borch, K. H. (1960c). Reciprocal reinsurance treaties seen as a two-person co-operative game. *Scandinavian Actuarial Journal* 1-2, pp. 29–58.
- Borch, K. H. (1962a). Application of Game Theory to Some Problems in Automobile Insurance. *ASTIN Bulletin* 2.2, pp. 208–221.
- Borch, K. H. (1962b). Equilibrium in a Reinsurance Market. *Econometrica* 30.3, p. 424.
- Bühlmann, H. (1970). Mathematical Methods in Risk Theory. Vol. 172. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Science.
- Bühlmann, H. (1980). An Economic Premium Principle. *ASTIN Bulletin* 11.1, pp. 52–60.
- Cai, J. and Tan, K. S. (2007). Optimal retention for a stop-loss reinsurance under the VaR and CTE risk measures. *ASTIN Bulletin* 37.1, pp. 93–112.
- CAS Tail Factor Working Party (2013). The Estimation of Loss Development Tail Factors : A Summary Report. Rapport Méthodologique - Casualty Actuarial Society Committee on Reserves.
- Chan, F.-Y. and Gerber, H. (1985). The reinsurer's monopoly and the Bowley solution. *ASTIN Bulletin* 15.2, pp. 141–148.
- Charpentier, A. and Denuit, M. (2004a). Mathématiques de l'Assurance Non-Vie, Tome 1. Economie et Statistiques Avancées. Economica.
- Charpentier, A. and Denuit, M. (2004b). Mathématiques de l'Assurance Non-Vie, Tome 2. Economie et Statistiques Avancées. Economica.
- Cheung, K. C., Yam, S. C. P., and Zhang, Y. (2019). Risk-adjusted Bowley reinsurance under distorted probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics* 86, pp. 64–72.
- Cournot, A. (1838). Recherches Sur Les Principes Mathématiques de la Théorie Des Richesses. Paris : Hachette.
- De Finetti, B. (1940). Il problema dei pieni. Istituto italiano degli attuari.
- Deelstra, G. and Plantin, G. (2014). Risk Theory and Reinsurance. EAA Series. Springer London.

- Deprey, E. and Godzinski, A. (2007). Problématique de seuil dans la modélisation de la sinistralité en Réassurance Non Vie. Mémoire d'actuariat. Palaiseau : ENSAE.
- Deprez, O. and Gerber, H. (1985). On convex principles of premium calculation. *Insurance: Mathematics and Economics*.
- Dutang, C. (2012). Etude des marchés d'assurance non-vie à l'aide d'équilibres de Nash et de modèles de risques avec dépendance. PhD thesis. Lyon : Université Claude Bernard Lyon I.
- Dutang, C. (2021). Some statistical and game-theoretic models with an actuarial perspective. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches. Paris : Université Paris Dauphine - PSL.
- Edgeworth, F. (1881). Mathematical psychics: An essay on the application of mathematics to the moral sciences. London : Kegan Paul.
- Embrechts, P., Liu, H., and Wang, R. (2018). Quantile-Based Risk Sharing. *Operations Research* 66.4, pp. 936–949.
- Gerber, H. U. and Pafumi, G. (1998). Utility Functions. *North American Actuarial Journal* 2.3, pp. 74–91.
- Hampel, F., Ronchetti, E., Rousseeuw, P., and Stahel, W. (Mar. 2005). Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions.
- Hans, G. (1979). An introduction to mathematical risk theory. Huebner Foundation.
- Hogg, R. V. and Klugman, S. A. (1984). Loss Distributions. Statistical methods - Mathematical models. John Wiley and Sons.
- Holt, C. A. and Laury, S. K. (2002). Risk Aversion and Incentive Effects. *American Economic Review* 92.5, pp. 1644–1655.
- Jeminet, J. (2012). Optimisation de la réassurance non proportionnelle en arrêt de travail. Mémoire d'actuariat. Lyon : ISFA, Université Claude Bernard - Lyon I.
- Jiang, W., Hong, H., and Ren, J. (2021). Pareto-optimal reinsurance policies with maximal synergy. *Insurance: Mathematics and Economics* 96, pp. 185–198.
- Jiang, W., Ren, J., Yang, C., and Hong, H. (2019). On optimal reinsurance treaties in cooperative game under heterogeneous beliefs. *Insurance: Mathematics and Economics* 85, pp. 173–184.
- Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., and Denuit, M. (2002). Modern Actuarial Risk Theory. Springer New Yorks.
- Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., and Denuit, M. (2008). Modern Actuarial Risk Theory Using R. Second Edition. Springer Berlin Heidelberg.
- Kaluszka, M. (2001). Optimal reinsurance under mean-variance premium principles. *Insurance: Mathematics and Economics* 28.1, pp. 61–67.
- Kikuta, K. (1976). On the contribution of a player to a game. *International Journal of Game Theory* 5.4, pp. 199–208.
- Krvavych, Y. (2005). Insurer risk management and optimal reinsurance. PhD thesis. Sydney : University of New South Wales Sydney.
- Lemaire, J. (1977). Exchange de Risques entre Assureurs et Theorie des Jeux. *ASTIN Bulletin* 9.1-2, pp. 155–180.
- Lemaire, J. (1991). Cooperative Game Theory and its Insurance Applications. *ASTIN Bulletin* 21.1, 17–40.
- Lemaire, J. and Quairiere, J.-P. (1986). Chains of reinsurance revisited. *ASTIN Bulletin* 16.2, pp. 77–88.
- Li, D., Chen, R., and Li, C. (2020). Optimal Reinsurance-Investment Problem under a CEV Model: Stochastic Differential Game Formulation. *Mathematical Problems in Engineering* 2020, pp. 1–19.
- Louis, M. (2010). Evaluation des provision techniques non-vie dans le contexte de Solvabilité II. Mémoire d'actuariat. Strasbourg : DUAS, Université de Strasbourg.
- Ohlin, J. (1969). On a class of measures of dispersion with application to optimal reinsurance. *ASTIN Bulletin* 5.2, pp. 249–266.

- Osborne, M. J. and Rubinstein, A. (1994). A Course in Game Theory. Massachusetts Institute of Technology press.
- Peleg, B. and Sudhölter, P. (2007). Introduction to the theory of cooperative games, Second Edition. Vol. 34. Serie C : Game theory, Mathematical Programming and Operation Research. Springer.
- Peters, H. (2015). Game Theory, A Multi-Leveled Approach, Second Edition. Springer Texts in Business and Economics. Springer.
- Pierre, A. (2021). Modélisation de la sévérité des traités en excédent de sinistre, approche par la théorie des valeurs extrêmes. Mémoire d'actuariat. Strasbourg : DUAS, Université de Strasbourg.
- Polborn, M. (1998). A Model of an Oligopoly in an Insurance Market. *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory* 23.1, pp. 41–48.
- Poulin, M. (2012). Analyse des solutions actuarielles en tarification des traités réassurance non-proportionnels Non-vie. Mémoire d'actuariat. Paris : CEA.
- Powers, M. and Shubik, M. (2006). A "square-root rule" for reinsurance. *Revista Contabilidade y Ampmathsemicolon Financas* 17.spe2, pp. 101–107.
- Rabin, M. (2000). Risk Aversion and Expected-utility Theory: A Calibration Theorem. *Econometrica* 68.5, pp. 1281–1292.
- Raviv, A. (1992). The Design of an Optimal Insurance Policy. *Foundations of Insurance Economics*. Springer Netherlands, pp. 251–263.
- Ray, S. (2011). Optimalité des structures de réassurance. Mémoire d'actuariat. Paris : Université Paris Dauphine - PSL.
- Taksar, M. I. and Markussen, C. (2003). Optimal dynamic reinsurance policies for large insurance portfolios. *Finance and Stochastics* 7.1, pp. 97–121.
- Vajda, S. (1962). Minimum Variance Reinsurance. *ASTIN Bulletin* 2.2, 257–260.
- Verdonck, T., Wouwe, M. V., and Dhaene, J. (2009). A Robustification of the Chain-Ladder Method. *North American Actuarial Journal* 13.2, pp. 280–298.
- Von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944). Theory of Games and Economic Behavior. Princeton classic editions. Princeton University Press.
- Wahlin, J.-F. (2012). La Réassurance. Cahiers Financiers. Larcier.
- Wang, S. S., Young, V. R., and Panjer, H. H. (1997). Axiomatic characterization of insurance prices. *Insurance: Mathematics and Economics* 21.2, pp. 173–183.
- Warren, R., Yao, J., Rourke, T., and Iwanik, J. (2012). Game Theory in General Insurance, How to outdo your adversaries while they are trying to outdo you.
- Wilson, R. (1968). The Theory of Syndicates. *Econometrica* 36.1, p. 119.
- Wüthrich, M. V. and Merz, M. (2008). Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance. Wiley Finance. John Wiley and Sons Ltd.
- Wüthrich, M. V. and Merz, M. (2015). Stochastic Claims Reserving Manual: Advances in Dynamic Modeling. Reserving Notes.

Appendix A

Détails des constructions d'indices

A.1 Détails de la construction de l'indice corporel

A.1.1 Utilisation de données publiques

La différence de structure entre les sinistres peut s'exprimer facilement à travers un exemple direct : l'indemnisation d'un garçon de 5 ans ayant subi un traumatisme crânien et d'une femme de 30 ans devenue tétraplégique ; même si leur niveau d'handicap est à peu près similaire (disons 80 %), ils n'auront rien de semblable. Pour les lecteurs dubitatifs ou qui souhaitent pousser cette illustration un peu plus loin, d'anciennes attributions d'indemnisations sont disponibles sur le site suivant : <https://formulaire.victimesindemniees-fvi.fr/>.

Ces développements propres à chacun des sinistres entraînent l'impossibilité de comparer d'une année sur l'autre les charges moyennes de nos données (chacune étant impactée par des typologies de blessures trop différentes). En tant que « preuve graphique », la figure A.1 exprime les charges moyennes de chaque année de survénance observées lors du premier et du second développement pour une des entités étudiées. L'absence de tendance claire dans les variations et les écarts importants entre ces valeurs moyennes aux différentes dates d'observations appuient l'absence de la bonne appréhension du phénomène dans les données utilisées.

