

**Mémoire présenté le :
pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaraires**

Par : Monsieur PAFADNAM Jordan

Titre du mémoire : Valorisation, maîtrise et projection des unités de compte produits structurés

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

Membres présents du jury de la
filière :

Signature :

Entreprise :



Nom :

Signature :

Directeur de mémoire en
entreprise

Membres présents du jury de
l'Institut des Actuaraires :

Signature :

Nom : Charline Mordelet

Signature : *Charline Mordelet*

Invité :

Nom :

Signature :

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels (après expiration
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable
entreprise :

Charline Mordelet

Signature du candidat :

Jordan Pafadnam



Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement ma tutrice en entreprise, Charline Mordelet. Son implication et sa capacité à enseigner ont été essentielles tout au long de ce projet.

Un grand merci également à Léo Henry Biabaud, Directeur ALM et Technique pour son soutien et son expertise.

Je tiens également à remercier sincèrement Olivier Meunier, Directeur Financier, pour sa lecture attentive de mon mémoire et son aide.

Je souhaite remercier mon tuteur académique à l'ISUP, Thomas Debais pour ses conseils et sa disponibilité.

Un remerciement particulier à l'équipe Actuariat et l'équipe ALM pour leur accueil chaleureux et leur professionnalisme au sein de l'entreprise.

Enfin, je remercie le corps enseignant de l'ISUP, dirigé par Olivier Lopez, pour la qualité des enseignements qui ont été indispensables à l'accomplissement de ce travail.

Résumé

Mots-clés : Produits structurés, Unités de compte, Grecques, Sensibilités, Projection, Volatilité stochastique, Longstaff-Schwartz, Monte Carlo, Valorisation, Pricing, ALM, Modèle action, Risque action, Processus stochastique, Modèle stochastique, Taux court, Tests de martingales, Callable, SCR, Solvabilité II, Générateur de scénarios économiques, Modèle ALM, Univers risque-neutre.

Dans un climat financier turbulent marqué par une augmentation de la volatilité implicite, de l'inflation, des taux d'intérêt et une chute des marchés actions, les compagnies d'assurances recherchent des solutions innovantes pour sécuriser leurs engagements et optimiser les rendements pour leurs assurés. Ce mémoire se focalise sur les produits structurés, notamment Conservateur Double Opportunité, proposé par les Assurances Mutuelles Le Conservateur à ses sociétaires. Ce produit offre une espérance de rendement attractif tout en sécurisant l'investissement dans divers scénarios défavorables de marché.

L'étude présente une analyse détaillée du Conservateur Double Opportunité, mettant en lumière sa pertinence dans le paysage financier actuel. De tels produits nécessitent une compréhension approfondie depuis leur conception, en passant par le développement d'un pricer approprié, la production d'indicateurs de risque pour la gestion des risques et une modélisation pertinente dans le modèle ALM de l'assureur.

Après avoir sélectionné la méthode de Monte Carlo pour la valorisation des produits structurés, l'étude se penche sur le développement d'un modèle action adapté dans le générateur de scénarios économiques (GSE) interne de l'entreprise. Le pricer des produits structurés est présenté puis validé. La production de sensibilités aux facteurs de marché fait l'objet d'une étude menant à proposer une modélisation pertinente de ces produits dans le modèle ALM.

Cette recherche contribuera à la compréhension des produits structurés et de leur rôle dans la gestion du risque financier face à l'instabilité économique actuelle. Toutefois, elle ne marquera pas la fin des recherches menées dans ce domaine, les assureurs continuant à explorer de nouvelles stratégies pour gérer les défis économiques et réglementaires actuels.

Abstract

Keywords : Structured Products, Unit-linked Insurance, Greeks, Sensitivities, Projection, Stochastic Volatility, Longstaff-Schwartz, Monte Carlo, Valuation, Pricing, ALM, Equity Model, Equity Risk, Stochastic Process, Stochastic Model, Short Rate, Martingale Tests, Callable, SCR, Solvency II, Economic Scenario Generator, ALM Model, Risk-neutral World.

In a turbulent financial climate marked by increased implied volatility, inflation, interest rates, and a decline in stock markets, insurance companies are seeking innovative solutions to secure their commitments and optimize returns for policyholders. This dissertation focuses on structured products, especially the Conservateur Double Opportunité, offered by Les Assurances Mutuelles Le Conservateur to its members. This product offers an expectation of attractive returns while securing the investment in various adverse market scenarios.

The study presents a detailed analysis of Conservateur Double Opportunité, highlighting its relevance in current financial field. Such products require a thorough understanding from their design, through the development of an appropriate pricing model, the production of risk indicators for risk management, to relevant modeling in the insurer's ALM (Asset and Liability Management) framework.

After selecting the Monte Carlo method for valuing structured products, the study delves into the development of a suitable equity model within the company's internal Economic Scenario Generator (ESG). Then we present and validate the pricing of structured products. The production of market factor sensitivities is studied, leading to a proposal for a relevant modeling of these products in the ALM model projections.

This research will contribute to our understanding of structured products and their role in managing financial risk in the face of current economic instability. However, it does not mark the end of research in this field, as insurers continue to explore new strategies to address current economic and regulatory challenges.

Table des matières

I	Importance du pricing des produits structurés	3
1	Généralités en assurance vie	3
1.1	Définitions	3
1.2	Contexte actuel	4
1.3	Aspects comptables et Solvabilité 2	8
2	Les produits structurés	11
2.1	Fonctionnement général	11
2.2	Support unités de compte et produits structurés	12
2.3	Les produits structurés COP et DOP : État actuel	13
3	Socle financier	18
3.1	Univers risque neutre	18
3.2	Taux sans risque	19
3.3	Gestion des risques	22
3.4	Les données du marché	22
4	Les enjeux de la valorisation des produits structurés	23
4.1	Évolution des produits structurés de l'entreprise	23
4.2	Points importants sur la nécessité de maîtriser les produits structurés	24
4.3	Problématique liée à l'outil actuel de maîtrise des produits structurés	24
II	Valorisation de produits structurés et générateur de scénarios économiques	25
5	Valorisation de produits structurés	25
5.1	Approche par formule fermée	25
5.2	Approche par simulation	28
5.3	Méthode retenue	29
6	Générateur de scénarios économiques : Généralités	29
6.1	Définitions	29
6.2	Utilisation du GSE	30
6.3	Les tests de sortie	31
6.4	Modèle de taux actuel	32
6.5	Modèle action actuel	33
7	Générateur de scénarios économiques : Implémentation d'un modèle action à volatilité stochastique	34
7.1	Préliminaires	34
7.2	Le modèle de Heston	34
7.3	Calibrage du modèle	36
7.4	Diffusion et validation du modèle : Schéma d'Euler	39
7.5	Diffusion et validation : Du schéma d'Euler à l'Exponentiel Quadratique	44
III	Valorisation, analyse des risques et maîtrise des produits structurés en contexte réglementaire	53
8	Valorisation des DOP	53
8.1	Les données nécessaires à la valorisation	53
8.2	Application de la méthode de Monte Carlo aux produits Conservateur Double Opportunité	53
8.3	Modélisation du remboursement anticipé	54
8.4	Validation et back-test de l'outil de pricing	57

8.5	Limites du pricer des DOP	58
9	Sensibilités	59
9.1	Définitions et méthode de calcul	59
9.2	Sensibilité action	61
9.3	Sensibilité taux	65
9.4	Sensibilités croisées	67
10	Maitrise du produit en vision Solvabilité 1 et Solvabilité 2	71
10.1	Vision Solvabilité 1 : analyse du risque de provision pour risque d'exigibilité	71
10.2	Vision Solvabilité 2 : Choc et projection dans le modèle ALM	73

Introduction

L'année 2022 a marqué une période particulièrement turbulente dans le monde de la finance. Les marchés financiers ont été le théâtre de mouvements importants : volatilités implicites en hausse, augmentation de l'inflation, remontée des taux d'intérêt et chute des marchés actions. Cet environnement financier, complexe et imprévisible, a généré un climat d'incertitude économique, amplifiant les défis auxquels sont confrontés les assureurs. Cette situation a créé une forte incitation pour les assureurs à rechercher des solutions innovantes pour sécuriser leurs engagements et optimiser les rendements pour leurs assurés. C'est dans ce contexte que les produits structurés ont gagné en popularité, offrant une espérance de rentabilité adaptée au profil de risque de l'investisseur.

C'est dans cette conjoncture que s'inscrit ce mémoire, qui se propose d'étudier les produits structurés dans le domaine assurantiel, à travers le prisme du Conservateur Double Opportunité. Ce produit structuré particulier offre des opportunités de rendement intéressantes, tout en sécurisant l'investissement de l'épargnant dans une large gamme de scénarios de marché défavorables. L'objectif de cette recherche est d'approfondir notre compréhension de ces instruments financiers sophistiqués et de leur place dans le portefeuille des assureurs, au service des épargnants.

De ce fait, ce mémoire présentera une analyse détaillée du Conservateur Double Opportunité, de ses mécanismes financiers et de ses avantages pour l'assureur et l'épargnant. L'objectif étant une maîtrise des risques financiers, une première étape consistera à étudier les méthodes de valorisation de produits structurés, la méthode sélectionnée mènera alors à développer un nouveau modèle action dans le générateur de scénarios économiques. Par la suite, la compréhension des mécanismes de valorisation des produits sera abordée. Un point crucial sera la production d'indicateurs pertinents pour la gestion des risques ainsi que la modélisation des produits structurés dans le modèle ALM.

Première partie

Importance du pricing des produits structurés

De nombreuses compagnies d'assurance-vie commencent à proposer des produits structurés sur leur support en unités de compte. L'objectif de cette première partie est de mettre en lumière le caractère innovant apporté par ces produits structurés à l'assurance-vie dans un contexte économique difficile, ainsi que l'importance de savoir évaluer et maîtriser le risque lié à ces nouveaux produits.

La première section traite des généralités sur l'assurance-vie, de sa définition aux normes prudentielles et aspects comptables, tout en abordant le contexte économique actuel. La seconde partie décrit le fonctionnement des produits structurés, en détaillant les spécificités des produits proposés par l'entreprise. La troisième section expose les connaissances financières indispensables à la bonne compréhension de l'étude. Enfin, la quatrième section dresse un état des lieux des outils de maîtrise de ces produits et met en évidence les enjeux de la valorisation des produits structurés présents sur le support en unités de compte.

1 Généralités en assurance vie

Dans cette section, nous présentons les caractéristiques des contrats d'assurance vie. Nous effectuons ensuite une description du contexte économique actuel. Nous introduisons également le cadre prudentiel ainsi que certaines notions de comptabilité.

1.1 Définitions

1.1.1 Les contrats en assurance vie

L'assurance vie est un accord entre l'assureur et le souscripteur, où l'assureur s'engage à verser une somme d'argent, soit un capital ou une rente, à des personnes spécifiées en échange du paiement de primes, dans le cas où un événement lié à la durée de vie de l'assuré se produit. Il existe différents types de contrats d'assurance vie, pouvant présenter conjointement les prestations suivantes :

- L'assurance en cas de **décès**, où l'assureur s'engage à payer une prestation à des bénéficiaires en cas de décès de l'assuré avant la fin du contrat.
- L'assurance en cas de **vie**, où l'assureur s'engage à payer une prestation à des bénéficiaires si l'assuré est toujours en vie à la fin du contrat.

1.1.2 Les différents types de support

Les contrats d'assurance-vie se déclinent majoritairement en deux formes : les contrats en euros et les contrats multisupports, aussi désignés comme contrats en unités de compte.

Pour un contrat **en euros**, l'encours de l'assuré est intégralement placé dans le fonds euro. Ce type de contrat est reconnu pour sa sécurité puisque le capital investi est garanti par l'assureur. De plus, chaque année, cet encours bénéficie d'une réévaluation basée sur le taux minimum garanti (TMG) ainsi que la participation aux bénéfices (PB), faisant de lui un placement à faible risque.

D'un autre côté, le contrat d'assurance-vie **multisupports** offre une plus grande diversité d'investissement. Il permet à l'assuré de répartir son capital sur plusieurs fonds, dont des fonds en unités de compte, tout en conservant la possibilité d'allouer une partie dans le fonds euro. Bien que le contrat précise le nombre de parts acquises dans chaque fond, la valeur de ces parts dépend des fluctuations des marchés financiers. Ainsi, contrairement au contrat en euros, le risque de marché est porté entièrement par l'assuré.

1.1.3 Les options

En assurance vie, l'**option de rachat**, permet à l'assuré de récupérer totalement ou partiellement son épargne.

L'**option d'arbitrage** est une fonctionnalité importante des contrats multisupports. Il s'agit d'une procédure qui permet à l'assuré de modifier la répartition de son portefeuille d'investissement entre les différents fonds d'investissement sous forme d'unités de compte ou le fonds euro, de manière totale ou partielle. Cependant, il est important de noter que certains contrats peuvent ne pas inclure cette option ou la limiter en termes de nombre et de montant. Par ailleurs, cette opération peut entraîner des frais supplémentaires prélevés par l'assureur.

1.2 Contexte actuel

1.2.1 Une année compliquée sur les marchés financiers

Le contexte actuel des marchés financiers en 2022 a été marqué par une série de mouvements notables, caractérisés par la hausse des volatilités implicites, de l'inflation, des taux d'intérêt et une baisse des marchés actions, reflétant un climat d'incertitude et de tension économique.

La volatilité implicite, tant sur les taux d'intérêt que sur les actions, a connu une augmentation significative en 2022. Cette hausse traduit une perception accrue du risque par les investisseurs, qui s'adaptent à un environnement économique de plus en plus imprévisible et complexe. La volatilité représente le risque intrinsèque de l'actif sous-jacent. Ainsi, une hausse de la volatilité implicite témoigne d'une augmentation du risque associé au sous-jacent.

Dans ce contexte, les investissements sur les marchés financiers deviennent plus risqués. Un investisseur ayant une faible appétence pour le risque pourrait ainsi être plus réticent à investir sur les marchés face à une telle situation.

Une option est un produit financier permettant à son détenteur d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (strike) à une date donnée. Une option est dite "à la monnaie" lorsque son prix d'exercice (strike) correspond au prix de marché actuel de l'actif sous-jacent. Le graphique suivant représente l'évolution de la volatilité implicite des options d'achat à la monnaie pour l'indice Euro Stoxx 50.

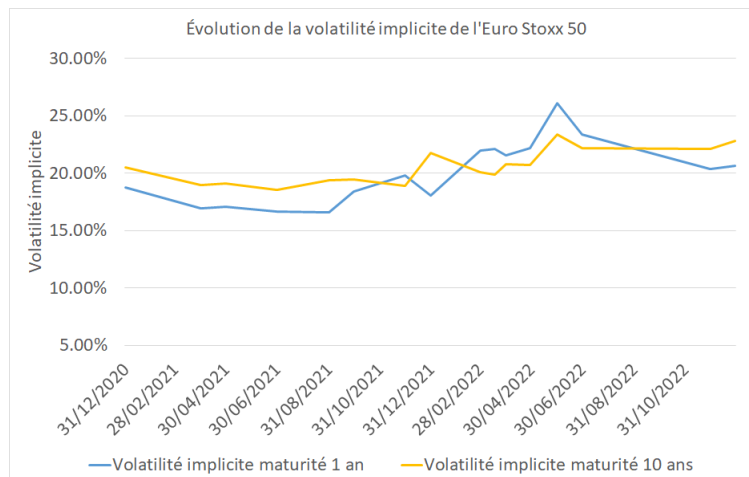


FIGURE 1 – Évolution de la volatilité implicite action

On observe que fin 2021, la volatilité implicite sur un an dépasse celle sur dix ans. Cela est typique d'une période de stress sur les marchés, où l'investissement à court terme devient plus risqué que l'investissement à long terme.

Un swaption est une option sur un swap qui commence dans T_1 ans et qui a une maturité de T_2 ans. T_1 est appelé le Tenor. Le graphique suivant représente la volatilité implicite des swaptions à la monnaie de Tenor 10 ans pour des maturités de 1 an et 10 ans.

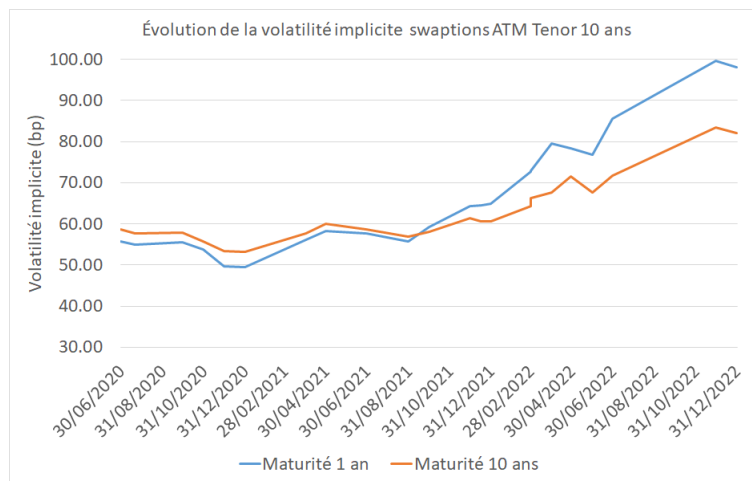


FIGURE 2 – Évolution de la volatilité implicite swaption

Encore une fois, au 30/09/2021, la volatilité implicite du swaption avec un tenor de 10 ans et une maturité de 1 an dépasse celle du swaption avec un tenor de 10 ans et une maturité de 10 ans. Ce mouvement est caractéristique d'une situation de stress sur les marchés financiers. La volatilité a augmenté de manière significative en 2022.

Après avoir abordé la hausse des volatilités implicites, il est important de souligner que l'inflation a également été un phénomène marquant en 2022.

L'inflation, qui représente le taux d'augmentation des prix sur une période donnée, est généralement mesurée à travers la hausse globale des prix ou du coût de la vie dans un pays.

Durant l'année 2022, les niveaux d'inflation ont atteint des sommets historiques dans plusieurs pays, en raison de causes sous-jacentes telles que la hausse des coûts des matières premières, la politique des banques centrales, les perturbations dans les chaînes d'approvisionnement et une demande accrue de biens et services suite à la période de confinement.

Le graphique suivant, provenant de l'INSEE, permet d'observer l'évolution de l'inflation en France de 1990 à 2022.

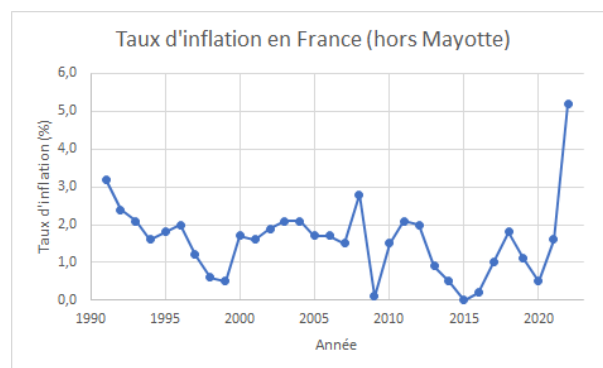


FIGURE 3 – Évolution de l'inflation

L'année 2022 a été celle du retour d'une inflation historiquement élevée, passant de 1,6% en 2021 à plus de 5,9% en décembre 2022 selon l'INSEE, soit un record historique. Le taux d'inflation annuel de la zone euro est estimé à 10,7% en octobre 2022 selon une estimation rapide publiée par Eurostat, l'office statistique de l'Union européenne.

Parallèlement, les taux d'intérêt ont également connu une montée importante au cours de l'année 2022. Cette hausse s'explique principalement par les actions des banques centrales, qui cherchent à contrer les pressions

inflationnistes et à stabiliser leurs économies respectives face aux défis rencontrés.

La Banque Centrale Européenne a pour objectif de maintenir la stabilité des prix sur la base d'un objectif d'inflation de 2% à moyen terme.

Pour stabiliser les prix et donc limiter l'inflation, la Banque centrale peut jouer sur les taux d'intérêt.

Selon une vision macro-économique "classique", le mécanisme est assez simple :

- lorsque les taux d'intérêt sont bas, les particuliers et les entreprises sont plus enclins à souscrire un crédit pour financer leurs projets, ce qui peut stimuler l'investissement et la consommation, favorisant ainsi la croissance économique,
- lorsque les taux d'intérêt sont plus élevés, cela encourage l'épargne, car les consommateurs préfèrent économiser pour obtenir un meilleur rendement, plutôt que de dépenser. Cela peut entraîner un ralentissement de l'économie.

La Banque centrale européenne peut piloter l'inflation en ajustant sa politique monétaire, qui consiste principalement à influencer les taux d'intérêt et la quantité de monnaie en circulation. Par conséquent, en 2022, dans un contexte d'inflation record, la politique de la Banque Centrale Européenne a été d'augmenter les taux d'intérêt dans le but de réduire l'inflation.

Cette hausse des taux est historique, sachant que les taux étaient restés stables et très bas depuis plusieurs années.

Dans le domaine de l'assurance, l'Autorité Européenne des Assurances et des Pensions Professionnelles (EIOPA) recommande des courbes de taux sans risque spécifiques à chaque pays européen. Ces courbes sont utilisées pour évaluer les engagements des compagnies d'assurance, projeter les flux d'actifs, et modéliser les interactions entre l'actif et le passif dans le cadre de la gestion actif-passif (ALM).

Le graphique suivant représente l'évolution des taux fournis par l'EIOPA depuis 2020 jusqu'à fin 2022.

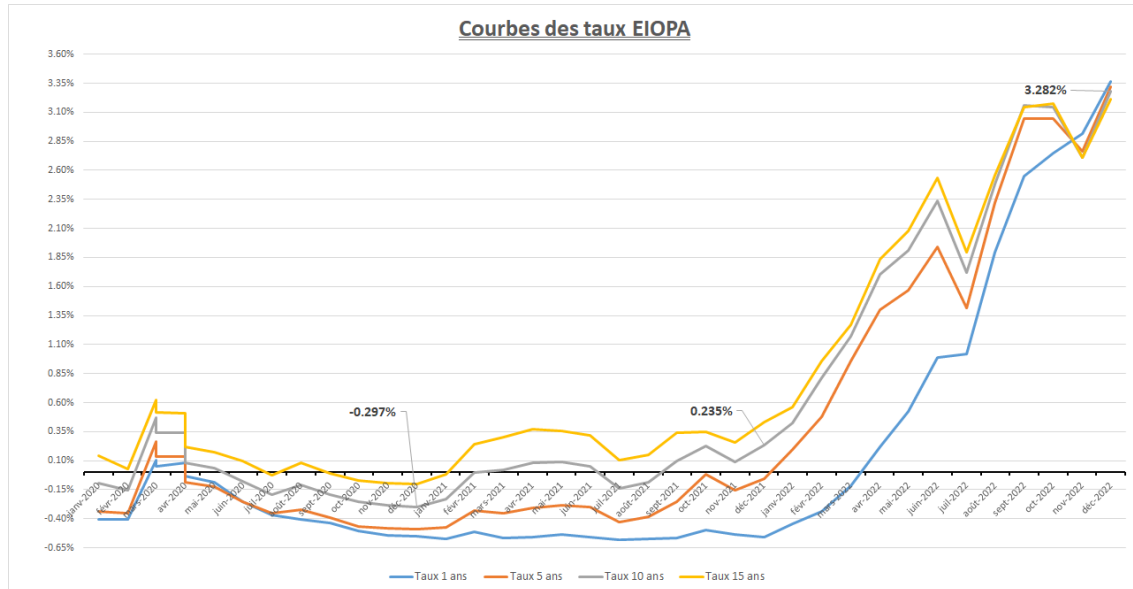


FIGURE 4 – Évolution des taux EIOPA

Le niveau bas, voire négatif, des taux a connu une hausse historique en 2022. Le taux à 10 ans a gagné environ 300 points de base en 2022.

Finalement, la performance des marchés actions a subi un revers en 2022, avec une baisse généralisée des indices boursiers mondiaux. L'indice EuroStoxx 50 a connu une baisse de 13,5% en 2022, le CAC40 quant à lui a baissé de 10,5% durant cette même année. Ce déclin reflète les inquiétudes des investisseurs face aux incertitudes économiques et politiques, ainsi qu'à la persistance de l'inflation et des taux d'intérêt élevés.

1.2.2 Des rendements complexes en assurance-vie

En parallèle des conditions compliquées du marché financier, il est important d'avoir une vue d'ensemble sur les rendements de l'assurance-vie.

Le graphique suivant représente les taux de revalorisation moyens des fonds euros.

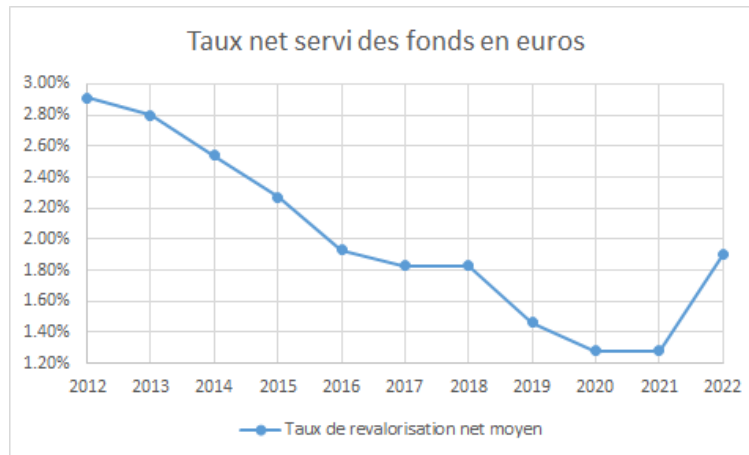


FIGURE 5 – Taux net servi des fonds euros selon l'ACPR

Le rendement moyen des fonds euros en 2022 est de 1,90%. La hausse du taux moyen des fonds euros en 2022 est notable, atteignant un niveau non atteint depuis 2016.

Contrairement aux contrats en euros, dans le cadre des contrats unités de compte, le risque de marché est entièrement supporté par l'assuré. Les assurés prennent davantage de risque, mais espère un rendement plus élevé.

Les assureurs vie proposent également des options en gestion profilée. Cette gestion s'adresse à des investisseurs qui ne veulent pas gérer activement leur contrat en unités de compte mais qui souhaitent quand même dynamiser de manière automatique leur épargne, selon un profil de risque défini (prudent, modéré, équilibré, offensif, audacieux). Souvent proposées aux épargnants en assurance-vie comme étant une réponse à leur profil de risque, les unités de compte "Gestion Profilée" se révèlent bien décevantes en 2022 en termes de performance moyenne.

Le graphique suivant représente les performances moyennes des unités de compte en gestion profilée selon le type de gestion choisi.

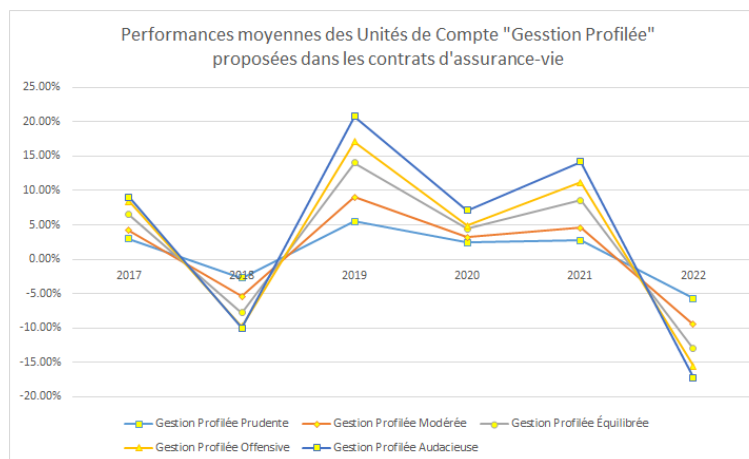


FIGURE 6 – Performances moyennes des Unités de Compte "Gestion Profilée" proposées dans les contrats d'assurance-vie selon Good Value for Money

Ce graphique met en évidence l'instabilité du rendement des unités de compte classique, leur rendement étant très sensible aux conditions de marchés.

Selon Good Value for Money, la performance annuelle sur 8 ans (2017-2022) de la gestion profilée est de 0,38% pour le profil prudent, 1,81% pour le profil modéré et 3,75% pour le profil offensif.

1.2.3 Une solution face à ce contexte

Les épargnants doivent plus que jamais composer avec un environnement macro-économique incertain. Face à l'inflation qu'a connu l'année 2022, les assurés souhaitent voir la rentabilité de leurs contrats d'assurance augmenter afin de préserver leur pouvoir d'achat.

Compte tenu de la hausse des taux, le compte d'épargne préféré des Français, le Livret A, a vu son taux d'intérêt augmenter, passant de 0,5% à 2% en août 2022, puis de 2% à 3% en février 2023.

Dans cette situation, les assurés s'attendent à voir leurs contrats d'épargne sur fonds en euros revalorisés au même rythme que la hausse des taux d'intérêt. Cependant, cela n'est pas possible en pratique avec les rendements financiers en cours. En effet, ces dernières années, l'assureur a investi dans des obligations à des taux bien plus bas, voire négatifs. Ainsi, l'assureur commence à acheter des obligations offrant des taux plus élevés au même rythme que la hausse des taux apparaît sur les marchés. Il y a un décalage, rendant l'opération impossible directement.

Une solution pour l'assureur afin revaloriser les contrats en euros au même rythme que la hausse des taux est d'utiliser sa provision pour participation aux bénéfices. Cependant, en pratique, cela n'est pas toujours possible de manière répétée sur le long terme.

Dans le but de pallier cette situation, l'assureur peut proposer des produits structurés offrant une espérance de rentabilité compétitive sur les supports en unités de compte. Néanmoins, pour les épargnants avertis au risque, il est important que ces produits soient sécurisés dans une large gamme de scénarios défavorables du marché.

Les produits structurés étudiés dans ce mémoire possèdent une sécurité en cas de baisse des marchés actions, permettant même de profiter des scénarios de baisse dans une certaine limite. De plus, leurs caractéristiques s'adaptent au profil de risque de l'investisseur.

1.3 Aspects comptables et Solvabilité 2

Dans cette sous section, nous définissons les principaux éléments comptables d'une compagnie d'assurance vie.

1.3.1 Les provisions

Les provisions nécessaires à la compréhension de l'étude sont définies.

La provision mathématique (PM) :

La provision mathématique est la valeur actuelle probable de la différence des engagements respectivement pris par l'assureur et l'assuré. Dans le cas d'assurance vie, la provision mathématique correspond à l'encours de l'assuré revalorisé à la date du calcul. Les provisions mathématiques incluent les frais futurs de gestion de l'assureur.

La provision pour participation aux bénéfices (PPB) :

La provision pour participation aux bénéfices représente une partie des profits générés par la compagnie d'assurance qui n'est pas immédiatement redistribuée. Le but est de stabiliser les taux servis aux assurés pour une gestion plus avisée des ressources. Cependant, la compagnie d'assurance a un délai de huit ans pour verser l'intégralité de la participation aux bénéfices aux assurés.

La réserve de capitalisation :

La réserve de capitalisation est un fonds qui est alimenté ou diminué en fonction de la réalisation de plus-values ou de moins-values lors de la vente d'obligations. Son but est de stabiliser les résultats financiers liés

aux actifs obligataires en cas de variations des taux d'intérêt. Par exemple, si les taux d'intérêt chutent, l'assureur n'est pas incité à vendre ses obligations antérieures pour réaliser des bénéfices. De plus, la réserve de capitalisation fait partie des fonds propres et peut donc être utilisée pour constituer une partie des fonds propres requis en vertu des exigences de capital sous Solvabilité II.

La provision pour dépréciation durable (PDD) :

La provision pour dépréciation durable est un montant constitué par l'assureur lorsqu'un actif R.332-20 présente une perte de valeur durable. Cela se produit lorsque la valeur de l'actif diminue de plus de 20% pendant au moins six mois dans les marchés peu volatils et de 30% dans les marchés volatils.

À noter que contrairement à la provision pour risque d'exigibilité, la provision pour dépréciation durable est constituée pour chaque actif individuellement

La provision pour risque d'exigibilité (PRE) :

La provision pour risque d'exigibilité, comme la provision pour dépréciation durable, est constituée lorsqu'une perte potentielle est constatée sur l'ensemble des actifs en conformité avec la R.332-20. Ainsi, la provision pour risque d'exigibilité permet à l'assureur de faire face à ses engagements en cas de baisse de la valeur des actifs correspondants.

1.3.2 L'actif

L'actif est placé sur les marchés financiers et se divise en deux parties distinctes pour l'entreprise :

1. L'actif général, qui fait face aux fonds propres et aux provisions mathématiques des contrats d'épargne en assurance vie en euros et en unités de compte.
2. Le fonds 1 ou le PER, qui fait face aux provisions mathématiques des contrats de retraite et de prévoyance.

L'actif général représente la plus grande partie de l'actif (environ 95%).

Comme on peut le voir sur le graphique ci-dessous, les obligations représentent une grande partie du portefeuille d'une compagnie d'assurance couvrant les fonds en Euro :

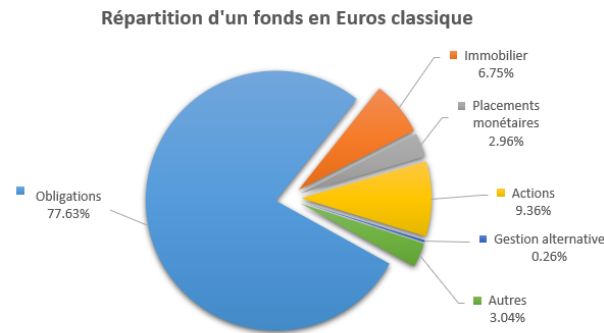


FIGURE 7 – Répartition moyenne des fonds en euros classique en 2021 selon Good Value For Money

La part de l'actif allouée aux actions est de 9%.

1.3.3 La directive Solvabilité 2

La directive européenne Solvabilité II, entrée en vigueur au 1er janvier 2016 vise à renforcer la solidité financière des entreprises d'assurance en renforçant leur gouvernance, en améliorant la gestion des risques et en instaurant des exigences de solvabilité mieux adaptées à leur profil de risque. Cette norme repose sur une approche fondée sur les principes, qui permet une meilleure adaptation aux réalités du marché et aux spécificités de chaque entreprise d'assurance.

Cette directive est fondée sur 3 piliers présentés dans la figure 8.

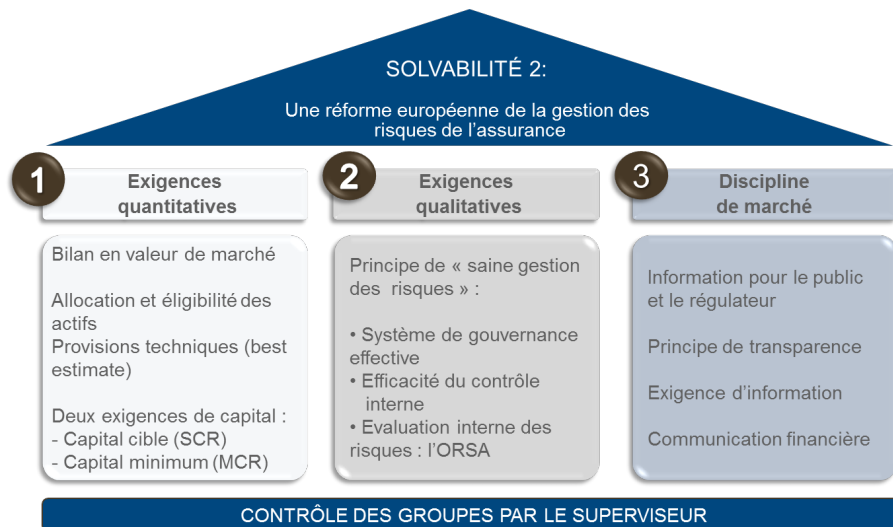


FIGURE 8 – Les trois piliers de la directive Solvabilité 2

Focus sur le Pilier 1 :

Le bilan sous solvabilité 2 correspond d'une part à l'actif évalué en valeur de marché et d'autre part, au passif correspondant à la somme des fonds propres, de la marge pour risque et du Best Estimate.

Le graphique suivant illustre le bilan économique d'une compagnie d'assurance-vie sous Solvabilité 2 :

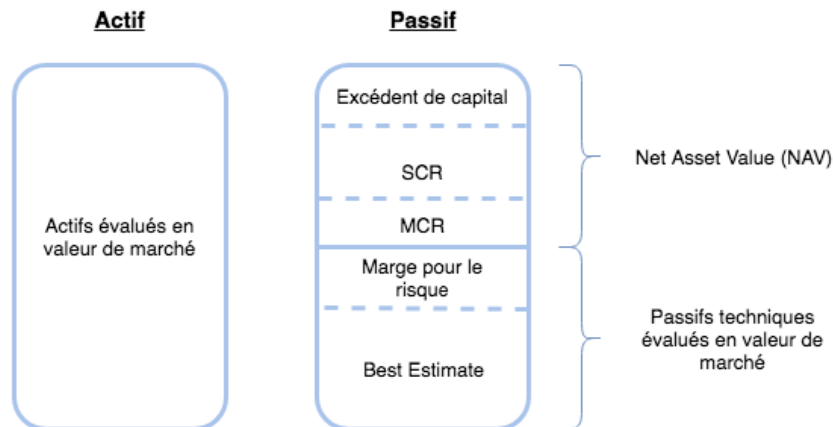


FIGURE 9 – Bilan économique d'une compagnie d'assurance vie sous solvabilité 2

Le **Best Estimate** correspond à la valeur actuelle des engagements de l'assureur envers ses assurés, calculée en moyenne pondérée par les probabilités d'occurrence des flux de trésorerie futurs, en prenant en compte la valeur temporelle de l'argent et en utilisant la courbe des taux sans risque appropriée.

L'une des spécificités de l'assurance vie réside dans le lien étroit qui existe entre la performance financière constatée à l'actif et les engagements de l'assureur envers ses assurés, qui sont dirigés par les options et garanties proposées sur les contrats (taux minimum garanti, rachats, arbitrages, etc.).

Le calcul du Best Estimate nécessite la projection des flux actif-passif grâce à un modèle ALM qui permet de modéliser ces interactions entre l'actif et le passif de l'assureur.

La **marge pour risque** est la partie complémentaire au Best Estimate, incluant le coût de portage du capital réglementaire, qui est calculée sur la base du SCR.

Le **SCR** correspond au montant de fonds propres minimum que doit avoir la compagnie pour ne pas faire faillite à horizon d'un an avec une probabilité de 99,5%. Une formule standard est calibrée par l'EIOPA pour le calcul du SCR.

La directive Solvabilité II préconise une méthode de calcul du SCR basée sur l'agrégation de divers risques auxquels les entreprises du secteur de l'assurance sont confrontées. L'exigence de capital C_R pour un facteur de risque R, qui correspond au capital requis pour le sous-module de risque R, est calculée en évaluant la variation du niveau des fonds propres économiques suite à un choc instantané sur le facteur R au niveau de risque de 0,5%.

$$C_R = NAV_{centrale} - NAV_{choquée}$$

Ensuite, les capitaux requis pour chaque sous-module sont agrégés en utilisant des matrices de corrélation afin de déterminer les SCR associés aux différents modules de risque. Enfin, les SCR relatifs à chaque module de risque sont agrégés à l'aide d'une nouvelle matrice de corrélation pour obtenir le BSCR (Basic Solvency Capital Requirement), qui représente le SCR global.

Le SCR final est calculé en ajoutant au BSCR une exigence de capital pour le risque opérationnel, puis en soustrayant un ajustement pour prendre en compte les propriétés d'absorption des risques liées aux futures Participations aux Bénéfices et aux impôts différés. Le schéma suivant illustre l'agrégation des sous-modules et des modules du SCR décrite ci-dessus :

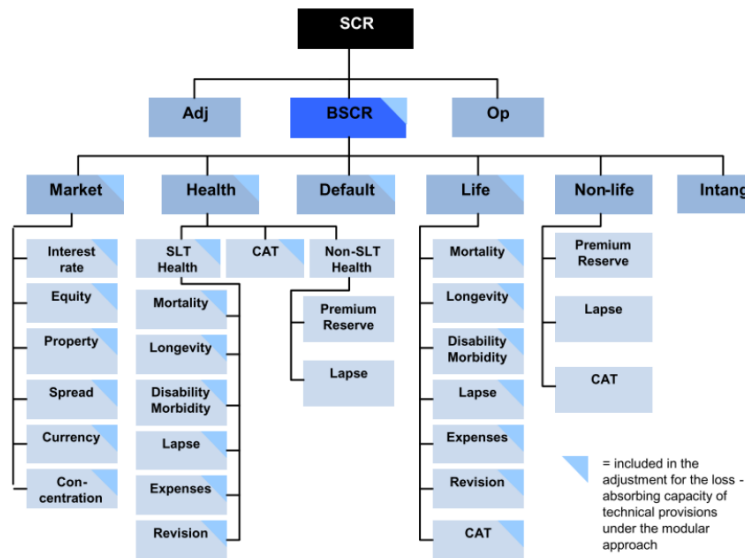


FIGURE 10 – Arborescence du SCR fourni par l'ACPR

2 Les produits structurés

Dans cette section, nous présentons les caractéristiques et spécificités des produits structurés présents sur les supports unités de compte de l'entreprise.

2.1 Fonctionnement général

2.1.1 Les produits dérivés

Un produit dérivé est un instrument financier :

- dont la valeur fluctue en fonction de l'évolution du taux ou du prix d'un autre produit appelé sous-jacent ;
- qui nécessite peu ou pas de mise de fonds initiale ;
- dont le règlement se fait à une date future.

Ce produit est un contrat entre deux parties, un acheteur et un vendeur, qui fixe des flux financiers futurs basés sur ceux d'un actif sous-jacent, réel ou théorique, généralement financier.

Les produits dérivés ont été créés à l'origine pour se couvrir contre divers risques financiers, tels que :

- le risque de taux,
- le risque de crédit,
- le risque action.

L'actif sous-jacent peut être, par exemple :

- une action cotée en bourse,
- une obligation,
- un indice boursier, comme le CAC 40 ou encore l'indice des prix à la consommation ;
- les flux d'intérêts générés par un prêt à une date de départ donnée, une durée donnée et un taux donné, etc.

On rappelle la définition de certains produits dérivés :

Une **option** est un produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur. L'acheteur de l'option obtient le droit, mais non l'obligation, d'acheter (call) ou de vendre (put) un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (strike) pendant une période ou à une date donnée (maturité).

Si l'acheteur n'exerce pas son option, le vendeur conserve le prix de l'option.

Pour une option européenne, la date d'achat ou de vente est unique et fixe.

Un **swap** est un contrat d'échange. Il s'agit d'un contrat entre deux parties, généralement des banques ou des institutions financières, pour échanger des flux financiers appelés "jambes". Dans le cas d'un swap de taux, une des parties paie un taux fixe en échange d'un taux variable. La partie qui paie le taux fixe est appelée "jambe fixe", tandis que celle qui paie le taux variable est appelée "jambe variable".

2.1.2 Du produit dérivé au produit structuré

Un produit structuré est une combinaison d'instruments financiers comprenant au moins un produit dérivé, destiné à une couverture ou une spéculation bien définies.

Les produits structurés sont généralement composés de deux éléments : un élément obligataire qui garantit la protection du capital et un élément optionnel qui optimise le rendement du produit.

Les produits structurés sont créés par des banques pour répondre aux besoins spécifiques d'investisseurs qui recherchent autre chose que les instruments financiers standards. Ils sont traités sur le marché de gré à gré (OTC).

Les produits structurés peuvent être classés en deux grandes catégories :

1. Les produits **à effet de levier** : ces produits n'offrent aucune garantie pour le capital investi à maturité. Ils permettent à l'investisseur d'avoir une exposition accrue aux marchés sans avoir à augmenter son capital investi.
2. Les produits **d'investissement** : ces produits peuvent être divisés en trois catégories en fonction de leurs garanties. Les catégories sont les suivantes : protection de capital (entre 90% et 100% du montant investi), optimisation de la performance avec une hausse limitée du rendement et une protection de capital conditionnelle, et participation offrant généralement une exposition sans levier à la performance des sous-jacents et une protection de capital conditionnelle.

Le choix du type de produit structuré pour l'investisseur se fait en fonction de son profil de risque. Plus un investisseur a un fort goût du risque, plus il s'orientera vers un produit à effet de levier.

2.2 Support unités de compte et produits structurés

En assurance vie, l'assuré peut choisir un contrat multi-supports, ce qui lui permet de choisir entre différents fonds en unités de compte. Parmi ces fonds, on retrouve des fonds actions, des fonds obligataires, des fonds diversifiés (composés à la fois d'actions et d'obligations) ainsi que des fonds structurés qui correspondent à des produits structurés.

Pour commercialiser des produits structurés, l'entreprise réserve un lot de produits structurés auprès d'une banque, puis les commercialise auprès des assurés. Ces produits sont disponibles pendant une période de commercialisation de quelques mois avant leur date de lancement. Ainsi, pour un produit structuré donné, nous distinguons deux poches :

1. Les produits vendus aux assurés : ils figurent à l'actif général du bilan et font face aux provisions mathématiques des contrats en unités de compte au passif. Ils sont comptabilisés en valeur de marché.
2. Les produits non vendus et détenus par l'entreprise : ils figurent à l'actif du bilan et font face aux fonds propres et au fonds en euros de la compagnie d'assurance au passif. Ils sont comptabilisés en valeur nette comptable. Un produit non vendu peut être en cours de commercialisation, un assuré peut potentiellement l'acheter et dans ce cas, le produit sera mis en face de la provision mathématique correspondante au passif, ou être détenu par l'entreprise pour cause de rachat, d'arbitrage ou encore de non-vente du produit durant la période de commercialisation.

À tout moment, un assuré a la possibilité de faire un rachat ou un arbitrage sur l'unité de compte du produit structuré. Dans ce cas, l'entreprise doit gérer la liquidité du produit.

Concernant la deuxième poche de produits, les risques de marché sont entièrement supportés par la compagnie d'assurance. De plus, dans ce cas, les produits structurés à l'actif sont également soumis aux risques de provision pour dépréciation durable et de provision pour risque d'exigibilité.

Il est donc nécessaire de maîtriser le risque associé à ces produits, d'une part pour comprendre les produits proposés aux assurés dans leur conception, et d'autre part pour maîtriser le risque lié aux fonds propres de la compagnie d'assurance.

2.3 Les produits structurés COP et DOP : État actuel

2.3.1 Les produits commercialisés : Fonctionnement général

Il existe principalement deux types de produits structurés commercialisés historiquement :

1. **Conservateur Opportunité (COP)** : ces produits sont indexés sur un indice action ou sur un taux. Ce sont des produits d'investissement à protection du capital.
2. **Conservateur Double Opportunité (DOP)** : ces produits sont indexés sur un indice action. Ce sont des produits d'investissement d'optimisation de la performance, avec une protection de capital conditionnelle. Ce mémoire se concentre principalement sur ces produits.

Le fonctionnement de la relation avec la banque émettrice se déroule de la manière suivante :

La compagnie d'assurance émet à la banque un nominal qui correspond à l'encours du contrat en unités de compte émises par l'assuré. La banque entre alors dans un swap et émet son taux obligataire (correspondant à un taux sans risque additionné à son spread propre lié à son risque de défaut). Cette partie émise par la banque est la jambe fixe (ou de financement) du swap. La jambe structurée (variable) du swap réalise la partie structurée du produit. Le swap rémunère des frais annuels à la compagnie d'assurance, ainsi que la partie structurée à échéance.

Voici un schéma explicatif :

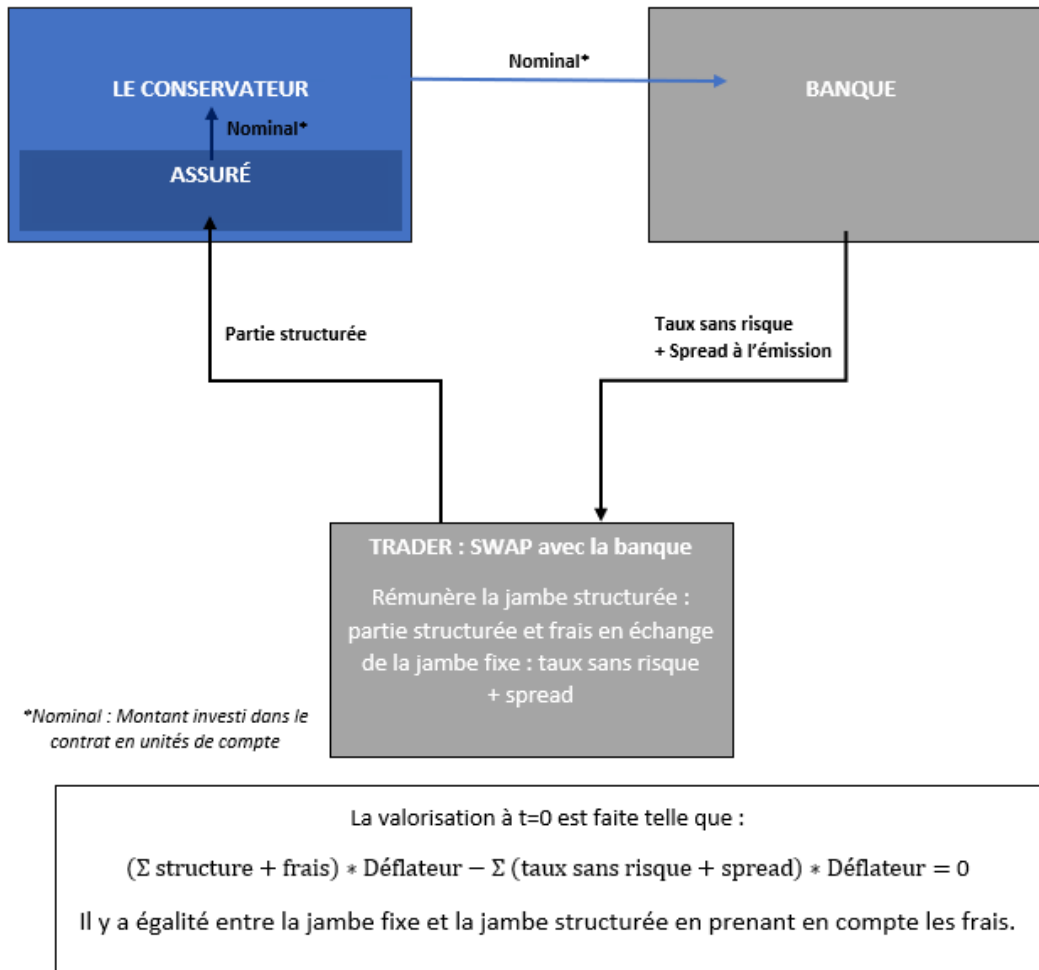


FIGURE 11 – Fonctionnement général

2.3.2 Les produits structurés "callable"

Certains produits peuvent être remboursés à certaines dates par l'émetteur du produit, soit de manière discrétionnaire (on dit qu'il est « callable » ou « rachetable »), soit de manière automatique (on dit qu'il est « auto-callable »).

Les produits structurés COP et DOP sont souvent « callable » par l'émetteur financier. Le mécanisme est le suivant : à plusieurs dates déterminées dans la fiche descriptive (termsheet) des produits, le trader peut, s'il le souhaite, annuler le swap. Il exerce alors une option dite d'annulation. Le trader doit alors rémunérer l'investisseur du nominal additionné à un coupon. Ce coupon est défini dans la fiche descriptive du produit et correspond à un coupon donné multiplié par le rang de l'année de rappel du produit.

Le schéma ci-dessous illustre le mécanisme de l'option d'annulation :

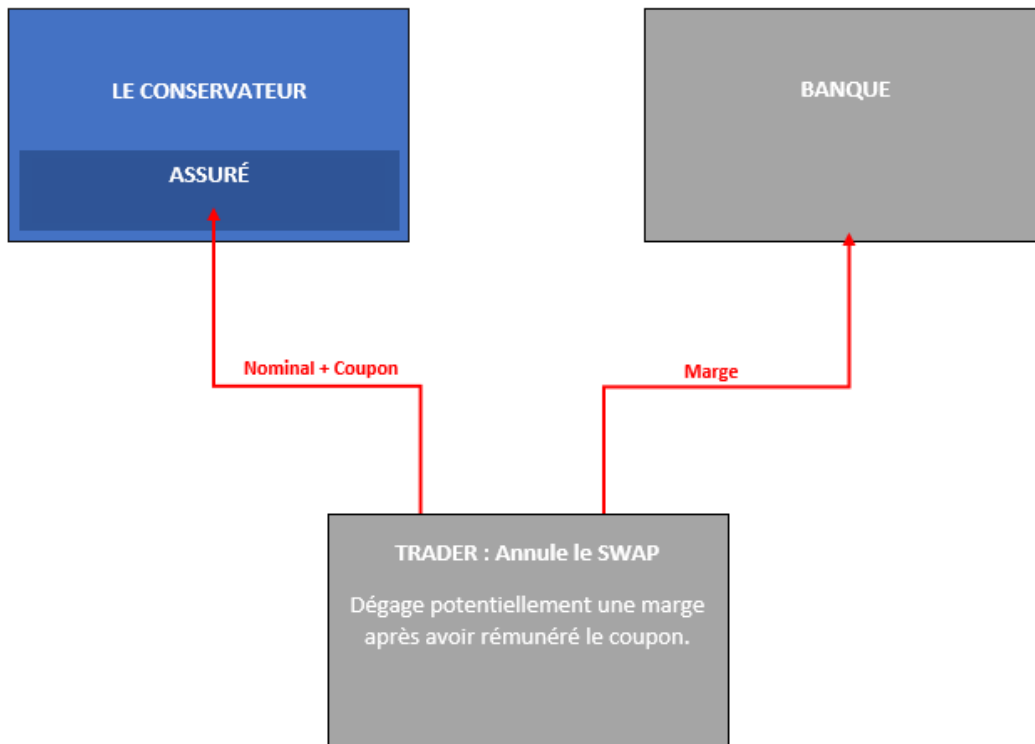


FIGURE 12 – Fonctionnement de l'option d'annulation

Toutes choses étant égales par ailleurs, il y a une probabilité plus élevée que l'émetteur exerce l'option de rappel du produit structuré lorsque la valeur de la partie optionnelle du produit augmente. L'exercice de l'option d'annulation sous-entend que le produit s'est suffisamment apprécié pour permettre à l'émetteur d'assumer, d'une part, le niveau de remboursement préalablement établi et, d'autre part, le coût d'annulation de la stratégie. Les cas de rappel des produits correspondent donc aux scénarios où le trader peut réaliser un certain bénéfice en rémunérant le coupon et en revendant la partie structurée à la date de rappel.

Un émetteur peut souhaiter rappeler son produit structuré "callable" avant l'échéance normale pour plusieurs autres raisons, notamment :

1. Opportunité de refinancement : Si les taux d'intérêt ont baissé depuis l'émission du produit, l'émetteur peut souhaiter racheter le produit et le remplacer par un nouvel instrument de dette avec un taux d'intérêt plus bas. Cela peut aider l'émetteur à économiser des coûts d'emprunt et à améliorer sa rentabilité.
2. Risque de marché : Si l'émetteur a émis le produit structuré "callable" pour se couvrir contre un risque de marché spécifique, mais que ce risque a diminué, l'émetteur peut souhaiter récupérer les fonds pour investir dans d'autres instruments plus adaptés à sa stratégie de couverture.
3. Liquidité : L'émetteur peut souhaiter récupérer les fonds pour faire face à un besoin de liquidité urgent ou pour financer un nouveau projet.
4. Changement de réglementation : Si une nouvelle réglementation affecte les conditions de l'émission du produit structuré "callable", l'émetteur peut préférer racheter le produit plutôt que de s'adapter aux nouvelles règles.

Cette particularité devra être prise en compte lors de la valorisation des produits structurés. Les produits structurés "callable" peuvent offrir aux investisseurs une exposition à des marchés ou à des actifs spécifiques, tout en leur permettant de récupérer leur capital plus tôt que prévu si les conditions du marché changent. Cependant, il est important de noter que ces produits peuvent être plus risqués que les investissements traditionnels en raison de leur complexité et de leur dépendance à des événements futurs.

Le rappel d'un produit structuré "callable" peut être avantageux pour l'émetteur, mais désavantageux pour l'investisseur, car cela peut limiter les gains potentiels et/ou obliger l'investisseur à réinvestir son capital à des taux d'intérêt moins favorables. Par conséquent, les investisseurs potentiels doivent bien comprendre les risques et les avantages d'un produit structuré "callable" avant d'investir.

La fiche descriptive ou le termsheet d'un produit structuré répertorie tous les paramètres du produit, y compris les paramètres liés au caractère "callable" du produit. D'autres informations essentielles sont également disponibles dans ces termsheets, telles que :

- L'émetteur
- L'ISIN (International Securities Identification Number) du produit
- L'actif sous-jacent
- La valeur de constatation initiale
- Les paramètres du payoff
- La maturité
- Les dates de constatation
- La période de commercialisation
- Les dates de commission
- Les dates de rappel possibles si le produit est rappelable
- Le coupon de remboursement en cas de rappel
- etc ...

2.3.3 Produit Conservateur Opportunité

Les produits Conservateur Opportunité (COP) sont des produits d'investissement à protection de capital partiel indexés sur un indice taux ou action. On parle de "COP Taux" ou de "COP Action".

Le payoff de ces produits se présente de la manière suivante :

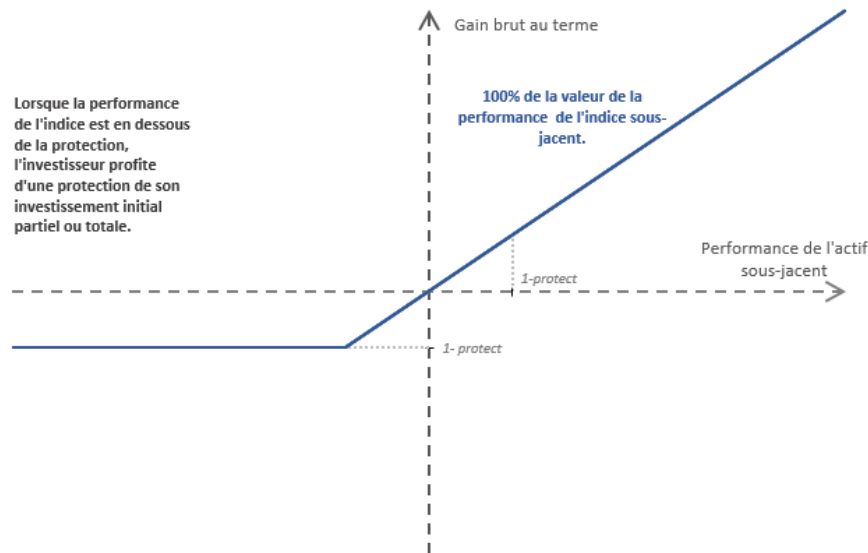


FIGURE 13 – Payoff Conservateur Opportunité

La formule mathématique est :

$$Payoff_{COP}(N, protect, perf) = N \left[protect + \max [0\%, perf] \right] \quad (1)$$

Les paramètres de ce payoff sont :

- *protect* : le niveau de protection
- *perf* : la performance temporelle de l'indice, souvent il s'agit d'une performance moyenne, calculée à l'aide d'une moyenne empirique de la valeur de l'indice à des dates indiquées dans le termsheet (dates de constatation).

Le termsheet renseigne les dates de fixing nécessaires au calcul de la performance temporelle. Ce produit présente une optionalité sur un strike donné à une date donnée.

2.3.4 Produit Conservateur Double Opportunité

Les produits Conservateur Double Opportunité (DOP) sont des produits d'investissement à optimisation de la performance avec protection de capital conditionnelle indexés sur un indice action. Le payoff des produits structurés Double Opportunité se présente de la manière suivante :

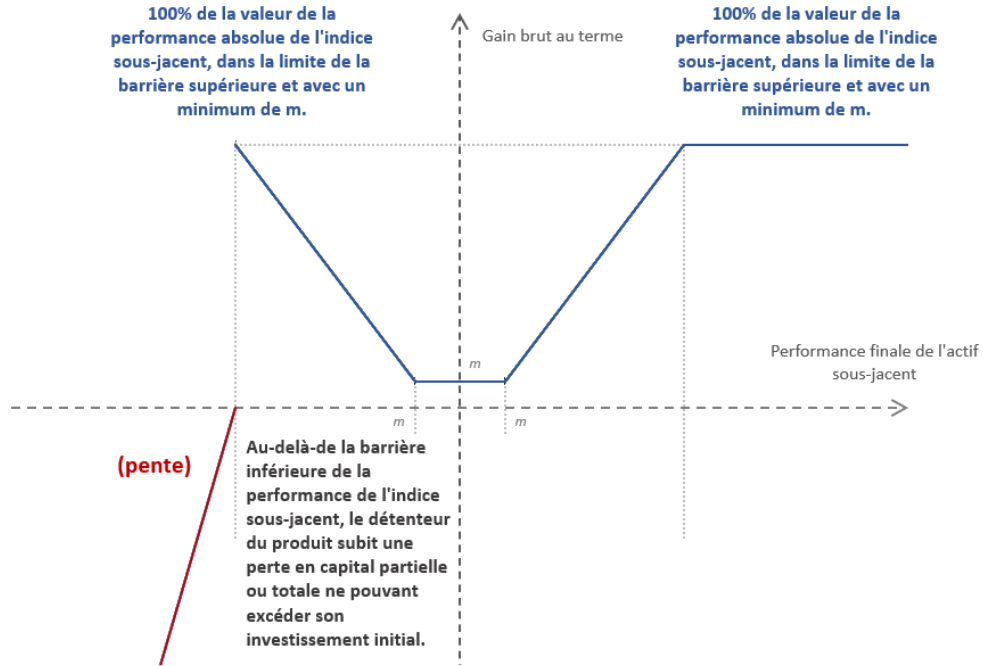


FIGURE 14 – *Payoff Conservateur Double Opportunité*

Le formule mathématique est la suivante :

$$\begin{aligned}
 \text{Payoff}(N, b_{sup}, m, pente, S_0, S_T) &= \mathbb{1}_{S_T \geq S_0} N \left[100\% + \max \left[m, \min \left[b_{sup}, (S_T/S_0 - 1) \right] \right] \right] \\
 &+ \mathbb{1}_{0 \leq \frac{S_T}{S_0} - 1 \leq b_{inf}} N \left[100\% + \max \left[m, (1 - S_T/S_0) \right] \right] \\
 &+ \mathbb{1}_{b_{inf} \geq \frac{S_T}{S_0} - 1} N \max \left[0, 100\% + pente \times [S_T/S_0 - b_{sup}] \right]
 \end{aligned} \tag{2}$$

Avec les notations :

- N : nominal investit
- b_{inf} : barrière inférieure
- b_{sup} : barrière supérieure
- m : minimum entre les deux barrières
- $pente$: pente si inférieur à la barrière inférieure
- T : maturité du produit
- S_0 : valeur de l'indice action à l'instant initial
- S_T : valeur de l'indice action à maturité

Les différents paramètres du payoff se calibrent selon le profil de risque de l'investisseur. Un profil averse au risque souhaitera une barrière haute, ce qui augmentera également la valeur de la pente, et pourra éventuellement diminuer le minimum entre les deux barrières.

Contrairement au cas d'un produit simple Opportunité, un produit Double Opportunité dépend de plusieurs strikes qui vont influencer sa sensibilité. De plus, le capital investi n'est pas garanti. Ce produit est plus sensible à l'indice action que le précédent et offre une perspective de gain plus intéressante : un gain est possible

même en cas de baisse de l'indice. Cependant, cette nouvelle opportunité est échangée contre la protection du capital, qui n'est plus garantie.

Avantages :

- À l'échéance, si l'indice ne clôture pas en baisse au-delà de la barrière pour Conservateur Double Opportunité par rapport à son niveau initial, l'investisseur bénéficie de :
 1. la valeur finale du support qui est au moins égale à (100% + minimum entre deux barrières) de la valeur nominale des supports.
 2. 100% de la performance absolue de l'indice au-delà du minimum entre les deux barrières, et dans la limite de la barrière supérieure. C'est un produit bidirectionnel.
- À l'échéance, en cas de baisse de l'indice au-delà de la barrière inférieure par rapport à son niveau initial (franchissement du seuil de protection en capital), l'investisseur subit une perte en capital atténuée par rapport à la perte de l'indice sous-jacent. La perte en capital peut être partielle ou totale.

Inconvénients :

- Le rendement des produits Conservateur Double Opportunité à l'échéance est très sensible à une variation de l'indice autour du seuil de la barrière inférieure par rapport à son niveau initial. Ces produits ne comportent pas de garantie du capital à l'échéance.
- Le gain final est plafonné à la barrière supérieure pour les produits Conservateur Double Opportunité en raison du mécanisme de plafonnement des gains. L'investisseur bénéficie donc partiellement de la hausse de l'indice en cas de hausse supérieure de celui-ci.
- L'investisseur ne bénéficie pas des dividendes éventuellement détachés par les actions composant l'indice sous-jacent. La performance d'un indice dividendes non réinvestis est inférieure à celle d'un indice dividendes réinvestis.

Le payoff du Conservateur Double Opportunité est nettement plus compliqué que celui du Conservateur Opportunité. L'évolution vers les produits Double Opportunité depuis les produits Opportunité simple nécessite une évaluation des outils actuels de gestion des risques liés aux produits structurés.

3 Socle financier

Dans cette section, nous présentons les notions financières clés nécessaires à une compréhension complète du mémoire.

3.1 Univers risque neutre

3.1.1 Martingale

Un processus stochastique représente une évolution, discrète ou à temps continu, d'une variable aléatoire.

On note l'information dont nous disposons à un instant t , \mathcal{F}_t .

Un processus stochastique $(M_t)_{t>0}$ est une martingale par rapport à un ensemble d'information $(\mathcal{F}_t)_{t>0}$ si son espérance en date t conditionnelle à l'information disponible en date $s < t$ est égale à la valeur du processus en date s . C'est-à-dire :

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$$

Autrement dit, la meilleure prédiction de M_t à l'instant s , étant donné l'information dont nous disposons au temps s est M_s .

3.1.2 Univers risque neutre

L'univers risque neutre est un univers fictif dans lequel le processus de fixation des prix actualisés d'actifs présentant une source de risque commune est une martingale sous une unique probabilité appelée « probabilité risque-neutre ». La martingalité des prix actualisés implique que la meilleure information que l'on peut avoir sur l'évolution future du prix d'un sous-jacent à un temps t est son prix à ce temps t : il n'y a donc aucune opportunité d'arbitrage possible. De plus, l'espérance des prix futurs actualisés est égale aux prix observés en 0. L'univers risque-neutre a été introduit dans le but de faciliter la valorisation des produits dérivés. En effet, dans cet univers, il n'y a pas de primes de risque, et le fait que les actifs rapportent en moyenne le taux sans risque permet de calculer une valeur des options et garanties futures cohérente avec les prix d'options dérivées cotées sur le marché. L'objectif est donc une valorisation market-consistent, comme préconisée par les régulateurs.

Il convient de noter que les scénarios risque-neutre sont interprétables en moyenne pour l'assureur, car ils ne reflètent pas ses attentes en termes d'évolution.

3.2 Taux sans risque

3.2.1 Notations, définitions et courbe des taux

L'**obligation zéro-coupon (ZC)** est une notion de base concernant les taux, il s'agit d'un produit financier dont la rémunération se fait uniquement par son taux, il verse un montant nominal C à la date de maturité $T \geq t$. On note $P(t, T)$ son prix à la date $t \in [0, T]$ et on pose $C = 1\text{€}$. Ce produit financier est un actif plutôt fictif car il n'est pas liquide sur le marché. Cependant, les emprunts à court terme (inférieurs à 1 an) peuvent être assimilés à des obligations zéro-coupon car ils ne versent qu'un seul flux de trésorerie au prêteur à l'échéance.

À partir de ce prix, deux types de taux peuvent être définis :

Le taux d'intérêt instantané continûment composé parfois appelé « taux zéro-coupon » : c'est le taux R_c continu constant sur la période $[t, T]$ défini par : $R_c(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T)$.

Le taux composé annuellement, aussi appelé taux actuariel, noté R_A , défini par : $R_A(t, T) = P(t, T)^{-\frac{1}{T-t}} - 1$.

La relation liant les deux taux est la suivante : $R_c(t, T) = \ln(1 + R_A(t, T))$.

On appelle **taux court** ou taux court instantané r_t (désigné par abus de langage « taux court »), la limite de ces taux lorsque T tend vers t soit :

$$r_t = \lim_{T \rightarrow t} R_A(t, T) = \lim_{T \rightarrow t} R_c(t, T).$$

Il est à noter que ce taux n'a pas de réalité physique car prévalant sur une période infinitésimale. Il existe là aussi des approximations communes (souvent taux court = taux journalier).

Un **taux forward** est un taux payé à un instant t mais au titre d'une période ultérieure $[S, T]$ avec $t \leq S \leq T$. Le taux zéro coupon forward est défini par : $P(t, S, T) = \frac{P(t, T)}{P(t, S)}$. Le taux forward instantané continûment composé $F_c(t, S, T)$ et composé annuellement $F_A(t, S, T)$ se déduisent de la même façon que précédemment, en remplaçant $P(t, T)$ par $P(t, T, S)$.

La relation entre le ZC et la taux forward est la suivante : $P(t, T) = e^{\int_t^T f(t, u) du}$.

Avec $f(t, T)$ le taux forward instantané évalué en t et de maturité T défini de la façon suivante :

$$f(t, T) = \lim_{T_1 \rightarrow t} F_c(t, S, T_1) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln P(t, T) \text{ et } r(t) = f(t, t).$$

Le taux d'actualisation en univers risque neutre est le taux court, c'est le taux zéro coupon. Dans la suite, les termes "taux court" et "taux sans risque" sont équivalents.

La courbe des taux correspond à une représentation graphique des rendements offerts par les titres obligataires d'un même émetteur selon leur échéance, de la plus courte à la plus longue.

Il existe deux types de courbes de taux sans risque : celles qui font référence à l'ensemble du marché obligataire d'un pays donné, correspondant aux emprunts d'État, et celles qui font référence aux taux d'intérêt qui reflètent le coût des emprunts sur le marché interbancaire.

Les swaps sont des contrats financiers qui permettent aux parties d'échanger des flux de trésorerie basés sur des taux d'intérêt différents. Dans le cas des swaps de taux d'intérêt, les parties s'engagent à échanger des paiements de taux d'intérêt fixes contre des paiements de taux d'intérêt variables basés sur un taux de référence, tel que l'EURIBOR (Euro Interbank Offered Rate) ou le LIBOR (London Interbank Offered Rate).

La courbe des taux sans risque basée sur les swaps (ou courbe des swaps) est une courbe de taux d'intérêt qui reflète le coût des emprunts sur le marché interbancaire. Cette courbe est généralement utilisée pour déterminer le taux d'intérêt de référence pour les produits financiers tels que les prêts hypothécaires à taux fixe et les produits dérivés de taux d'intérêt.