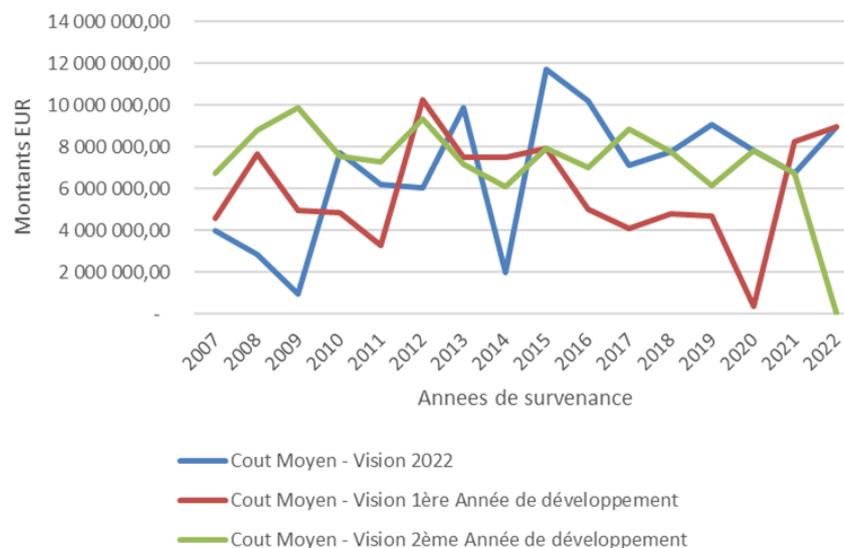


Figure A.1: Cout Moyen observé selon l'année de survénance

Si l'utilisation de données publiques et d'études publiées est donc obligatoire, trois points centraux doivent aussi être précisés sur l'utilisation de telles publications :

- La quasi-totalité des publications étudiées portent un point de vue très critique sur cette augmentation des coûts des dommages corporels. Seuls les assureurs et les réassureurs publient des rapports quantitatifs et sont ceux qui subissent le plus cette augmentation des coûts, sans en être les seuls. Si ce point de vue venait à compromettre parfois la neutralité souhaitée pour ce document, il semblait important de signaler que ces augmentations sont aussi le reflet de la valorisation de plus en plus importante de la vie humaine et qu'aucun jugement moral ne peut être attaché à cette vision de la société Crozet et al. (2003).
- Les résultats de chacune des publications ont pour but de servir d'arguments à leurs auteurs et ne sont donc pas des sources objectives d'information.
- Les trois sources principales citées dans ce mémoire ne sont cependant pas exclusives. D'autres études seront utilisées et citées le cas échéant. Pour permettre une lecture plus légère, quelques exceptions de citation seront faites lorsque les analyses et données utilisées sont fondées sur des publications précédentes des trois études principales.

A.1.2 Étude des bases de données exploitées

- [1] : Base construite sur les données de 1305 victimes, ayant subis un accident après le 1^{er} janvier 1999 et dont l'évaluation des dommages corporels faites par l'assureur est supérieure à 1 M EUR. L'analyse de l'étude porte sur les variations du coût moyen entre 2005 et 2019. Le seuil de 1M EUR est bien plus bas que s_M , certaines variations pourraient donc dissembler.
- [2] : Base de données construite sur les sinistres transmis à SCOR : les sinistres d'intérêts pour les tranches souscrites par ce réassureur. Aucune précision si chaque sinistre correspond bien à une unique victime. L'analyse porte sur les sinistres clos entre 2015 et 2017, et se concentre sur les sinistres corporels « les plus lourds ». Un terme laissé dans le flou entendue comme « sinistres corporels graves supérieur à 50% » qui pourrait s'entendre comme tous les sinistres aux coûts supérieurs au coût médian ou comme tous les « sinistres corporels graves supérieurs à 50% d'IPP¹ ». La seconde dénomination paraît pus crédible et apparaît dans une étude de SCOR parue en 2008 utilisant le même terme. Suivre les sinistres clos permet d'éviter le biais des méthodes d'évaluations des différents acteurs du marché mais implique des survenances anciennes², les dernières variations de méthode d'indemnisation pourraient donc ne pas apparaître. Le nombre total de sinistres recueilli n'est pas précisé, le cadre temporel réduit pourrait être problématique car en cas d'un nombre trop faible, comme pour notre base, l'impact d'un seul sinistre, d'une seule typologie de blessure pourrait fausser la représentation du cadre général des évolutions.
- [3] : Etude du coût d'un cas particulier : un homme de 30 ans, marié, 2 enfants, employé d'un niveau de salaire moyen constituant le seul revenu du foyer devient tétraplégique après avoir subis un grave accident de la route. Le handicap est caractérisé par : 100% d'AIPP, un niveau de soins très élevé et une incapacité totale de retourner au travail. Swiss Re soumet ce cas aux différents assureurs du marché pour en faire l'évaluation du coût à intervalle de temps régulier et agrège ensuite les résultats obtenus. La méthode d'agrégation des estimations n'est pas précisée. L'évaluation de ce cas a commencé en 2004 par des publications en 2005 – 2007. Malheureusement, aucune donnée de cette évaluation en France n'a pu être récupérée avant 2014.

¹Incapacité Permanente Partielle, remplacée aujourd'hui par l'AIPP

²Une dizaine d'années de développement est souvent un minimum avant la clôture pour la branche longue de la RC Auto, voir la figure 2.4 pour référence.

A.1.3 Présentations des indices publics choisis

Indice ATP : L'indice choisi comme représentation de l'ATP est celui des taux de salaire horaire des ouvriers - Activités pour la santé humaine (INSEE, idBank : [010562727](#)). Les « ouvriers dans le secteur de la santé » regroupent tous les agents de services hospitaliers (du secteur public et privé), entre autres : agent d'entretien, agent de service, lingère, veilleur d'hôpital. Une double hypothèse est alors faite implicitement :

- L'évolution du salaire de ce groupement correspond à l'évolution des salaires des agents en charge de l'assistance dans la vie quotidienne des victimes
- Cette augmentation de salaire serait une bonne représentation de la tendance de l'évolution des coûts de l'ATP

Une comparaison de cet indice avec l'évolution des coût moyens d'ATP sur la base CCR et l'évolution des coûts horaires moyens d'ATP pondérés¹ observés par QBE Re (2021) est présentée dans la figure A.2.



Figure A.2: Comparaison - Indice ATP

Les tendances de l'évolution des coûts horaires pondérés et de l'évolution de l'indice sélectionné correspondent, mais des variations importantes diffèrent en 2014 et 2019, remettant en cause la première partie de l'hypothèse prise. L'évolution de tarifs mis en avant par l'étude de la CCR se distingue fortement des autres, ces variations sont jugées bien trop élevées par rapport à nos données, mais indiquent que les mouvements de salaires seuls ne peuvent expliquer l'entière du phénomène. L'observation d'un indice construit à partir des coûts publiés de QBE Re et de la demande horaire totale des victimes de la base de la CCR conduit à des variations de plus de 400%, valeurs totalement aberrantes. Pourtant l'effet de la grande augmentation du besoin horaire des victimes transmise par la CCR est d'un impact certain, et ignoré par l'indice choisi, sur l'évolution du coût. Entre 2010-2017, SCOR mentionne une augmentation des coûts de l'ATP de 57%, contre 111% pour la CCR et seulement 8% pour l'indice retenu.

Indice PGPF : L'indice choisi pour représenter les PGPF est celui des Montants Mensuel Net du SMIC pour 35 heures de travail par semaine (INSEE, idBank : [000879878](#)).

L'objectif est de modéliser les variations de l'ensemble des salaires **nets** (Voir Annexe A.3) des Français entre 2005 et 2023. Malheureusement, peu d'indice public des salaires français ont été mis à jour depuis 2020. Les seuls montants disponibles après 2020 sont ceux du Salaire Minimum Interprofessionnel de Croissance, même si l'évolution du salaire médian aurait-été préférable. Le SMIC net est retenu pour

¹Sur une base de 4954 victimes, QBE Re détermine pour chacune un coût horaire pondéré par la proportion d'heures actives / passives et présente ensuite l'évolution de la moyenne de ce coût horaire pondéré.

correspondre à l'évaluation faite du poste de préjudice. L'indice est comparé à l'évolution de la PGPF des sinistres de la CCR dans la figure A.3, à part une tendance croissante les deux séries paraissent bien différentes. La série de la CCR est particulièrement variable, reflétant un effet des typologies de blessures recensées sur certaines années.

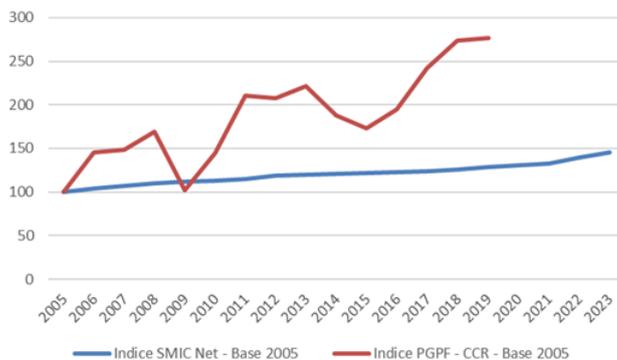


Figure A.3: Comparaison - Indice PGPF

Entre 2010-2017, SCOR mentionne une augmentation des coûts des PGPF de 77%, contre 68% pour la CCR et seulement 8% pour l'indice retenu.

Indice DSF : L'indice choisi pour modéliser les Dépenses de Santé Futures est l'indice des prix à la consommation (IPC) - Ensemble des ménages – France – Services de Santé (INSEE, idBank : [001763845](#)), afin de prendre en compte le reste à charge des coûts de santé et non pas l'ensemble dont une partie est traitée par un protocole spécifique (Voir Annexe A.3).

Entre 2010-2017, la CCR fait état d'une augmentation de 83% quand l'indice retenu lui ne rend compte d'une augmentation que de 8%. La différence d'évolution très marquée à partir de 2012 est visible sur la figure A.4. Les analyses de SCOR, elles tendent à valider des hypothèses d'évolutions moins importantes que celle de la CCR. Les dépenses courantes de santé sont assimilées à « une hausse de seulement 2,7% entre 2010 et 2011, de 4,3% entre 2006 et 2007 » SCOR (2013). Puis la « stabilité du régime de sécurité sociale » amène à valider « l'absence d'augmentation voire une baisse » de ces dépenses dans l'analyse de 2019. La considération d'un ralentissement de l'augmentation des frais à partir de 2008 est bien retranscrite dans l'indice choisi. De plus, cet indice reflète également la position de Swiss Re sur une diminution des prix à partir de 2019, justifiée comme un effet de la pandémie de la Covid 19 (annulations d'opérations massives et investissement important dans le secteur de la santé). Cependant Swiss Re prévoyait une remontée des prix à partir de 2021, ce qui n'est pas le cas ici. Ainsi, à des dates similaires, pour un même poste de préjudice des visions très différentes cohabitent.

A.1.4 Super Imposed Inflation

1. **La Variations du taux minimum d'actualisation des rentes :** considérant des variations de taux et des variations réglementaire. L'indice est construit sur les TME (Banque de France, 2023), auquel on applique trois retraitements :

- (a) Calcul de la valeur du taux minimum d'actualisation, selon la réglementation en vigueur de 2005 à 2023. (Voir Annexe B.1)
- (b) Construction du P€R en considérant : (Avec les notations de 1.1)
 - i = taux minimum d'actualisation
 - $x = 33$, âge moyen des accidentés auquel s'ajoute une durée de consolidation moyenne estimée sur les données de cette étude.

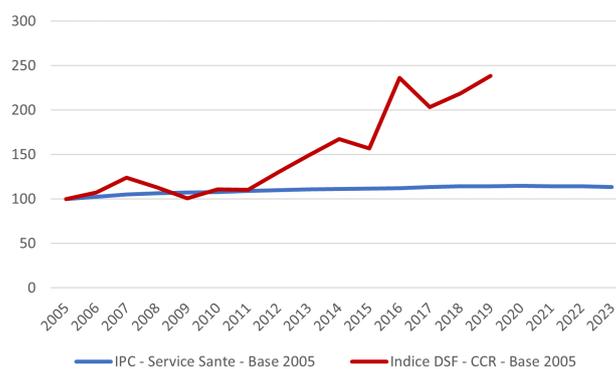


Figure A.4: Comparaison - Indice DSF

- Utilisation de la table TV 88/90, car cette table est celle de référence pour la réglementation.
- (c) Récupération des variations de la valeur des P€R : passage des variations sur un indice de base 100 en 2005.

L'indice obtenu¹ est représenté dans la figure A.5.

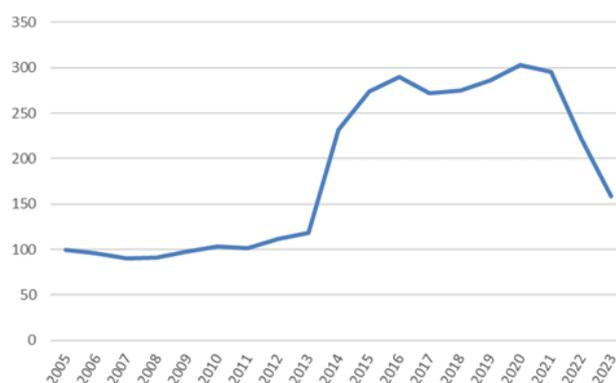


Figure A.5: Super Imposed Inflation 1 : P€R des Taux Minimums Réglementaires

Trois observations principales :

- Une augmentation très forte en 2014 : deux phénomènes se combinent, un environnement où le TME atteint des valeurs basses (la moyenne semestrielle descend en dessous de 1%) et le changement réglementaire qui implique de retrancher 2,25% d'inflation. Ces deux éléments renvoient des taux minimums réglementaires négatifs, et forcent donc une augmentation très importante et très soudaine du P€R.
- En 2019 l'inflation considéré pour le taux minimum réglementaire descend à 2% et explique ce creux de valeurs.
- La remontée des taux fin 2021, impliquant une diminution de valeur du P€R, est bien visible.

¹Un autre indice de construction similaire est utilisé pour la super-inflation du poste des PGPF, la différence se fait sur l'âge maximale atteignable par la rente : le P€R est fait sur une rente viagère (l'âge maximale est celui de la table), pour les PGPF l'âge maximale est de 67 ans (âge de départ à la retraite avec une liquidation effectuée automatiquement à taux plein).

2. **Les variations de barèmes de capitalisation** : l'indice est construit à partir des variations du P€R de la gazette du Palais. L'inconstance des hypothèses retenues et des dates de mise-à-jour obligent à appliquer un retraitement en trois étapes :

- Extraction du P€R publié, pour un homme de 33 ans¹.
- Interpolation linéaire afin de compenser toutes les années sans publications.
- Récupération des variations de la valeur des P€R : passage des variations sur un indice de base 100 en 2005.

L'indice obtenu est représenté dans la figure A.6.

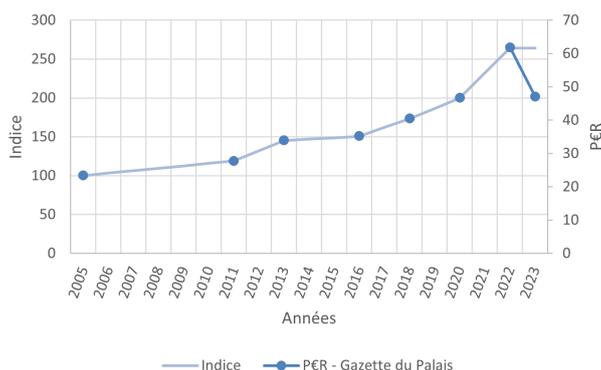


Figure A.6: Super Imposed Inflation 2 : P€R du barème de la Gazette du Palais

3. **L'indexation des rentes** : considérer la charge supplémentaire des rentes pour les assureurs depuis 2013. S'ajoute alors les variations de l'IPC - Ensemble des ménages - France - Ensemble hors tabac (INSEE, idBank : [001763852](#)) depuis 2013.

Les trois indices finaux : Après ajout de la superinflation ; selon certains poids calibrés lors de consultations d'experts en gestion de sinistres corporels graves et à partir des proportions de sinistre liquidé en rente et celle des liquidations en rente capitalisée ; les trois indices obtenus sont représentés dans les figures A.7, A.9 et A.8.

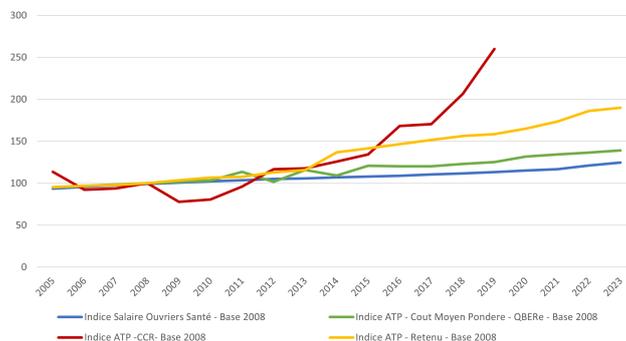


Figure A.7: Indice ATP Retenu

¹Age moyen des victimes, augmenté de la durée d'attente moyenne avant consolidation, dans la base de données étudiées.

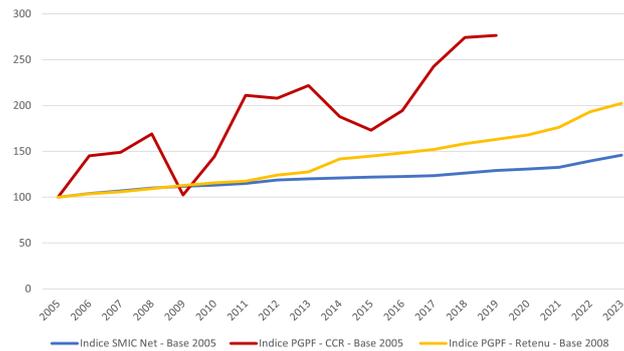


Figure A.8: Indice PGPF Retenu

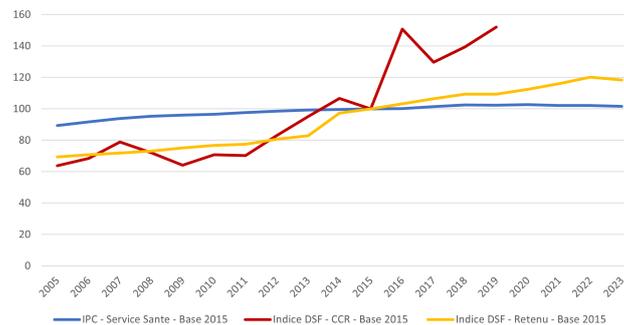


Figure A.9: Indice DSF Retenu

Entre 2010-2017, l'indice ATP varie de +43%, celui des PGPF varie de +31% et celui des DSF varie +29%. Entre 2017-2022, l'indice ATP progresse de +21%, celui des DSF de +18% et celui des PGPF augmente de +40% (ces valeurs sont à mettre en perspective avec celle renseignées dans la publication de référence [1], transcrite dans la partie précédente, A.1.3).

A.1.5 Résumé - Poids des postes de préjudices étudiés

- Très peu de données avant 2010 : Une seule étude publiée par l'APREF (2008), et une autre de Munich Re (2011) permettant de construire un unique point de référence en 2005.
- A partir de 2010 :

– ATP :

- > Proportion évolue entre 45% et 57% : Les valeurs plus faibles sont observées sur la base CCR (avec un seuil plus bas) et sur un nombre d'années importants (moyenne faites sur plusieurs années de survenance). La CCR précise une proportion d'ATP à 63% si l'on restreint l'étude aux traumatisme crânien.
- > Pour le cas particulier d'un homme tétraplégique, SwissRe : l'ATP et les DSF représentent entre 68% et 72% des indemnisations. La proportion de cette somme diminue de 4% en 2016 et réaugmente de 2% à partir de 2018.
- > SCOR observe une augmentation de 2% de la proportion d'ATP entre 2010 et 2015, et une autre de 1% entre 2014 et 2017.

– PGPF :

- > Proportion évolue entre 8% et 18% : un poste à la proportion moins stable que l'ATP.

- > L'augmentation constante de ce poste est admise par toutes les études : +2% pour SCOR de 2010 à 2017, +3% pour SwissRe de 2014 à 2016 et +1% entre 2016 et 2020. Une augmentation qui se reflète également dans l'indice des coûts, au vu des variations entre 2017 et 2022.
- **DSF** :
 - > Proportion évolue entre 19% et 13% : poste plus stable.
 - > Une baisse de ce poste est présentée dans les études réalisées avant la COVID19 : SCOR observe une stabilité de la proportion autour de 16% avant 2010 puis une baisse de -3,5% entre 2010 et 2017 (appuyée par l'argument de l'apparente stabilité des prix). Une stabilité qui est aussi exprimé dans l'indice de coût de ce poste, dont l'augmentation est moindre par rapport aux autres.
 - > La CCR place cette proportion à 19%, compensant ainsi la proportion moindre de l'ATP et présente une somme des deux postes similaires aux autres études.
- La consultation d'experts en gestion de sinistres corporels graves a permis d'obtenir des intervalles de référence pour chacune des proportions étudiées.

A.2 Détails de la construction de l'indice du nombre de sinistres

France Assureurs publie un indice qui retranscrit la valeur de la fréquence annuelle des sinistres de l'ensemble du marché provenant de la garantie RC Auto. Cet indice est à la baisse, ce qui tend à supposer des fréquences annuelles qui diminuent et donc des revalorisations à la baisse dans une vision 2023. Cette partie des annexes a pour but de présenter les données utilisées comme représentation des évolutions « exogènes » à considérer dans un indice de mise en « *As-If* » du nombre de sinistres.

Afin de présenter les variations d'exposition en nombre de sinistres annuels à l'échelle nationale, des données ont été extraites du Fichier BAAC (2005)¹, qui consigne de nombreux éléments sur les accidents de la route en France de 2005 à 2021, et comparées aux publications de l'ONISR (2023a) (Observatoire National Interministériel de la Sécurité Routière) qui publie des retraitements des données de ce fichier. La figure A.10 représente une partie des données extraites.

Considérer uniquement la diminution du nombre d'accident de la route apparaissait comme une vision trop « simpliste », en cela qu'elle n'implique pas forcément la diminution du nombre de victimes graves. De façon à considérer également l'impact que peut avoir une variation de la gravité sur celle de la fréquence, les séries renseignant le nombre d'accidents occasionnant des blessés graves paraissent plus pertinentes. Ainsi, l'étude du nombre d'accidents graves paraît plus approprié, présenté dans la figure A.11.