On utilise le taux sans risque swap pour la valorisation de produits financiers plutôt que la courbe de taux d'État pour plusieurs raisons :

1. La courbe de taux sans risque basée sur les swaps reflète mieux les taux d'intérêt réels du marché que la courbe de taux d'État, car elle est basée sur les taux auxquels les banques se prêtent de l'argent entre elles, plutôt que sur les taux d'intérêt souverains.
2. La courbe de taux swap couvre une gamme de maturités allant de quelques mois à plusieurs décennies, tandis que la courbe de taux d'État ne couvre souvent qu'un éventail limité de maturités, telles que les échéances à 2, 5 et 10 ans.
3. Les produits financiers tels que les obligations d'entreprise, les prêts hypothécaires et les produits dérivés sont souvent liés à la courbe de taux swap plutôt qu'à la courbe de taux d'État, car les taux swap reflètent mieux les taux d'intérêt réels que ces produits impliquent.

En somme, la courbe de taux swap est une mesure plus précise du coût de financement à long terme pour les institutions financières et reflète mieux le marché que la courbe de taux d'État, ce qui explique pourquoi elle est utilisée pour la valorisation de produits financiers.

Le graphique suivant représente la courbe des taux sans risque de marché à différentes dates en 2022.

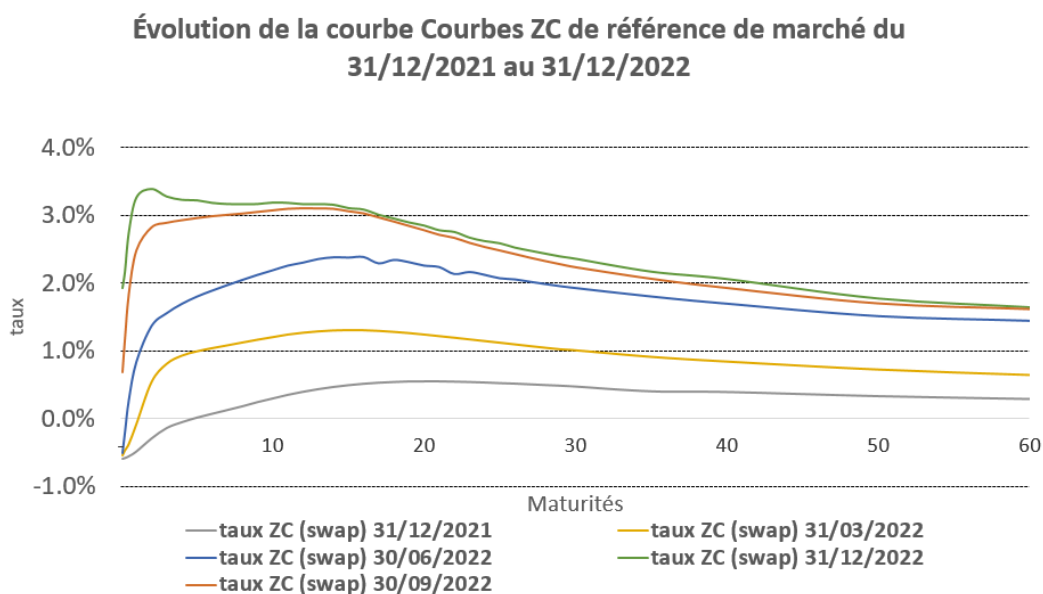


FIGURE 15 – Évolution de la courbe de taux de marché

3.2.2 Courbe de taux EIOPA

Dans le cadre de l'activité d'assurance, l'autorité européenne (EIOPA) recommande des courbes de taux sans risque propre à chaque pays européen. Ces courbes sont utilisés dans l'objectif de valoriser les engagements des compagnies d'assurance, de projeter les flux des actifs et de modéliser les interactions entre l'actif et le passif dans le modèle ALM. Dans le cadre de l'euro, la courbe de taux sans risque EIOPA est construite à partir des swaps de taux d'intérêt.

Cette courbe est ensuite ajustée par l'EIOPA [1] pour prendre en compte l'activité propre du secteur des assurances. Un premier ajustement intervenant dans la courbe est le **Credit Risk Adjustment (CRA)**, il peut être assimilé au spread entre le taux EURIBOR (dit sans risque) et un taux de dépôt. Cet ajustement vient diminuer la courbe de taux, afin de prendre en compte le spread provenant du risque de crédit bancaire.

Au delà d'une certaine maturité, le marché des taux d'intérêt est peu liquide. L'activité d'assurance pouvant avoir des engagements sur plusieurs dizaines d'années, ces maturités non observable sur le marché sont utilisées pour actualiser ces engagements. La courbe des taux a alors besoin d'être extrapolée dans le cadre de l'activité d'assurance. La dernière maturité observable est appelée le **Last Liquid Point (LPP)**, pour l'euro le LPP est à 20 ans. Au delà, le modèle utilisé par l'EIOPA extrapole la courbe, les taux forward convergent pendant une certaine période puis tendent vers le taux ultime **Ultimate Rate Forward (UFR)**.

Enfin, une correction vient rehausser la courbe des taux : le **Volatility Ajustement (VA)**. Il correspond à un spread d'illiquidité. En effet, l'activité d'assurance ne consiste pas à acheter et à vendre des actifs sur le court terme mais à le détenir sur le long terme afin de faire face aux engagements des assurés sous forme de coupon. Ainsi, le portefeuille d'actif d'une compagnie d'assurance est moins soumis au risque de liquidité. Ce portefeuille étant majoritairement composé d'obligations soumises au risque de défaut et de liquidité, cet ajustement diminue la volatilité artificielle des fonds propres due au marché obligataire pouvant être soumis à des problèmes d'illiquidité. Cette correction n'est appliquée qu'aux maturités inférieures au LPP.

Le graphique suivant représente la courbe des taux EIOPA à différentes dates en 2022.

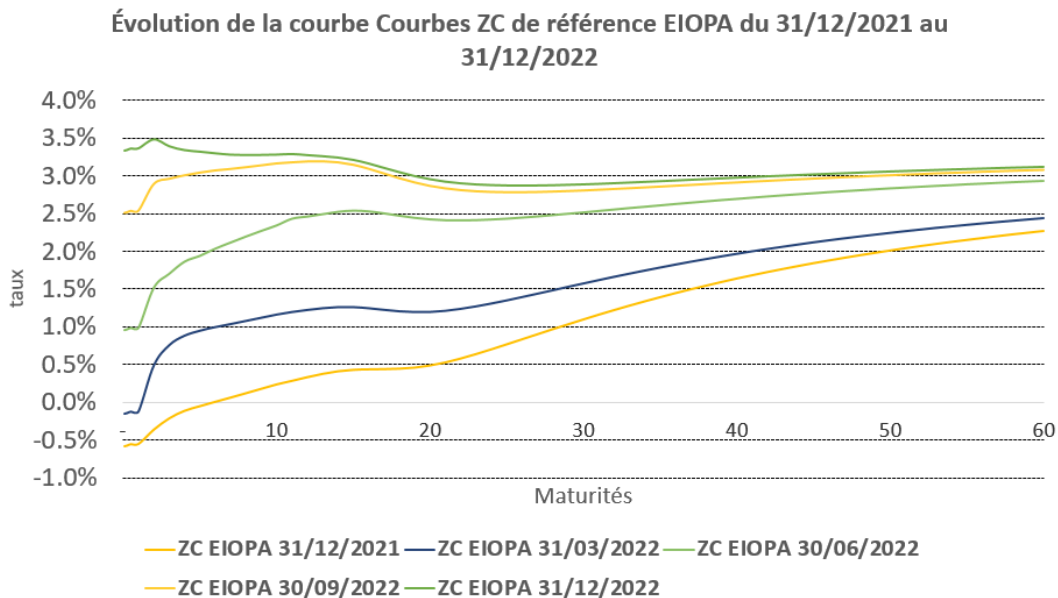


FIGURE 16 – Évolution de la courbe de taux de marché

3.3 Gestion des risques

3.3.1 Les risques financiers

Un risque financier est une menace de perte financière qui peut découler d'une opération financière.

- Risque de marché : Il s'agit du risque de perte de valeur d'un portefeuille causée par les fluctuations du marché. Il existe trois types de risques de marché :
 1. **Le risque action**, qui est le risque de perte de valeur d'un portefeuille en raison des fluctuations du cours des actions ;
 2. **Le risque de taux**, qui est le risque de perte de valeur d'un produit en raison des fluctuations des taux d'intérêt ;
 3. **Le risque de change**, qui est le risque de perte de valeur d'un investissement dû aux variations des taux de change.
- Risque de liquidité : Ce risque concerne les placements financiers qui sont très difficiles à vendre rapidement. Il peut se manifester par l'incapacité de vendre un titre financier ou par la difficulté de le vendre à un prix juste.
- Risque opérationnel : Il s'agit du risque de perte causé par les défaillances de l'établissement financier, telles que la fraude, les erreurs opérationnelles, les pannes informatiques, etc.

Dans ce mémoire, nous étudierons les différents types de risques de marché et développerons notre compréhension des produits structurés du support unité de compte. Pour ce faire, la connaissance des indicateurs de sensibilité à ces risques de marché est nécessaire.

3.3.2 Sensibilités

Les "grecques" sont des indicateurs de sensibilité qui mesurent l'impact de différents facteurs sur le prix d'un produit financier. Ceux-ci découlent des principaux modèles d'évaluation d'options, tels que le modèle de Black & Scholes. Les facteurs considérés sont :

- le prix du sous-jacent (actif sous-jacent sur lequel l'option est basée) ;
- le prix d'exercice (strike) fixé par l'option ;
- la volatilité implicite (mesure de la variation attendue du prix du sous-jacent) ;
- la date d'expiration de l'option ;
- le taux d'intérêt sans risque.

Les grecques permettent de gérer les différents risques auxquels sont soumis les produits financiers. Dans cette étude, les produits structurés sont indexés sur un indice boursier ou un taux d'intérêt, ce qui les rend sensibles aux variations des taux d'intérêt. Le taux sans risque joue un rôle crucial dans le calcul des flux de trésorerie futurs. La jambe fixe, qui comprend le taux sans risque et un spread, est également sensible aux taux d'intérêt.

Il est donc important de produire des indicateurs de sensibilité aux marchés taux et action afin de mieux comprendre et gérer les risques associés à ces produits structurés.

3.4 Les données du marché

Bloomberg est un service qui permet d'avoir accès à une grande quantité d'informations de marché.

Dans ce mémoire, les données centrales sont les nappes de volatilités des options cotées ainsi que les données de taux d'intérêt. Bloomberg permet d'accéder aux prix de marché ainsi qu'aux volatilités de marché des options cotées, ainsi qu'à de nombreuses données de taux d'intérêt.

3.4.1 La volatilité

La volatilité représente l'amplitude des fluctuations du prix d'un actif financier. Elle est un indicateur de la variabilité des rendements potentiels et des prix d'un actif. Plus la volatilité est élevée, plus l'espérance de gain est importante, mais plus le risque de perte est élevé.

Il existe deux types de volatilité :

- La **volatilité implicite** : Elle est déterminée en utilisant les prix des options qui permettent de parier ou de se couvrir sur un scénario extrême. La volatilité implicite est un paramètre essentiel dans l'évaluation des produits dérivés, mais n'est pas observable directement. Il faut donc la déterminer par itération en utilisant la formule de Black & Scholes. La volatilité implicite correcte est celle pour laquelle le prix théorique de l'option, calculé en utilisant le modèle, correspond au prix observé sur le marché. La volatilité implicite peut être interprétée comme un indicateur avancé des mouvements futurs du sous-jacent d'une option.
- La **volatilité historique** : Elle est basée sur l'étude de l'historique du prix du sous-jacent. Il faut choisir une période sur laquelle calculer la volatilité, différents horizons temporels peuvent être envisagés en fonction de l'analyse souhaitée. Cette période doit être cohérente avec la maturité des observations.

La volatilité historique quantifie les fluctuations passées du sous-jacent, mais ne peut pas anticiper les comportements futurs des investisseurs qui ont une influence considérable sur les prix des actifs financiers, contrairement à la volatilité implicite. C'est pour cette raison que la volatilité implicite et non la volatilité historique est utilisée lors de la valorisation de produits structurés.

Bloomberg calcule la volatilité implicite et la fournit à ses utilisateurs.

3.4.2 Modèle de Black & Scholes et volatilité implicite

Le modèle Black & Scholes est un modèle mathématique du marché boursier pour une action qui prend en compte le fait que le prix d'une action est un processus aléatoire. Il est basé sur le fait que les variations relatives du prix d'une action suivent un mouvement brownien géométrique avec une tendance constante (le drift) et une volatilité constante. La dynamique du modèle est la suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

avec W_t un mouvement brownien, $\sigma > 0$ la volatilité, $\mu \in \mathbb{R}$ le drift.

Le modèle s'interprète aisément : les agents étant neutres au risque, le rendement espéré d'une action est le drift (égal au taux sans risque en univers risque neutre) mais le rendement varie (selon une loi normale centrée) autour de ce drift.

Ce modèle est à volatilité constante. Il permet de fournir des formules fermées (dites de Black & Scholes) de valorisations d'options de strike et maturité donnés.

Le seul paramètre à calibrer est la volatilité. L'interprétation de ce paramètre est simple : plus la volatilité est grande, plus l'actif est risqué, ses fluctuations sont d'une plus grande ampleur autour du taux sans risque, plus la volatilité est proche de 0, moins l'actif est risqué, son rendement ne s'écarte pas beaucoup du taux sans risque. La volatilité constante de ce modèle ne permet de se calibrer que sur une seule valeur de la nappe de volatilité action. Cependant, la volatilité dépend du strike et de la maturité d'une option.

Pour un produit donné, sa volatilité implicite est la volatilité qui égalise le prix calculé par les formules de Black & Scholes et le prix observé sur les marchés. La volatilité implicite dépend donc du strike et de la maturité de l'option, contrairement à la volatilité historique qui ne dépendait que du temps.

Pour obtenir la volatilité implicite, il faut inverser les formules de Black & Scholes. Cette inversion peut être effectuée à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson, par exemple.

4 Les enjeux de la valorisation des produits structurés

4.1 Évolution des produits structurés de l'entreprise

Les fonds unités de compte produits structurés ont commencé avec la commercialisation du produit Conservateur Opportunité (COP) au début des années 2010. Les ventes ont augmenté constamment au cours des années suivantes, incitant l'entreprise à développer son offre en termes de produits structurés en proposant les produits Conservateur Double Opportunité en 2018.

Ces nouveaux produits offrent une garantie de rentabilité dans des scénarios a priori défavorables, et ont tout de suite suscité plus d'intérêt de la part à la fois de l'entreprise et de ses assurés.

Depuis 2018, la collecte nette des primes relatives aux produits Conservateur Double Opportunité est en croissance. Cette croissance est également couplée à une augmentation du poids des produits structurés DOP dans le fonds unité de compte structuré proposé par l'entreprise.

Ce constat s'explique par le comportement des assurés face au contexte économique actuel décrit dans la sous-partie 1.2, ainsi que par la solution que les produits structurés offrent pour y faire face. Il s'agit de produits compétitifs et conçus pour répondre à ce contexte.

4.2 Points importants sur la nécessité de maîtriser les produits structurés

La complexité de ces nouveaux produits, couplée aux exigences réglementaires de l'ACPR en matière d'évaluation et de compréhension des supports proposés, nécessite de développer en interne la maîtrise de la valorisation et des modèles.

De plus, la détention de ces produits structurés entraîne des risques pour l'entreprise. Une partie des produits structurés Conservateur Double Opportunité est incluse dans les fonds propres et le fonds euro du bilan, ce qui les expose aux risques de provision pour risque d'exigibilité et de provision pour dépréciation durable. Une mauvaise condition de marché peut avoir un impact sur le risque de provisionnement lié aux fonds propres.

Dans l'optique de maîtriser les produits structurés, deux points cruciaux sont à retenir :

- La **valorisation** des produits structurés en interne permet de confirmer la maîtrise du produit dans sa conception.
- La **production de sensibilités** permet de maîtriser l'exposition des produits structurés aux différents mouvements de marché.

Il est important de noter que ces deux points sont nécessaires dans les projections de l'actif dans le modèle ALM. Les sensibilités permettent de faire évoluer le prix des produits structurés lors des projections Solvabilité 2. De plus, le calcul du SCR (Solvency Capital Requirement) contient un module marché comprenant un sous-module action et un sous-module taux. C'est pourquoi, le calcul du SCR nécessite de choquer les hypothèses de taux d'intérêt et du marché action. Les sensibilités vont permettre de choquer les prix de marché des produits structurés de manière adéquate.

Toutes ces raisons mettent en évidence l'importance de la valorisation des produits structurés du support unité de compte. Maîtriser le risque auquel s'expose l'assuré et l'entreprise est une priorité.

4.3 Problématique liée à l'outil actuel de maîtrise des produits structurés

Ces nouveaux produits, plus complexes que les précédents, nécessitent une mise à jour des outils actuels de valorisation et de maîtrise.

Depuis 2018, la valorisation des produits structurés se fait à l'aide de formules fermées, ce qui est rapide et simple d'utilisation pour des produits simples tels que les Conservateurs Opportunité non rachetables. Cependant, l'évolution vers des produits plus complexes tels que les Conservateurs Double Opportunité ne permet plus d'utiliser cette méthode de manière rigoureuse. Elle devient longue à mettre en œuvre car la recherche de la formule fermée n'est pas évidente, et ne permet pas de modéliser le caractère "callable" de ces produits.

Ce mémoire propose une nouvelle approche de valorisation des produits structurés qui, d'une part, permet de modéliser le caractère "callable" des produits structurés et, d'autre part, est adaptée aux produits plus complexes.

La démarche utilisée s'avérera être plus robuste que la démarche par formule fermée. La production d'indicateurs de risque tels que les sensibilités se révélera alors plus pertinente par le biais de cette méthode.

Deuxième partie

Valorisation de produits structurés et générateur de scénarios économiques

La maîtrise des produits structurés passe en premier lieu par la maîtrise de leur valorisation. Cette seconde partie a pour objectif de présenter les méthodes de valorisation disponibles. Deux méthodes couramment utilisées sont d'abord introduites : la valorisation par formule fermée et la valorisation par méthode de Monte Carlo. Une discussion sur la pertinence de l'utilisation de ces méthodes nous amènera à en sélectionner une seule.

Par la suite, le générateur de scénarios économiques est présenté en mettant en évidence son rôle dans la valorisation des produits structurés. Un état des lieux des modèles du générateur de scénarios économiques conduira à développer un nouveau modèle action, intégrant une volatilité stochastique.

5 Valorisation de produits structurés

Pour rappel, les produits structurés ont deux composantes : une partie obligataire et une partie optionnelle. La valeur d'un produit structuré est ainsi considérée comme la somme de ces deux composantes, qui varient selon plusieurs paramètres. La partie optionnelle varie avec le cours et la volatilité du sous-jacent, tandis que la partie obligataire varie avec l'évolution du niveau et de la volatilité des taux d'intérêt.

La valorisation des produits repose sur la modélisation des flux de trésorerie futurs et l'estimation de leur valeur actuelle. Il existe plusieurs méthodes pour valoriser ces produits, dont les principales sont les méthodes de valorisation par formule fermée et par Monte Carlo. La valeur d'un produit structuré ou dérivé est égale à l'espérance mathématique du flux qu'elle génère à l'échéance, actualisée au taux sans risque.

En univers risque-neutre, la rentabilité espérée de l'indice action est égale au taux sans risque. Tous les agents sont alors neutres face au risque et les investisseurs n'exigent aucune compensation pour le risque. L'univers risque-neutre est une hypothèse simplificatrice nécessaire pour la valorisation des produits dérivés.

5.1 Approche par formule fermée

Généralement, la partie optionnelle des produits structurés est un assemblage d'options. C'est le cas des produits Conservateur Opportunité et Conservateur Double Opportunité.

Conservateur Double Opportunité résulte de l'addition de 8 options que nous pouvons mettre en évidence. Les graphiques suivants représentent les 8 options intervenant dans la formule fermée calibrée pour le produit DOP.

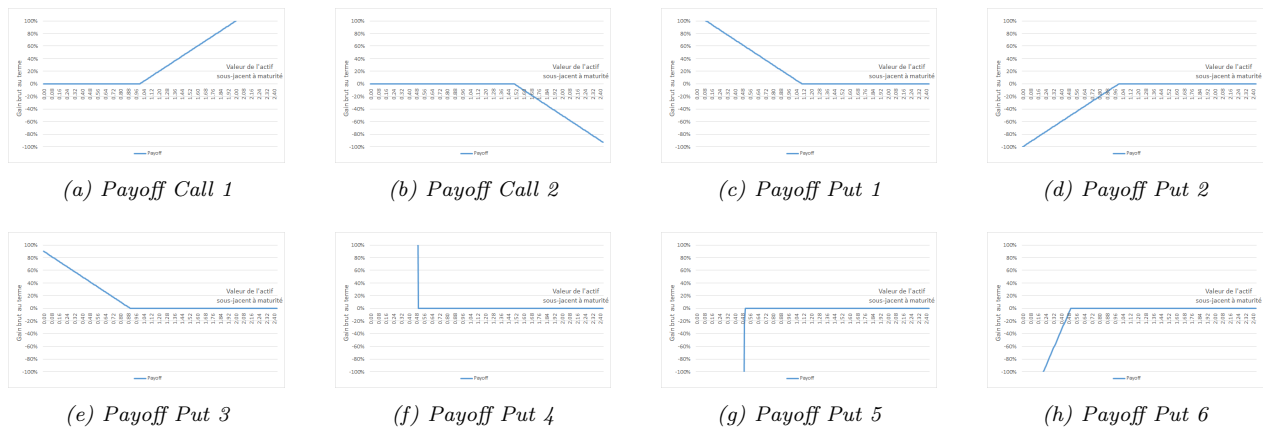


FIGURE 17 – Décomposition du produit Double Opportunité en somme d'options

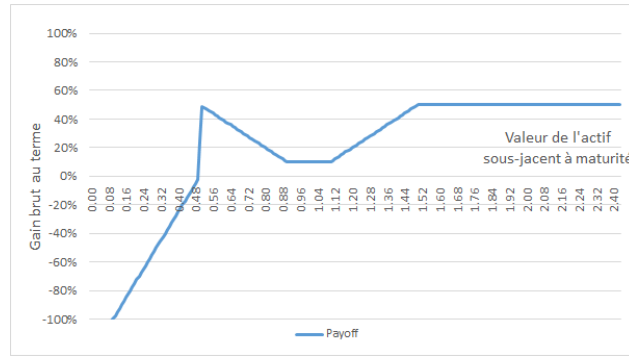


FIGURE 18 – Payoff résultant de la combinaison de 8 options

Le détail de chaque options est renseigné dans le tableau suivant. Le notionnel correspond au coefficient de pondération de chaque option ; il représente le nominal sur lequel une option est basée.

Type d'option :	Call 1	Call 2	Put 1	Put 2	Put 3	Put 4	Put 5	Put 6
K (strike)	1	$1 + b_{\text{sup}}$	$1 + m$	1	$1 - m$	$1 - b_{\text{sup}} - 0.1\%$	$1 - b_{\text{sup}} + 0.1\%$	$1 - b_{\text{sup}}$
Notionnel	1	-1	1	-1	1	$100 \times \text{pente}$	$-100 \times \text{pente}$	$-100\% \times (\text{pente} + 1)$

TABLE 1 – Décomposition du produit Conservateur Double Opportunité en somme d'options.

Les Call 1, 2 ainsi que les put 1, 2 et 3 permettent de construire la partie droite du DOP, avant le saut de la barrière inférieure.

Les Put 4, 5 et 6 permettent de construire la pente du DOP ainsi que le saut (la digit) au niveau de la barrière inférieure.

Il faut également remarquer que la formule fermée n'est pas exacte, la pente gauche ne s'arrête pas forcément à -100% (perte totale du capital investi).

La méthode de valorisation par formule fermée repose sur des équations mathématiques déterministes pour évaluer la valeur d'un produit structuré. Ces formules sont souvent basées sur des modèles théoriques comme le modèle de Black-Scholes-Merton pour les options. Ce modèle fournit des formules fermées de valorisation d'un call européen ou d'un put européen de strike K et de maturité T sur une action qui verse des dividendes. Pour rappel, la dynamique du modèle en univers risque neutre est la suivante :

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

avec W_t un mouvement brownien, $\sigma > 0$ la volatilité, $r \in \mathbb{R}$ le taux sans risque et q le taux de dividende.

Les formules de valorisation pour un indice versant des dividendes (supposés constants et continus) sont :

$$P_{Call} = S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$$

$$P_{Put} = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1)$$

avec

- T la maturité de l'option,
- K le strike de l'option,
- $d_1 = \frac{(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$,
- $d_2 = \frac{(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$,
- r le taux sans risque,
- q le taux de dividende,

- N la fonction de répartition d'une loi normale centrée-réduite.

De cette manière, la partie optionnelle peut être valorisée grâce à une combinaison de formules de Black & Scholes.

Cette méthode de valorisation présente des avantages et inconvénients :

Avantages :

- Rapidité : Les formules fermées permettent d'obtenir des résultats rapidement ;
- Simplicité : Les formules fermées sont souvent plus simples à comprendre et à mettre en œuvre que les méthodes de simulation ;
- Précision : Dans la plupart des cas, une formule fermée offre une grande précision, car elle donne une solution exacte dans le cadre de ses hypothèses ;
- Facilité d'analyse : Avec une formule fermée, il est souvent plus facile d'analyser la sensibilité des résultats par rapport aux paramètres. Les dérivées par rapport aux paramètres d'entrée peuvent souvent être obtenues directement.

Inconvénients :

- Limitations : Les formules fermées peuvent ne pas être applicables à tous les types de produits structurés, en particulier ceux présentant des caractéristiques exotiques ou des dépendances complexes entre les actifs sous-jacents. Il n'existe pas de formule fermée pour la valorisation d'option américaine, qui possède plusieurs dates d'exercice possibles, contrairement à une option européenne. La possibilité de choisir d'exercer ou non son option à plusieurs dates données a un impact sur prix, qui ne peut être capturé par des formules fermées.

Dans le cadre des produits structurés DOP, l'option d'annulation du produit (caractère "callable") est similaire au choix d'un exercice ou non de la possibilité de remboursement du point de vue de la banque. Pour cette raison, l'optionalité liée au remboursement anticipé ne peut pas être capturée par des formules fermées ;

- Mise en place longue dans le cas de produits complexes : La recherche de la combinaison d'options n'est pas toujours aisée ;
- Restriction d'un point de vue évolutif : Une évolution sur un produit entraîne un changement de formule fermée, la recherche de la formule fermée peut poser problème.

5.2 Approche par simulation : méthode de Monte Carlo

La méthode de valorisation par Monte Carlo repose sur des simulations numériques pour estimer la valeur d'un produit structuré. Cette approche consiste à générer un grand nombre de scénarios possibles pour les facteurs de risque sous-jacents, calculer la valeur du produit dérivé (ou structuré) actualisée pour chaque scénario, et ensuite calculer la moyenne.

Étant donné N trajectoires du taux sans risque et de l'indice action, nous souhaitons évaluer la valeur d'un produit structuré.

Soit $P_T(\text{Action}, \text{Taux})$ le prix du produit structuré. La méthode de valorisation risque-neutre est décrite dans le schéma suivant :

Hypothèse : L'indice action est modélisé par un modèle de Black and Scholes et les taux sont modélisés par le modèle LMM shifté, ces modèles seront décrits dans la suite.

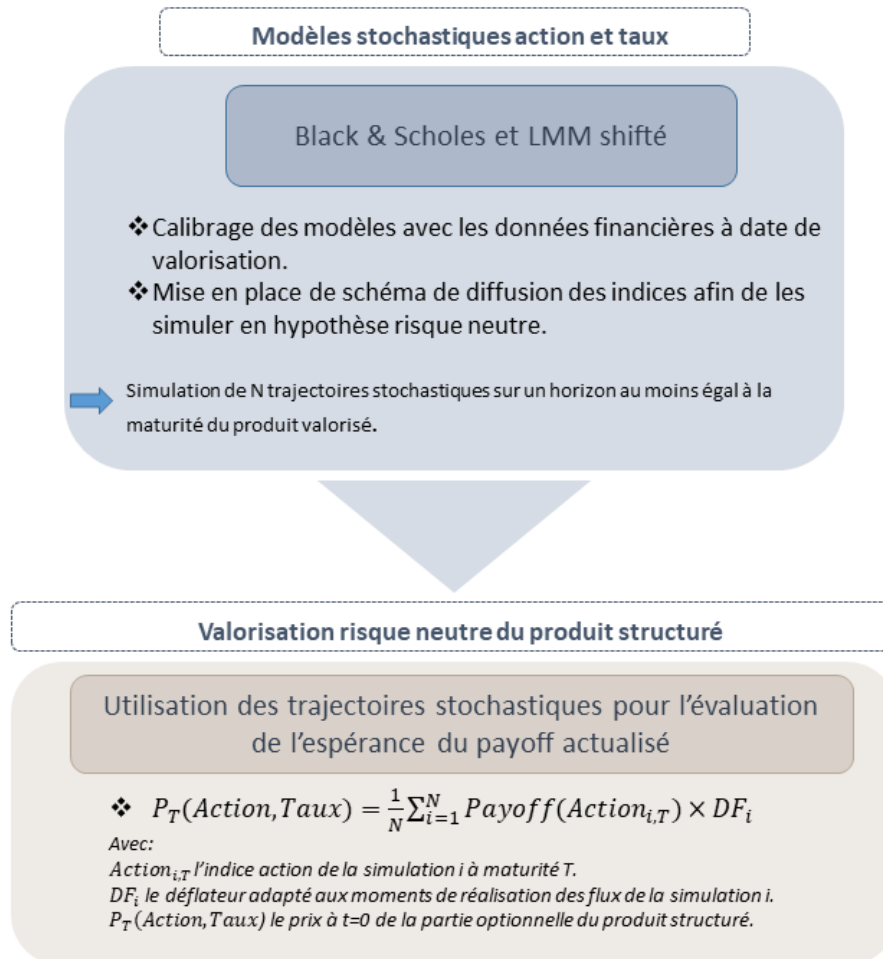


FIGURE 19 – Méthodologie de la valorisation par Monte Carlo

Remarque : Le payoff du produit structuré ne dépend pas toujours uniquement de la valeur du sous-jacent à échéance. Par exemple, il peut dépendre de la trajectoire du sous-jacent ou de sa valeur à des dates autres que celle d'échéance.

Avantages de la méthode :

- Flexibilité : La méthode de Monte Carlo permet une grande flexibilité, car il n'est pas nécessaire de rechercher une formule si un produit est modifié. Seuls les paramètres du payoff changent, et le payoff est généralement simple à évaluer sur chaque simulation. Cette méthode peut être appliquée à une grande variété de produits structurés, y compris ceux présentant des caractéristiques exotiques ou des dépendances complexes entre les actifs sous-jacents ;

- Prise en compte de phénomènes supplémentaires : Le fait que le produit soit rachetable (callable) est modélisable. Sur chaque trajectoire, nous pouvons évaluer si le produit peut être rappelé ou pas par un algorithme classique ;
- Précision : La méthode de Monte Carlo permet de prendre en compte les distributions de probabilité réelles et les dynamiques de marché, conduisant à des estimations plus précises de la valeur des produits structurés ;

Inconvénients :

- Coût computationnel : La méthode de Monte Carlo nécessite un grand nombre de simulations, ce qui peut être coûteux en termes de temps et de ressources informatiques ;
- Complexité : La mise en œuvre de la méthode de Monte Carlo peut être plus complexe que les formules fermées, nécessitant une expertise plus approfondie en statistiques et en programmation.

5.3 Méthode retenue

L'objectif est de valoriser les produits structurés Double Opportunités, pouvant être "callable". Il s'agit de produits structurés complexes, multi-strike. Une approche par formule fermée ne permet pas de capturer toute l'optionnalité liée à ces produits, le caractère "callable" n'est pas pris en compte. C'est l'approche qui était jusqu'à présent utilisée dans le pricer des produits structurés.

En complément, ces produits ont vocation à évoluer, il est possible d'imaginer créer de nouveaux produits (dont le payoff pourrait dépendre de la trajectoire de l'actif ou d'une nouvelle forme de payoff) afin de proposer des produits novateurs. Une approche par formule fermée nous obligerait à revoir complètement les formules, qui ne sont pas toujours évidentes à calibrer.

La méthode de Monte Carlo vient résoudre ces différents problèmes, même si sa mise en place est plus lourde et nécessite plus de temps de calcul. Une fois le pricer mis en place, une simple évolution du payoff sera simple à mettre en place en pratique. Le payoff pourra aisément dépendre des trajectoires qui sont simulées dans le cadre de la méthode de Monte Carlo. La possibilité d'utiliser un algorithme de modélisation du remboursement anticipé vient également combler une faiblesse de la méthode de valorisation par formule fermée.

Pour ces différentes raisons, il est choisi d'évoluer vers la méthode de Monte Carlo pour la valorisation des produits structurés Conservateur Double Opportunité.

Il est maintenant important de se focaliser sur la génération des scénarios stochastiques, nécessaires à la valorisation par méthode de Monte Carlo des produits structurés.

6 Générateur de scénarios économiques : Généralités

6.1 Définitions

La projection des facteurs de risque économiques et financiers est un élément central des analyses prospectives réalisées par les assureurs vie. Ces projections sont essentielles pour le calcul des provisions, les choix d'allocation et la gestion des risques financiers.

En pratique, cette projection est réalisée par des générateurs de scénarios économiques (GSE), qui alimentent les modèles de calcul de la valeur économique des actifs et des passifs et permettent d'analyser la distribution de cette valeur.

Un générateur de scénarios économiques est un outil permettant de projeter des facteurs de risque économiques et financiers. Il est important de noter que les facteurs de risque et les prix des actifs ne coïncident pas toujours :

- Pour les actions et l'immobilier, le facteur modélisé correspond directement au prix de l'actif.
- Pour les obligations, on modélise généralement un nombre limité de taux (dont le taux sans risque) et de spreads obligataires.

La manière de projeter les facteurs de risque dépend de l'utilisation du générateur de scénarios économiques, ce qui conduit à définir les notions de probabilité historique et de probabilité risque neutre.

Il existe deux univers donnant lieu à deux types de générateurs de scénarios économiques :

1. Un univers **risque neutre**, utilisé lorsqu'on est dans une logique d'évaluation. Dans ce cas, tous les actifs ont une performance moyenne égale au taux sans risque (les primes de risque sont nulles), permettant de réaliser des évaluations en actualisant les flux futurs au taux sans risque. Pour garantir une évaluation cohérente avec les prix observés sur les marchés, les modèles doivent être calibrés à partir de ces prix de marché.
2. Un univers de **probabilités réelles**, utilisé lorsqu'on cherche à déterminer les évolutions futures compatibles avec les observations historiques. Dans ce cas, les simulations reproduisent le plus fidèlement possible la réalité historique et les modèles sont calibrés sur les données historiques. Dans cette configuration, les actifs risqués offrent une prime de risque, rendant difficile la réalisation d'une évaluation correcte.

L'étude se concentre sur la valorisation de produits structurés qui se fait en univers risque neutre.

6.2 Utilisation du générateur de scénarios économiques pour la valorisation des produits structurés

Le générateur de scénarios économiques risque neutre permet de projeter les indices taux et actions de manière market-consistent. Autrement dit, à travers les projections, ce sont les prix observés à date sur le marché qui sont projetés.

À condition que le générateur de scénarios économiques possède un modèle action et un modèle de taux adaptés aux payoffs des produits structurés DOP, il est possible d'utiliser les trajectoires générées afin de valoriser des produits structurés par la méthode de Monte Carlo.

Les trois grandes étapes de la production de scénarios stochastiques par un générateur de scénarios économiques sont les suivantes :

1. **Calibrage** des différents modèles stochastiques modélisant les facteurs économiques sur les données de marché à date.
2. **Diffusion** des facteurs économiques par le biais des modèles stochastiques grâce à la génération d'aléas (mouvements browniens).
3. **Validation** des scénarios obtenus par tests martingales et tests de market-consistency.