La différence entre les courbes du fichier BAAC et des retraitements de l'ONISR s'inverse. Ce changement est à relativiser du fait de la définition du terme « accident grave ». Dans les fichiers BAAC, tout accident nécessitant une hospitalisation est considéré comme grave. À l'ONISR, la définition est construite sur les normes de l'Union Européenne, le barème AIS (Abbreviated Injury Scale)² est introduit afin d'apporter une mesure de gravité. Un accident est défini comme grave lorsque le score AIS d'au moins une des victimes dépasse 3 (sur une échelle de 6, 6 étant le décès). Ainsi, seuls les accidents aux conséquences très lourdes touchant au moins une victime sont considérés. Les nombreuses

¹Aussi appelé, fichier national des accidents corporels de la circulation qui réunit toutes les fiches BAAC (Bulletin d'Analyse des Accidents Corporels) remplies par les forces de l'ordre lorsqu'elles sont présentes sur un accident.

²Présentation inofficielle du barème, mais efficiente : http://ressources.unit.eu/cours/ingenierie_crash/Biomecanique/Biomeca_critere1.htm

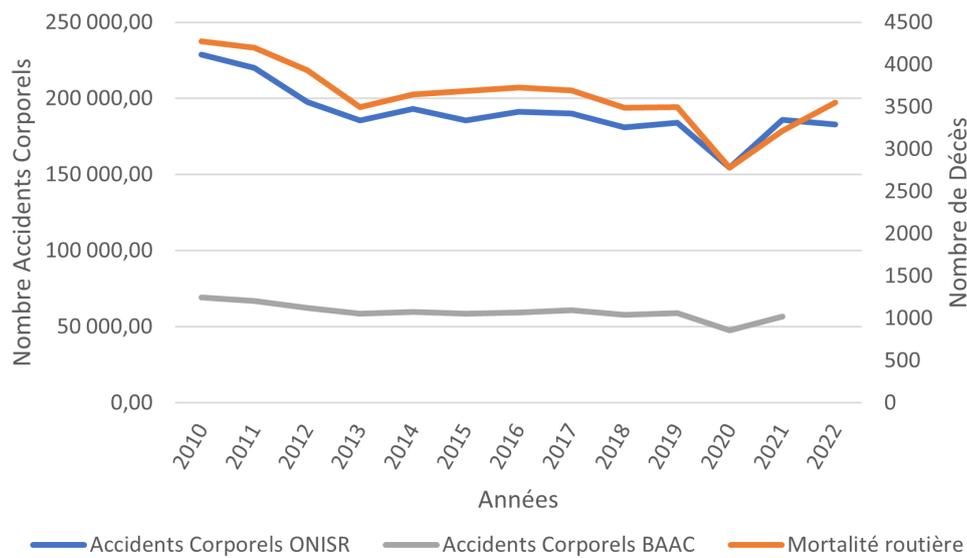


Figure A.10: Fichier BAAC et Rapport de l'ONISR

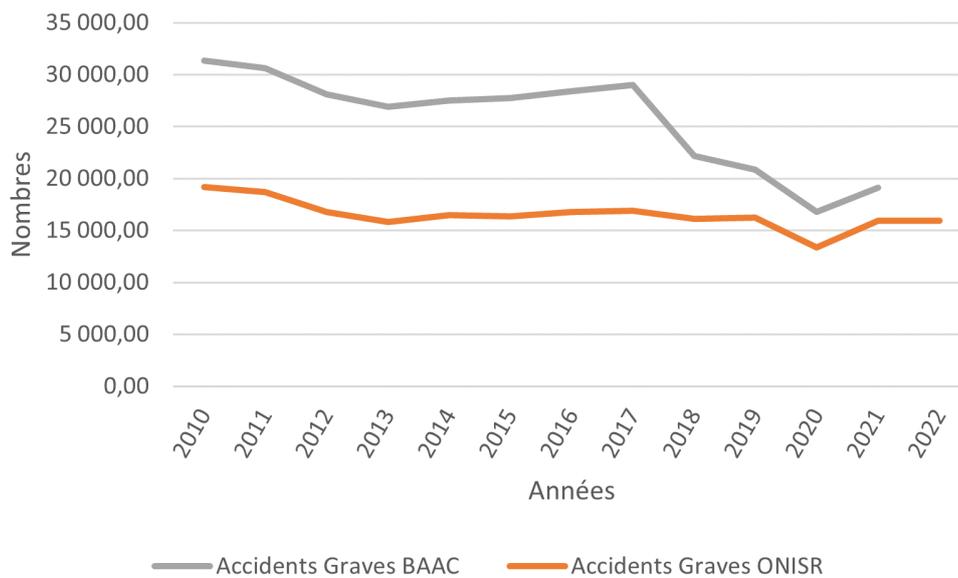


Figure A.11: Accidents Graves - Fichier BAAC et ONISR

modifications des processus de saisie des fiches BAAC par les forces de l'ordre motivent à ne pas retenir les valeurs extraites directement de cette base. Le choix est donc fait de retenir la série publiée par l'ONISR, malgré l'absence de contrôle sur le retraitement effectué. La méthode de retraitements du fichier BAAC, réalisée par le laboratoire de l'Université Gustave Eiffel, se base sur le calibrage de facteurs à partir des données du « Registre du Rhône »¹ de 2012-2016 qui permettent ensuite de faire les translations du fichier national (ONISR, 2023b). Cette méthodologie explique aussi en partie les différences d'évolution très visibles à partir de 2017.

¹Contient les informations de tous les accidents du département, avec des précisions sur la condition médicale des victimes. Ces données n'ont pas été étudiées pour ce mémoire, mais sont bien accessibles : <https://www.revarrhone.org/>

Néanmoins l'objectif demeure toujours de faire transparaître l'impact de cette évolution sur l'exposition en nombre de sinistres annuels du portefeuille. À cette fin, l'estimation du nombre d'accidents graves par véhicules de 1^{ère} catégorie pourrait offrir une certaine mesure de l'évolution du risque porté par chaque véhicule présent dans le portefeuille. La dynamique de ce ratio est présentée dans la figure A.12.

Une limite importante demeure, ce ratio ne tenant pas compte de la prime perçue, toutes les informations de qualité du portefeuille qui s'y rapporte sont omises.

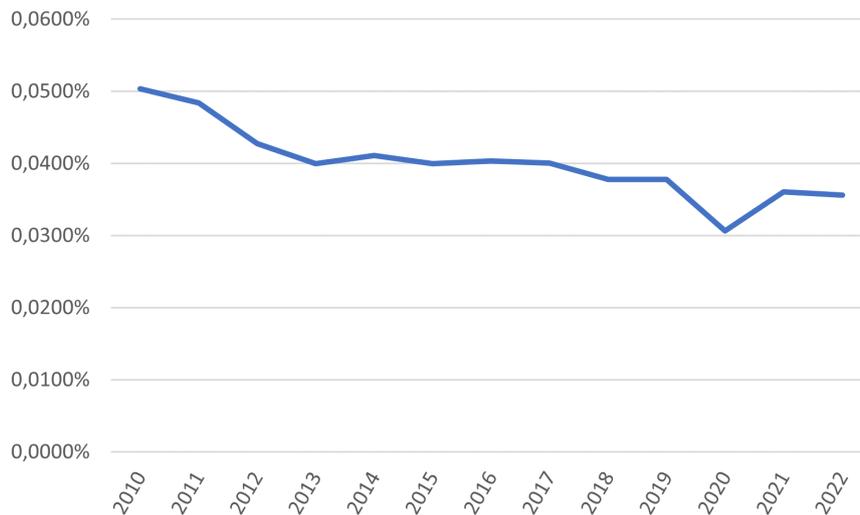


Figure A.12: Accidents Graves par Véhicules de 1^{ère} Catégorie

A.3 Méthodes de calcul de trois postes de préjudices

A.3.1 Assistance Tierce Personne

« Le poste de préjudice lié à l'assistance d'une tierce personne indemnise la perte d'autonomie de la victime restant atteinte, à la suite du fait dommageable, d'un déficit fonctionnel permanent la mettant dans l'obligation de recourir à un tiers pour l'assister dans les actes de la vie quotidienne. » (Cour de Cassation, 2013)

Le médecin expert est seul évaluateur du besoin d'assistance par une tierce personne ou par du personnel spécialisé (infirmière, kinésithérapeute, etc.) (Cour de Cassation, 2019). Le seul montant considéré dans ce chef de préjudice est celui du premier cas de figure. Les juges du fond quant à lui demeurent souverains dans l'appréciation de la durée du besoin de tierce personne, mais se réfère quasiment toujours aux recommandations de l'expert qui définit des durées d'interventions nécessaires. Récemment¹, l'assistance parentale (aide de la victime dans sa fonction de mère ou père) a aussi été rattachée à ce poste qui dépasse donc maintenant le cadre de l'assistance personnelle. Une appréciation complexe sur le rôle de parentalité dont l'apparition n'a donné lieu à aucune étude précise d'impact quantitatif.

Le calcul de l'indemnisation, toujours effectué en considérant un paiement effectué sous la forme d'une rente, est réalisée en 3 étapes :

¹Considération absente dans les référentiels jusqu'en 2020 inclus.

1^{ère} étape : Déterminer le montant annuel de la dépense. Le calcul se base sur trois éléments :

1. Le coût horaire : « les montants attendus de base sont un taux horaire moyen de 16 à 25 EUR pour une tierce-personne active et un taux horaire moyen de 11 EUR pour une tierce-personne passive » (Ecole Nationale de la Magistrature, 2022)¹ (passive correspond aux heures de surveillance).
2. Le besoin d'assistance active / passive journalier, dont le référentiel est fixé par le médecin expert.
3. Le nombre de jours où l'assistance est nécessaire, dans ce cas deux recommandations sont à distinguer selon le statut de la victime :
 - Si la victime est employeur (soit employeur direct, soit indirectement par une association mandataire prenant en charge les obligations et charges administratives) le calcul annuel est fait sur une base de 412 jours par an (« pour tenir compte des congés légaux et des jours fériés » (Ecole Nationale de la Magistrature, 2022))².
 - Si la victime n'est pas employeur (fait appel à une association prestataire) le calcul annuel est fait sur une base de 365 jours par an.

Le coût annuel de l'ATP, correspondant à l'arrérage de la rente, est obtenu par le produit des trois éléments :

$$\text{Coût horaire} \times (\text{Nombre heures} / \text{jour}) \times (\text{Nombre jours} / \text{an})$$

Il convient tout de même de faire la différence entre une rente composée uniquement des « arrérages certains » (i.e. ceux qui ont été versé entre la date de consolidation et la décision de justice) et une rente composée des « arrérages futurs » (i.e. ceux qu'ils restent à verser) pour la forme du versement. Les deux rentes peuvent être capitalisées, cependant la capitalisation est plus rare pour la seconde.

2^{ème} étape : Déterminer le nombre d'année de versement « d'arrérage certains » (i.e. ceux qui auraient dû être versés entre la date de consolidation³ et la décision de justice). Ces arrérages certains étant dû, ils sont versés sous forme de capital. Une « capitalisation » de la rente temporaire obtenue avec les arrérages certains est donc nécessaire.

3^{ème} étape : Déterminer le nombre d'année de versement « d'arrérage futurs » (i.e. ceux qu'ils restent à verser, allant de la date de la décision de justice à une date fixée par l'expert médicale qui peut dépendre de l'état de la victime, son décès par exemple). Si la demande en ATP est relativement minime, la capitalisation de la rente est encouragée. A l'inverse, si la victime est handicapée lourdement et donc que sa demande en ATP est importante, le versement d'une rente est recommandé (parfois imposé par le juge de fonds « même si ce n'est pas demandé ou si les parties s'y opposent » afin de garantir la protection de la victime tout au long de sa vie).