Il est important de garder à l'esprit qu'il existe trois types de biais présents dans tous les modèles :

1. Le biais de calibrage : Les modèles sont calibrés à partir de données de marché, mais ce processus de calibrage n'est jamais parfait, et peut induire une différence entre les valeurs modélisées et les données réelles.
2. Le biais de simulation (ou de Monte Carlo) : Il apparaît une fois les modèles calibrés et discrétisés pour être simulés numériquement. Le nombre de scénarios générés a un impact : plus il y a de scénarios, moins le biais est important.
3. Le biais de discrétisation : Il est associé à la méthode de discrétisation utilisée pour approximer un modèle continu dans un cadre numérique. Lors de la transformation d'un modèle continu en un modèle discret, certaines propriétés et dynamiques du modèle original peuvent être perdues ou approximées de manière imparfaite. Ce processus peut introduire des erreurs et des écarts par rapport au comportement réel du modèle, ce qui constitue le biais de discrétisation. Pour minimiser ce biais, il est important de choisir des méthodes de discrétisation appropriées et de prendre en compte la taille des intervalles de discrétisation.

Il est important d'évaluer ces différents biais dans les modèles, par exemple, un biais de calibrage important peut entraîner des inexactitudes dans la diffusion des indices, tandis qu'un biais de simulation ou de discrétisation important peut entraîner des erreurs dans la valorisation des produits dérivés.

En conclusion, il est essentiel de prendre en compte ces trois biais dans l'analyse et l'utilisation des modèles financiers. Les modèles doivent être évalués et ajustés en conséquence afin de minimiser l'impact de ces biais sur les résultats.

Le générateur de scénarios économiques de l'entreprise est un modèle interne. Le calibrage ainsi que les tests de validation sont réalisés sur des maquettes Excel-VBA, et la diffusion est codée en C++.

6.3 Les tests de sortie d'une table de scénarios économiques

Deux tests sont réalisés en sortie du générateur de scénarios économiques dans le but de valider l'hypothèse martingale de l'univers risque neutre et la projection market-consistent.

6.3.1 Tests martingales

Les tests de martingales sont réalisés sur les trajectoires générées des facteurs de risques économiques projetés. Ils vérifient la propriété de martingales des prix actualisés générés par les modèles. Le test vérifie :

$$P(0) = \mathbb{E}^Q[\text{Prix estimé}]$$

$$P(0) = \frac{1}{n} \sum_i (\text{Prix actualisé du scénario } i)$$

où :

- n est le nombre de scénarios stochastiques
- \mathbb{E}^Q est l'espérance sous la mesure probabilité risque neutre Q .
- $P(0)$ est le prix évalué en 0 de notre actif.

La propriété de martingale est testée sur les indices actions, les taux nominaux (avec les prix d'obligations ZC), les taux réels (avec les obligations indexées sur l'inflation) et les spreads obligataires.

Un test statistique de rejet est effectué avec l'hypothèse H_0 :

$$Y_n = \frac{X_n - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

où

- $X_n = \mathbb{E}^Q[\text{Prix estimé}]$
- $m = P(0)$
- n est le nombre de scénarios stochastiques
- σ est la volatilité empirique du prix estimé, c'est-à-dire son écart-type.

Contre l'hypothèse H_1 : Le prix estimé X_n ne suit pas la distribution normale ci-dessus.

Le niveau de confiance est fixé à 99,9%.

Par exemple, un test martingale dans une table de 2000 scénarios sur l'indice action peut avoir l'allure suivante :

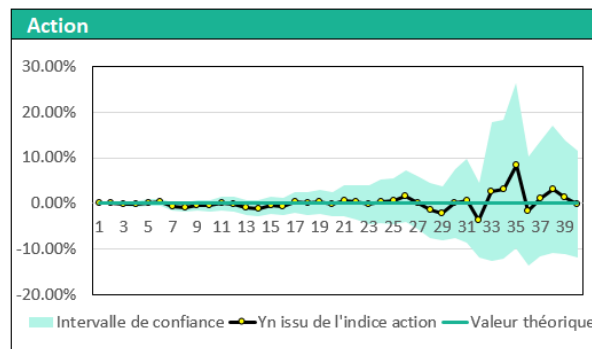


FIGURE 20 – Graphique : Résultat du test martingale de l'indice action

Dans ce cas, l'hypothèse de martingale pour le modèle action est acceptée.

6.3.2 Tests de market-consistency

Les tests de market-consistency permettent de vérifier que les scénarios économiques générés respectent les conditions de projection "market-consistent". Le test vérifie que la valorisation des instruments financiers via ces scénarios soit cohérente avec leurs prix de marché.

La martingalité des prix des produits non dérivés générés par le GSE (et validée par les tests martingales) assure déjà leur caractère market-consistent par propriété martingale.

Cependant, cela n'est pas vérifié pour les produits dérivés. Il est alors nécessaire de vérifier que la valorisation des instruments dérivés est cohérente avec leurs valeurs de marché.

Concrètement, ce test se déroule selon les étapes suivantes :

1. Calcul des prix des options par méthode de Monte Carlo sur la table de scénarios à valider.
2. Comparaison des prix (ou volatilités) obtenus avec les prix (ou volatilités) de marché.

Remarque importante : Dans l'ensemble du mémoire, le terme "test" est utilisé par abus de langage. Il ne s'agit pas d'un test statistique. L'hypothèse du caractère market-consistent est validée à l'aide de seuils définis en interne.

Par exemple, voici un test sur l'indice action calibré sur le strike 1 :

On vient comparer les volatilités de marché et celles calculées par Monte Carlo.

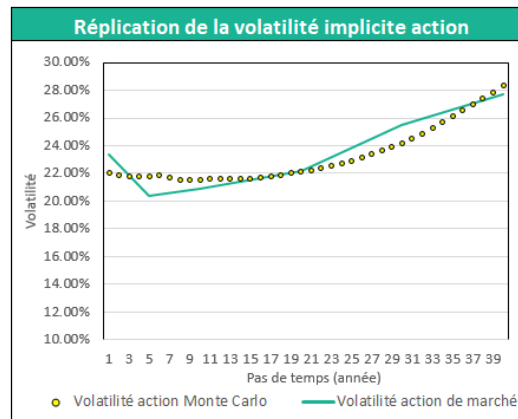


FIGURE 21 – Réplication de la volatilité implicite action

Le test de market-consistency est cohérent et validé.

6.4 Modèle de taux actuel

Le modèle de taux est un Libor Market Model (LMM) shifté, avec un shift déterministe. Ce modèle projette les taux forward. Soit $(T_k)_{k>0}$ une série de dates successives. En notant $F_k(t)$ le taux forward payé à l'instant t au titre de la période $[T_k, T_{k+1}]$, la dynamique du modèle est la suivante :

$$\begin{cases} dF_k(t) = \sigma_k(t)(F_k(t) + \alpha(t))dz_k(t), \\ \sigma_k(t) = \phi_t(b(T_{i-1} - t) + a)e^{-c(T_{i-1}-t) + d}, \\ \alpha(t) = |a_{shift}| \max(b_{shift} + (1 - b_{shift})e^{-c_{shift}t}, 0), \\ \phi_t = p_1 + (1 - p_1)e^{-p_2 t}. \end{cases}$$

où $(a_{shift}, b_{shift}, c_{shift}, a, b, c, d, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^9$ sont les paramètres du modèle et z_k est un mouvement brownien.

Le modèle LMM le plus classique intègre un shift constant. Ici, le shift déterministe permet de capter de manière plus satisfaisante les smiles de volatilité des swaptions, sans avoir pour autant à améliorer le modèle vers un LMM à volatilité stochastique (LMM+).

Le modèle de taux actuel permet de projeter les taux forward. Dans la valorisation des produits structurés, c'est le taux court qui va être utilisé, afin d'actualiser la jambe structurée mais également de faire évoluer la jambe fixe des produits structurés.

Le taux court est modélisé correctement. Le modèle de taux actuel est adapté au payoff des produits structurés DOP et ne nécessite aucune évolution.

6.5 Modèle action actuel

Actuellement, le modèle action est un modèle de Black & Scholes à volatilité déterministe (dite locale). Il s'agit d'une adaptation simple du modèle de Black & Scholes. Ce modèle considère une volatilité déterministe "par terme", c'est-à-dire qui dépend du temps. Ce modèle a la dynamique suivante en univers risque neutre :

$$\begin{cases} dS_t = S_t(r - q)dt + S_t\sigma_t dW_t, \\ \sigma_t = (a + bt)e^{-ct} + d. \end{cases}$$

où :

- r est le taux sans risque,
- q le taux de dividende versé par le sous-jacent S ,
- $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ est un vecteur de paramètres,
- W_t est un mouvement brownien.

Le vecteur de paramètres du modèle est noté $\theta_{B\&S_{locale}} = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

La volatilité implicite est donnée par :

$$\sigma_{implicite} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \sigma_t^2 dt}$$

Ce modèle permet de se calibrer sur les volatilités d'un strike donné. Il résout les problèmes de dépendance au temps de la volatilité. Cependant, la volatilité action de marché étant en réalité une nappe de volatilité dépendant du strike ainsi que de la maturité, ce modèle ne permet pas de calibrer toute la nappe de volatilité.

L'illustration ci-dessous permet d'observer la faiblesse du calibrage sur les volatilités des options de maturité 5 ans.

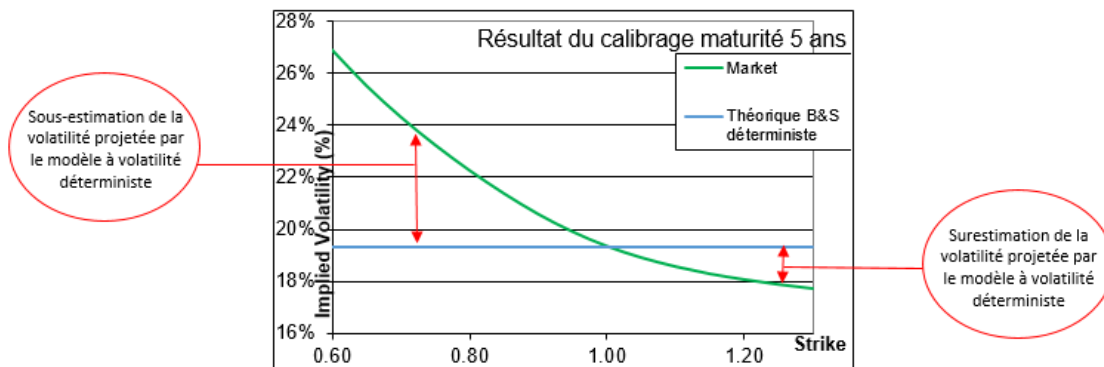


FIGURE 22 – Faiblesse du calibrage du modèle de Black and Scholes à volatilité locale

Comme le montre le graphique ci-dessus, la volatilité d'une option varie en fonction de son strike. Dans ce cas, il s'agit d'un smile de volatilité. Lorsqu'il y a d'abord une surestimation de la volatilité puis une sous-estimation, cela est appelé skew de volatilité. Le modèle actuel ne permet pas de calibrer les smiles et skew de volatilité.

Les produits structurés qui vont être valorisés par la méthode de Monte Carlo sont sensibles à des strikes très éloignés et à plusieurs maturités. Pour rappel, un produit structuré Double Opportunité est une combinaison de 8 options. Le modèle actuel est trop faible pour la valorisation des produits structurés. Une amélioration du modèle action est nécessaire afin de pouvoir calibrer toute la nappe de volatilité.

Un modèle action à **volatilité stochastique** permet de calibrer toute la nappe de volatilité. La section suivante se focalise sur le développement d'un nouveau modèle action intégrant une volatilité stochastique.

Remarque : Le développement d'un nouveau modèle permettant de calibrer et répliquer les smiles et skew de volatilité dans les scénarios stochastiques permettra également, du point de vue de la norme Solvabilité 2, une prise en compte plus fine du risque du marché action dans le portefeuille d'actifs.

7 Générateur de scénarios économiques : Implémentation d'un modèle action à volatilité stochastique

7.1 Préliminaires

Dans cette section, les différents travaux sont illustrés avec la nappe de volatilité action fournie par Bloomberg datée du 30/06/2022. Afin de valider les démarches, des back-tests ont été réalisés sur plusieurs nappes de volatilité à différentes dates (31/12/2021, 31/03/2022, 30/06/2022, 30/09/2022 et 31/12/2022).

La nappe de volatilité est représentée dans le graphique ci-dessous, où les strikes sont exprimés en strike relatif : il s'agit du rapport entre le niveau du sous-jacent à la date d'évaluation et la valeur du strike.

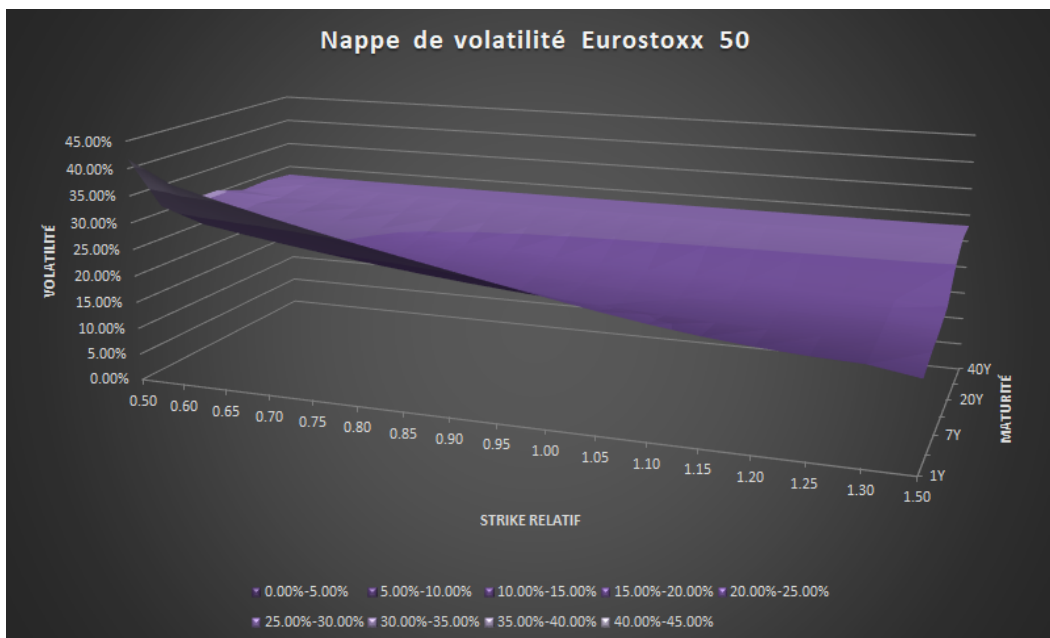


FIGURE 23 – *Nappe de volatilité action*

Le taux Euribor (dit sans risque) disponible sur Bloomberg est utilisé comme déflateur dans la suite. De même, les dividendes utilisés sont issus de Bloomberg.

7.2 Le modèle de Heston

7.2.1 Dynamique du modèle

Le modèle de Heston est un modèle à volatilité stochastique de la même forme que le modèle de Black & Scholes, mais qui intègre une volatilité dont le carré (la variance) suit un modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Sous la probabilité historique \mathbb{P} , la dynamique du modèle s'écrit :

$$\begin{cases} dS_t = S_t(\mu - q)dt + S_t\sqrt{v_t}d\tilde{W}_{1,t} \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}d\tilde{W}_{2,t} \end{cases}$$

où :

- S est l'indice action,

- v est la variance de l'indice action,
- μ est le taux de rendement attendu de l'actif,
- q est le dividende versé par le sous-jacent S ,
- θ est la variance à l'infini, c'est-à-dire la moyenne de la variance à long terme,
- κ est la vitesse de retour à la moyenne,
- ξ est la volatilité de la volatilité,
- v_0 est la variance à l'instant initial,
- $\tilde{W}_{1,t}$ et $\tilde{W}_{2,t}$ sont deux mouvements browniens de corrélation $\rho > 0$, ce qui s'écrit mathématiquement $d < \tilde{W}_{1,t}, \tilde{W}_{2,t} > = \rho dt$.

Le vecteur de paramètres du modèle est noté $\theta_{Heston} = (\kappa, \theta, \xi, v_0, \rho) \in \mathbb{R}^{*+4} \times]-1, 1[$.

La présence de la racine carrée de la variance dans la dynamique du modèle nécessite que la variance soit positive ou nulle. Il existe une condition sur les paramètres, appelée condition de Feller, qui assure une variance strictement positive. Cette condition est la suivante :

$$\xi^2 < 2\kappa\theta.$$

7.2.2 Passage en univers risque neutre

La dynamique évoquée précédemment est valable en univers monde réel. Il est possible d'exprimer le modèle de Heston sous la probabilité risque neutre. Rappelons que, sous cette probabilité, l'actif actualisé est une martingale. Ce passage repose sur le fait qu'il est toujours possible d'exprimer le rendement μ de l'actif comme la somme du taux sans risque r et d'une prime de risque λ :

$$\mu = r + \lambda$$

Les travaux de Heston [3] permettent de réécrire la dynamique de la volatilité en introduisant une prime de risque liée à celle-ci, notée λ_{vol} .

$$dv_t = (\kappa^*(\theta^* - v_t) + \lambda_{vol})v_t dt + \xi\sqrt{v_t}d\tilde{W}_{2,t}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \kappa^* = \kappa + \lambda_{vol} \\ \theta^* = \frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda_{vol}} \end{cases}$$

Le théorème de Girsanov [7] permet d'opérer un changement de probabilité. Soit \mathbb{Q} la probabilité définie par :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \left(\left(\frac{\lambda}{\sqrt{v(s)}}\right)^2 + \left(\frac{\lambda_{vol}}{\xi} \sqrt{v(t)}\right)^2\right) ds - \int_0^t \frac{\lambda}{\sqrt{v(s)}} d\tilde{W}_{1,s} - \int_0^t \frac{\lambda_{vol}}{\xi} \sqrt{v(t)} d\tilde{W}_{2,s}\right).$$

Sous cette probabilité dite risque-neutre, les processus suivants sont des mouvements browniens.

$$\begin{aligned} dW_{1,t} &= d\tilde{W}_{1,t} + \frac{\lambda}{\sqrt{v(t)}} dt \\ dW_{2,t} &= d\tilde{W}_{2,t} + \frac{\lambda_{vol}}{\xi} \sqrt{v(t)} dt \end{aligned}$$

La dynamique du modèle s'écrit alors :

$$\begin{cases} dS_t = S_t(r - q)dt + S_t\sqrt{v_t}dW_{1,t} \\ dv_t = \kappa^*(\theta^* - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}dW_{2,t} \end{cases}$$

Dans la suite de cette étude, l'analyse se déroule sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} .

7.2.3 Limites du modèle

Le modèle de Heston présente de nombreux avantages par rapport au modèle de Black & Scholes à volatilité locale. La volatilité stochastique permet d'obtenir des estimations plus réalistes des prix des options. Ce modèle est plus flexible et permet de prendre en compte les smiles et skews de volatilité, ainsi que de capturer la corrélation entre les rendements d'un actif et sa volatilité.

Toutefois, malgré ces avantages, il convient de prendre en considération les limites inhérentes au modèle de Heston :

1. Complexité mathématique : Le modèle de Heston intègre une volatilité stochastique, ce qui complexifie les calculs théoriques et leurs interprétations, contrairement à des modèles plus simples comme le modèle de Black & Scholes.
2. Calibrage : Le calibrage est plus complexe et plus long. Les paramètres obtenus peuvent varier selon l'algorithme de calibrage choisi.
3. Absence de phénomène de sauts de prix : Le modèle ne prend pas en compte les sauts de prix, ce qui peut limiter la précision du modèle dans la représentation des mouvements réels du marché.
4. Comportement à long terme : Le modèle de Heston suppose que la volatilité suit un processus de réversion à la moyenne (processus de Ornstein-Uhlenbeck). Cette hypothèse peut ne pas être réaliste pour certains actifs ou sur des horizons de temps très longs.

7.3 Calibrage du modèle

Le calibrage du modèle est abordé en introduisant d'abord la méthode générale de calibrage d'un modèle action. La méthode est ensuite appliquée au modèle de Heston.

7.3.1 Méthode

Soit un modèle de diffusion stochastique noté \mathcal{P} avec un vecteur de paramètres $\theta_{\mathcal{P}}$. L'objectif est d'estimer le vecteur de paramètres $\theta_{\mathcal{P}}$.

1ère étape : Obtention d'une formule fermée de valorisation d'un call.

En considérant un call de strike K et de maturité T , en effectuant les calculs théoriques du payoff de ce call, une formule fermée de valorisation est obtenue. Pour rappel, l'espérance du payoff d'un call est la quantité suivante :

$$\mathbb{E}[\max(S_T - K, 0)D(0, T)]$$

Cette formule prend la forme :

$$\mathbb{E}[\max(S_T - K, 0)D(0, T)] = g_1(\mathcal{P}, T, K, S, \theta_{\mathcal{P}})$$

avec g_1 une fonction à déterminer et $D(0, T)$ le déflateur.

Remarque : Cela n'est pas toujours possible, plus un modèle est complexe, plus il est difficile d'obtenir une formule fermée. Un des avantages du modèle de Heston est qu'il offre une formule semi-fermée pour la valorisation d'un call, ce qui facilite les calculs pour le calibrage du modèle.

2ème étape : Estimation des paramètres par optimisation des écarts par rapport aux valeurs de marché.

La nappe de volatilité utilisée est celle présentée en figure 23. Le modèle doit être calibré sur ces valeurs. Il est possible de réaliser un calibrage sur les prix ou sur les volatilités. Les deux sont équivalents. Le choix d'un calibrage sur les volatilités est fait. Une inversion de Black est réalisée afin de passer des prix aux volatilités.

Les volatilités théoriques issues de l'étape 1 après inversion de Black sont notées $\sigma_{th}(\mathcal{P}, T, K, S, \theta_{\mathcal{P}})$. Soit n ($n > 0$) volatilités de marché, notées $(\sigma_{market, i, K_i, T_i})_{1 \leq i \leq n}$, avec K_i le strike et T_i la maturité de l'option i .

Les différentes volatilités disponibles ou pouvant être calculées sont représentées dans le tableau suivant :

Volatilité implicite du marché	Volatilité implicite théorique	Volatilité implicite Monte Carlo
$(\sigma_{market, i, K_i, T_i})_{1 \leq i \leq n}$	$\sigma_{th}(\mathcal{P}, T, K, S, \theta_{\mathcal{P}})$	$\sigma_{MC}(\mathcal{P}, T, K, S, \theta_{\mathcal{P}})$

Afin d'estimer le vecteur de paramètres, l'optimisation suivante est réalisée sur $\theta_{\mathcal{P}}$:

$$\min_{\theta_{\mathcal{P}}} \sum_{i=1}^n \lambda_i (\sigma_{th}(\mathcal{P}, T_i, K_i, S, \theta_{\mathcal{P}}) - \sigma_{market, i, K_i, T_i})^2$$

où les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des poids permettant de cibler davantage certaines volatilités que d'autres.

L'algorithme de Nelder-Mead sous contraintes (avec pénalisation) est utilisé pour l'optimisation. En effet, dans le modèle de Heston, il existe un certain nombre de restrictions sur les paramètres en plus de la possible condition de Feller. Ainsi, lorsqu'un point (vecteur) ne satisfait pas ces conditions, il se voit attribuer un score arbitrairement grand. Cet algorithme est un algorithme géométrique qui, en partant d'un point, crée un nuage de points qui se déplace d'une certaine manière à chaque itération. Le fonctionnement de l'algorithme ne sera pas abordé.

Les paramètres obtenus doivent ensuite être validés. Ce test de validation implique la comparaison des volatilités implicites obtenues par la méthode de Monte Carlo avec les volatilités implicites théoriques calibrées et les volatilités implicites de marché. Il s'agit du test de market-consistency.

7.3.2 Calibrage du modèle de Heston

Formule de calibrage :

Le calibrage, réalisé sur des options d'achat (call), nécessite la formule fermée de valorisation d'une option dans le cadre du modèle de Heston.

En conservant les notations du modèle de Heston, la **formule fermée** de valorisation d'une option d'achat de maturité T et de strike K à la date initiale est la suivante :

$$g_1(T, K, S, \theta_{Heston}) = \mathbb{E}[\max(S_T - K, 0)D(0, T)] = S_0 \exp(-qT)P^+ - K \exp(-rT)P^-$$

avec r le taux court et q le taux de dividende et

$$P^+(\theta_{Heston}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re\left(\frac{\exp(-iu \ln(K))F^+(\theta_{Heston})}{iuS_0 \exp((r-q)T)}\right) du,$$

$$P^-(\theta_{Heston}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \Re\left(\frac{\exp(-iu \ln(K))F^-(\theta_{Heston})}{iu}\right) du,$$

$$F^+(\theta_{Heston}) = M_S(1 + iu),$$

$$F^-(\theta_{Heston}) = M_S(iu),$$

$$M_S(iu) = E[\exp(iu \ln(S_t))].$$

Les détails de calcul de M_S avec les différents paramètres du modèle et la démonstration de cette formule sont disponible dans [6].

Ces formules permettent alors d'évaluer le prix théorique des options.

Choix de la matrice de poids :

La matrice de poids choisie est la suivante :

Matrice de Poids							
Moneyness	1Y	5Y	7Y	10Y	20Y	30Y	40Y
0.50	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
0.60	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.65	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.70	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.75	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.80	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
0.85	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.90	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.95	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
1.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.20	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00
1.25	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.30	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
1.50	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	0.00

FIGURE 24 – Matrice de poids

L'objectif du calibrage est de capturer :

- des maturités allant jusqu'à 10 ans : les produits Double Opportunité ont une maturité et des dates de rappel variant entre 5 et 10 ans ;
- des strikes variant de 0,5 à 1,5 : les produits Double Opportunité peuvent avoir des niveaux barrières allant jusqu'à plus ou moins 50%.

Paramètres de calibrage :

Les points suivants concernant le calibrage sont à noter :

- L'algorithme du Nelder-Mead nécessite un point de départ. Après différents tests, le choix des paramètres de départ est le suivant : $\kappa = 0,2570$, $\theta = 0,5793$, $\xi = 0,2944$, $\rho = -0,8314$, $v_0 = 0,0433$.
- Le nombre maximum d'itérations de l'algorithme est fixé à 2000, et sa tolérance à 10^{-6} , dans l'optique d'obtenir un calibrage fin.
- La valorisation des produits structurés nécessite la prise en compte des dividendes dans le calibrage. Le dividende q utilisé pour le calibrage est le dividende implicite à date de l'EURO STOXX 50.

Résultat du calibrage :

Lors du calibrage, les limites de la condition de Feller ont été testées. Cette dernière se révèle être trop contraignante pour un calibrage optimal. Une condition dite partielle est alors utilisée en acceptant que : $0,5 < \frac{2\kappa\theta}{\xi^2}$.

Le tableau ci-dessous résume les différents calibrages obtenus : *L'erreur quadratique totale est également affichée, c'est-à-dire en considérant des poids tous égaux à 1, cela permet d'apprécier l'ajustement global de la nappe de volatilité. La matrice de poids est la suivante :*

Matrice de Poids							
Moneyness	1Y	5Y	7Y	10Y	20Y	30Y	40Y
0.50	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00
0.60	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00
0.65	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00
0.70	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00
0.75	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00
0.80	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00
0.85	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00
0.90	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00
0.95	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00
1.00	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00
1.05	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00
1.10	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00
1.15	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00
1.20	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00
1.25	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00
1.30	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00
1.50	100	100	100	100	0.00	0.00	0.00

FIGURE 25 – Matrice de poids

Calibrage	Calibrage 1 : Matrice (1) sous Feller	Calibrage 2 : Matrice (2) sous Feller	Calibrage 3 : Matrice (1) sous Feller partiel	Calibrage 4 : Matrice (2) sous Feller partiel	Calibrage 5 : Matrice (1) sans Feller
Nombre d'itérations	508	415	387	387	166
Erreur quadratique (1)	2,66	∅	0,7161	∅	0,154
Erreur quadratique (2)	∅	0,1057	∅	0,0663	∅
Erreur quadratique totale (3)	8,3203	15,0133	2,2028	4,1725	0,3836
κ	0,3315	6,77	0,2711	5,3248	0,3325
θ	0,1147	0,0476	0,1224	0,0503	0,1159
ξ	0,2664	0,8030	0,3643	1,0350	-0,7709
ρ	-0,8086	-0,99	-0,8663	-0,9987	-0,7709
v_0	0,0418	0,1586	0,0646	0,1687	0,0740
$\frac{2\kappa\theta}{\xi^2}$	1,07	1,0004	0,5001	0,500	0,2366

TABLE 2 – Récapitulatif du calibrage du modèle de Heston

(1) : Matrice de poids de base, figure 24.

(2) : Matrice de poids de base sans les strikes 50% et 150%.

(3) : Matrice de poids avec tous les strikes jusqu'à la maturité 10 ans, figure 25.

Les graphiques des résultats des différents calibrages obtenus sont disponibles en Annexe 1.

Plusieurs observations sont à retenir :

- La présence de la condition de Feller empêche de calibrer correctement toute la nappe de volatilité, de plus, elle augmente considérablement le temps de calcul.
- L'utilisation de la matrice (2) pour le calibrage augmente considérablement la vitesse de retour à la moyenne κ .
- La condition de Feller partielle permet un ajustement plus précis que la condition de Feller de base, en calibrant davantage toute la nappe. Le calibrage 2 et 3 semblent proches sur l'erreur quadratique (1), cependant, la différence d'erreur quadratique totale est notable. C'est ce qui est observé dans la majorité des back-tests. Leurs paramètres sont également proche, cela met en avant l'aspect contraignant de la condition de Feller dans l'optimisation du calibrage.
- La condition de Feller permet de calibrer les smiles de volatilité de manière satisfaisante pour des strikes relatifs variant de 75% à 125%. Au vu du passif d'assurance-vie de l'entreprise, il apparaît que, pour une utilisation réglementaire sous Solvabilité 2, la condition de Feller est utilisable.
- La présence d'un paramètre ρ toujours négatif : Ce point est pertinent avec les marchés, où on observe une corrélation négative entre un indice action et sa volatilité. Sur cet aspect-là, le modèle capture bien cet effet, c'est un des avantages du modèle de Heston.
- Le calibrage sans condition de Feller permet d'ajuster une grande partie de la nappe de volatilité action.

La remarque suivante permet de comprendre en quoi la condition de Feller sur les paramètres ne permet pas de se calibrer correctement sur les données de marché.

Remarque : La condition de Feller est rarement satisfaite sur le marché. En effet, imposer $\xi^2 < 2\kappa\theta$ implique une vitesse de retour à la moyenne plus élevée, ce qui réduit la variance de la volatilité stochastique, qui à son tour réduit la convexité du smile de volatilité calibré. Afin d'augmenter cette convexité, il est nécessaire d'augmenter ξ (volatilité de la volatilité). Cependant, cette augmentation est restreinte par la condition de Feller : $\xi^2 < 2\kappa\theta$.

La condition de Feller n'est généralement pas vérifiée. Dans le but de gagner en précision, il ne faut pas la considérer dans le calibrage. Il est important de noter que si la volatilité atteint 0 à un temps t donné, alors : $dv_t = \kappa\theta dt$. Dans ce cas, la volatilité s'éloigne instantanément de 0. Comme v_0 , κ et θ sont strictement positifs, la variance est positive à tout instant. Le véritable problème vient du schéma de discrétisation qui peut autoriser une volatilité négative avant correction.

Une étude de l'influence des paramètres disponible dans [4] permet de comprendre que la relation imposée sur les paramètres ne permet pas d'obtenir des smiles assez convexes.

Pour la suite, la démarche va s'axer autour de plusieurs objectifs :

- Analyser l'adéquation entre la présence de la condition Feller et le biais de discrétisation par analyse des tests de market-consistency.
- Comprendre l'impact du biais de calibrage, de discrétisation et de simulation sur la valorisation des produits structurés.

7.4 Diffusion et validation du modèle : Schéma d'Euler

7.4.1 Le schéma d'Euler

Le modèle étudié doit maintenant être discrétisé afin d'être diffusé. Le schéma d'Euler est un schéma classique de discrétisation du modèle de Heston. On rappelle que le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} dS_t/S_t = (r - q)dt + \sqrt{v_t}dW_{1,t} \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}dW_{2,t} \end{cases}$$

avec $d \langle W_{1,t}, W_{2,t} \rangle = \rho dt$.

Soit $\Delta_t = \frac{1}{12}$ le pas de temps mensuel. La discrétisation selon le schéma d'Euler s'écrit alors :

$$\begin{cases} \hat{S}(t + \Delta_t) = \hat{S}(t) + \hat{S}(t)\sqrt{\hat{v}(t)}(W_{1,t+\Delta_t} - W_{1,t}) \\ \hat{v}(t + \Delta_t) = \hat{v}(t) + \kappa(\theta - \hat{v}(t)) + \xi\sqrt{\hat{v}(t)}\sqrt{\Delta_t}(W_{2,t+\Delta_t} - W_{2,t}) \end{cases}$$

Dans le but de gagner en précision sur le schéma de discrétisation de l'actif, le schéma d'Euler est appliqué à la dynamique du logarithme :

En appliquant le lemme d'Ito à la dynamique de l'actif, il vient :

$$d\ln(\hat{S}(t)) = -\frac{1}{2}v(t)dt + \sqrt{v(t)}dW_{1,t}$$

La discrétisation selon cette équation permet d'écrire :

$$\ln(\hat{S}(t + \Delta_t)) = \ln(\hat{S}(t)) + (r - \frac{1}{2}\hat{v}(t))\Delta_t + \sqrt{\hat{v}(t)}\sqrt{\Delta_t}(W_{1,t+\Delta_t} - W_{1,t})$$

De manière équivalente :

$$\hat{S}(t + \Delta_t) = \hat{S}(t)e^{(r - \frac{1}{2}\hat{v}(t))\Delta_t + \sqrt{\hat{v}(t)}\sqrt{\Delta_t}(W_{1,t+\Delta_t} - W_{1,t})}$$

Le processus \hat{v} est autorisé à prendre des valeurs négative. Une correction est possible en remplaçant \hat{v} par sa partie positive. La dynamique de la volatilité devient alors un simple drift positif de $\kappa\theta$ lorsqu'il y a une valeur négative. La discrétisation s'écrit alors :

$$\begin{cases} \hat{S}(t + \Delta_t) = \hat{S}(t)e^{(r - \frac{1}{2}\hat{v}^+(t))\Delta_t + \sqrt{\hat{v}^+(t)}\sqrt{\Delta_t}(W_{1,t+\Delta_t} - W_{1,t})} \\ \hat{v}(t + \Delta_t) = \hat{v}(t) + \kappa(\theta - \hat{v}^+(t)) + \xi\sqrt{\hat{v}^+(t)}\sqrt{\Delta_t}(W_{2,t+\Delta_t} - W_{2,t}) \end{cases}$$

Les deux mouvements browniens sont de corrélation ρ , le mouvement brownien de l'équation de diffusion de l'actif étant lui-même corrélé aux autres indices projetés dans le générateur de scénarios économiques.

Les étapes de simulation des mouvements browniens sont les suivantes :

1. Générer un premier mouvement brownien $\hat{W}_{1,t}$, correspondant à la dynamique de l'actif. Corréler ce premier mouvement brownien aux autres indices du générateur de scénarios économiques par le biais de la matrice de corrélation. Le brownien corrélé est noté $W_{1,t}$.
2. Générer une variable $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$ puis calculer le deuxième mouvement brownien de corrélation ρ avec $W_{1,t}$ par la formule suivante :

$$W_{2,t+\Delta_t} - W_{2,t} = \rho(W_{1,t+\Delta_t} - W_{1,t}) + \sqrt{1 - \rho^2}\sqrt{\Delta_t}\epsilon$$

où les variables aléatoires ϵ sont générées de façon indépendante.