A.3.2 Pertes de Gains Professionnels Futures

« Indemnisation de la perte ou de la diminution de revenus consécutive à l'incapacité permanente à laquelle la victime est désormais confrontée dans la sphère professionnelle à la suite du dommage » (Dintilhac, 2005)

¹Dans le référentiel de 2013 : « 15 à 16 EUR » était la tranche attendue fournie.

²La norme de 412 jours est déjà présent dans le référentiel de, mais ce calcul paraît erroné par la seule justification des congés payés et jours fériés. Si l'on considère 30 jours de congés payés (2.5 par mois) et 11 jours fériés (les week-ends ne sont pas considérés), on obtient 406 jours par an, une norme utilisée par la cour d'appel de Nice en 2010.

³Depuis 2013, le référentiel des Cours d'Appels de Mornet recommande de considérer la durée écoulée depuis le retour au domicile de la victime (et non la date de consolidation).

La perte de revenus se calcule en net (et non en brut) et hors incidence fiscale (Cour de Cassation, 2004), depuis le prélèvement à la source, le montant retenu est celui du revenu mensuel net imposable avant prélèvement fiscal.¹

Le calcul de l'indemnisation, toujours effectué en considérant un paiement effectué sous la forme d'une rente, est réalisée en 3 étapes :

1^{ère} étape : Déterminer la perte annuelle : revenu mensuel net imposable x 12 plus primes, 13^{ème} mois, indemnités, intéressement, droits de retraite, etc.

2^{ème} étape : Déterminer le nombre d'année de versement « d'arrérage certains » (nommée « PGPF passée »). Ces arrérages certains étant dû, la rente temporaire obtenue (dont l'arrérage correspond à la perte annuelle et le nombre d'années à la différence entre la date de consolidation et la date de la décision judiciaire) est capitalisée. Cette perte certaine doit être actualisée : tenir compte de l'érosion monétaire et des possibles augmentations de salaire dont la victime aurait dû bénéficier.

3^{ème} étape : Déterminer le nombre d'année de versement « d'arrérage futurs » (nommée « PGPF future ») qui s'étendent de la date de la décision judiciaire jusqu'à la reprise du travail de la victime ou sa retraite si la reprise est impossible. La rente versée est donc forcément une rente temporaire. Le versement sous forme de rente n'est recommandé⁷ qu'en cas d'une victime « non âgée » ne pouvant « plus ou quasiment plus travailler », dans tout autre cas, la capitalisation de la rente est recommandée.

A.3.3 Dépenses de Santé Futures

« Indemnisation des frais hospitaliers, médicaux, paramédicaux, pharmaceutiques, et assimilés, ainsi que les frais de pose de prothèse ou d'appareillage spécifique, rendus nécessaires par l'état [...] de la victime après consolidation. » (Dintilhac, 2005)

L'expert médicale définit le besoin en matériel, son coût et sa fréquence de renouvellement. La distinction est faite entre : frais occasionnels (i.e. dépenses uniques comme traitement médical à durée déterminée, traitement chirurgicale pour réparation esthétique, etc.) et frais viagers (i.e. les dépenses répétitives, *ad vitam aeternam*, pour la victime comme l'hospitalisation définitive ou régulièrement répétés, les prescriptions pharmaceutiques, les prothèses et du matériel (fauteuils roulants, etc.)). Les paiements des frais occasionnels sont encouragés à prendre la forme de capital, de même pour les paiements des frais viagers si la gravité n'est pas trop importante ou, à l'inverse, si l'âge de la victime l'est un peu trop.

Le poste de préjudice Dépense de Santé Futur est particulier, en ce sens que deux acteurs différents sont à indemniser : la Sécurité Sociale ou d'autres organismes sociaux qui couvrent une grande partie, parfois même la totalité, des frais médicaux de la victime. Tous les frais avancés par les organismes sociaux ne peuvent être sujet à indemnisation pour la victime, cela permettrait un enrichissement, mais ces frais incombent toujours à la responsabilité de l'auteur des dommages. Ce système implique donc la mise en place d'actions subrogatoire des organismes sociaux afin d'obtenir un remboursement des frais avancés auprès de l'assureur du responsable de l'accident. Cependant, le remboursement versé par l'assureur ne correspond pas toujours à la valeur exacte des frais, afin d'accélérer le processus d'indemnisation un barème a été mis en place entre les trois caisses nationales d'assurance maladie (CNAMTS, CANAM et la CCMSA) et les assureurs lors de la signature du protocole Bergeras en

¹La tâche est plus complexe si la victime est un artisan, commerçant, membre des professions libérales ou agriculteur car dans ce cas il doit justifier son préjudice.

1983. Ainsi, considérer l'ensemble des frais médicaux payés par la population française serait une simplification contrefaite de la réalité.¹

A.3.4 Bipolarité du Droit Français

Toutes ces considérations mettent en avant les limites atteintes par la nomenclature de Dintilhac, ne parvenant pas à endiguer l' « inflation des postes de préjudices corporels ». Ces limites retranscrivent la position bipolaire du Droit français. D'un côté, le principe de réparation intégrale qui prohibe toute grille de montants d'indemnisation, auquel s'ajoute l'impossibilité pour toutes règles d'évaluation et d'indemnisation d'être considérées comme un barème², qui poussent vers une augmentation constante des indemnisations. De l'autre, le principe d'égalité de traitement entre victimes qui tend à mettre en place un cadre indemnitaire pour assurer une gestion plus pérenne de celles-ci dans le temps.

¹Pour plus d'informations consulter : <https://www.senat.fr/questions/base/2005/qSEQ050517710.html>

²Ceci contreviendrait au rôle des juges du fonds

Appendix B

Notions Supplémentaires

B.1 Les rentes en assurance non-vie

Les paiements de sinistres sous la forme de rente en assurance de biens et des responsabilités ne sont pas forcément la norme, quelques rappels supplémentaires sur les rentes en assurance non-vie sont peut-être à apporter.

Étapes de vie : La rente est dite « attribuée » dès lors que tous ses termes sont définis (taux, temporalité, indexation, arrérage, ...).

- Avant attribution de la rente : le montant estimé de la rente est enregistré dans la PSAP.
- À l'attribution : le montant à payer est alors nommé Capital Constitutif de Rente (CCR). Des versements immédiats, dus aux arrérages échus, peuvent avoir lieu.
- Après attribution : montants restants à payer sont enregistrés en PM. Peut y avoir un montant conservé en PSAP pour considérer la consolidation de la victime.

Révision de rente : Deux types possibles de demande de révision :

- Modification de l'état de santé de la victime.
- Modification de l'état situationnel de la victime (parents trop vieux pour s'en occuper, décès des parents, ...).

L'existence d'un lien de cause à effet entre le sinistre et cette nouvelle demande d'indemnisation doit cependant toujours être prouvée. L'évolution de l'état situationnel de la victime est au maximum envisagé en amont, au moment de l'attribution de la rente afin justement d'éviter cette situation de révision de la rente.

En cas de l'attribution d'un complément de rente (i.e. attribution d'une révision de la rente), deux méthodes de gestion sont possibles :

- Ouverture d'une rente complémentaire dont l'arrérage correspond à la somme nouvellement attribuée.
- Clôture de la rente initiale et ouverture de la rente révisée.

Indexation de rente : Les rentes sont toutes soumises à l'indexation de leur arrérage, c'est-à-dire que la valeur de l'arrérage sera révisée en fonction de l'évolution d'un indice choisi. Le principe étant de considérer l'inflation à laquelle est soumise la victime puisque le taux d'actualisation est construit à taux réel.

L'indexation est finalement un cas particulier de la révision de rente : la rente révisée correspond au montant versé de l'ancienne rente auquel on ajoute la différence causée par l'indexation. Depuis 2013, l'assureur porte seul les coûts des indexations des rentes ; en assurance automobile les rentes doivent être indexées sur l'Indice des Coûts à la Consommation – Ensemble – Hors Tabac, France (INSEE, idBank : [001763852](#)).

Des cas antérieurs à 2013, où l'indexation des rentes doit être payée par l'Etat, peuvent encore être présents dans les bases de données étudiées. Dans ce cas, l'assureur doit obligatoirement ouvrir une nouvelle rente (sans clôturer l'ancienne) sinon il perd la prise en charge de l'Etat.

Remarque : Les traités de réassurance n'ont aucune obligation de considérer l'indexation des rentes.

Taux minimum d'actualisation des rentes : En assurance vie, ce taux est nommé « taux technique » et correspond au taux de rendement minimum garantie sur toute la durée du contrat. Ce taux reconnaît une valeur minimale réglementaire définie et contrôlée par l'ACPR. Les rentes d'indemnisation versées en responsabilité civile reposent également sur un taux de rendement annuel supposé, qui donne le taux de référence d'actualisation pour le provisionnement de ces rentes. La valeur minimale de ce taux d'actualisation est donc soumise à une réglementation.

Historique du taux réglementaire :

- 1996 :

$$\text{Taux d'actualisation} \leq \min(60\% \times \text{TME}_{6 \text{ mois}} ; 3,5\%)$$

- 1er janvier 2014 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taux d'actualisation} \leq \min(60\% \times \text{TME}_{24 \text{ mois}} ; 3,5\%) \\ \text{(et)} \\ \text{Inflation} = 2,25\% \end{array} \right.$$

- 1er janvier 2019 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Taux d'actualisation} \leq \min(60\% \times \text{TME}_{24 \text{ mois}} + 0,1\% ; 3,5\%) \\ \text{(et)} \\ \text{Inflation} = 2\% \end{array} \right.$$

Rappels :

TME : Taux des emprunts d'Etat ayant une échéance de plus de 7 ans. Indice mensuel : Moyenne arithmétique des TEC(10) du mois augmentée d'une marge de 0.05%.

TEC(n) : Taux de l'Echéance Constante n ans : le taux de rendement actuariel d'une valeur du Trésor fictive dont la durée de vie serait à chaque instant égale à n années. Ce taux est obtenu par interpolation linéaire entre les taux de rendement actuariels annuels des 2 valeurs du Trésor qui encadrent au plus proche la maturité n.

Risque de mortalités : Attention : Manque de données pour appuyer les propos engagés.

En assurance vie, deux types de risques de mortalité cohabitent : le risque de survie et le risque de décès. Dans le cas des rentes en assurance de biens et de responsabilités, seul le risque de survie est à prendre en considération.

Aucune étude n'a pu être trouvée sur l'évolution de la survie des accidentés de la circulation. Cependant, il paraît peu vraisemblable qu'aucun des bouleversements de la mortalité humaine de ces dernières années n'aient eu d'impact sur cette population précise. Les progrès médicaux, les traitements de maladies, les techniques d'opérations post-traumatiques et les appareils techniques à disposition ont permis d'augmenter l'espérance de vie. La conscience accrue de la santé et l'évolution des traitements dédiés aux handicaps (centre de rééducation, hospitalisation au domicile, ...) sont d'autant de points qui nous amènent à penser que l'espérance de vie des victimes corporelles graves, éligible à des rentes à vie, s'est améliorée au cours de ces 20 dernières années. Mais, aucune étude publiée n'a pu être trouvée pour valider ou invalider ce postulat.