Théoriquement, sous la condition de Feller, le processus v ne prend pas de valeur négative ou nulle si $v_0 > 0$. En pratique, il existe un biais de discrétisation qui peut conduire à la négativité du processus v de manière ponctuelle.

Il est important de noter que lorsque la condition de Feller n'est pas respectée, le schéma de discrétisation présenté précédemment va sous-estimer la volatilité projetée. Dans ce cas, le schéma de discrétisation est moins efficace.

Une solution pour éviter la sous-estimation de la volatilité tout en l'estimant de manière plus précise est de considérer des ponts browniens. Le pas de temps actuel est mensuel, et la simulation des deux mouvements browniens reste inchangée.

Soit un pas de temps $\delta_t \leq \Delta_t$, ce pas de temps est utilisé pour générer des ponts browniens entre chaque point des mouvements browniens de pas de temps Δ_t .

La volatilité est alors estimée selon le schéma suivant :

$$\hat{v}(t + \delta_t) = \hat{v}(t) + \kappa(\theta - \hat{v}^+(t)) + \xi\sqrt{\hat{v}^+(t)}\sqrt{\delta_t}(W_{2,t+\delta_t} - W_{2,t})$$

Le schéma d'Euler étant un schéma d'ordre 1, l'erreur de troncature locale est proportionnelle à la taille du pas de temps. Par conséquent, en réduisant le pas de temps de discrétisation de la volatilité, la volatilité est estimée de manière plus fine.

7.4.2 Inefficacité du schéma d'Euler

Les tables générées comportent 2000 scénarios. Le pas de temps de l'actif est mensuel. Le pas de temps de la volatilité fera l'objet d'une discussion. L'horizon de projection est de 40 ans.

La qualité du calibrage 1 présentée dans le tableau 2, sous condition de Feller, ne s'avère pas acceptable. L'examen des calibrages 2 et 4 permet d'évaluer la qualité de répliation du calibrage par le modèle. Les graphiques ci-dessous représentent les volatilités répliquées (calculées par la méthode de Monte Carlo) et théoriques pour chaque strike cible avec le calibrage 2.

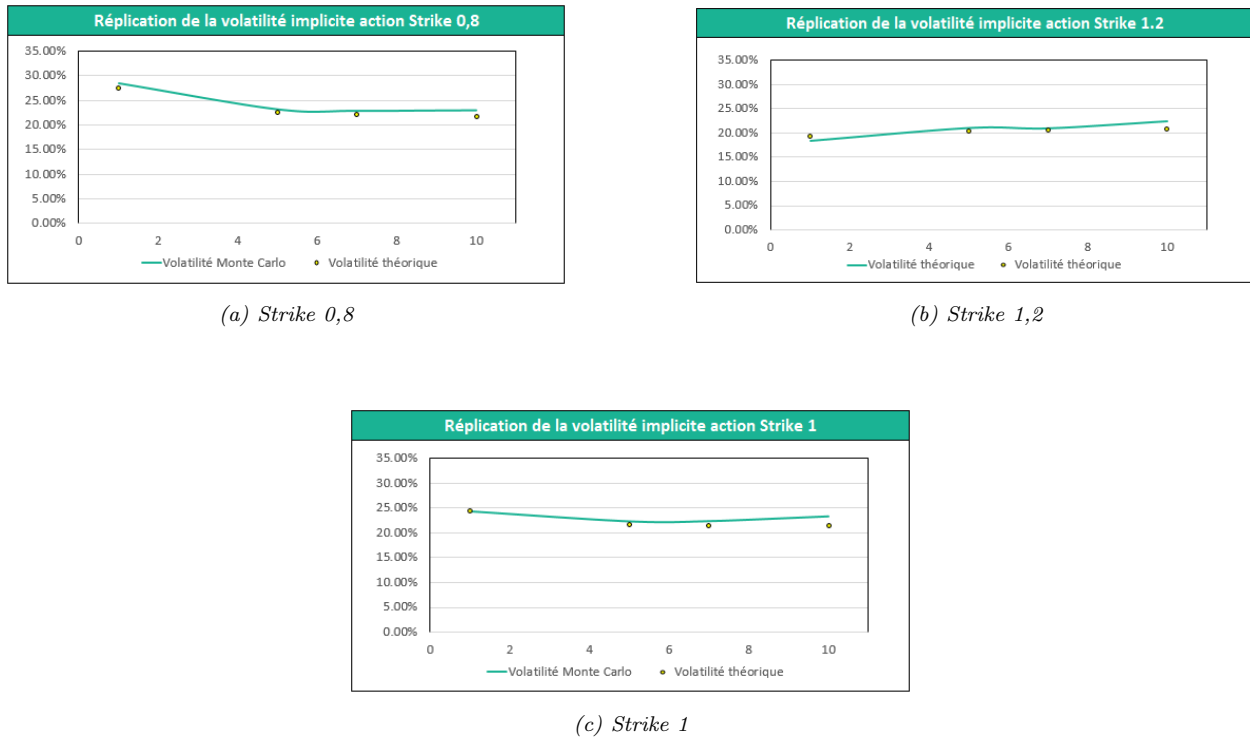


FIGURE 26 – Réplication de la volatilité implicite action du modèle de Heston avec le calibrage 2.

Étant donné que le calibrage du modèle avec le marché est validé, le test de cohérence avec le marché est également validé compte tenu de la qualité de répliation des volatilités théoriques. Le test martingale ci-dessous est également validé.

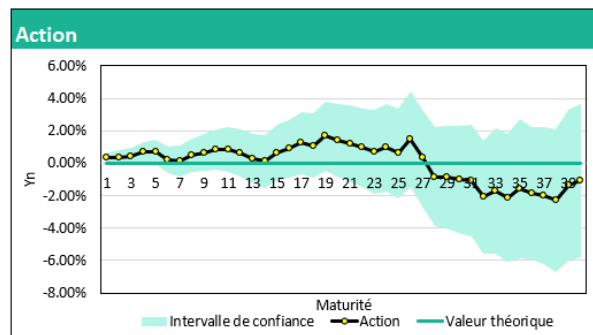


FIGURE 27 – Test martingale, Calibrage 2, Schéma d'Euler, 2000 simulations

La condition de Feller associée au schéma de discrétisation d'Euler permet de calibrer et réplier une partie de la nappe de volatilité. Comme vu précédemment, une condition de Feller partielle permet un calibrage de meilleure qualité (calibrage 4). Il est nécessaire de valider les tests martingales et de market-consistency d'une table générée par le calibrage 4. Ces derniers (non représentés) sont validés. La table générée par le

calibrage 4 est utilisable dans le cadre des calculs réglementaires Solvabilité 2.

Toutefois, il convient d'examiner la qualité de réplcation de la volatilité, la condition de Feller ayant un impact direct sur celle-ci.

Dans le but d'évaluer la qualité de réplcation de la volatilité, la proposition suivante permet de comparer sa diffusion en moyenne à la valeur théorique de son espérance :

Proposition 1. Soit $T > t$. Dans le cadre du modèle de Heston et en conservant les notations du modèle, les moments conditionnels de la volatilité stochastique sont :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[v(T)|v(t)] &= \theta + (v(t) - \theta)e^{-\kappa(T-t)}, \\ \text{Var}[v(T)|v(t)] &= \frac{v(t)\xi^2}{\kappa}(e^{-\kappa(T-t)} - e^{-2\kappa(T-t)}) + \frac{\theta\xi^2}{2\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)})^2.\end{aligned}$$

En particulier pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[v(t)] &= \theta + (v_0 - \theta)e^{-\kappa t}, \\ \text{Var}[v(t)] &= \frac{v_0\xi^2}{\kappa}(e^{-\kappa t} - e^{-2\kappa t}) + \frac{\theta\xi^2}{2\kappa}(1 - e^{-\kappa t})^2.\end{aligned}$$

La démonstration est disponible dans [2].

Comme expliqué précédemment, le relâchement de la condition de Feller entraîne une sous-estimation de la volatilité. Le graphique suivant représente la volatilité théorique et celle calculée par Monte Carlo pour le calibrage 2.

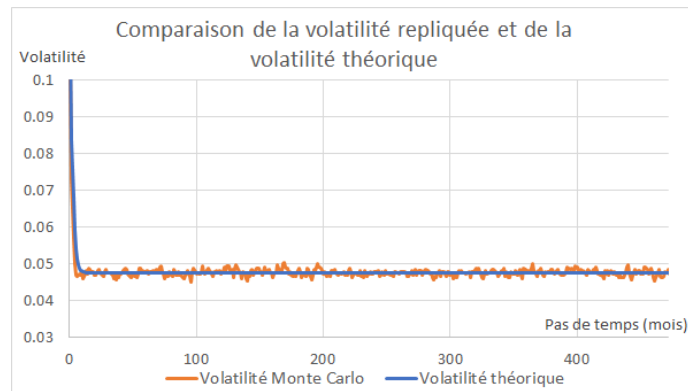


FIGURE 28 – Schéma d'Euler : Réplication de la volatilité avec le calibrage 2 et 2000 scénarios

Le graphique suivant représente cette fois-ci la volatilité théorique et celle calculée par Monte Carlo pour le calibrage 4.

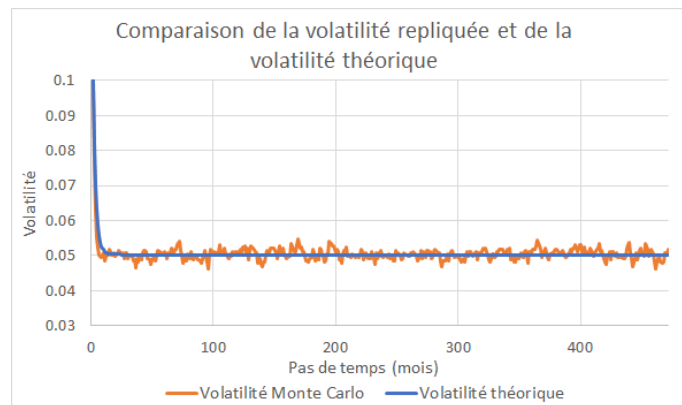


FIGURE 29 – Schéma d'Euler : Réplication de la volatilité avec le calibrage 4 et 2000 scénarios

La qualité de répliation de la volatilité est satisfaisante. La proportion de zéros moyens de la partie positive de la volatilité sur les 2000 scénarios est de 27,5% dans ce cas, contre 5% dans le cas du calibrage 2. Ce résultat est cohérent avec la condition de Feller, le calibrage 2 étant à la limite de celle-ci. Moins la condition est respectée, plus le processus de volatilité prend des valeurs négatives et possède alors une partie positive nulle.

La valorisation de produits structurés complexes nécessite une grande précision dans la répliation de l'intégralité (sans prendre en compte les maturités au-delà de 10 ans) de la nappe de volatilité dans les scénarios.

Il est tentant de tester la fiabilité du schéma d'Euler avec le calibrage 5 (sans condition de Feller). Le graphique suivant représente la volatilité théorique ainsi que la volatilité calculée par Monte Carlo dans le cadre du calibrage 5.

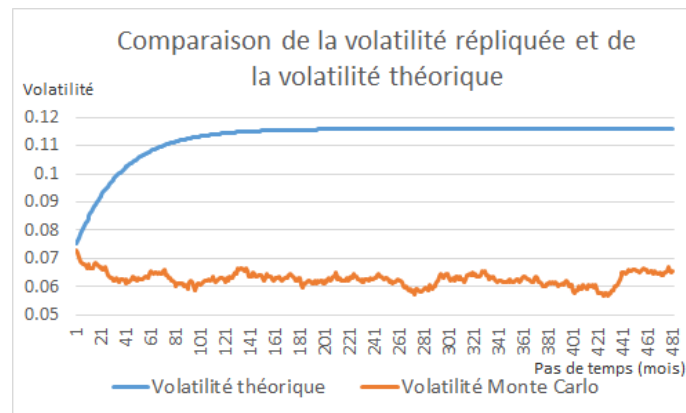


FIGURE 30 – Schéma d'Euler : Répliation de la volatilité avec le calibrage 5 et 2000 scénarios

Comme attendu, la volatilité prenant en grande partie des valeurs négatives, sa partie positive est nulle. On observe une sous-estimation très grossière de la volatilité. De ce fait, les tests de cohérence avec le marché seront totalement invalides.

Un point d'attention concernant la proportion de zéros dans la partie positive doit être abordé ici. Pour le schéma d'Euler avec le calibrage 5 et 2000 scénarios, cette proportion est de 20%. En réalité, ce n'est pas uniquement la proportion de 0 qui vient poser problème, mais la valeur du drift $\kappa\theta$ qui définit la dynamique en cas de valeur négative de la volatilité dans le schéma d'Euler corrigé. Dans le cas du calibrage 2 ou 4, ce drift est d'environ 0,25, ce qui permet au processus de volatilité d'augmenter de façon significative. Dans le cas du calibrage 5, la valeur du drift est de 0,036, ce qui ne permet pas au processus d'augmenter de manière significative au-dessus de 0 ; de ce fait, le processus reste alors davantage proche de 0 tout en restant positif. Ceci explique la sous-estimation grossière de la volatilité couplée à la proportion de zéros de la partie positive de la volatilité.

Une autre solution consiste à considérer des ponts browniens, en nombre suffisant pour compenser le relâchement progressif de la condition de Feller. Plus on a de ponts browniens, plus la discrétisation de la volatilité sera précise (le pas de discrétisation se rapprochant de 0, on se rapproche de la forme continue du modèle) et moins elle sera sous-estimée par la partie positive. Cependant, une limite se pose rapidement : le temps de génération de la table de scénarios économiques augmente considérablement avec le nombre de ponts choisis, pouvant rendre cette solution non viable.

Plusieurs tests ont été réalisés afin de challenger les limites de ce modèle de discrétisation avec la condition de Feller :

- Relâchement progressif de la contrainte de la condition de Feller, en faisant varier la constante $\alpha > 0$ dans la relation : $\alpha < \frac{2\kappa\theta}{\xi^2}$. Les résultats donnent des calibrages de plus en plus fins. Cependant, le schéma d'Euler ne permet pas une répliation correcte en raison de la sous-estimation de la volatilité.

- Augmentation du nombre de ponts browniens dans la discrétisation de la volatilité dans le but de compenser le relâchement progressif de la condition de Feller. Des tests ont été réalisés pour un nombre de ponts entre chaque pas de temps mensuel allant de 5 à 300. Le temps de calcul augmente de manière non négligeable, le gain en précision est insuffisant, et cela n'efface pas l'absence de la condition de Feller. Sous condition de Feller totale ou partielle, un nombre de ponts browniens égal à 5 semble être un compromis acceptable entre le gain en précision et le temps de calcul.
- Modification du calibrage, changement de matrice de poids cibles de sorte à optimiser à la fois le calibrage des strikes extrêmes et le relâchement de la condition de Feller. Aucun calibrage ne permet d'obtenir un relâchement acceptable tout en calibrant les strikes extrêmes.
- Augmentation du nombre de scénarios générés : C'est le biais de calibrage et de discrétisation, et non celui de simulation, qui posent problème.

La combinaison des deux premiers points présente une limite : à chaque date, le calibrage optimal possède un rapport de Feller différent. Rechercher l'optimisation du rapport de Feller tout en sélectionnant un nombre de ponts browniens permettant au schéma d'Euler de répliquer correctement la volatilité s'avère trop coûteux en temps. Par ailleurs, il s'agit d'une méthode par tâtonnement, qu'il est souhaitable d'éviter. Cette méthodologie n'est donc pas adaptée.

La méthodologie de calibrage avec une condition de Feller restreinte à 0,5 combiné un schéma d'Euler classique avec 5 ponts browniens permet de répliquer les smiles de volatilité de manière acceptable pour les strikes allant de 75% à 125%. Ce résultat est satisfaisant, la condition de Feller partielle est conservée dans la cadre de la réglementation Solvabilité 2, et la table peut être utilisée dans le modèle ALM pour les différents calculs réglementaires.

Cependant, la précision recherchée dans le cadre de la valorisation des produits structurés n'est pas atteinte. Le test suivant a été réalisé :

1. Sélection d'un produit structuré Double Opportunité,
2. Mise en place d'une formule fermée par combinaison de 8 options,
3. Valorisation des options de la formule fermée par la méthode de Monte Carlo,
4. Obtentions des prix des options de la formule fermée avec le modèle de Heston calibré,
5. Valorisation du produit structuré par combinaisons des prix obtenus par la méthode de Monte Carlo,
6. Valorisation du produit structuré par combinaisons des prix obtenus par le modèle de Heston calibré,
7. Comparaison des prix obtenus au prix de marché du produit Double Opportunité.

Ce test permet d'observer que les prix des options induits par la table et par le calibrage utilisés sont trop éloignés des prix de marché. Cette situation est due à la mauvaise qualité du test de market-consistency des tables, qui s'explique par le biais conséquent de calibrage sous condition de Feller complète ou partielle. Étant donné le nombre d'options dans la combinaison de la formule fermée, les erreurs s'accumulent rapidement.

Par conséquent, le modèle de discrétisation présenté ne permet pas la valorisation des produits structurés Double Opportunité.

Dans cette étude, l'objectif est de valoriser des produits structurés complexes. La valorisation de ces produits nécessite un calibrage et une diffusion fine des smiles de volatilité. Le schéma d'Euler, souvent utilisé pour sa flexibilité, sa simplicité d'implémentation et sa rapidité de calcul ne semble pas adapté. Les limites du modèle sont atteintes : il s'agit d'un modèle de discrétisation du premier ordre, et sa précision est limitée.

Un nouveau schéma de discrétisation plus précis est discuté par la suite.

7.5 Diffusion et validation : Du schéma d'Euler à l'Exponentiel Quadratique

Le schéma d'Euler n'est pas assez précis. D'une part, la discrétisation induit un biais non négligeable dû à la sous-estimation de la volatilité, et d'autre part, la condition de Feller est indispensable au bon fonctionnement de la discrétisation. Cette condition est incompatible avec le calibrage visé.

C'est pour cette raison qu'une autre approche est envisagée. Un schéma de discrétisation plus précis, permettant de relâcher la condition de Feller serait idéal. Il est alors nécessaire que le schéma de discrétisation assure une variance positive dans sa construction.

7.5.1 Discrétisation de la variance : Schéma QE

Leif Andersen [2] propose plusieurs schémas de discrétisation dans ses travaux, dont l'**Exponentiel Quadratique**. Il s'agit d'un modèle de discrétisation du second ordre.

L'**Exponentiel Quadratique** (QE) est un schéma de discrétisation considérant que pour des valeurs suffisamment grandes de \hat{v} :

$$\hat{v}(t + \Delta_t) = a(b + Z_V)^2$$

où a et b sont des constantes à déterminer et Z_V est une variable gaussienne standard.

Pour de petites valeurs de \hat{v} , Andersen approche la vraie densité par :

$$\mathbb{P}(\hat{v}(t + \Delta_t) \in [x, x + dx]) \approx (p \times \delta(0) + \beta(1 - p)e^{-\beta x})dx$$

pour $x \geq 0$.

où δ est une fonction de Dirac, $p \in [0, 1]$ et $\beta \geq 0$ sont des constantes à déterminer.

Les différentes constantes de ce schéma vont être déterminées par une méthode d'ajustement des moments.

Il est également nécessaire de déterminer une règle permettant de faire le choix entre les deux distributions.

La fonction de répartition est :

$$F(x) = \mathbb{P}(\hat{v}(t + \Delta_t)) = p + (1 - p)(1 - e^{-\beta x})$$

pour $x \geq 0$.

L'inverse est alors :

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq u \leq p \\ \beta^{-1} \ln\left(\frac{1-p}{1-u}\right) & \text{si } p < u \leq 1. \end{cases}$$

La volatilité est estimée à l'aide de la formule suivante : $\hat{v}(t + \Delta_t) = F^{-1}(U_v)$ avec $U_v \sim \mathcal{U}(0, 1)$.

La méthode d'ajustement des moments repose sur les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} m &= \mathbb{E}[\hat{v}(t + \Delta_t) | \hat{v}(t) = v(t)] \\ s^2 &= \text{Var}[\hat{v}(t + \Delta_t) | \hat{v}(t) = v(t)] \end{aligned}$$

La proposition 1 permet de calculer s^2 et m à l'aide des paramètres du modèle.

Cette méthode consiste à déterminer les paramètres de manière à obtenir les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} m &= \mathbb{E}[\hat{v}(t + \Delta_t)] \\ s^2 &= \text{Var}[\hat{v}(t + \Delta_t)] \end{aligned}$$

Soit $\psi = \frac{s^2}{m^2}$, la proposition suivante permet de déterminer a et b par ajustement des moments :

Proposition 2. Supposons que $\psi \leq 2$, soit :

$$\begin{cases} a = \frac{m}{1+b^2} \\ b^2 = 2\psi^{-1} - 1 + \sqrt{2\psi^{-1} - 1} \end{cases} \quad (3)$$

alors

$$\mathbb{E}[\hat{v}(t + \Delta_t)] = m \quad \text{et} \quad \text{Var}[\hat{v}(t + \Delta_t)] = s^2$$

Si $\psi \leq 2$, c'est-à-dire, pour de grandes valeurs de $\hat{v}(t)$, le schéma fonctionne.

La proposition suivante permet d'ajuster p et β lorsque $\psi \geq 1$, c'est-à-dire pour de petites valeurs de $\hat{v}(t)$:

Proposition 3. Supposons $\psi \geq 1$, soit :

$$p = \frac{\psi - 1}{\psi + 1} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1 - p}{m} = \frac{2}{m(\psi + 1)} \quad (4)$$

alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{v}(t + \Delta_t)] &= m \\ \text{Var}[\hat{v}(t + \Delta_t)] &= s^2\end{aligned}$$

Les démonstrations de ces deux propositions sont disponibles dans [2].

La règle de choix entre les deux distributions est claire lorsque $\psi \notin [1, 2]$. Un seuil critique est à choisir, $\psi_c \in [1, 2]$. Dans la suite, le seuil est fixé à 1,5.

L'algorithme de simulation de la volatilité s'écrit :

Algorithme 1 QE Schema

1. Calcul de m et s^2 avec $\hat{v}(t)$,
 2. Calcul de $\psi = \frac{s^2}{m^2}$,
 3. Génération d'une loi uniforme $U_v \sim \mathcal{U}(0, 1)$,
 4. Si $\psi \leq \psi_c$:
 - Calcul de a et b avec les équations (3),
 - Calcul de $Z_V = N^{-1}(U_v)$ avec N^{-1} l'inverse généralisé de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,
 - Poser $\hat{v}(t + \Delta_t) = a(b + Z_V)^2$.
 5. Si $\psi > \psi_c$:
 - Calcul de β et p avec les équations (4),
 - Poser $\hat{v}(t + \Delta_t) = F^{-1}(U_v)$.
-

Une fois la mise en œuvre du schéma achevée, la comparaison entre le moment d'ordre 1 de la volatilité stochastique du modèle de Heston et le moment d'ordre 1 diffusé par le schéma exponentiel quadratique donne le graphique suivant :

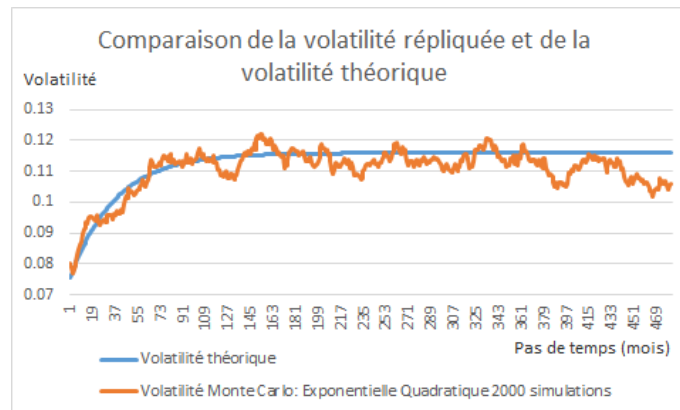


FIGURE 31 – Schéma QE : Réplication de la volatilité avec le calibrage 5 avec 2000 scénarios

Une réplification correcte de la volatilité est constatée. Il n'y a pas de problème de sous-estimation de la variance comme avec le schéma d'Euler. En outre, la condition de Feller sur les paramètres n'est plus obligatoire. Une erreur non négligeable s'accumulant dans la projection est tout de même observée. Sachant que la maturité des produits structurés étudiés n'excède pas 10 ans, il est souhaitable d'avoir une réplification la plus fine possible, au moins sur un horizon de 10 ans. Cette erreur est liée au biais de simulation. Il est nécessaire d'augmenter le nombre de simulations pour le minimiser. Le choix de 5 000 simulations est retenu, et le graphique ci-dessous permet d'observer la diminution du biais de simulation dans la réplification de la variance.

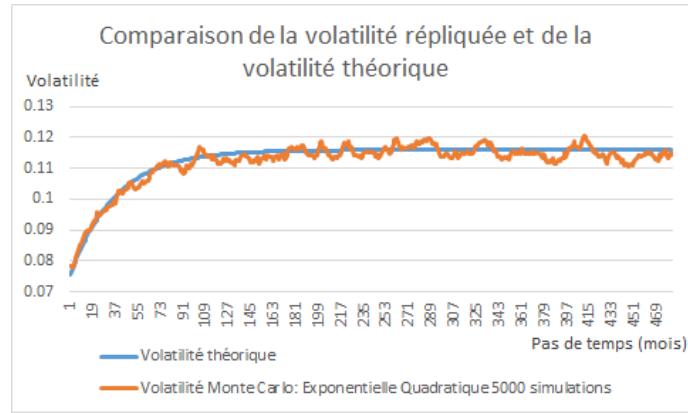


FIGURE 32 – Schéma QE : Réplication de la volatilité avec le calibrage 5 et 5000 scénarios

La précision obtenue est très satisfaisante. Le schéma de discrétisation présenté répond parfaitement à la problématique posée par le schéma d'Euler en dépassant certaines de ses limites. La volatilité étant maintenant répliquée avec précision, il est temps de s'intéresser au schéma de discrétisation de l'actif.

7.5.2 Schéma de discrétisation de l'actif

Une question se pose d'emblée : Est-il possible de combiner le schéma QE pour la volatilité avec un schéma d'Euler pour l'actif ?

L'association d'un schéma d'ordre 2 avec un schéma d'ordre 1 apparaît déjà comme une perte potentielle. Utiliser des schémas de discrétisation de différents ordres de précision pour les deux processus couplés peut entraîner des erreurs d'approximation et des incohérences dans les résultats.

Pour rappel, le schéma d'Euler pour l'actif s'exprime ainsi :

$$\ln(\hat{S}(t + \Delta_t)) = \ln(\hat{S}(t)) + (r - \frac{1}{2}\hat{v}(t))\Delta_t + \sqrt{\hat{v}(t)}\sqrt{\Delta_t}(W_{1,t+\Delta_t} - W_{1,t})$$

et la volatilité est générée par le schéma de l'algorithme 1.

Lors de l'utilisation du modèle de Heston pour représenter un indice action avec une volatilité stochastique, il est essentiel de choisir des schémas de discrétisation appropriés pour l'actif et la volatilité. La corrélation entre les processus de l'actif et de la volatilité est un élément clé du modèle.

Le schéma d'Euler pourrait ne pas gérer adéquatement la corrélation entre ces deux processus, car il ne prend pas en compte l'évolution conjointe de l'actif et de la volatilité. En effet, le terme ρ n'apparaît pas dans la dynamique de l'actif. Ainsi, le schéma d'Euler traite les deux processus comme s'ils étaient indépendants, alors qu'ils sont, en réalité, couplés et présentent une relation de corrélation spécifiée par le modèle de Heston.

En omettant la corrélation dans le schéma d'Euler, des erreurs peuvent être introduites dans la simulation des trajectoires du prix de l'actif et de la volatilité. Ces erreurs peuvent mener à des évaluations inexactes des produits dérivés basés sur l'indice action, car les interactions entre l'actif et la volatilité sont essentielles pour déterminer les prix des options.

Il est primordial de choisir des schémas de discrétisation cohérents pour l'actif et la volatilité lors de l'utilisation du modèle de Heston. Il devient donc nécessaire d'étudier un autre schéma de discrétisation plus précis pour l'actif afin de garantir une modélisation adéquate des interactions entre les processus couplés.

Un nouveau schéma de discrétisation pour l'actif :

La dynamique du modèle de Heston est définie par les équations :

$$\begin{cases} dS_t/S_t = (r - q)dt + \sqrt{v_t}dW_{1,t} \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}dW_{2,t} \end{cases}$$

avec $d < W_{1,t}, W_{2,t} > = \rho dt$.

L'application du lemme d'Îto permet d'écrire :

$$d \ln S(t) = -\frac{1}{2}v(t)dt + \sqrt{v(t)}dW_{1,t}.$$

Il est à présent possible d'appliquer une décomposition de Cholesky :

$$d \ln S(t) = -\frac{1}{2}v(t)dt + \rho\sqrt{v(t)}dW_{2,t} + \sqrt{1-\rho^2}\sqrt{v(t)}dW_{3,t}.$$

où $W_{3,}$ est un mouvement brownien indépendant de $W_{1,}$.

L'intégration de la précédente équation donne :

$$\ln S(t + \Delta_t) = \ln S(t) - \frac{1}{2} \int_t^{t+\Delta_t} v(s)ds + \rho \int_t^{t+\Delta_t} \sqrt{v(s)}dW_{2,s} + \sqrt{1-\rho^2} \int_t^{t+\Delta_t} \sqrt{v(s)}dW_{3,s}. \quad (5)$$

En intégrant à présent l'équation de la dynamique de la volatilité, il vient :

$$v(t + \Delta_t) = v(t) + \kappa\theta\Delta_t - \int_t^{t+\Delta_t} v(s)ds + \xi \int_t^{t+\Delta_t} \sqrt{v(s)}dW_{2,s}.$$

D'où

$$\int_t^{t+\Delta_t} \sqrt{v(s)}dW_{2,s} = \frac{1}{\xi} \left(v(t + \Delta_t) - v(t) - \kappa\theta\Delta_t + \int_t^{t+\Delta_t} v(s)ds \right). \quad (6)$$

Donc, en injectant l'équation (5) dans l'équation (6) :

$$\ln S(t + \Delta_t) = \ln S(t) + \frac{\rho}{\xi}(v(t + \delta_t) - v(t) - \kappa\theta\Delta_t) + \left(\frac{\kappa\rho}{\xi} - \frac{1}{2} \right) \int_t^{t+\Delta_t} v(s)ds + \sqrt{1-\rho^2} \int_t^{t+\Delta_t} v(s)dW_{3,s}.$$

Le terme $\rho v(t + \Delta_t)$ joue un rôle crucial dans la gestion de la corrélation entre $\ln S(t + \Delta_t)$ et $v(t + \Delta_t)$. Ainsi, ce terme est conservé. Des approximations sont nécessaires pour les intégrales. Les approximations suivantes sont choisies :

$$\int_t^{t+\Delta_t} v(s)ds \approx \Delta_t(\gamma_1 v(t) + \gamma_2 v(t + \Delta_t))$$

où γ_1 et γ_2 sont deux constantes. Une discrétisation centrée de l'intégrale est choisie en posant $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$.

En considérant l'indépendance de $W_{3,}$ et v , conditionnellement à $v(t)$ et $\int_t^{t+\Delta_t} v(u)du$:

$$\int_t^{t+\Delta_t} \sqrt{v(s)}dW_{3,s} \sim \mathcal{N} \left(0, \int_t^{t+\Delta_t} v(s)ds \right)$$

Le schéma final obtenu s'énonce comme suit :

$$\begin{aligned} \ln \hat{S}(t + \Delta_t) &= \ln \hat{S}(t) + \frac{\rho}{\xi}(\hat{v}(t + \Delta_t) + \hat{S}(t) - \kappa\theta\Delta_t) + \Delta_t \left(\frac{\kappa\rho}{\xi} - \frac{1}{2} \right) (\gamma_1 \hat{v}(t) + \gamma_2 \hat{v}(t + \Delta_t)) \\ &\quad + \sqrt{\Delta_t} \sqrt{1-\rho^2} \sqrt{\gamma_1 \hat{v}(t) + \gamma_2 \hat{v}(t + \Delta_t)} Z \\ &= \ln \hat{S}(t) + K_0 + K_1 \hat{v}(t) + K_2 \hat{v}(t + \Delta_t) + \sqrt{K_3 \hat{v}(t) + K_4 \hat{v}(t + \Delta_t)} Z \end{aligned} \quad (7)$$

avec

$$\begin{aligned} K_0 &= -\frac{\rho\kappa\theta}{\xi}\Delta_t, \quad K_1 = \gamma_1\Delta_t \left(\frac{\kappa\rho}{\xi} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\rho}{\xi}, \\ K_2 &= \gamma_2\Delta_t \left(\frac{\kappa\rho}{\xi} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\rho}{\xi}, \\ K_3 &= \gamma_1\Delta_t(1-\rho^2), \quad K_4 = \gamma_2\Delta_t(1-\rho^2). \end{aligned}$$

L'algorithme de génération des trajectoires de S est le suivant :

Algorithme 2 QE Schema complet

1. Étant donné $\hat{v}(t)$, calculer $\hat{v}(t + \Delta_t)$ grâce à l'algorithme 1,
2. Générer une variable aléatoire U uniforme, indépendante des variables générées pour l'étape 1,
3. Calculer $Z = N^{-1}(U)$, où N^{-1} est l'inverse généralisé de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,
4. Étant donné $\ln \hat{S}(t)$, $\hat{v}(t)$ et $\hat{v}(t + \Delta_t)$ calculés à l'étape 1, déterminer $\ln \hat{S}(t + \Delta_t)$ en utilisant l'équation (7).

Le schéma (7) se réécrit :

$$\hat{S}(t + \Delta_t) = \hat{S}(t) \exp(K_0 + K_1 \hat{v}(t)) \exp(+K_2 \hat{v}(t + \Delta_t) + \sqrt{K_3 \hat{v}(t) + K_4 \hat{v}(t + \Delta_t)} Z) \quad (8)$$

La propriété martingale n'est plus respectée. En effet, il est à noter que :

$$\mathbb{E} \left[\hat{S}(t + \Delta_t) | \hat{S}(t) \right] \neq \hat{S}(t).$$

Dans la sous-section suivante, une correction du schéma est proposée afin de satisfaire la propriété de martingalité.

7.5.3 Correction martingale

Voici les énoncés de deux propositions permettant de corriger le schéma de diffusion. Les démonstrations se trouvent dans [2].

Proposition 4. Soient K_1, K_2, K_3 et K_4 les constantes définies dans le schéma de discrétisation de l'actif S . Posons

$$M = \mathbb{E} \left[e^{A \hat{v}(t + \Delta_t)} | \hat{v}(t) \right] > 0,$$

avec

$$A = K_2 + \frac{1}{2} K_4 = \frac{\rho}{\xi} (1 + \kappa \gamma_2 \Delta_t) - \frac{1}{2} \gamma_2 \Delta_t \rho^2.$$

Si $M < \infty$ alors $\mathbb{E} \left[\hat{S}(t + \Delta_t) | \hat{S}(t) \right] < \infty$.

En supposant que $M < \infty$ et en posant

$$K_0^* = -\ln M - (K_1 + \frac{1}{2} K_3) \hat{v}(t), \quad (9)$$

et

$$\ln \hat{S}(t + \Delta_t) = \ln \hat{S}(t) + K_0^* + K_1 \hat{v}(t) + K_2 \hat{v}(t + \Delta_t) + \sqrt{K_3 \hat{v}(t) + K_4 \hat{v}(t + \Delta_t)} Z, \quad (10)$$

où Z est une variable gaussienne standard, alors, \hat{S} vérifie la propriété martingale :

$$\mathbb{E} \left[\hat{S}(t + \Delta_t) | \hat{S}(t) \right] = \hat{S}(t).$$

Il est possible de montrer que si $\rho < 0$, alors $M < \infty$. La corrélation calibrée étant toujours négative, la correction présentée ici est valide.

Proposition 5. En considérant le schéma QE avec les notations de la partie précédente. En fixant $\phi_c \in [1, 2]$. Si $\phi \geq \phi_c$ alors

$$\mathbb{E} \left[e^{A \hat{v}(t + \Delta_t)} | \hat{v}(t) \right] = \frac{\exp(\frac{A b^2 a}{1 - 2 A a})}{\sqrt{1 - 2 A a}}, \quad (11)$$

où A doit vérifier

$$A < \frac{1}{2a}. \quad (12)$$

Simon, si $\phi > \phi_c$, alors

$$\mathbb{E} \left[e^{A\hat{v}(t+\Delta_t)} | \hat{v}(t) \right] = p + \frac{\beta(1-p)}{\beta-A}, \quad (13)$$

où Z est une variable gaussienne standard, alors, \hat{S} vérifie la propriété martingale :

$$\mathbb{E} \left[\hat{S}(t + \Delta_t) | \hat{S}(t) \right] = \hat{S}(t).$$

où A doit vérifier

$$A < \beta. \quad (14)$$

La modification de la dynamique (8) est la suivante :

$$\hat{S}(t + \Delta_t) = \hat{S}(t) \exp(K_0^* + K_1 \hat{v}(t)) \exp(K_2 \hat{v}(t + \Delta_t) + \sqrt{K_3 \hat{v}(t) + K_4 \hat{v}(t + \Delta_t)} Z) \quad (15)$$

avec

$$K_0^* = \begin{cases} -\frac{Ab^2a}{1-2Aa} + \frac{1}{2} \ln(1 - 2Aa) - (K_1 + \frac{1}{2}K_3)\hat{v}(t) & \text{si } \psi \leq \psi_c, \\ -\ln(p + \frac{\beta(1-p)}{\beta-A}) - (K_1 + \frac{1}{2}K_3)\hat{v}(t) & \text{si } \psi > \psi_c. \end{cases} \quad (16)$$

L'algorithme final s'écrit :

Algorithme 3 Schéma QE avec correction martingale

1. Étant donné $\hat{v}(t)$, calculer $\hat{v}(t + \Delta_t)$ grâce à l'algorithme 1,
 2. Générer une variable aléatoire U uniforme, indépendante des variables générées à l'étape 1,
 3. Calculer $Z = \phi^{-1}(U)$,
 4. Étant donné $\ln \hat{S}(t)$, $\hat{v}(t)$ et $\hat{v}(t + \Delta_t)$ calculés à l'étape 1, déterminer $\ln \hat{S}(t + \Delta_t)$ avec les équations (15) et (16).
-

À noter que la variable aléatoire Z est corrélée aux autres facteurs de risques du GSE.

7.5.4 Validation des scénarios

Une première attention est accordée au test martingale. Comme il a été constaté précédemment, la qualité de réplcation de la volatilité est netement plus appréciable en générant 5000 scénarios et non 2000. C'est pourquoi, il a été choisi de générer des tables de 5000 scénarios. Ce nombre représente un bon compromis entre temps de calcul et qualité des scénarios. Le test martingale est le suivant :

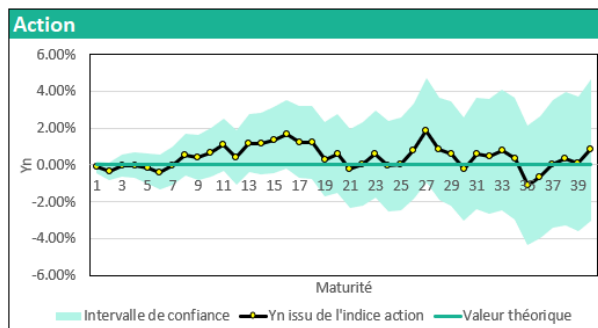
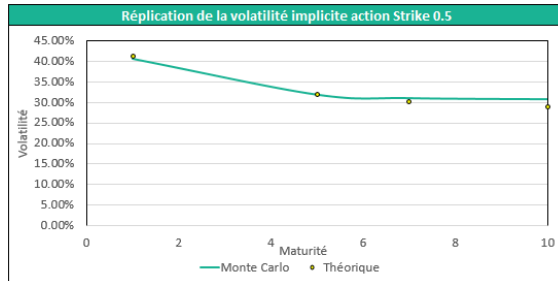
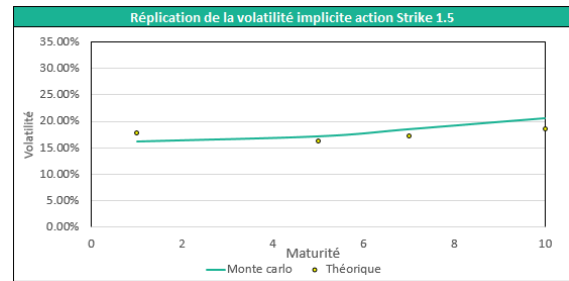


FIGURE 33 – Test martingale, Calibrage 5, Schéma QE, 5000 simulations

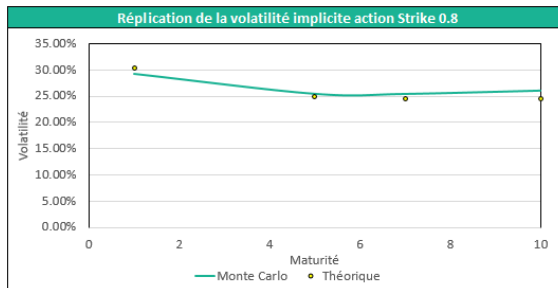
L'hypothèse martingale est validée. Le test de market-consistency est représenté ci-dessous.



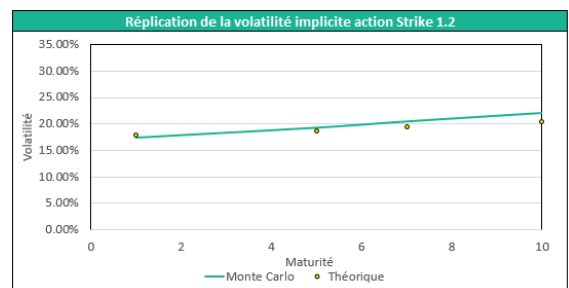
(a) Strike 0,5



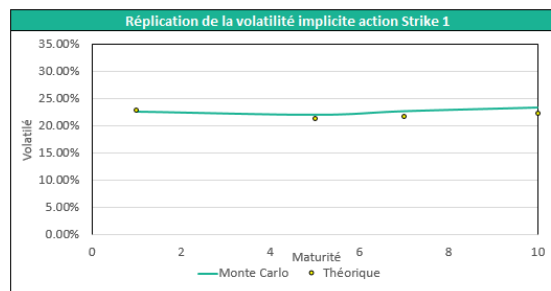
(b) Strike 1,5



(c) Strike 0,8



(d) Strike 1,2



(e) Strike 1

FIGURE 34 – Réplication de la volatilité implicite action du modèle de Heston avec le calibrage 5

Le test de market-consistency est validé. Les scénarios stochastiques répliquent les données de marché calibrées correctement avec le calibrage 5.

7.5.5 Impact : schéma QE contre schéma d'Euler

L'implémentation d'un second schéma a été indispensable pour obtenir une diffusion de l'indice d'action appropriée au pricing des produits structurés DOP.

La condition de Feller est requise pour le fonctionnement du schéma d'Euler. Il est possible de passer à une condition de Feller moins contraignante, dite partielle, conservant le bon fonctionnement du schéma d'Euler. Cependant, cette dernière ne permet pas de calibrer le modèle correctement sur l'ensemble de la nappe de volatilité.

Le nouveau schéma de discrétisation ne requiert pas la condition de Feller pour fonctionner. De ce fait, le calibrage sans condition de Feller est utilisable.

Pour comprendre l'impact de ce nouveau schéma sur la réplique des volatilités de strikes extrêmes, les tests de market-consistency pour le strike 0,5 sont représentés ci-dessous pour le calibrage (3) sous condition de Feller partielle en utilisant le schéma d'Euler, et pour le calibrage (5) sans condition de Feller avec le nouveau schéma.

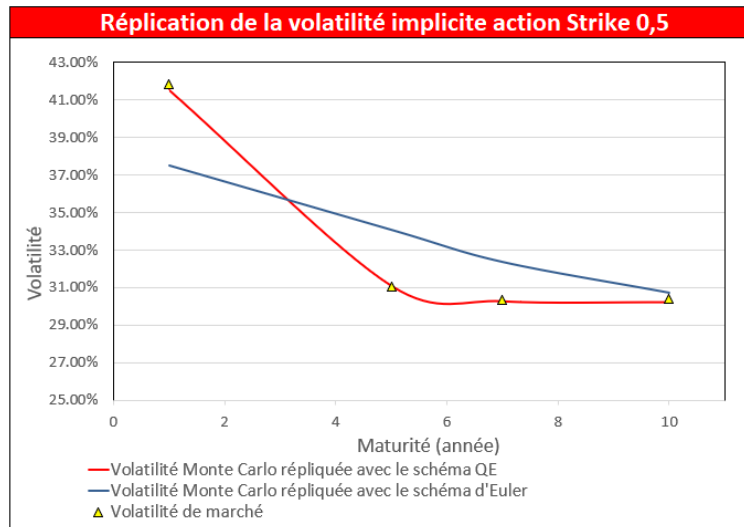


FIGURE 35 – Valorisation par méthode de Monte Carlo : Strike extrême 0,5

Contrairement au schéma d'Euler, le nouveau schéma permet de répliquer les volatilités de strikes extrêmes nécessaires pour le pricing des produits structurés DOP.

À ce stade de l'étude, la qualité des scénarios stochastiques prend en compte les risques du marché action liés aux produits structurés. Les smiles de volatilité pour des strikes allant de 50% à 150% sont répliqués dans les scénarios. Dans la suite, il s'agira d'utiliser ces différents scénarios pour valoriser les produits structurés.

Troisième partie

Valorisation, analyse des risques et maîtrise des produits structurés en contexte réglementaire

Cette troisième partie présente le pricer des produits structurés Double Opportunité, la production de sensibilités et l'exploitation de ces dernières dans la maîtrise des risques. Cet aspect est crucial pour les assureurs souhaitant gérer les risques associés à ces produits.

Dans un premier temps, l'étude se penche sur la valorisation des DOP, en explorant les données nécessaires et en appliquant la méthode de Monte Carlo pour la valorisation de ces produits. La modélisation du remboursement anticipé est également abordée. Par la suite, la production de sensibilités est évoquée, celles-ci permettant de mesurer l'impact de la fluctuation des facteurs de risque sur la valeur des produits structurés. Enfin, l'étude examine la maîtrise du produit en vision Solvabilité 1 et Solvabilité 2.

8 Valorisation des DOP

8.1 Les données nécessaires à la valorisation

La valorisation des produits structurés DOP à une date spécifique nécessite un certain nombre de données. Pour rappel, la forme générale du payoff du produit structuré DOP est présentée en figure 14.

Les paramètres du DOP sont nécessaires pour la valorisation. En complément de ces derniers, d'autres éléments sont requis pour la valorisation. Ces informations se trouvent généralement dans la fiche technique (termsheet) :

- L'émetteur : permet d'accéder au spread obligataire à l'émission du produit et à la date de valorisation,
- L'actif sous-jacent : permet d'accéder au prix du sous-jacent à différentes dates, aux dividendes et à la nappe de volatilité,
- La valeur de constatation initiale,
- La maturité,
- Les dates de constatation : permettent de connaître les dates d'évaluation du sous-jacent,
- Les dates de commission : permettent de modéliser les frais dans la valorisation du produit,
- Les dates de rappel possibles si le produit peut être remboursé de manière anticipée : permettent de modéliser les remboursements anticipés,
- Le coupon de remboursement en cas de rappel : utile pour modéliser les remboursements anticipés.

Les différentes données de marché sont récupérées sur Bloomberg. Le calibrage du générateur de scénarios économiques nécessite les données de marché sur les taux d'intérêt (niveau et volatilité) et sur le marché action (volatilité et dividendes du sous-jacent concerné). Pour rappel, la courbe des taux de marché (Euribor) est utilisée. En sortie du générateur de scénarios économiques, sont obtenues les trajectoires du taux court et de l'indice action.

La partie précédente a permis d'obtenir des tables de scénarios économiques utilisables pour la valorisation des produits structurés DOP. Les tables contiennent 5 000 scénarios, le taux 1 mois est choisi comme taux court.

8.2 Application de la méthode de Monte Carlo aux produits Conservateur Double Opportunité

La méthode de Monte Carlo nécessite d'évaluer la valeur du payoff actualisé des produits structurés sur chaque trajectoire de la table de scénarios économiques.

Le déflateur utilisé est le taux à 1 mois, considéré comme taux court. Ce taux varie à chaque pas de temps du générateur de scénarios économiques. La notation du déflateur est $DF_{i,t}$, avec i le numéro du scénario et t le

temps (en mois). À titre d'exemple, pour une maturité de 1 an, le déflateur de la simulation i est le suivant :

$$DF_{i,12} = \prod_{t_m=1}^{12} \frac{1}{(1 + r_{i,t_m})}$$

Avec $r_{i,t}$ le taux court au temps t sur la simulation i .

Pour le calcul du payoff, sur chaque scénario de la table, il est nécessaire de déterminer 3 flux, dans le cadre d'un nominal N égal à 1 :

1. La jambe structurée Flux_{struct} : La performance temporelle est notée $\text{perf} = \frac{S_T}{S_0} - 1$.
Le flux à terme de la jambe structurée dépend alors de la valeur de S_T par rapport à S_0 :
 - Si $b_{sup} < \text{perf}$: Flux_{struct} = b_{sup} ,
 - Si $b_{inf} \leq \text{perf} < b_{sup}$: Flux_{struct} = $m + \max(\text{perf} - m, 0) + \max(-\text{perf} - m, 0)$,
 - Si $\text{perf} < b_{inf}$: Flux_{struct} = $\max(-1, (\text{perf} - b_{inf}) \times \text{pente})$.

2. La jambe fixe Flux_{fixe} :

Il s'agit du spread à date de valorisation ajouté au taux court. À l'instant initial, la banque a émis son taux obligataire, qui comprend son spread à l'émission. Dans le but d'obtenir une valorisation cohérente avec les marchés, il est nécessaire de considérer le spread à date dans la valorisation. Le pas de temps de la table de scénarios est mensuel. Cette jambe fixe est donc également mensuelle, le spread à date est donné par Bloomberg, le taux court évolue mensuellement avec les valeurs données par la table de scénarios.

3. Les frais Flux_{frais} :

Il s'agit des frais prélevés et dus à l'entreprise aux dates de commissions.

Le flux non actualisé à terme est : Flux_{terme} = Flux_{struct} + Flux_{frais} - Flux_{fixe}.

Le payoff non actualisé du produit structuré sur le scénario i est : $\text{Payoff}(Action_i) = 1 + \text{Flux}_{\text{terme},i}$.

Dans le but de calculer le prix du produit structuré, tous les flux sont actualisés selon le temps auquel ils sont réalisés. Un flux réalisé au temps t (en mois) sur le scénario i est multiplié par $DF_{i,t}$. Le flux à terme actualisé est obtenu et le prix du produit structuré est donné par :

$$P_T(Action, Taux) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{Payoff}_{\text{actualisé}}(Action_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 + \text{Flux}_{\text{terme,actualisé},i}).$$

La moyenne sur les 5000 scénarios permet alors de déterminer le prix d'un produit structuré Double Opportunité.

Dans le cas d'un produit structuré Double Opportunité de nominal N donné, il suffit de multiplier le prix obtenu par le raisonnement précédent par N .

8.3 Modélisation du remboursement anticipé

L'un des grands avantages de la méthode de Monte Carlo est qu'elle permet de modéliser le caractère callable des produits structurés Double Opportunité.

La problématique est la suivante : Étant donné une trajectoire, de quelle façon est-il possible de déterminer si le produit est remboursé à une date donnée ?

Lorsqu'un produit est callable, cela signifie que l'émetteur a le droit, mais pas l'obligation, de rembourser l'investisseur avant l'échéance du produit. Cela fonctionne comme une option d'achat (call) sur le produit structuré, car l'émetteur a la possibilité d'acheter (racheter) le produit à un prix prédéterminé (le prix d'exercice ou le strike) à des dates spécifiques.

Lorsqu'on parle de trajectoires "dans la monnaie", on fait référence aux trajectoires où la valeur du produit structuré est favorable pour l'investisseur. Dans ce contexte, l'émetteur du callable évalue périodiquement si la performance de l'indice additionnée au flux de frais futur actualisé et diminuée de la jambe fixe à l'origine à date est supérieure au coupon de remboursement. On désigne par jambe fixe à l'origine, la jambe fixe estimée avec le spread à date d'émission du produit structuré. C'est la jambe fixe émise à l'origine par la banque. Le coupon de remboursement est le montant minimum garanti à l'investisseur en cas de remboursement anticipé.

En revanche, lorsque le produit n'est pas dans la monnaie, l'émetteur n'exercera probablement pas son droit de remboursement anticipé, car cela serait moins coûteux pour lui de préserver l'engagement qu'il a envers l'investisseur jusqu'à l'échéance du produit.

L'émetteur choisira d'exercer cette option d'achat s'il estime que cela est financièrement avantageux pour lui, par exemple si les taux d'intérêt ont baissé depuis l'émission du produit ou si la performance des indices sous-jacents est favorable pour l'émetteur. En exerçant l'option de remboursement anticipé, l'émetteur peut réduire ses coûts de financement en remboursant le produit callable et en émettant de nouvelles obligations ou produits structurés à des taux d'intérêt inférieurs. La probabilité d'exercice de cette option s'accroît si la performance de l'indice action permet à l'émetteur de verser le coupon tout en dégageant une marge.

Le choix de l'utilisation de l'algorithme de **Longstaff & Schwartz** [5] pour la modélisation de l'option de rachat est fait. Il s'agit d'un algorithme permettant de valoriser des options américaines. Cet algorithme s'appuie sur une méthode des moindres carrés pour ajuster la valeur de continuation (non exercice) d'une option et les variables pertinentes à la décision d'exercice à chaque date possibles.

L'algorithme est illustré pour une option d'achat américaine dans l'exemple ci-dessous. Les trajectoires ci-dessous représentent l'indice action. L'exemple contient 10 trajectoires, en pratique, le nombre de trajectoires a été fixé à 5000. Considérons un call américain de strike 1,05 sur une action ne versant pas de dividende ; le call possède trois dates d'exercice en $t=1$, $t=2$ et $t=3$. Le taux sans risque r est égal à 4%.

Trajectoire	S_0	S_1	S_2	S_3
1	1.00	1.25	1.10	1.35
2	1.00	1.00	1.40	1.20
3	1.00	1.10	0.95	0.90
4	1.00	1.05	0.90	0.85
5	1.00	1.20	1.35	1.20
6	1.00	0.90	1.30	1.10
7	1.00	0.95	1.00	0.95
8	1.00	1.00	1.10	0.75
9	1.00	0.85	1.00	1.10
10	1.00	1.00	0.90	1.05

TABLE 3 – Trajectoires de l'indice action

Dans le cas où on a une seule date d'exercice en $t=3$, le payoff serait égal à sa valeur à cette date, indiquée dans la dernière colonne du tableau ci-dessous.

Trajectoire	S_1	S_2	S_3	Payoff à $t=3$
1	1.25	1.10	1.35	0.30
2	1.00	1.40	1.20	0.15
3	1.10	0.95	0.90	0.00
4	1.05	0.90	0.85	0.00
5	1.20	1.35	1.20	0.15
6	0.90	1.30	1.10	0.05
7	0.95	1.00	0.95	0.00
8	1.00	1.10	0.75	0.00
9	0.85	1.00	1.10	0.05
10	1.00	0.90	1.05	0.00

TABLE 4 – Payoff à l'étape $t=3$

Dans le cas où le call est dans la monnaie à $t=2$, l'émetteur doit décider s'il exerce son option ou non. Les trajectoires dans la monnaie à $t=2$ sont colorées en vert. L'idée de Longstaff & Schwartz est de poser la relation suivante pour ces trajectoires :

$$V = a + bS + cS^2$$

avec S le prix de l'actif sous-jacent à $t = 2$ et V la valeur de l'option (actualisée en date 0) si elle n'est pas exercée en $t = 2$.

Ces données sont utilisées pour déterminer les valeurs de a, b, c en minimisant :

$$\sum_{i=1}^5 (V_i - a - bS_i - cS_i^2)$$

où V_i correspond à la i ème observation de V et S_i à la i ème observation de S .

Les constantes obtenues sont $a = -6,43$, $b = -10,25$, $c = 4,12$.

D'où

$$V = 6,43 - 10,25S + 4,12S^2$$

Il est préférable d'exercer l'option en $t=2$ lorsque la valeur d'exercice est supérieure à la valeur de continuation estimée. C'est-à-dire, si le gain immédiat obtenu en exerçant à $t=2$ est supérieur au gain qu'il est possible d'obtenir en exerçant l'option plus tard. On en déduit les valeurs de continuation de l'option sur les 5 trajectoires :

Trajectoire	S_1	S_2	S_3	Payoff à $t=2$	Continuation
1	1.25	1.10	1.35	0.05	0.143
2	1.00	1.40	1.20	0.35	0.153
5	1.20	1.35	1.20	0.30	0.102
6	0.90	1.30	1.10	0.25	0.072
8	1.00	1.10	0.75	0.05	0.143

TABLE 5 – Estimation de la valeur de continuation à $t=2$ et valeur des payoffs à l'étape $t=2$

L'option devrait donc être exercée à la date $t=2$ sur les trajectoires 2, 5 et 6.

Le raisonnement se poursuit de manière analogue en déterminant les trajectoires sur lesquelles il est optimal d'exercer l'option de remboursement en date $t=1$.

Ce raisonnement se transpose aux produits structurés, en tenant compte de certains points :

- Le payoff de l'option se substitue par le payoff du produit structuré.
- La valeur d'exercice de l'option à une date de remboursement possible est égale au coupon à date.
- Une trajectoire se trouve dans la monnaie quand la performance de l'actif sous-jacent, augmentée du flux de frais futur actualisé et diminuée du flux de la jambe fixe à l'origine à date, est supérieure à la valeur d'exercice à date de rappel (le coupon).

— Le remboursement anticipé d'une trajectoire s'effectue lorsque la valeur de continuation estimée, ajoutée au flux de frais futur actualisé et diminué de la jambe fixe à l'origine à date, dépasse le coupon.

Finalement, sur les trajectoires où un remboursement anticipé est fait, le flux à date de rappel est égal au coupon auquel le nominal est ajouté.

8.4 Validation et back-test de l'outil de pricing

Le pricer des produits structurés a été développé sous VBA. Une étape déterminante consiste à valider ce pricer en comparant les prix qu'il génère aux prix de marché.

Pour chaque date de valorisation, le calibrage d'un générateur de scénarios économiques est requis, ainsi que la génération de la table associée.

Ce test de validation a été effectué à plusieurs dates pour réaliser un test rétrospectif de l'outil. Les prix des produits structurés DOP, obtenus avec le pricer ont été comparés à leur prix de marché aux dates suivantes : 31/12/2021, 31/03/2022, 30/06/2022, 30/09/2022 et 31/12/2022.

Une marge de tolérance de 3% définie en interne est admise. La valorisation est considérée comme validée si le prix du pricer est dans l'intervalle fixé par le prix de marché fourni par la banque émettrice et la tolérance.

Le graphique suivant illustre les résultats obtenus au 30/12/2021 et au 30/06/2022.

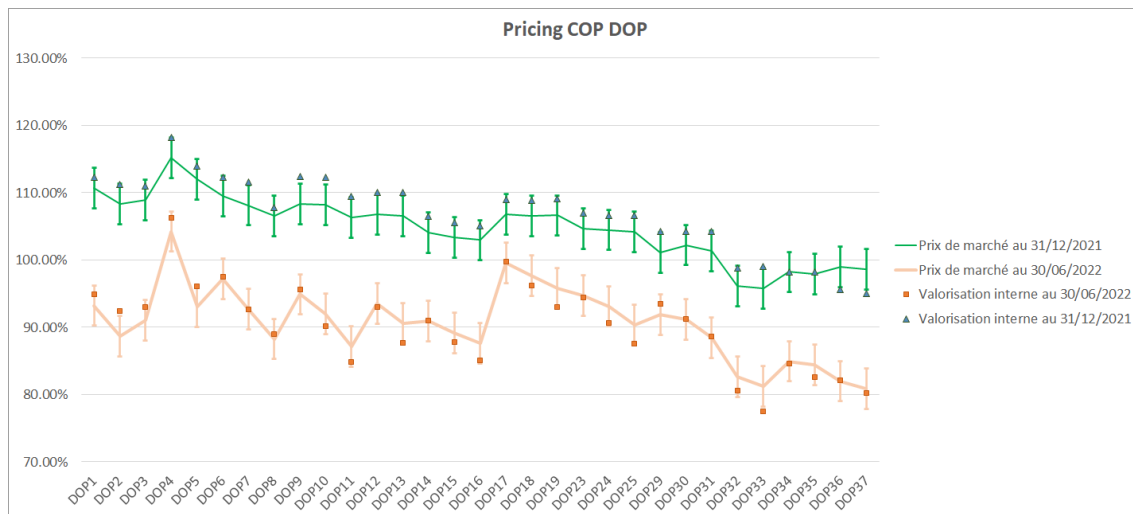


FIGURE 36 – Récapitulatif de la valorisation des produits structurés Conservateur Double Opportunité

La majorité des valeurs obtenues sont validées directement en tenant compte de la marge d'erreur acceptée.

Les essais effectués aux trois autres dates produisent des résultats similaires : une grande partie des prix obtenus sont validés. Au vu des fluctuations du marché survenues en 2022, ces tests permettent de confirmer la fiabilité du pricer. L'évolution des prix est captée de manière satisfaisante. La baisse générale de la valeur des produits s'explique par les mouvements des marchés financiers au cours de l'année 2022. Ce nouveau pricer permet une meilleure maîtrise des produits structurés dès leur conception.

Le pricer fournit également en sortie le pourcentage de trajectoires où le produit est remboursé de manière anticipée. Cette information permet à l'entreprise d'évaluer avec précision la probabilité de remboursement de chaque produit, contribuant ainsi à la gestion du risque lié au produit.

Il est primordial de vérifier la cohérence des chiffres obtenus. Plus la performance de l'indice action est élevée aux dates de rappel, plus le produit est susceptible d'être remboursé de manière anticipée. C'est pourquoi, en considérant un produit structuré à une date donnée au dessus de sa barrière supérieure, et en modifiant l'indice action à date de manière à éloigner le produit de sa barrière supérieure, la probabilité de rembourse-

ment anticipé devrait diminuer fortement.

Pour illustrer cela, un produit DOP a été sélectionné au 31/12/2021. La position relative de ce dernier sur son payoff est représentée dans la figure 37.

Définition 1. Lorsqu'on parle de **position relative** sur le payoff, il s'agit d'une position en base 1 par rapport à sa barrière inférieure et supérieure. L'abscisse (et l'ordonnée) -1 correspond à la barrière inférieure, et l'abscisse (et l'ordonnée) 1 correspond à la barrière supérieure. Le minimum entre les barrières n'est pas représenté, et la valeur de la pente est arbitraire. Cette représentation permettra, dans la suite, d'observer sur un même payoff plusieurs produits DOP de paramètres différents.

Le pourcentage de trajectoires où il y a un remboursement anticipé est affiché. Le niveau de l'indice à cette date est modifié afin d'examiner l'impact sur ce pourcentage.

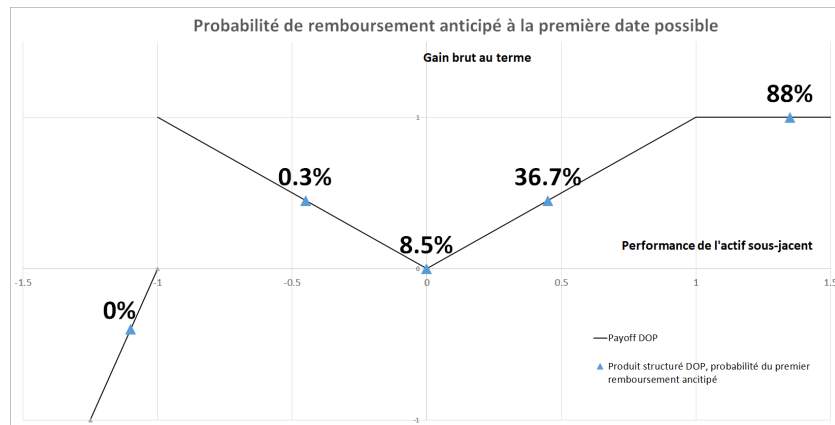


FIGURE 37 – Validation de la modélisation du remboursement anticipé

Cette figure démontre la cohérence de la modélisation du remboursement anticipé par l'algorithme de Longstaff & Schwartz. Plus les conditions du marché des actions sont favorables, plus la probabilité de remboursement anticipé augmente. Cette probabilité de remboursement anticipé offre à l'entreprise un indicateur cohérent, lui permettant d'évaluer la situation des produits structurés et leur exposition au marché.

8.5 Limites du pricer des DOP

Comme indiqué précédemment, il peut arriver que la valorisation d'un produit ne corresponde pas à la valeur de marché du produit structuré et qu'un écart soit observé. Cela peut s'expliquer par plusieurs facteurs :

- Les modèles utilisés par les banques sont plus sophistiqués, par exemple le modèle SABR pour l'indice action. Cela entraîne un calibrage et une diffusion du modèle différents.
- Les hypothèses peuvent également différer, par exemple le pas de discrétisation et le nombre de scénarios.
- Les données de marché utilisées pour le calibrage sont différentes ; effectivement, le calibrage se fait sur un nombre limité de strikes qui ne coïncide pas forcément avec celui des banques émettrices. De plus, le GSE est calibré uniquement sur les volatilités de l'Eurostoxx 50, les smiles de volatilité du CAC40 et de l'Eurostoxx 50 étant similaires. Enfin, les hypothèses concernant le spread émetteur pour l'estimation de la jambe fixe diffèrent également. Cela introduit également un biais.
- Certaines conditions de marché rendent le pricing impossible. Cette problématique est illustrée ci-après.

En pratique, la table des scénarios économiques générée en ciblant des strikes correspondant à la barrière supérieure et inférieure n'est optimale qu'à l'instant initial du produit structuré. En effet, calibrer le GSE sur des strikes correspondant à la barrière inférieure et supérieure revient à supposer que le pricing est réalisé lorsque la performance du sous-jacent est nulle (instant initial, ou retour du sous-jacent à sa valeur initiale).

Considérons un produit structuré DOP dont le niveau actuel de l'actif sous-jacent est très éloigné de la barrière inférieure. Par exemple, si la barrière inférieure par rapport au niveau initial est à -25% , supposons

un niveau relatif actuel à +40%. Dans ce cas, pour la valorisation à date, il devient nécessaire de capter le strike relatif 0,35. D'une part, un tel point de la nappe de volatilité est peu liquide, rendant l'interprétation de la valeur de la volatilité difficile. Ces points sont généralement issus d'extrapolations de courbes effectuées par Bloomberg. D'autre part, le modèle n'est pas calibré sur de tels strikes. Le modèle ne capture donc pas l'optionnalité due à cette barrière.

Le graphique ci-dessous résume cette limite présente dans le pricer.

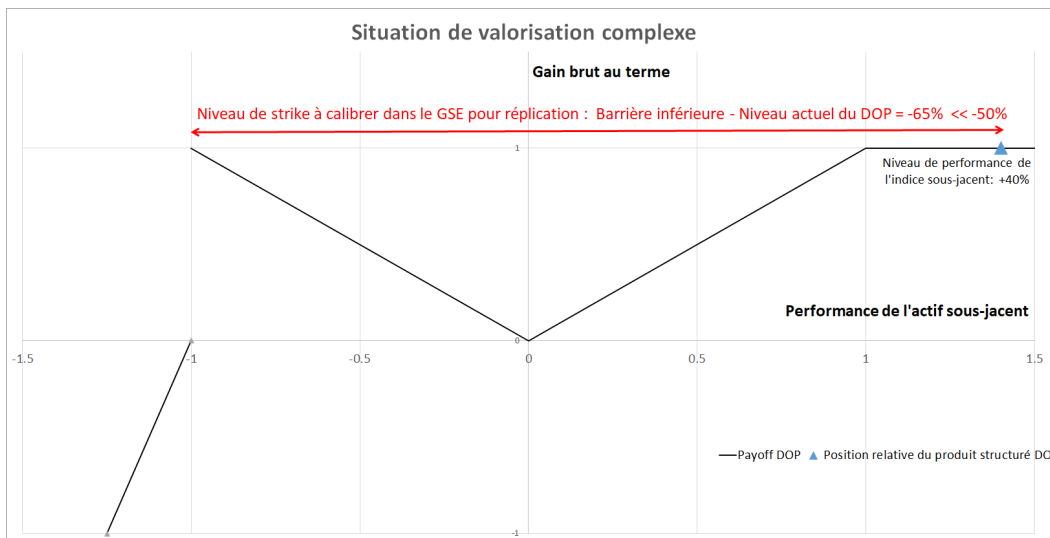


FIGURE 38 – Cas de conditions de marché empêchant une valorisation optimale

Comme le GSE est calibré sur des strikes allant jusqu'à -50%, le strike présenté ci-dessus ne sera pas capté. La valorisation sera alors partiellement biaisée. Pour rappel, la formule fermée présentée dans la figure 18 possède une partie relative à la digit (au saut) importante. Les options composant la formule fermée correspondant au strike de la digit ont un poids absolu de $1 + \text{pente}$ (la *pente* étant le paramètre du DOP), contrairement aux autres options qui ont un poids absolu de 1.

Il est possible de calculer la sensibilité d'un DOP à la volatilité de la barrière inférieure. C'est-à-dire, de calculer le prix de marché du DOP en considérant une volatilité de marché de l'option de strike égale à la barrière inférieure choquée. Le choix du choc de 1% est fait. En considérant un produit à un niveau strike relatif actuel de 1,50 et une barrière inférieure à -50%, le taux de variation du prix du DOP est de 210%. Autrement dit, une variation de 1% de la volatilité de l'option de strike égale à la barrière inférieure, entraîne une variation de 2,1% du prix. Ce calcul met en évidence les limites du pricer.

Un problème similaire peut survenir dans le cas d'un niveau de marché très bas par rapport à la barrière supérieure.

Il est maintenant temps de se concentrer sur la production des sensibilités. Ces indicateurs de risques sont cruciaux pour maîtriser l'exposition des produits Double Opportunité aux divers mouvements de marché.

9 Sensibilités

9.1 Définitions et méthode de calcul

La méthode de production des sensibilités (sous-section 3.3.2) des produits structurés est décrite ci-dessous.

Soit Y le payoff déflaté d'un produit structuré Double Opportunité dépendant d'un paramètre θ . En pratique, le payoff ne dépend pas d'un seul paramètre, pour des raisons de lisibilité, un seul paramètre est noté. Le prix du produit structuré est $P_T(\theta) = E[Y(\theta)]$. Le pricer permettant la valorisation des produits structurés donne une estimation $P_{n,T}(\theta)$ (avec n le nombre de simulation choisi égal à 5000) du prix $P_T(\theta)$ par méthode

de Monte Carlo. L'objectif est d'estimer la dérivée du prix P_T par rapport à θ . Le facteur θ pourrait être l'un des nombreux paramètres du modèle ou du marché qui influencent le prix.