Risque de placement : Le rendement des investissements occupe une place centrale dans la gestion des rentes. Le taux minimum d'actualisation force à obtenir des rendements au moins égaux, voire supérieurs si l'assureur veut dégager une marge pour rembourser les coûts de gestion. ... Ainsi l'assureur s'expose à un risque de taux, si ceux-ci descendent trop bas, et à un risque de défaut si finalement les garanties des investissements réalisés s'effondrent.

Rentes Capitalisées - Gazette du Palais : Seul le barème de la Gazette du Palais a été étudié lors de la tarification du risque RC Auto, une mention brèves de "l'inconstance des hypothèses" est faite dans le mémoire sans plus de développement. Cette partie de l'annexe est donc dédiée à éclaircir ce point avec une présentation très succincte de ce barème.

Ce barème se veut simple et facilement utilisable. Le document fournit des tables de conversion d'une rente d'arrérage sous forme d'annuité de 1 euro en capital. Les dernières publications de ce barème sont toutes construites sur 3 éléments principaux :

- Une table de mortalité : la table de l'INSEE la plus récente est toujours retenue.
- Un taux d'intérêt : représentant le taux de rendement que peut espérer un particulier, un taux qui se veut sans risque et constant que l'on construit sur le TEC(10).
- Un taux d'inflation : construit sur l'IPC Ensemble – Hors tabac, France.

L'inconstance des hypothèses tenues est la critique la plus répandue pour ce barème, des changements assez drastiques sont régulièrement réalisés, notamment sur les périodes de référence des indices utilisés pour construire les taux (pour le taux d'intérêt, donc basé sur le TEC(10), une moyenne de 6 mois est considérée en 2013, un moyenne sur 24 mois à partir de 2018). Un autre changement marquant, le taux d'inflation n'est considéré qu'à partir de 2013, auparavant le taux d'intérêt restait considéré en valeur nominale et non réelle. Mais des changements qui correspondent finalement à ceux du cadre juridique : les changements de table de mortalité appuient également le mouvement d'augmentation des P€R proposés.

Chaque publication présente des tables de conversion sur deux taux d'intérêt réel possibles, en livrant une recommandation sur lequel choisir (exception faite de la publication de 2022, la situation future étant jugée trop instable pour encourager sans concession un seul des deux taux présentés).

B.2 Conventions d'assureurs sur la branche RC Auto

Deux conventions entre assureurs ont pour but d'accélérer et de simplifier l'indemnisation des victimes. Le principe est de mettre en place une indemnisation directe suivie de recours entre assureurs.

- Convention IRCA¹ :² La Convention d'Indemnisation et de Recours Corporel Automobile, créée le 1er avril 2002, concerne les accidents de la circulation survenus sur le sol français, impliquant au moins deux véhicules et dont le(s) victime(s) souffrent de blessures corporelles légères³. L'objectif de cette convention est de constituer un interlocuteur unique pour les victimes : l'assureur direct⁴ de celle-ci se chargera de tout le processus d'indemnisation, puis ensuite de mener des actions subrogatoires auprès de la sécurité sociale pour rembourser les frais avancés puis auprès de l'assureur du responsable pour obtenir le remboursement des versements effectués. Pour fluidifier les échanges financiers entre les compagnies, en 2010, la convention a instauré une règle sur les montants échangés en cas de recours :
 - Si la victime ne présente aucune séquelle physique : le recours est forfaitaire (un simple forfait fixé chaque année est versé par l'assureur du responsable, 1200 € en 2023)
 - Si la victime présente des séquelles physiques légères : le recours se fait sur le prix réel des indemnisations versées.
- Convention IRSA⁵ :⁶ La Convention d'Indemnisation directe de l'assuré et de Recours entre Sociétés d'assurance Automobile, créée en 2003, concerne tous les dommages matériels des accidents de la circulation survenus sur le sol français, impliquant au moins deux véhicules. L'assureur s'engage à indemniser directement son assuré-victime en estimant le montant et la responsabilité de la partie adverse selon le constat à l'amiable. Puis l'assureur réalise un recours envers l'assureur du responsable, selon les modalités suivantes :
 - Si le montant estimé des dommages est inférieur à 6500€ : le recours est forfaitaire, un forfait maximum est déterminé annuellement (1776€ en 2023) puis pondéré par la responsabilité de la victime, déterminée selon un barème de la convention.
 - Si le montant estimé des dommages est supérieur à 6500€ : le recours se fait sur le prix réel des indemnisations versées.

¹ Anciennement ICA puis IDAC

² Index Assurance, <https://www.index-assurance.fr/pratique/sinistre/convention-irca>

³ Un seuil de gravité de blessure physique est fixé (5% d'AIPP), plus de 90% des accidents corporels sont alors considérés par cette convention.

⁴ En cas d'absence d'assurance, l'assureur du « véhicule percuteur » est choisi et dans des cas plus complexes, « l'assureur du véhicule portant le plus faible numéro minéralogique parmi ceux impliqués dans l'accident » est sélectionné.

⁵ Anciennement IDA puis GGIRSA

⁶ Index Assurance, <https://www.index-assurance.fr/pratique/sinistre/convention-irsa>

B.3 Brève introduction aux contrats de réassurance

Cette partie est grandement inspiré de Blondeau and Partrat (2003, Chapitre 2)

Le nom de cette partie exprime déjà son caractère succin, l'objectif ici n'est pas de décrire l'entièreté des contrats de réassurance mais bien uniquement de présenter rapidement les notions utilisées dans ce mémoire. D'autant plus que les précisions faites dans les lignes suivantes sont rédigées à partir d'un point de vue cessionnaire.

Les raisons à l'origine de la création d'un contrat de réassurance peuvent être très nombreuses. La liste suivante en présente quelques-unes, sans pour autant se prétendre exhaustive, mais cela permet de faire état du nombre important des besoins divers auxquels la réassurance fournit des solutions.

- Accompagnement sur de nouvelles affaires.
- Augmenter sa capacité de souscription.
- Stabiliser son résultat / diminuer la volatilité des pertes.
- Se protéger de sinistres rares et extrêmes.
- Se protéger contre des cumuls de sinistres au cours d'une période ou d'un évènement particulier.
- Réduire le besoin en capital.
- Accéder à une diversification plus importante de portefeuille.

Nécessairement, des contrats qui couvrent autant de raisons d'être si différentes ne peuvent que prendre des formes tout autant diverses. Ainsi, classiquement, les contrats sont distingués en deux fois deux catégories.

D'abord, deux modes de réassurance sont à différencier ¹ :

- **La réassurance facultative** : le mode le plus simple et le plus ancien de réassurance. L'assureur et le réassureur sont respectivement libres de céder ou d'accepter un risque en totalité ou en partie. La réassurance facultative est principalement utilisée dans les cas de très grands risques ou de risques rarement souscrits par la compagnie mais acceptés à titre commercial. Dans ce cadre, l'assureur doit s'assurer du concours des réassureurs avant d'accepter une affaire. Pour les réassureurs, ce mode nécessite de fortes capacités de souscription et connaissances des risques mais surtout implique au global des frais de gestions important. Par conséquent, ce mode de réassurance est peu présent sur le marché et totalement absent de ce mémoire.
- **La réassurance automatique** (ou plus souvent appelée **réassurance obligatoire**) : toutes les affaires sont cédées et acceptées. Le mot obligatoire vient du fait que ce mode établit des obligations réciproques entre assureur et réassureur. Cependant, tout commence par un abandon **volontaire** d'un risque (en totalité ou en partie) qui implique ensuite une indemnisation « automatique » si une perte est présentée aux réassureurs. Ce mode de réassurance est, de loin, le plus couramment utilisé.

Les contrats de réassurance automatiques/obligatoires sont appelés **traités**. Dès lors, ce terme sera utilisé pour désigner tout contrat puisque tous les contrats considérés dans ce mémoire appartiennent à ce mode de réassurance. Ainsi, même si les lignes suivantes s'appliquent aussi aux contrats de réassurance facultative, ces derniers sont écartés.

¹Certains auteurs font plutôt la distinction entre trois à quatre modes, tous les contrats de ce mémoire appartenant à un seul et unique mode, ces précisions sont ignorées.

Deux types de traités de réassurance sont à distinguer :

- Les traités de **réassurance proportionnelle** : pour ce type de contrats l'assureur s'engage à céder au réassureur une fraction des primes en échanges de la prise en charge par ce dernier de la même fraction du montant des sinistres. Au sein de ce type de traité, deux formes sont différenciables :
 - Les traités en Quote Part : le réassureur prend en charge une proportion identique sur **tous** les risques du portefeuille.
 - Les traités en Excédent de Plein : la fraction à céder (et donc à indemniser) est calculée police par police.
- Les traités de **réassurance non-proportionnelle** : ces traités sont définis autour d'une franchise (ou priorité) et d'un plafond (ou d'une portée)¹. Le réassureur prend en charge la partie du sinistre qui excède la priorité, dans la limite de la portée. En contrepartie, le réassureur reçoit une prime. Classiquement, deux types de traités non-proportionnels sont différenciés :
 - Les traités en *excédent de sinistre* (ou "*excess of loss*") : ces traités sont notés Portée XS Priorité (ou XL) et sont eux-mêmes décomposés en deux parties, selon la nature du sinistre définie dans le traité : les XS par risque et les XS par évènement.

Dans un traité en excédent de sinistre par risque, le réassureur s'engage à payer, sur une période donnée (généralement un exercice comptable), un montant inférieur ou égal à la portée dès lors qu'une police est sinistrée d'un montant supérieur à la franchise.

Dans un traité en excédent de sinistre par évènement est un traité qui intervient sur plusieurs polices sinistrées du fait d'une même cause, limité dans l'espace et dans le temps. Les exemples typiques d'applications de ces traités sont les catastrophes naturelles : inondations, tremblement de terre, tempêtes, etc. Cependant, ces traités peuvent aussi être utilisés en complément des XS par sinistre, lorsqu'un assureur souhaite se couvrir contre le dédoublement de la franchise dans le cas où un même évènement occasionnerait un sinistre sur au moins deux polices d'un portefeuille (par exemple deux individus dans une voiture subissant un accident).
 - Les traités en *excédent de perte annuelle* (ou "*aggregate excess of loss*" dont une variante nommée "*stop loss*") : ces traités interviennent lorsqu'un assureur cherche à se couvrir contre les mauvais résultats, en admettant cette fois une vision cumulée des sinistres. Dans ce contrat, « l'évènement » considéré correspond à l'ensemble des polices sinistrées pendant une période de référence. Ainsi, le plus souvent la franchise de ce type de contrat est notée AAD ("*Annual Aggregate Deductible*") et la portée (ou engagement maximal) est noté AAL ("*Annual Aggregate Limit*").

Les grands principes des contrats de réassurance sont dorénavant énoncés, mais dans les faits la majeure partie de ces contrats est finalement définie autour de clauses spécifiques.

Certaines clauses assurent le bon équilibre entre assureur et réassureur, notamment pour les traités proportionnels. D'autres servent à réduire l'exposition du réassureur et par la même occasion à réduire le coût d'un traité.

L'intérêt d'engager une longue liste de présentation de clauses classiques étant limités, seules les clauses essentielles des traités majoritairement utilisés dans ce mémoire (les traités en excédent de sinistre de la branche RC Auto) seront introduites.

¹Plafond = Priorité + Portée

- **La clause de reconstitution** de garantie : offre la possibilité d’obtenir un certain nombre de couverture(s) supplémentaire(s) lorsqu’une portée entière de la tranche est consommée. Chaque portée supplémentaire ainsi accessible est nommée reconstitution, le prix de chacune d’entre-elle (qui peut être nul) doit également être fixé dans la clause.

Cette clause permet d’exprimer une limite annuelle (ou AAL) selon un nombre fixé de portée.

- **La clause de rente** : sert à déterminer la contribution des préjudices indemnisés sous forme de rente dans la perte nette définitive d’un sinistre.

Cette clause doit impérativement contenir :

- La méthode de calcul du Capital Constitutif de Rente (table de mortalité, taux d’actualisation, etc.).
- Les spécificités et révisions d’arrérages à appliquer en cas de réouverture(s) ou de révision suite au décès (modalités, durée considérées, etc.).
- La prise en compte de l’indexation / revalorisation des rentes dans le calcul de la perte nette définitive.
- La spécificité du suivi des provisionnements par le réassureur.

Et enfin, la clause doit définir les modalités de paiement de l’indemnisation sous forme de rente par le réassureur. Selon cette modalité, trois grandes catégories de clause de rente ont été défini :

- Le suivi proportionnel : Le montant du sinistre est considéré dans la durée mais à partir de l’estimation faite à la date d’attribution. Le montant de couverture impacté par le CCR définit la proportion à payer pour le réassureur sur l’ensemble de cette rente. Cette catégorie est citée comme une référence historique mais n’est plus en vigueur aujourd’hui.
- Le suivi additionnel : Le montant du sinistre est déterminé au fur et à mesure des paiements de l’assureur, chaque arrérage de rente est considéré comme un règlement distinct. Le réassureur intervient une fois que la somme des différents paiements a atteint la priorité du traité.
- La méthode du rachat : Le montant du sinistre n’est pas déterminé dans le temps mais dès sa date d’attribution. Le CCR est considéré comme le montant unique qui correspond à la totalité de la rente.

La rente est toujours servie par l’assureur à la victime, mais la perte nette définitive prend en considération l’indemnisation du réassureur réalisée sur la base du CCR.

- **La clause de stabilisation** : a pour objectif de répartir entre l’assureur et le réassureur la charge supplémentaire générée par l’inflation.

À chaque valorisation de sinistre, la portée et la franchise sont multipliées par un facteur (valeur réelle du sinistre divisée par une valeur théorique du sinistre dans laquelle celui-ci aurait été payé intégralement lors de son année de rattachement) et la couverture s’applique entre ces bornes modifiées.

Cette répartition implique un poids de l’inflation bien plus important pour l’assureur. Par conséquent, fréquemment, la partie des réassureurs accepte de prendre à leur charge une part supplémentaire de l’inflation. Des clauses de stabilisation **avec seuil** (seuil atteint (FIC : “*Full Index Clause*”) ou seuil déduit (SIC : “*Severe Inflation Clause*”)) sont alors utilisées.

- **La clause d'indexation** : accompagne fréquemment la clause de stabilisation (ce qui entraîne de nombreuses confusions entre celles-ci, d'autant que le terme "*Index*" dans la définition anglophone des seuils est trompeur). La clause d'indexation a pour but de mettre à jour les bornes du traité pour des exercices de survénance successives (à la différence de la clause de stabilisation qui poursuit l'objectif de partager l'inflation au cour d'un seul exercice donné).

B.4 Théorie de l'utilité espérée

Cette annexe n'a pour autre objectif que de fournir une présentation très succincte de la théorie de l'utilité espérée. La formalisation de cette théorie émerge dès le XVIII^{ème} siècle lorsque Nicolas Bernoulli expose le paradoxe de Saint-Pétersbourg, le résumé présenté dans les lignes suivantes d'une théorie autant développée admet donc certains raccourcis de forme et certainement de nombreux manquements. L'objectif est uniquement de fournir une rapide intuition des fonctions d'utilités.

L'ensemble des lignes qui suivent sont grandement inspirées de Kaas et al. (2008, Chapitre 1) auquel le lecteur intéressé pourra se référer.

Le centre de cette théorie est de caractériser la décision d'un agent dans un environnement incertain.

La considération la plus simple possible d'un environnement incertain ou risqué se fait au travers d'un ensemble fini dont chaque élément représente une alternative possible d'évolution.

Soient $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un ensemble fini de réalisations possibles et $p = \{p_1, \dots, p_n\}$ les probabilités des événements ω_i comprises entre 0 et 1 et dont la somme est égale à 1.

Une loterie L est définie comme un ensemble de vecteur, associant chaque alternative d'évolution à une probabilité d'occurrence :

$$L = \{(\omega_1, p_1), \dots, (\omega_n, p_n)\}.$$

Une loterie correspond finalement à une distribution de probabilité, une répartition des risque, des différentes évolutions possibles de l'environnement incertain.

Les loteries composées sont des loteries dont les éléments sont des loteries. Par exemple, une loterie composée de deux alternatives possibles : les loteries L^a et L^b définies sur Ω auxquelles sont associées respectivement les poids α et $1 - \alpha$. La probabilité de réalisation de ω_i sera $(\alpha p_i^a + (1 - \alpha)p_i^b)$ et la loterie composée, L^c , ainsi construite peut aussi être notée $\alpha L^a + (1 - \alpha)L^b$.

Le suivi de la décision d'un agent suppose implicitement que sa décision a un impact sur les évolutions de son environnement. Ainsi, la relation de « préférence » d'un agent doit être modélisée : définir comment celui-ci évalue les répartitions des risques pour choisir l'action à réaliser. La relation de préférence, notée \succ , est définie sur l'ensemble de loteries construites sur le même ensemble Ω , noté \mathcal{L} , qui représente l'ensemble des choix possibles de l'agent.

Dans la théorie de l'utilité espérée, trois axiomes fondamentaux sont définis sur cette relation afin d'assurer le comportement rationnel du décideur.

Axiome 1: Complétude, réflexivité et transitivité.

- La relation de préférence est complète.

$$\forall L^a \in \mathcal{L}, \forall L^b \in \mathcal{L}, L^a \succ L^b \text{ ou } L^b \succ L^a.$$

Si deux loteries sont chacune préférable l'une à l'autre, l'agent est indifférent entre celles-ci et donc la relation d'indifférence associée à \succ est notée \sim .

- La relation de préférence est réflexive.

$$\forall L \in \mathcal{L}, L \succcurlyeq L.$$

- La relation de préférence est transitive.

$$\forall L^a \in \mathcal{L}, \forall L^b \in \mathcal{L}, \forall L^c \in \mathcal{L}, L^a \succcurlyeq L^b \text{ et } L^b \succcurlyeq L^c \Rightarrow L^a \succcurlyeq L^c.$$

Axiome 2: Indépendance.

$$\forall L^a \in \mathcal{L}, \forall L^b \in \mathcal{L}, \forall L^c \in \mathcal{L}, \forall \alpha \in [0, 1], L^a \succcurlyeq L^b \Leftrightarrow \alpha L^a + (1 - \alpha)L^c \succcurlyeq \alpha L^b + (1 - \alpha)L^c.$$

Axiome 3 Continuité.

$$\forall L^a \in \mathcal{L}, \forall L^b \in \mathcal{L}, \forall L^c \in \mathcal{L}, \text{ si } L^a \succcurlyeq L^b \succcurlyeq L^c, \text{ alors } \exists \alpha \in [0, 1], L^b \sim \alpha L^a + (1 - \alpha)L^c.$$

La relation \succcurlyeq instaure une formalisation du « ressenti » de l'agent, mais ne permet aucune visualisation quantitative du phénomène. L'objectif est de construire une représentation fonctionnelle de la relation de préférence, or les axiomes de continuité et de survenance assurent justement l'existence et permettent la création d'un tel lien.

La théorie de l'utilité espérée admet l'hypothèse centrale que l'appréciation des alternatives risquées est mesurée par une relation linéaire vis-à-vis des probabilités de survenance. La supposition est faite qu'il existe une **fonction d'utilité** u définie sur l'ensemble des éventualités Ω et à valeurs dans \mathbb{R} telle que pour toutes les loteries de \mathcal{L} l'équivalence B.1 est vérifiée.

$$L^a \succcurlyeq L^b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n u(\omega_i)p_i^a \geq \sum_{i=1}^n u(\omega_i)p_i^b. \quad (\text{B.1})$$

La fonction d'utilité sert à associer un nombre **réel** à chaque réalisation possible de l'environnement et permet ainsi d'associer un « degré de satisfaction » pour chaque choix de l'agent.

La construction de cette théorie de modélisation du comportement des individus prend particulièrement sens dans la gestion de l'aversion au risque des agents.

La notion d'aversion au risque repose sur celle d'**équivalent certain**.

Un exemple simple consiste à supposer X , une variable aléatoire admettant deux valeurs : x_1 avec une probabilité p et x_2 avec une probabilité $1 - p$. A partir de cette variable, deux loteries sont étudiées. La première, L^b , offre le montant $\mathbb{E}[X]$ avec une probabilité égale à 1. Et la seconde, L^c , paie x_1 avec une probabilité p et x_2 avec une probabilité $1 - p$ (i.e. loterie dont le rendement espéré vaut $\mathbb{E}[X]$).

Ces deux loteries ont la même espérance de rendement, et pourtant un investisseur averse au risque choisira L^b plutôt que L^c car le gain moyen est certain. La loterie « sûre », notée $L^s(X)$, correspond à la loterie occasionnant le paiement certain d'un montant c , montant choisi tel que l'individu soit indifférent entre recevoir c avec un probabilité 1 et investir sur la loterie L^c . La loterie $L^s(X)$ correspond finalement à la loterie permettant d'atteindre le même niveau d'utilité que la loterie L^c .

L'évaluation selon la fonction d'utilité des trois loteries ainsi construites occasionne l'ordre décrit dans B.2.

$$L^b \succcurlyeq L^c \sim L^s(X) \Leftrightarrow u(\mathbb{E}[X]) \geq \mathbb{E}[u(X)] = u(c). \quad (\text{B.2})$$

Dans les faits, l'inégalité de B.2 n'est vraie que **si la fonction d'utilité u est concave** (inégalité de Jensen). Transparaît alors un avantage majeur de la théorie de l'utilité espérée, le contexte construit permet de caractériser entièrement l'aversion au risque d'un individu uniquement par des hypothèses sur sa fonction d'utilité.

Soit u une fonction d'utilité (supposée croissante) représentant les préférences d'un agent sur l'ensemble des éventualités.

1. La fonction u est concave si et seulement si l'individu est averse au risque.
2. La fonction u est affine si et seulement si l'individu est neutre au risque.
3. La fonction u est convexe si et seulement si l'individu est amateur de risque.