Les produits structurés DOP dépendent des taux d'intérêt et d'un sous-jacent action, les sensibilités suivantes sont étudiées :

- Le delta : il s'agit de la sensibilité du prix du produit structuré par rapport à une variation du prix de l'actif sous-jacent,
- Le gamma : il s'agit de la sensibilité du delta par rapport à une variation du prix de l'actif sous-jacent,
- Le vega : il s'agit de la sensibilité du prix par rapport à une variation de la volatilité implicite de l'actif sous-jacent,
- Le rho : il s'agit de la sensibilité du prix du produit structuré par rapport à une variation des taux d'intérêt,
- La sensibilité à la volatilité des taux.

Quand c'est possible, les sensibilités peuvent être calculées par le biais de modèles stochastiques menant à des formules théoriques. Il est également possible de les estimer par la méthode de Monte Carlo. Étant donné que la méthode de valorisation utilisée est celle de Monte Carlo, c'est la deuxième alternative qui est mise en place.

Cette approche décrite ci-dessous se base sur les formules de Taylor.

La dérivée de P_T par rapport à θ notée $\frac{\partial P_T}{\partial \theta}$ est définie par :

$$\frac{\partial P_T}{\partial \theta}(\theta) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P_T(\theta + h) - P_T(\theta)}{h}$$

A partir de cette formule il est possible de donner une approximation numérique naturelle de la dérivée. Pour une petite valeur de h , on a l'approximation suivante :

$$\frac{\partial P_T}{\partial \theta}(\theta) \approx \frac{P_T(\theta + h) - P_T(\theta)}{h}.$$

Il vient alors une première approche possible de calcul de sensibilités :

1. Calculer $P_{n,T}(\theta)$ et $P_{n,T}(\theta + h)$ par méthode de Monte Carlo : à une date donnée, le prix est calculé selon les hypothèses de marché, puis un deuxième prix est calculé à partir des mêmes hypothèses, avec le paramètre de marché θ augmenté de h .
2. Former l'estimateur suivant : $\Delta_n(h) = \frac{P_{n,T}(\theta+h) - P_{n,T}(\theta)}{h}$

L'estimateur obtenu a pour espérance : $\mathbb{E}[\Delta_n(h)] = \frac{P_T(\theta+h) - P_T(\theta)}{h}$.

En supposant que P_T est deux fois différentiable, la formule de Taylor permet d'écrire :

$$P_T(\theta + h) = P_T(\theta) + \frac{\partial P_T}{\partial \theta}(\theta)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_T}{\partial \theta^2}(\theta)h^2 + o(h)$$

Le biais du précédent estimateur est alors :

$$\text{Biais}(\Delta_n(h)) = \mathbb{E}[\Delta_n(h) - \frac{\partial P_T}{\partial \theta}(\theta)] = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_T}{\partial \theta^2}(\theta)h + o(h)$$

Il est possible d'améliorer la vitesse de convergence de cet estimateur en calculant $P_{n,T}(\theta + h)$ et $P_{n,T}(\theta - h)$, puis en formant l'estimateur suivant :

$$\Delta_n^F(h) = \frac{P_{n,T}(\theta + h) - P_{n,T}(\theta - h)}{2h}.$$

Si P_T est trois fois différentiable, à nouveau par la formule de Taylor, il vient :

$$P_T(\theta + h) = P_T(\theta) + \frac{\partial P_T}{\partial \theta}(\theta)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_T}{\partial \theta^2}(\theta)h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 P_T}{\partial \theta^3}(\theta)h^3 + o(h^3)$$

$$P_T(\theta - h) = P_T(\theta) - \frac{\partial P_T}{\partial \theta}(\theta)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_T}{\partial \theta^2}(\theta)h^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 P_T}{\partial \theta^3}(\theta)h^3 + o(h^3)$$

Par soustraction, le biais de ce nouvel estimateur est alors :

$$\text{Biais}(\Delta_n^F(h)) = \frac{P_T(\theta + h) - P_T(\theta - h)}{2h} - \frac{\partial P_T}{\partial \theta}(\theta) = \frac{1}{12} \frac{\partial^3 P_T}{\partial \theta^3}(h)h^2 + o(h^2)$$

Cette nouvelle approximation est d'ordre supérieur. Cependant, cela a un coût, car en pratique, il peut être nécessaire de générer une nouvelle table et de réaliser une nouvelle valorisation. Ce nouvel estimateur Δ_n^F est retenu pour la production de sensibilité. Le premier pourra tout de même être utilisé dans une situation nécessitant un temps de calcul restreint.

Géométriquement, la dérivée correspond à la pente de la tangente à P_T en un point θ . Il est intéressant de produire une sensibilité d'ordre 2 dans certains cas, c'est-à-dire une dérivée seconde, permettant d'apprécier la forme de convexité ou de concavité d'une fonction en un point. La sensibilité d'ordre 2 classiquement produite est le gamma. Il s'agit de la dérivée seconde du prix du produit structuré par rapport au niveau action.

Pour approcher une dérivée d'ordre deux, on utilise des formules de Taylor d'ordre 4. Si P_T est 4 fois différentiable, il est possible d'écrire :

$$P_T(\theta + h) = P_T(\theta) + \frac{\partial P_T}{\partial \theta}(\theta)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_T}{\partial \theta^2}(\theta)h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 P_T}{\partial \theta^3}(h)h^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 P_T}{\partial \theta^4}(h)h^4 + o(h^4)$$

$$P_T(\theta - h) = P_T(\theta) - \frac{\partial P_T}{\partial \theta}(\theta)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_T}{\partial \theta^2}(\theta)h^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 P_T}{\partial \theta^3}(h)h^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 P_T}{\partial \theta^4}(h)h^4 + o(h^4)$$

Il vient alors que :

$$\frac{\partial^2 P_T}{\partial \theta^2}(\theta) = \frac{P_T(\theta + h) - 2P_T(\theta) + P_T(\theta - h)}{h^2} - \frac{1}{12} \frac{\partial^4 P_T}{\partial \theta^4}(h)h^2 + o(h^2)$$

Une approximation du second ordre est obtenue. L'estimation de la sensibilité d'ordre 2 est possible en posant l'estimateur suivant :

$$\Delta_n^C = \frac{P_{n,T}(\theta + h) - 2P_{n,T}(\theta) + P_{n,T}(\theta - h)}{h^2}$$

L'interprétation des sensibilités est simple. Pour la sensibilité d'ordre 1, considérons un paramètre θ avec un h suffisamment petit. Supposons obtenir une approximation de 35% pour ce paramètre. Ainsi, une variation de u en θ entraîne une variation de $u \times 35\%$ de P_T . Pour une sensibilité d'ordre 2, tout en conservant les mêmes notations, supposons une approximation égale à 40%. Une variation de u en θ entraîne une variation de $u \times 40\%$ de la sensibilité d'ordre 1. De plus, cela provoque une variation de $\frac{1}{2} \times 40\% \times u^2$ de P_T .

En supposant faire varier θ de u , il est possible d'approximer $P_{n,T}(\theta + u)$ par :

$$P_{n,T}(\theta + u) \approx P_{n,T}(\theta) + 35\% \times u + \frac{1}{2} 40\% \times u^2$$

Plus u est grand par rapport à h , plus cette approximation devient obsolète.

9.2 Sensibilité action

9.2.1 Niveau action

La sensibilité au niveau action d'un produit structuré s'appelle le delta noté Δ . Elle se définit de la façon suivante :

$$\Delta = \frac{\partial P_T}{\partial S}$$

Il est nécessaire de valoriser les produits structurés dans un contexte de hausse, ou baisse du niveau action initial. Les tables en sortie du générateur de scénarios économiques possèdent une évolution de l'indice action en base 1. Ces trajectoires sont ensuite multipliées par la valeur de l'indice action sous-jacent à date de valorisation.

C'est pourquoi, le calcul de $P_T(S_0 + h)$ et $P_T(S_0 - h)$ s'effectue en ajustant la valeur de l'indice pour mettre à l'échelle adéquate la table de scénarios avant le lancement de l'algorithme de valorisation. Le choc choisi pour l'approximation de la sensibilité est de 1% du prix de l'indice action à date de production de sensibilité. Il est habituel de produire une sensibilité d'ordre 2 par rapport au niveau action appelée le gamma et notée Γ . Elle se définit de la façon suivante :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 P_T}{\partial S^2}.$$

Il s'agit de la sensibilité du prix par rapport au delta.

La production des sensibilités au niveau action nécessite donc 3 valorisations différentes.

Le graphique ci-dessous représente les sensibilités des produits DOP au 31/12/2021. Les DOP sont positionnés sur le payoff en position relative (Définition 1) selon la performance du sous-jacent concerné (différente d'un produit à l'autre). Le minimum entre les barrières n'est pas représenté. À cette date, tous les produits DOP se trouvent sur la partie droite de leur payoff.

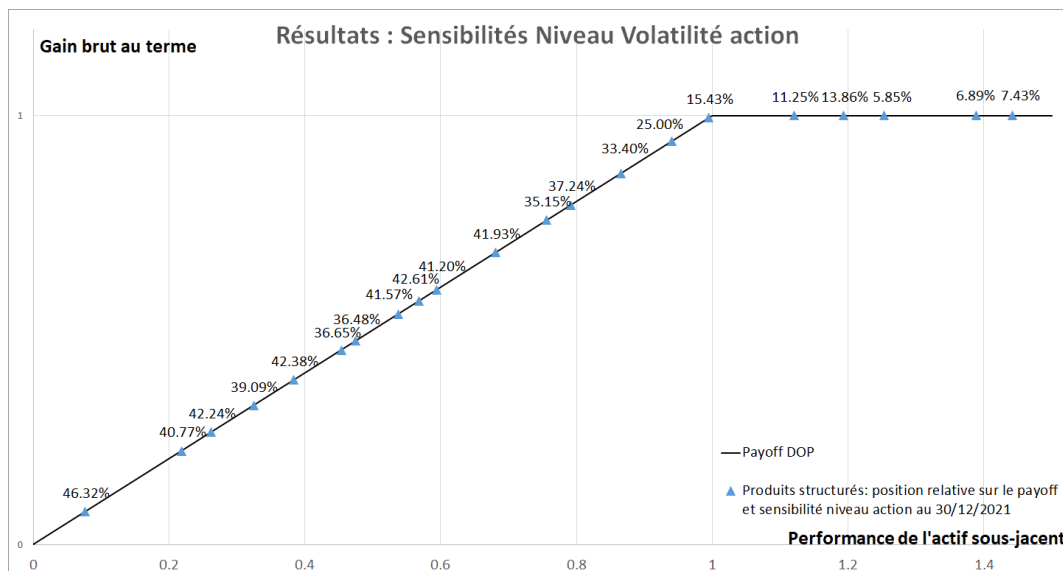


FIGURE 39 – Sensibilité au niveau action d'ordre 1 (delta)

Un back-test intéressant est réalisable. Il paraît intuitif que la sensibilité action augmente dans un contexte de marché où le niveau action est proche de la barrière inférieure du produit structuré DOP. En effet, c'est le point le plus sensible du produit Double Opportunité, le gain positif égal à la valeur absolue de la barrière inférieure devient d'un coup une perte. Il y a un saut important.

C'est pourquoi, il est choisi de réaliser un test sur un produit structuré DOP, en calculant sa sensibilité au niveau action au 31/12/2021, puis de la même façon que pour le test présentée en figure 37, des sensibilités sont recalculées avec un niveau action abaissé. La position à date du produit DOP est au delà de la barrière supérieure. Le graphique ci-dessous présente les résultats.

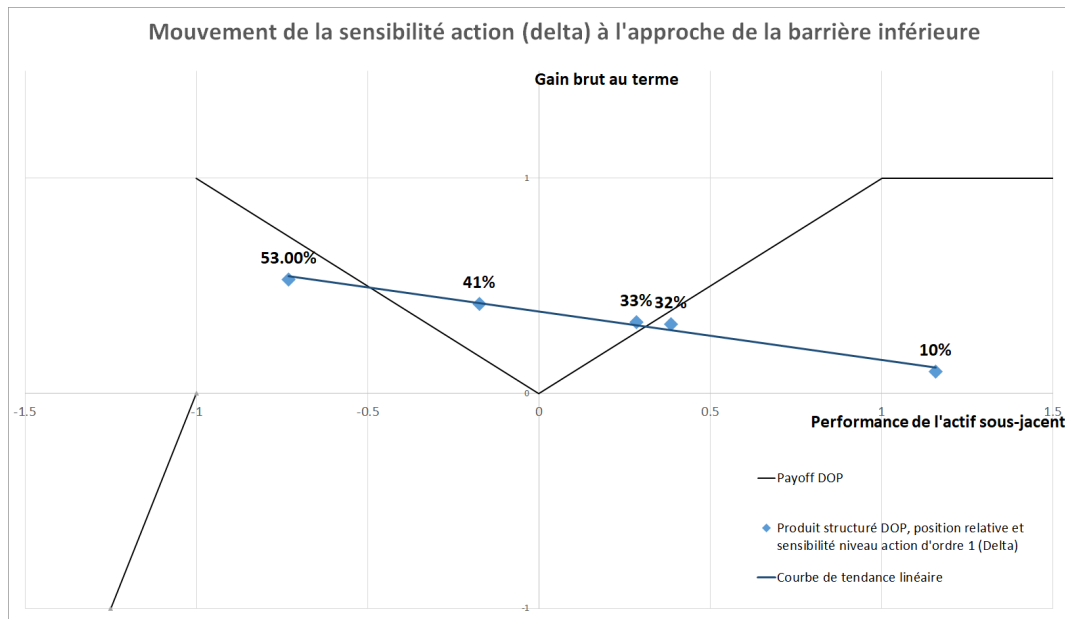


FIGURE 40 – Back test du delta

Comme attendu, la sensibilité augmente à l'approche de la barrière inférieure, ceci s'expliquant par la forme du payoff. Le prix du produit structuré est très susceptible de chuter, son payoff se rapprochant d'une chute brutale à 0. Ce test a été réalisé sur l'ensemble des produits et les résultats sont analogues. Il permet d'apprécier la cohérence des sensibilités produites.

Cela démontre également le fait que l'entreprise doit être vigilante aux produits se rapprochant de leur barrière inférieure. Il s'agit d'un point critique du produit structuré DOP.

9.2.2 Volatilité Action

La sensibilité à la volatilité action est appelée le vega et est notée :

$$\nu = \frac{\partial P_T}{\partial \sigma_{\text{action}}}$$

Pour réaliser une nouvelle valorisation en choquant la volatilité action, il est nécessaire de réaliser un choc sur la nappe de volatilité action. Ce choc est choisi égal à 1%. Pour ce faire, il est possible d'augmenter (ou diminuer) toute la nappe de volatilité de 1% et de recalibrer ensuite le modèle action sur ces nouvelles données. Cela donne une nouvelle table qui servira alors à valoriser le produit dans un contexte de volatilité action choquée. Cependant, comme le calibrage est long, une alternative possible est un recalibrage rapide.

Pour rappel, la dynamique du modèle de Heston est la suivante :

$$\begin{cases} dS_t = S_t(r - q)dt + S_t\sqrt{v_t}dW_{1,t} \\ dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \xi\sqrt{v_t}dW_{2,t} \end{cases}$$

L'idée est de modifier les paramètres de la dynamique de la variance stochastique afin de choquer la nappe de volatilité théorique. Si \mathcal{P} est le modèle de Heston de vecteur de paramètres $(\kappa, \xi, \theta, \rho, v_0)$ et \mathcal{P}_{bis} celui décrit par le vecteur de paramètres $(\kappa, \xi_{bis}, \theta_{bis}, \rho_{bis}, v_0)$, l'objectif est d'obtenir un modèle \mathcal{P}_{bis} possédant une volatilité choquée, c'est-à-dire un modèle produisant une nappe de volatilité égale à Δ_{choc} fois la nappe de volatilité du modèle \mathcal{P} .

En choquant les paramètres comme présenté ci-dessous, le choc proportionnel aura lieu sur la nappe de volatilité.

$$\begin{aligned} \xi_{bis} &= \Delta_{choc}\xi \\ \theta_{bis} &= \Delta_{choc}^2\theta \\ v_{0bis} &= \Delta_{choc}^2v_0 \end{aligned}$$

La présence du carré s'explique par la présence de la racine dans la dynamique. Aucune modification de κ et ρ n'est nécessaire.

Cette modification multiplie par Δ_{choc}^2 l'espérance et la variance de la variance stochastique, d'après la proposition 1. Une approximation possible consiste à fixer v_t à sa valeur moyenne dans le modèle \mathcal{P} :

$$dv_t \approx \kappa(\theta - \mathbb{E}[v_t])dt + \xi\sqrt{\mathbb{E}[v_t]}dW_{2,t}$$

Le modèle \mathcal{P}_{bis} possède la dynamique de variance suivante :

$$dv_t \approx \Delta_{choc}^2 \left(\kappa(\theta - \mathbb{E}[v_t])dt + \xi\sqrt{\mathbb{E}[v_t]}dW_{2,t} \right)$$

Ceci confirme que la volatilité stochastique est choquée de la manière voulue. Il est initialement souhaité que la nappe soit augmentée uniformément de 1%. Autrement dit, que l'ensemble de la nappe soit augmentée de 1%. Cependant, il s'agit ici d'un choc proportionnel. Le choc Δ_{choc} doit donc être choisi de manière adéquate. La méthodologie suivante est retenue :

1. Calcul de la moyenne de la nappe de volatilité action pour des maturités allant de 1 an à 10 ans.
2. Choix du choc proportionnel : $\Delta_{choc} = \frac{(\sigma_{moyen} + 1\%)}{\sigma_{moyen}}$ pour un choc de +1% (ou $\Delta_{choc} = \frac{(\sigma_{moyen} - 1\%)}{\sigma_{moyen}}$ pour un choc de -1%).

En choisissant cette valeur de Δ_{choc} , en moyenne, la nappe de volatilité est augmentée (ou diminuée) de 1%. En effet, pour chaque volatilité :

$$\sigma_{post-choc} = \Delta_{choc}\sigma = \frac{(\sigma_{moyen} + 1\%)}{\sigma_{moyen}}\sigma$$

d'où,

$$\sigma_{moyen,post-choc} = \sigma_{moyen} + 1\%.$$

Deux coefficients de choc sont à calculer, un correspondant à une hausse de 1% des volatilités et un correspondant à une baisse de 1%. Cela permet par la suite de générer 2 tables choquées sans réaliser de recalibrage du modèle action. C'est un gain de temps non négligeable. Cette méthode a été testée sur un certain nombre de nappe de volatilité. Le tableau suivant représente l'écart entre la nappe choquée et la nappe théorique de base au 30/06/2022 :

Écarts entre la nappe de volatilité action choquée et non choquée théorique au 30/06/2022				
Strike relatif	1Y	5Y	7Y	10Y
0.50	1.12%	0.92%	0.91%	1.00%
0.60	1.07%	0.91%	0.91%	0.92%
0.65	1.04%	0.91%	0.91%	0.93%
0.70	1.01%	0.91%	0.91%	0.93%
0.75	0.99%	0.91%	0.92%	0.93%
0.80	0.98%	0.92%	0.92%	0.94%
0.85	0.96%	0.92%	0.92%	0.94%
0.90	0.95%	0.92%	0.92%	0.94%
0.95	0.95%	0.92%	0.93%	0.95%
1.00	0.95%	0.93%	0.93%	0.95%
1.05	0.95%	0.93%	0.93%	0.96%
1.10	0.93%	0.93%	0.94%	0.96%
1.15	0.89%	0.93%	0.94%	0.96%
1.20	0.82%	0.92%	0.94%	0.96%
1.25	0.76%	0.91%	0.93%	0.97%
1.30	0.70%	0.90%	0.93%	0.97%
1.50	0.80%	0.81%	0.96%	0.96%

FIGURE 41 – Matrice d'écart

Ces différents calibrages sont ensuite validés par test de market-consistency, afin de valider la méthodologie en observant la nappe de volatilité choquée répliquée. Ces différents tests sont validés.

Une fois la valorisation du produit structuré avec les nouvelles tables de scénarios réalisée, le calcul de la sensibilité est possible.

9.2.3 Résultats

Les résultats de la production des sensibilités actions au 31/12/2021 sont présentés ci-dessous.

Sensibilités	Minimum	Maximum	Moyenne	Mediane	1er quartile	3ème quartile
Delta : Niveau action 1er ordre	5,85%	42,61%	29,42%	36,56%	12,79%	41,48%
Gamma : Niveau action 2ème ordre	-650,21%	716,33%	-60,09%	-33,64%	-459,62%	-199,2%
Vega : Volatilité action	-1,95%	0,45%	-0,57%	-0,46%	-0,81%	-0,15%

TABLE 6 – Résultats des sensibilités actions au 31/12/2021

Le delta moyen est de 28,7%. Ce résultat met en lumière le fait qu'un produit structuré ne se comporte pas à 100% comme un indice action.

Pour un certain nombre de produits, des données de sensibilités actions ont été fournies par les banques émettrices sur les produits structurés DOP à différentes dates. Ces données ont permis de valider les chiffres obtenus.

9.3 Sensibilité taux

9.3.1 Niveau taux

Les taux ont un rôle significatif dans le remboursement anticipé possible et l'actualisation des flux. Une modification du niveau des taux entraîne une différence dans la valorisation. Dans ce contexte, pour produire une sensibilité au niveau des taux, appelée le **rho** (ρ), il est nécessaire de modifier les niveaux de taux d'entrée, qui servent à calibrer et diffuser le modèle. Le choc choisi (h) est de 1%.

La sensibilité ρ se définit par :

$$\rho = \frac{\partial P_T}{\partial r}.$$

En considérant, par exemple, la courbe des taux au 31/12/2021, cette courbe est alors translatée selon l'axe des ordonnées de plus ou moins 1%. Cela donne deux nouvelles courbes. Le graphique suivant présente ces courbes obtenues :

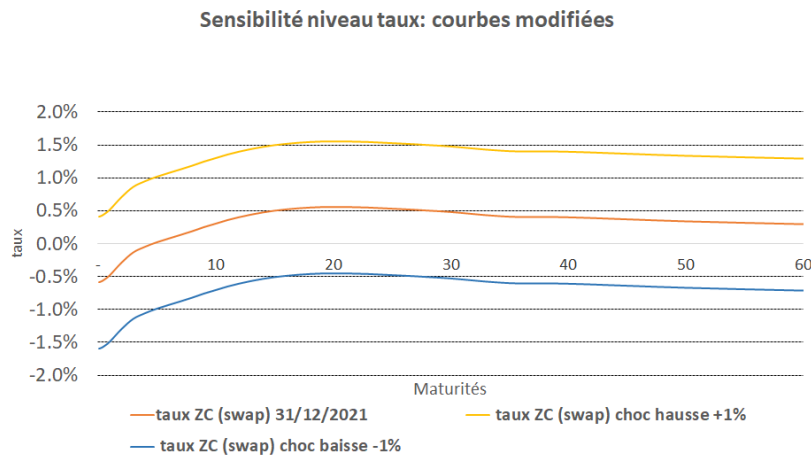


FIGURE 42 – Courbes des taux pour la sensibilité niveau taux

Le calibrage du modèle de taux dépend de cette courbe initiale. Un recalibrage complet peut être long. Comme la modification du niveau initial des taux modifie les volatilités calibrées, un recalibrage rapide est

réalisé. C'est-à-dire que parmi les paramètres du modèle de taux, seuls ceux liés à la structure de volatilité sont recalibrés. Cela permet de diviser par deux le nombre de paramètres à recalibrer. En pratique, c'est suffisant pour obtenir un modèle correctement calibré.

Cette sensibilité est importante, notamment dans le contexte de hausse des taux qu'a connue l'année 2022. Il est essentiel de comprendre le comportement des produits structurés face aux mouvements du marché des taux d'intérêt.

9.3.2 Volatilité taux

La volatilité des taux d'intérêt a également une influence sur le prix des produits structurés. La sensibilité à la volatilité des taux est la quantité suivante :

$$\frac{\partial P_T}{\partial \sigma_r}$$

De même que pour la volatilité de l'action, l'approche ici consiste à effectuer un recalibrage en ajustant directement les paramètres pour augmenter (ou diminuer) la nappe de volatilité. La dynamique du modèle de taux est rappelée ci-dessous :

Le modèle de taux est un Libor Market Model (LMM) shifté, avec un shift déterministe. Ce modèle projette les taux forward. Soit $(T_k)_{k>0}$ une série de dates successives. En notant $F_k(t)$ le taux forward payé à l'instant t pour la période $[T_k, T_{k+1}]$, la dynamique du modèle est la suivante :

$$\begin{cases} dF_k(t) = \sigma_k(t)(F_k(t) + \alpha(t))dz_k(t), \\ \sigma_k(t) = \phi_t(b(T_{i-1} - t) + a)e^{-c(T_{i-1}-t)} + d), \\ \alpha(t) = |a_{shift}| \max(b_{shift} + (1 - b_{shift})e^{-c_{shift}t^k}, 0), \\ \phi_t = p_1 + (1 - p_1)e^{-p_2t}. \end{cases}$$

où $(a_{shift}, b_{shift}, c_{shift}, a, b, c, d, p_1, p_2) \in \mathbb{R}^9$ est le vecteur de paramètres du modèle et z_k est un mouvement brownien.

En modifiant les paramètres de la dynamique de la volatilité, il est possible de la choquer, en définissant de nouveaux paramètres $(a_{bis}, b_{bis}, c_{bis})$:

$$a_{bis} = a \times \Delta_{choc}$$

$$b_{bis} = b \times \Delta_{choc}$$

$$c_{bis} = c \times \Delta_{choc}$$

Cette modification rapide permet d'éviter un long recalibrage du modèle de taux. Le Δ_{choc} est choisi de façon analogue à la méthodologie sur la volatilité de l'action.

La méthodologie est la suivante :

1. Calcul de la moyenne de la nappe de volatilité des taux pour des maturités allant de 1 an à 15 ans et des tenors allant de 1 an à 15 ans.
2. Choix du choc proportionnel : $\Delta_{choc} = \frac{(\sigma_{moyen} + 1\%)}{\sigma_{moyen}}$ ou $\Delta_{choc} = \frac{(\sigma_{moyen} - 1\%)}{\sigma_{moyen}}$.

Avec cette valeur de Δ_{choc} , en moyenne, la nappe de volatilité vient être augmentée (ou diminuée) de 1%.

$$\sigma_{moyen, post-choc} = \sigma_{moyen} \pm 1\%.$$

La matrice suivante représente l'écart entre la nappe de volatilité théorique modifiée et celle théorique de base au 31/12/2021.

		ATM											
Maturité \ Tenor		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1		1.0%	1.0%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%
2		1.0%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%
3		0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%
4		0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%
5		0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%
6		0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%
7		0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%
8		0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%
9		0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%
10		0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%
11		0.9%	0.9%	0.9%	0.9%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%
12		0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%
13		0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%
14		0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%
15		0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%	0.8%

FIGURE 43 – Matrice d'écart entre la nappe de volatilité théorique de base et recalibrée

Le recalibrage rapide est efficace. Les différentes tables obtenues sont validées par un test de cohérence avec le marché pour confirmer que la nappe de volatilité répliquée a été correctement modifiée. Ces tables permettent ensuite le calcul des sensibilités.

9.3.3 Résultats

Les résultats de la production des sensibilités aux taux d'intérêt au 31/12/2021 sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Sensibilités	Minimum	Maximum	Moyenne	Mediane	1er quartile	3ème quartile
Rho : Niveau taux	-623,66%	-52,67%	-296,90%	-262,87%	-413,46%	-140,50%
Volatilité taux	-82,1%	-3,5%	-31,65%	-25,85%	-43,33%	-15,76%

TABLE 7 – Résultats des sensibilités aux taux d'intérêts au 31/12/2021

Tout comme pour les sensibilités action, des banques émettrices ont fourni des données de sensibilités aux taux d'intérêt pour les produits structurés DOP à différentes dates. Ces données ont permis de valider les chiffres obtenus.

9.4 Sensibilités croisées

Face à la multitude de mouvements observés sur les marchés financiers au cours de l'année 2022, un test d'interprétabilité des sensibilités apparaît comme une démarche pertinente. En principe, ces sensibilités devraient permettre de prévoir l'évolution des prix des produits structurés d'une date à l'autre, en prenant en compte les variations du marché.

9.4.1 État initial des produits Conservateur Double Opportunité

La première étape consiste à sélectionner deux dates. Plusieurs calculs et back tests ont été effectués sur 5 dates : le 31/12/2021, le 31/03/2022, le 30/06/2022, le 30/09/2022 et le 31/12/2022.

Les graphiques ci-dessous illustrent la position relative (Définition 1) de chacun des produits structurés par rapport au payoff classique à date.

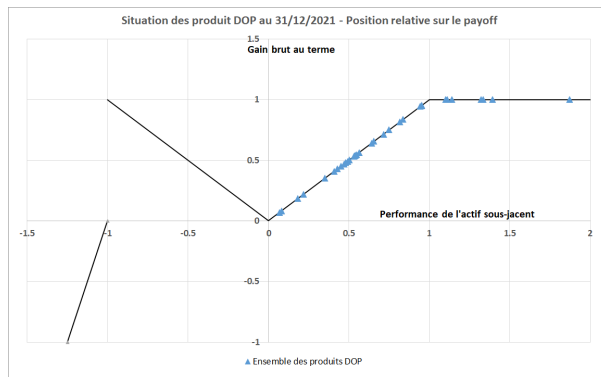


FIGURE 44 – Situation des produits DOP au 31/12/2021

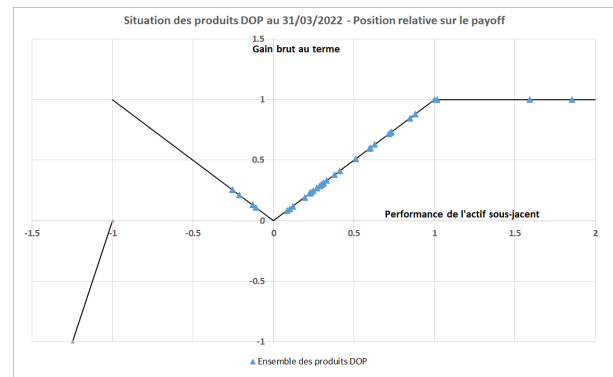


FIGURE 45 – Situation des produits DOP au 31/03/2022

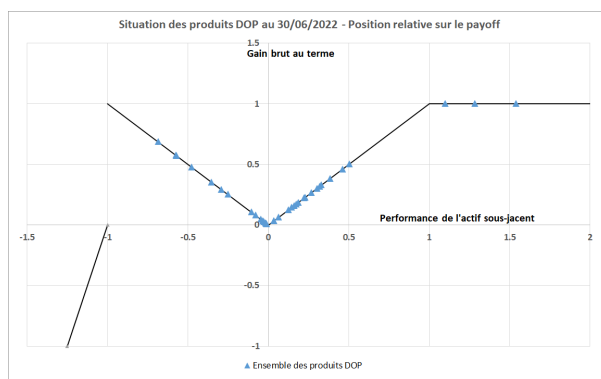


FIGURE 46 – Situation des produits DOP au 30/06/2022

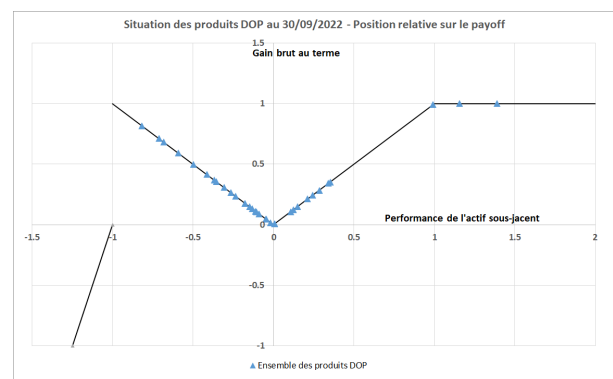


FIGURE 47 – Situation des produits DOP au 30/09/2022

L'idéal consiste à choisir deux dates avec des conditions de marché très différentes, voire opposées. De ce fait, le 30/12/2021 et le 30/09/2022 sont les deux dates sélectionnées pour le test de sensibilités croisées, les marchés ayant remonté entre le 30/09/2022 et le 31/12/2022.

9.4.2 Back test des sensibilités

Est-il possible, en tenant compte des mouvements de marché, de projeter les valorisations du 31/12/2021 à l'aide des sensibilités produites, afin d'obtenir la valorisation au 30/09/2022 ?

D'abord, il convient de lister les différents mouvements de marché des facteurs de sensibilités étudiés :

Indice	Prix au 31/12/2021	Prix au 30/09/2022	Performance	Variation
Action : CAC40	7 153,03	6 273,05	-14%	-
Action : EuroStoxx 50	4 306,07	3 318,20	-29,7%	-
Action : CACESG	2 237,01	2 040,57	-8,8%	-
Taux sans risque (Euribor) 10 ans	-0,59%	0,68%	-	+1,27%
Moyenne nappe de volatilité action*	21,07%	25,25%	-	+4,18%
Moyenne nappe de volatilité taux**	0,62%	1,12%	-	+0,5%

TABLE 8 – Mouvements des marchés financiers du 31/12/2021 au 30/09/2022

* Moyenne de la nappe de volatilité action pour des maturités allant de 1 an à 10 ans et des strikes allant de 0,5 à 1,5.

** Moyenne de la nappe de volatilité des swaptions à la monnaie pour des maturités et tenors allant de 1 à 15 ans.

Comme illustré précédemment, pour chaque sensibilité, l'approximation suivante de l'évolution du prix peut être réalisée pour chaque produit :

$$P_{t_1}(\text{facteur}_{t_1} + \Delta_{\text{facteur}}) = P_{t_1} + \Delta_{\text{facteur}} \times \text{Sensibilité}_{1,\text{facteur}}$$

avec $t_1 = 31/12/2021$, $t_2 = 30/09/2022$, Δ_{facteur} la variation du facteur entre t_1 et t_2 , $\text{Sensibilité}_{1,\text{facteur}}$ la sensibilité d'ordre 1 par rapport au *facteur*, P_t le prix à l'instant t .

Si une sensibilité d'ordre 2 est produite, comme le gamma, l'approximation est la suivante :

$$P_{t_1}(\text{facteur}_{t_1} + \Delta_{\text{facteur}}) = P_{t_1} + \Delta_{\text{facteur}} \times \text{Sensibilité}_{1,\text{facteur}} + \frac{1}{2} \Delta_{\text{facteur}}^2 \times \text{Sensibilité}_{2,\text{facteur}}$$

avec $\text{Sensibilité}_{2,\text{facteur}}$ la sensibilité d'ordre 2 par rapport au *facteur*.

Néanmoins, en raison de la forte variation de l'indice action, la sensibilité d'ordre 2 produite avec $h = 1\%$ devient inutilisable. En effet, pour l'Euro Stoxx 50, un coefficient de 30^2 apparaît. C'est une des limites déjà mentionnées de cette approximation. La sensibilité d'ordre 2 étant encore plus affecté par ce phénomène par la présence du carré. Le gamma n'est donc pas utilisé.

L'évolution des prix suite aux différentes approximations est résumée dans le graphique ci-dessous.