Déterminer exactement la fonction d'utilité correspondant aux comportement d'une personne est impossible, cependant disposer de mesures de comparaisons entre ces fonctions pourrait permettre des adéquations de meilleures qualités. Par exemple, en reprenant la variable aléatoire X , on peut s'interroger sur l'importance de l'écart entre $\mathbb{E}[u(X)]$ et c .

Lorsque u est croissante et deux fois différentiable, deux coefficients sont principalement utilisés pour la mesure du degré d'aversion au risque d'un individu.

- L'aversion absolue au risque d'Arrow-Pratt (ARA : « *Absolute Risk Aversion* »)).

$$A(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)}.$$

Ce coefficient varie selon la courbure de la fonction d'utilité, plus le coefficient est élevé plus l'agent sera averse au risque.

- L'aversion relative au risque d'Arrow-Pratt (RRA : « *Realtive Risk Aversion* »).

$$R(x) = x \times A(x) = x \times \frac{-u''(x)}{u'(x)}.$$

Ce coefficient cherche à retranscrire les changements de visions du risque par l'individu occasionnés par une augmentation de la richesse.

Ces coefficients servent aussi à créer des « familles » de fonctions d'utilité, en associant une caractéristique à un de ces deux coefficients (C pour constant, H pour hyperbolique, D pour décroissant, I pour croissant). Des distinctions majeures sont alors très rapidement identifiables entre les fonctions. Ainsi, les fonctions d'utilité dites exponentielles correspondent à la catégorie CARA (« *Constant Absolute Risk Aversion* »).

Appendix C

Suppléments des résultats obtenus

C.1 Exemple d'application de la vision « *As-If* »

N°Sinistre	Développement, j :	1	2	3	4	5	6	7	8
3	Paiements Cumulés ($P_{2015,j}^3$) :	0	30.47	30.47	620.31	620.31	621.73	2028.32	2028.32
	Paiements Annuels ($\Delta_{j,j-1}P^3$) :	0	30.47	0	589.85	0	1.42	1406.59	0
Survenance 2015	Suspens ($S_{2015,j}^3$) :	0	1046.62	2792.55	1675.60	2201.34	2201.34	111.42	96.91
	Charges ($C_{2015,j}^3$) :	0	1077.08	2823.02	2295.91	2821.66	2823.08	2139.74	2125.23

Table C.1: Sinistre 3

Étape 1

Années	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Facteurs de Revalorisation - 2023	1.26	1.25	1.22	1.18	1.14	1.11	1.07	1.01	1.00

Table C.2: Facteurs de Revalorisation - 2023 - Indice des dommages corporels

Étape 2

Développement :	1	2	3	4	5	6	7	8
Cumulés « <i>As-If</i> » ($P_{2015,j}^{3,AsIf2023}$) :	0	37.94	37.94	734.59	734.59	736.17	2241.23	2241.23
Annuels « <i>As-If</i> » ($\Delta_{j,j-1}P^{3,AsIf2023}$) :	0	37.94	0	696.65	0	1.58	1505.06	0
Suspens « <i>As-If</i> » ($S_{2015,j}^{3,AsIf2023}$) :	0	1303.26	3412.71	1979	2518.70	2447.52	119.22	98.17
Charges « <i>As-If</i> » ($C_{2015,j}^{3,AsIf2023}$) :	0	1341.20	3450.65	2713.59	3253.29	3183.69	2360.45	2339.40

Table C.3: Sinistre 3 « *As-If* »

Étape 3

C.2 Résultats Algorithme Chain Ladder

Coûts des sinistres

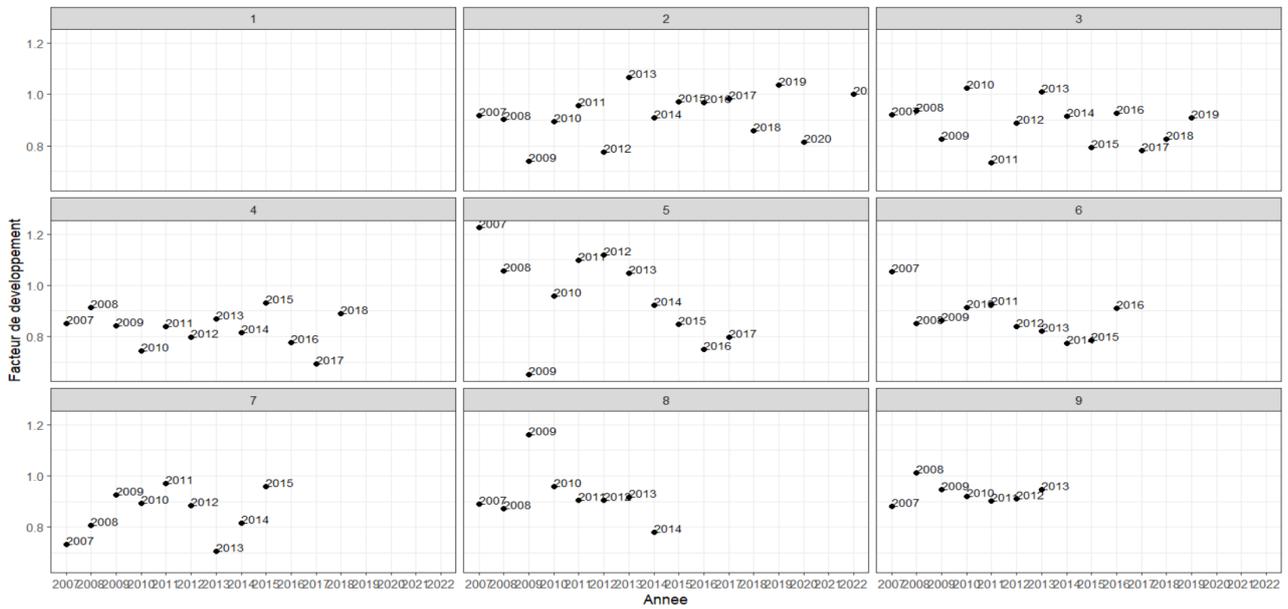


Figure C.1: Facteurs de Développement - $\lambda_{i,j}, 2 \leq j \leq 9$

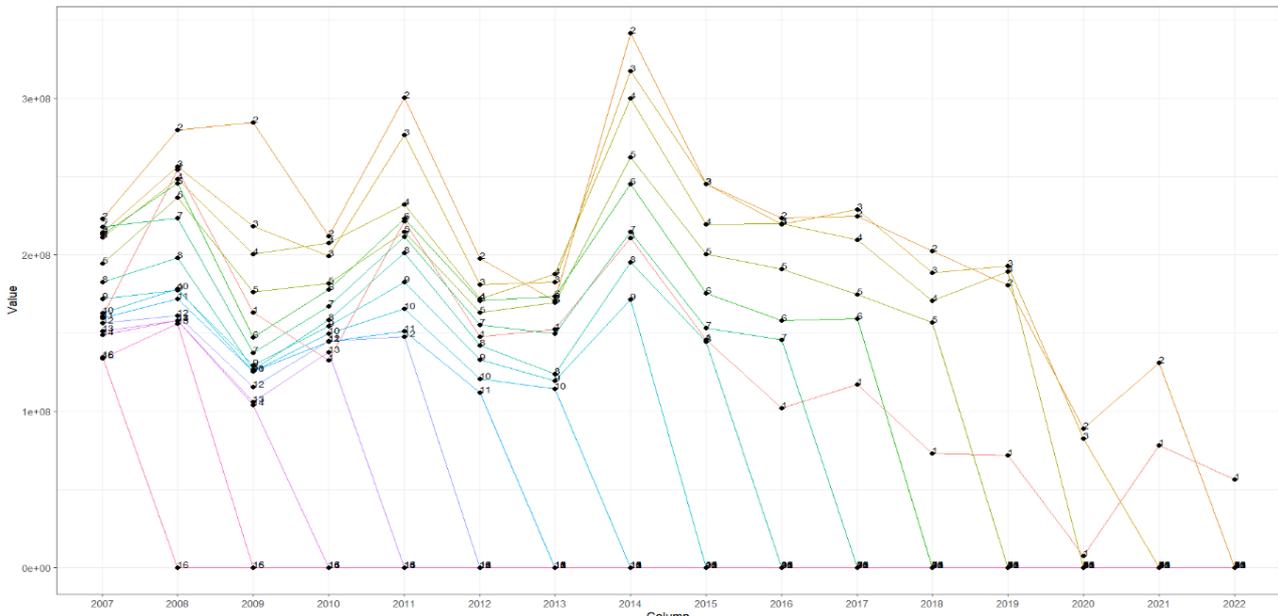


Figure C.2: Évolution des colonnes du triangle

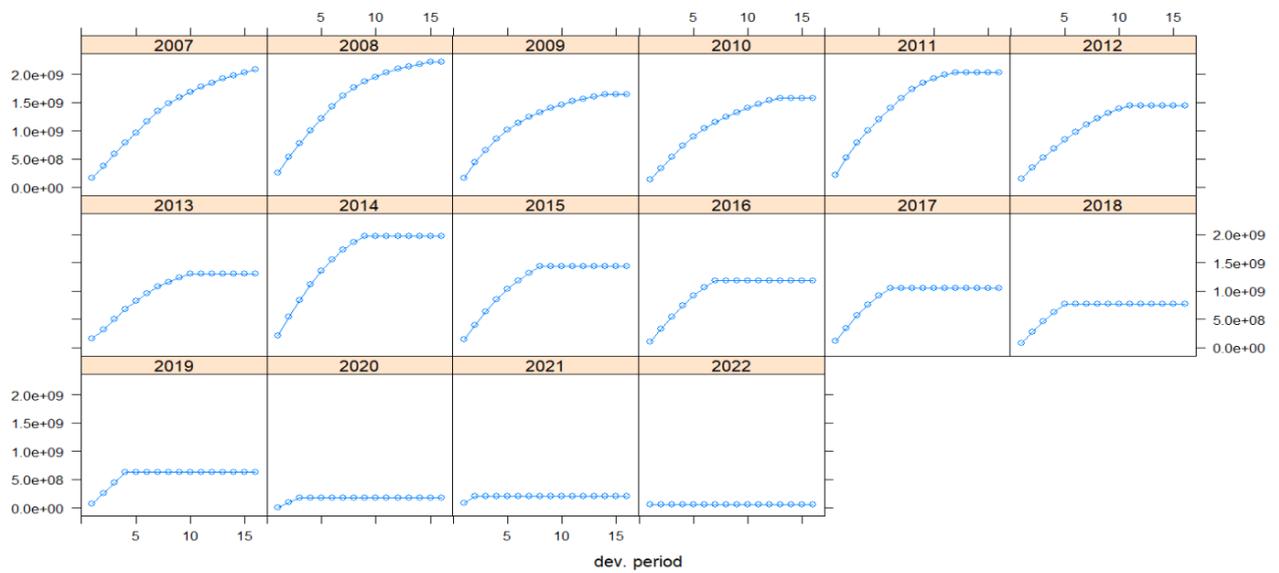


Figure C.3: Évolution des lignes du triangle