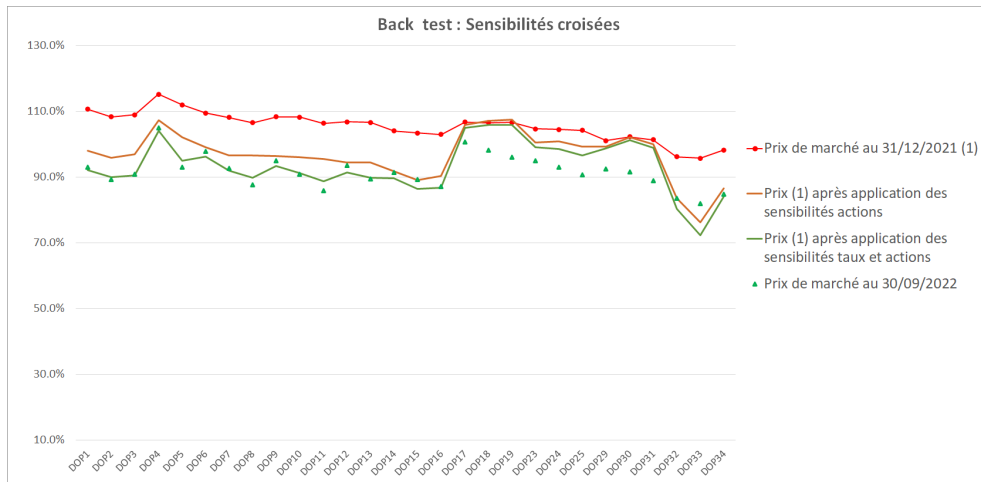


FIGURE 48 – Projection des prix du 31/12/2021 au 30/09/2022

Enfin, la comparaison entre les prix de marché au 30/09/2022 et les prix simulés sont représentés dans le graphique suivant :

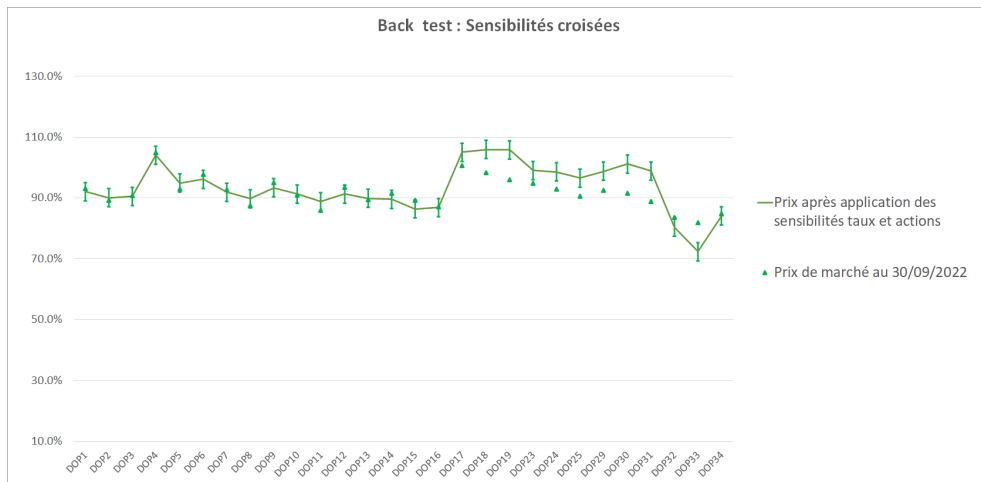


FIGURE 49 – Résultat du test de sensibilités croisées

Certaines valeurs projetées sortent de l'intervalle de confiance cible. Cette situation s'explique en partie par l'absence de prise en compte de la variation des sensibilités dans le temps. En effet, au 31/12/2021, certains produits structurés se situent au-delà de leur barrière supérieure, c'est par exemple le cas pour les produits DOP 17, 18, 19, 29, 30 et 31, ce qui conduit à une faible sensibilité à la variation de l'indice action à cette date. Toutefois, au cours de l'année 2022, une baisse du marché action a entraîné une augmentation significative de leur sensibilité. L'amplitude du mouvement de marché s'est révélée trop importante par rapport au choc h utilisé pour le calcul de la sensibilité, rendant ces approximations obsolètes.

Pour illustrer cette limite, la même analyse est effectuée entre le 31/12/2021 et le 31/03/2022. Les mouvements de marché sont moins importants.

Le tableau ci-dessous résume les variations du marché entre ces deux dates.

Indice	Prix au 31/12/2021	Prix au 31/03/2022	Performance	Variation
Action : CAC40	7 153,03	6 659.87	-6,9%	-
Action : EuroStoxx 50	3 902.52	3 318.20	-15%	-
Action : CACESG	2 237.01	2 066,09	-7,6%	-
Taux sans risque (Euribor) 10 ans	-0,59%	-0,46%	-	+0,13%
Moyenne nappe de volatilité action*	21,07%	22,31%	-	+1,24%
Moyenne nappe de volatilité taux**	0,62%	0,79%	-	+0,27%

TABLE 9 – *Mouvements des marchés financiers du 31/12/2021 au 30/09/2022*

* Moyenne de la nappe de volatilité action pour des maturités allant de 1 an à 10 ans et des strikes allant de 0,5 à 1,5.

** Moyenne de la nappe de volatilité des swaptions à la monnaie pour des maturités et tenors allant de 1 à 15 ans.

Le graphique ci-après confronte les prix de marché du 31/03/2022 aux prix projetés à l'aide des sensibilités au 31/12/2022.

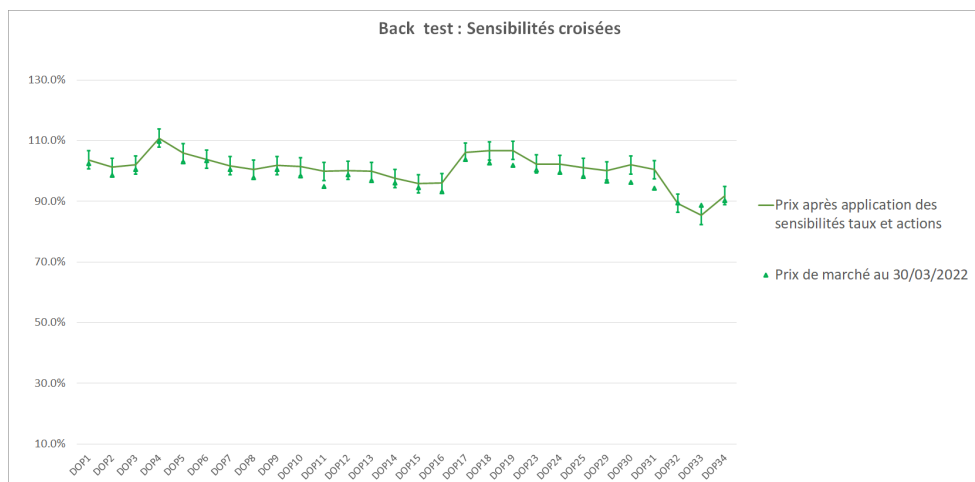


FIGURE 50 – *Résultat du test de sensibilités croisées*

Désormais, l'approximation est plus pertinente. La limite liée à la variation des sensibilités dans le temps reste présente mais dans une moindre mesure.

Ces sensibilités permettent une projection des produits structurés à travers des scénarios réels. Cette méthodologie de projection sera utilisée dans le modèle ALM ainsi que dans les calculs concernant le risque de provision pour risque d'exigibilité.

Il importe de rappeler qu'il s'agit d'approximations. Plus la variation réelle d'un facteur s'éloignera de la variation utilisée lors du calcul de la sensibilité, plus l'approximation risque d'être inexacte. En effet, les sensibilités d'ordre 1 varient également avec les facteurs du marché. Cette variation peut être approchée

par une sensibilité d'ordre 2 comme le gamma. En pratique, la sensibilité d'ordre 2 n'est pas une solution satisfaisante, elle ne permet pas d'approximer convenablement la variation de la sensibilité d'ordre 1 lorsque l'amplitude de variation du facteur de marché s'éloigne du pas h utilisé dans son calcul.

De plus, l'effet de l'évolution conjointe des facteurs n'est pas pris en compte par cette approximation. Il est également à noter que la sensibilité à la maturité du produit structuré, appelée le thêta, n'est pas produite. Ceci a un impact, car la maturité de chacun des produits diminue.

10 Maitrise du produit en vision Solvabilité 1 et Solvabilité 2

10.1 Vision Solvabilité 1 : analyse du risque de provision pour risque d'exigibilité

La provision pour risque d'exigibilité (PRE) est une provision technique que l'assureur doit constituer pour couvrir le risque d'exigibilité, c'est-à-dire le risque que les assurés retirent leurs fonds avant l'échéance prévue de leur contrat d'assurance-vie. Ce risque est particulièrement important dans les contextes de taux d'intérêt volatils ou en cas de crise financière. Si un grand nombre de clients décident de racheter leurs contrats simultanément, l'assureur pourrait faire face à des problèmes de liquidité et être contraint de vendre des actifs à des prix défavorables pour honorer ses engagements.

Pour minimiser les risques liés à la PRE, un assureur vie doit mettre en place une gestion rigoureuse de ses risques, notamment en constituant des provisions, en diversifiant ses investissements pour réduire l'exposition aux actifs volatils et en surveillant de près l'évolution de la valeur de ses actifs financiers.

La **méthode de calcul de la PRE** exige initialement une estimation de l'ensemble des actifs sujets à cette provision. Une PRE doit être constituée quand une moins-value latente nette globale est constatée sur cet ensemble d'actifs. La plus ou moins-value (PMVL) nette globale est définie par la différence entre la valeur de marché (VM) moyenne sur un mois de l'actif et sa valeur nette comptable (VNC).

- Si la plus ou moins-value nette globale est positive, la constitution d'une PRE n'est pas obligatoire.
- Si la plus ou moins-value nette globale est négative, une PRE doit être constituée. Elle correspond à la valeur absolue de la PMVL nette globale. En pratique, cette dotation à la PRE peut être lissée sur 3 à 8 ans en dotant chaque année (Nombre d'années de lissage)⁻¹ du montant global. Le recalcul annuel de la PRE permet d'adapter dans le temps le montant de cette provision.

Dans le cas où il n'y a pas besoin de constituer de PRE à une date donnée, les sensibilités permettent de calculer un seuil de déclenchement de la PRE. C'est le niveau de marché à partir duquel une PRE devra être constituée.

Le calcul est illustré à la date du 30/09/2022. Pour chaque catégorie d'actif exposée au risque de PRE, la valeur nette comptable ainsi que la valeur de marché moyenne sur un mois sont répertoriées. Ces informations permettent de calculer une PMVL nette globale. Le tableau ci-dessous illustre cet exemple au 30/09/2022 pour l'entreprise. Les chiffres ont été retraités pour publication.

CATÉGORIE	VNC	VM moyenne 1 mois	PMVL nette globale
Produits Structurés	52 000 000	46 000 000	-6 000 000
Action en Direct et Fonds Action	112 000 000	92 500 000	-19 500 000
Private Equity	140 000 000	150 000 000	10 000 000
Immobilier	90 500 000	117 000 000	26 500 000
Autres	110 008 000	132 008 000	22 000 000
Total	504 508 000	537 508 000	33 000 000

TABLE 10 – Calcul de la plus ou moins-value moyenne

Étant donné que la PMVL nette globale est positive, il n'y a pas d'obligation de constituer une PRE.

La question qui se pose alors est : quelle devrait être l'amplitude du mouvement de marché pour qu'une PRE doive être constituée ?

Compte tenu des actifs éligibles à la PRE, l'intérêt se porte sur le mouvement du marché des actions, et plus précisément sur l'évolution du niveau action. Pour chaque catégorie d'actif, il est possible de calculer une sensibilité du rendement de l'actif à la variation d'un indice action de référence (notée β) à date pour le portefeuille d'actifs. Par exemple, pour les actions directes et les fonds actions, cette sensibilité est de 100%, car il s'agit d'actions pures. L'entreprise a établi en interne des sensibilités pour chaque type d'actif. Pour les produits structurés, il s'agit directement des sensibilités produites par le pricer développé dans l'étude.

Concernant le portefeuille de produits structurés, nous disposons des delta, calculés grâce au pricer. Il est possible de calculer les bêtas, en modifiant la formule du delta, afin de passer en rendement :

$$\beta = \frac{P_{n,T}(\theta + h) - P_{n,T}(\theta - h)}{P_{n,T}(\theta) \times 2h}$$

La sensibilité globale du portefeuille de produits structurés, correspond à la moyenne pondérée par les valeurs de marché de la sensibilité au niveau des actions (β) de chaque produit structuré.

Dans le cas d'une variation du marché action, par le biais d'une méthode similaire à celle utilisée précédemment pour les sensibilités croisées, les sensibilités permettent une approximation de la valeur de marché des différents actifs :

$$VM_{\text{après choc}} = VM_{\text{initiale}}(1 + \beta \times \text{Variation}_{\text{marché action}})$$

Il faut alors déterminer la variation du marché action qui permettrait d'obtenir une PMVL globale égale à 0, en égalisant la VNC totale et la VM totale à date : c'est la variation $\Delta_{\text{Point Mort}}$ nécessaire pour que le marché action atteigne le **point mort de la PRE**. En général le point mort est exprimé avec comme base un indice de référence (par exemple : le CAC40 ou l'Eurostoxx 50). Il s'agit du niveau en dessous duquel, une PRE est à constituer. En supposant disposer de n classes d'actifs, cela revient à résoudre l'équation suivante :

$$VNC_{\text{totale}} = VM_{\text{totale, après choc}} \Leftrightarrow VNC_{\text{totale}} = \sum_{i=1}^n VM_{i, \text{après choc}} \Leftrightarrow VNC_{\text{totale}} = \sum_{i=1}^n VM_{i, \text{initiale}}(1 + \beta_i \times \Delta_{\text{Point Mort}})$$

il en résulte :

$$PMVL = -\Delta_{\text{Point Mort}} \sum_{i=1}^n VM_{i, \text{initiale}} \beta_i$$

d'où

$$\Delta_{\text{Point Mort}} = -\frac{PMVL}{\sum_{i=1}^n VM_{i, \text{initiale}} \beta_i}$$

et

$$\text{Point Mort} = (\text{Indice action de référence à date}) \times (1 - \Delta_{\text{Point Mort}}).$$

L'exemple à la date du 30/09/2022 avec un CAC40 à 5762, donne un seuil de déclenchement de -17,85% correspondant à un point mort du CAC40 à 4733. Le tableau ci-dessous récapitule tous les calculs (pour l'exemple, on considère des VM à date égales aux précédentes VM moyennes sur un mois).

CATÉGORIE	PMVL	Sensibilité à date (%)	PMVL avec -17,85% sur le niveau action
Produits Structurés	-6 000 000	39%	-9 231 038.45
Action en Direct et Fonds Action	-19 500 000	100%	-36 013 517
Private Equity	10 000 000	30%	1 966 397
Immobilier	26 500 000	25%	21 278 158.17
Autres	22 000 000	0%	22 000 000
Total	33 000 000	34%	0.00

TABLE 11 – Calcul du point mort de la PRE

La production de sensibilités permet à l'entreprise de contrôler son risque de provision pour risque d'exigibilité.

10.2 Vision Solvabilité 2 : Choc et projection dans le modèle ALM

10.2.1 Modèle ALM et projection des produits structurés

Dans le cadre d'un modèle ALM, les tables de scénarios économiques issues du GSE sont utilisées pour projeter les flux de trésorerie futurs des actifs et des passifs sur plusieurs horizons temporels. Les projections sont effectuées pour un grand nombre de scénarios économiques afin de couvrir une vaste gamme de situations possibles. L'entreprise utilise 2000 scénarios sur un horizon de 40 ans. Ces choix sont mis en place conformément aux exigences de l'ACPR sur les générateurs de scénarios économiques [8].

Dans le cadre de Solvabilité 2, l'actif est comptabilisé en valeur de marché. L'actif est projeté à l'aide des scénarios économiques des différents facteurs modélisés avec le GSE. Par exemple l'indice action du GSE sert directement à faire évoluer la part action de l'actif générale ou la valeur de marché des unités de compte action.

La projection des produits structurés est essentielle, ces derniers font face en majeure partie aux provisions mathématiques des contrats unités de comptes ainsi qu'aux fonds propres. Un produit structuré n'est pas purement une action. C'est pourquoi, il n'est pas cohérent de faire évoluer son prix totalement selon l'évolution de l'indice action.

Les sensibilités au niveau action (Δ) et au niveau taux (ρ) permettent de capter le mouvement de prix d'un produit structuré relativement aux mouvements de l'indice action et des taux d'intérêt. Ces sensibilités vont permettre de faire évoluer le prix des produits structurés dans le modèle ALM.

Soit un produit structuré DOP, de prix de marché P_0 à date et de Delta $\Delta = 40\%$ à date. La modélisation du produit structuré consiste à considérer que le DOP se comporte à 40% comme un indice action et à $1 - \Delta = 60\%$ comme une obligation. En réalité, cette part obligataire ne correspond pas à la sensibilité aux taux. C'est pourquoi un rebasage est effectué sur le ρ dans le but de projeter le prix de manière adéquate. Seules les sensibilités au niveau des taux et au niveau action sont utilisées dans la projection. La méthodologie est présentée ci-dessous.

Le prix du produit structuré dans le modèle ALM est projeté à l'aide des variations des taux d'intérêts et de l'indice action fournies par le GSE. Cette modélisation est présentée dans le graphique ci-dessous.

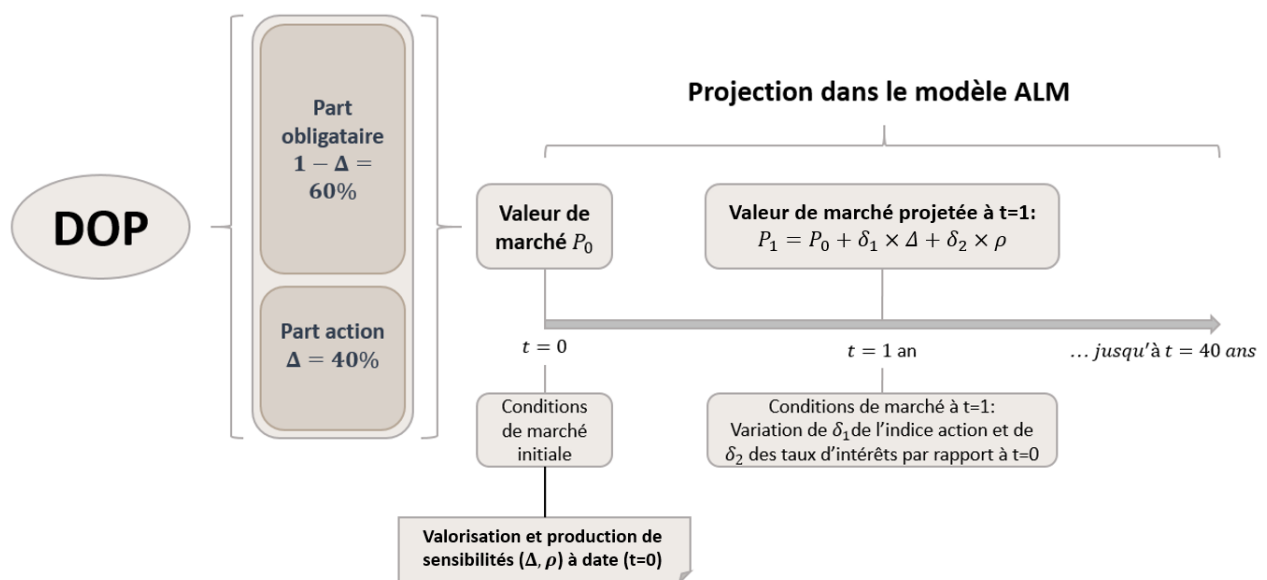


FIGURE 51 – Modélisation des produits structurés dans le modèle ALM

À noter qu'en réalité, le delta utilisé pour la répartition entre la part action et obligataire du prix à $t = 0$ est basé en rendement, c'est le bêta, permettant de capter la part assimilable à de l'action dans le produit structuré.

De plus, dans le cas d'un produit delta négatif (ce qui n'est pas le cas des produits DOP), la répartition faite à $t=0$ n'est pas directement possible ; cependant, la projection est toujours fonctionnelle.

La cohérence et les limites de la méthode employée ont déjà été évoquées lors du test de sensibilités croisées effectué précédemment.

La génération de sensibilités est essentielle pour une projection cohérente des produits structurés. Leur poids dans les unités de compte ne cesse de croître dans un contexte économique marqué, rendant cruciale l'adoption d'une modélisation adaptée à ces produits. Les travaux entrepris, permettant de valoriser les produits structurés et de générer des sensibilités, sont essentiels dans cette démarche.

10.2.2 Calcul du SCR marché

Dans les sous-modules taux et action du SCR de marché, les hypothèses de départ sont soumises à des chocs.

Comme mentionné précédemment, pour la projection des produits structurés dans le modèle ALM, un produit structuré n'est pas directement à 100% un produit taux ou action. Le choc réglementaire dans chacun de ces sous-modules s'applique donc à la partie concernée. En reprenant le même exemple d'un produit structuré DOP de $\Delta = 40\%$, le prix est choqué à l'aide de la sensibilité adéquate :

1. Pour le SCR action, la partie action est choquée avec le coefficient réglementaire (-39% avant ajustement symétrique).
2. Pour le SCR taux, la partie taux est choquée à l'aide de la courbe choquée (entre 70 et 90 points de base) fournie par l'EIOPA à date.

Comme vu précédemment, dans le cadre du choc taux, un rebasage est effectué dans le but de choquer la part obligataire de manière adéquate avec la sensibilité taux (ρ).

La méthodologie est résumée dans la figure ci-dessous.

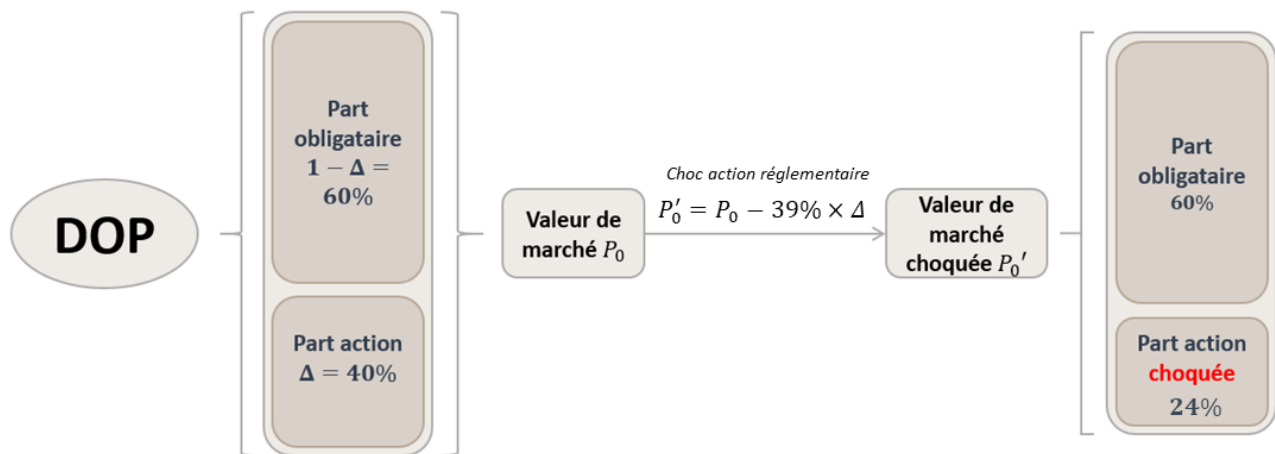


FIGURE 52 – Choc réglementaire dans le cadre du calcul du SCR Marché

Pour un choc action réglementaire de 39%, le choc global subi par le produit structuré est de 15,6%. Cela provient de la valeur de la sensibilité du produit structuré (Δ). Pour rappel, plus la position relative d'un produit structuré à une certaine date est proche de sa barrière inférieure, plus la sensibilité du produit structuré augmente. De ce fait, le choc global du produit augmente également. Par exemple, pour un produit proche de sa barrière inférieure, la sensibilité au niveau action est en moyenne de 55%. Le choc réel du prix du produit structuré est alors de 21,4%. Au contraire, pour un produit proche de sa barrière supérieure, avec un delta moyen de 20%, le choc réel sera de 7,8%.

A noter que les sensibilités sont recalculées chaque semestre avec un paramètre h correspondant au choc réglementaire Solvabilité 2, dans le but de stresser les prix de marché le plus précisément possible.

Les sensibilités permettent de choquer correctement les produits structurés dans le cadre du calcul du SCR.

Conclusion

Ce mémoire a permis de comprendre, de conceptualiser et de proposer une nouvelle approche pour la valorisation et la maîtrise des produits structurés proposés par l'entreprise, plus particulièrement, les produits du type Conservateur Double Opportunité.

L'approche retenue dans ce mémoire est fondée sur l'utilisation du générateur de scénarios économiques de l'entreprise pour valoriser les produits structurés. Cela représente une amélioration par rapport à l'approche précédente basée sur des formules fermées, particulièrement adaptée à des produits simples comme Conservateur Opportunité non rachetable, mais devenant limitée face à l'évolution vers des produits plus complexes comme Conservateur Double Opportunité avec remboursement anticipé.

Un nouveau modèle action à volatilité stochastique permettant de calibrer la nappe de volatilité a été implémenté. Cette amélioration a été nécessaire au vu de la multitude de strikes présents dans les produits structurés DOP. À noter que les travaux réalisés sur le générateur de scénarios économiques ont conduit au développement d'un nouveau modèle action utilisable dans le cadre des calculs réglementaires Solvabilité 2.

La nouvelle approche développée permet de modéliser le caractère "callable" de ces produits, une caractéristique qui n'était pas suffisamment prise en compte par l'approche précédente. Cela représente une avancée significative en termes de précision de la valorisation des produits structurés.

La mise en place de cette approche a permis de produire des sensibilités plus pertinentes pour évaluer l'exposition des produits structurés aux différents mouvements de marché. Ces sensibilités sont indispensables pour modéliser l'évolution et le choc du prix des produits structurés lors des projections Solvabilité 2 avec le modèle ALM.

Cette maîtrise renforcée des produits structurés est essentielle pour maîtriser le risque de provision pour risque d'exigibilité auxquels l'entreprise est exposée. L'enjeu est de taille, car une mauvaise condition de marché peut avoir un impact significatif sur le risque de provisionnement lié aux fonds propres.

Pour aller plus loin, il serait intéressant de continuer à explorer d'autres méthodes pour améliorer la maîtrise des produits structurés, afin de toujours mieux répondre aux défis posés par la complexité croissante de ces produits.

Notamment, l'une des limites actuelles se situe dans la méthode de projection des produits structurés au sein du modèle ALM. Cette problématique représente un sujet de recherche intéressant à approfondir.

Références

- [1] *RFR Technical Documentation, The methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures*, EIOPA Supervisory Processes Department, 2022
- [2] *Efficient Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model*, Leif Andersen, 2006
- [3] *Option Pricing in Heston Model using Finite Element Methods*, Changwei Xiong, 2010
- [4] *Modèle de Heston, Pricing d'options européennes et calibration*, G.Blanchet, M.Elacheche, E.Jeangirard, K.Saleh, 2007
- [5] *Options, futures et autres actifs dérivés*, John Hull, 2001
- [6] *Mémoire d'actuariat, Comparaison de deux approches de calcul des fonds propres sous solvabilité II*, P.Grison et L.Monet, 2014
- [7] *Polycopié de cours, Calcul et contrôle stochastique et applications à la finance*, C.Tardif, 2018
- [8] *Revue de l'ACPR, Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques*, ACPR, 2020
- [9] *Documentation interne*, Le Conservateur, 2022-2023

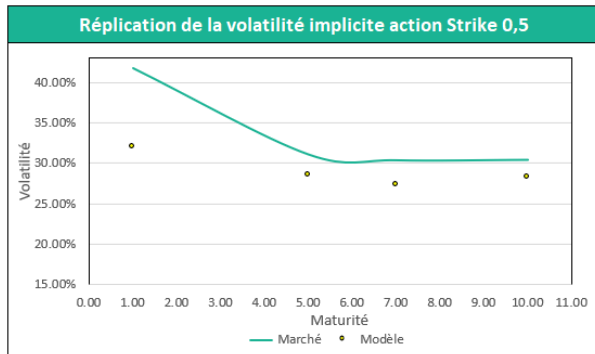
Annexe

1. Graphiques du calibrage du modèle de Heston

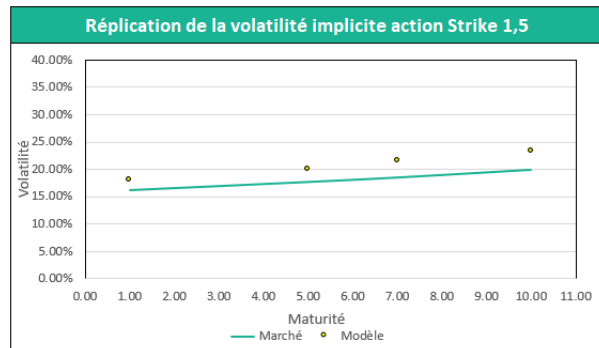
Calibrage (1) : avec condition de Feller

L'algorithme converge en 508 itérations.

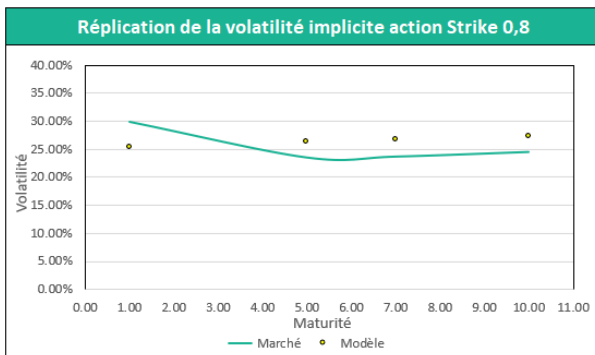
Les paramètres obtenus sont les suivants : $\kappa = 0.3315$, $\theta = 0.1147$, $\xi = 0.2664$, $\rho = -0.8086$, $v_0 = 0.0418$. Le rapport de Feller est $2\kappa\theta/\xi^2 = 1,07$. L'erreur quadratique d'optimisation est de 2,66.



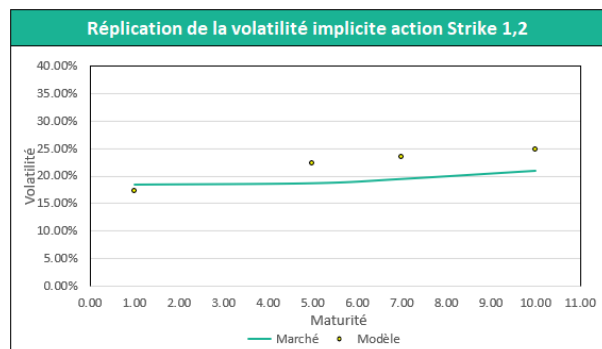
(a) Strike 0,5



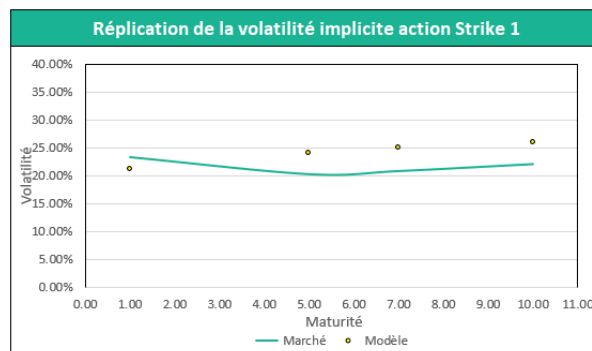
(b) Strike 1,5



(c) Strike 0,8



(d) Strike 1,2



(e) Strike 1

FIGURE 53 – Résultats du calibrage du modèle de Heston avec la condition de Feller

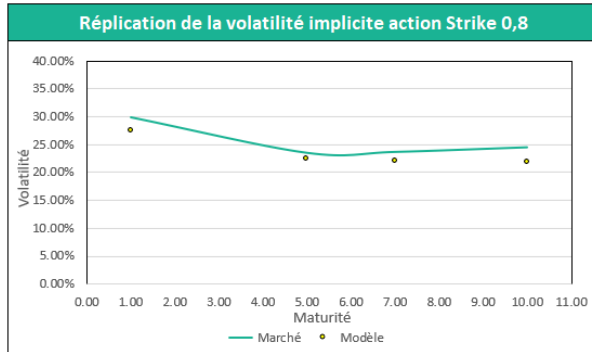
Calibrage (2) : avec condition de Feller

L'algorithme converge en 415 itérations.

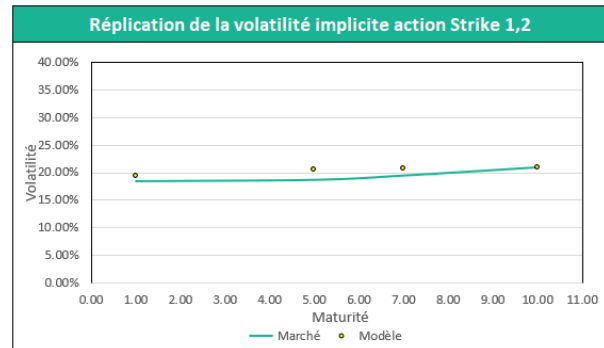
Les paramètres obtenus sont les suivants : $\kappa = 6.77$, $\theta = 0.0476$, $\xi = 0.8030$, $\rho = -0.99$, $v_0 = 0.1586$.

Le rapport de Feller est $2\kappa\theta/\xi^2 = 1,0004$.

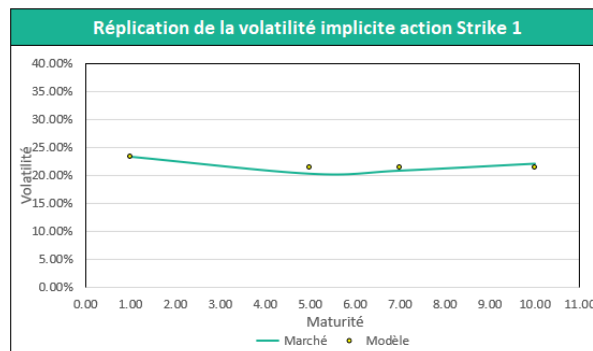
L'erreur quadratique d'optimisation est de 0,1057.



(a) Strike 0,8



(b) Strike 1,2



(c) Strike 1

FIGURE 54 – Résultats du calibrage du modèle de Heston en relâchant partiellement la condition de Feller

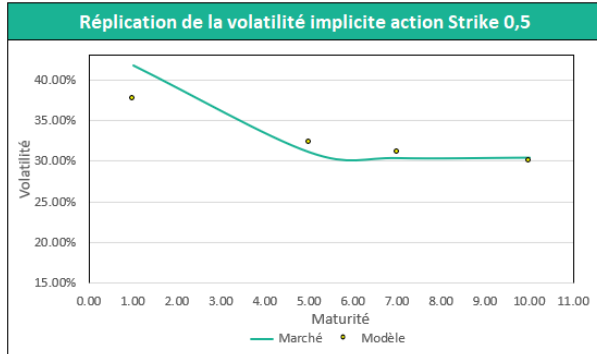
Calibrage (3) sous condition de Feller partielle :

L'algorithme converge au bout de 387 itérations.

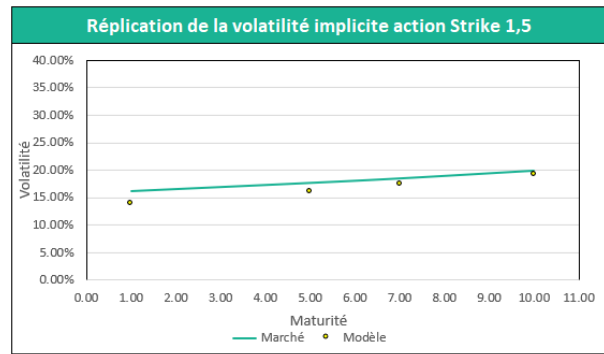
Les paramètres obtenus sont les suivants : $\kappa = 0.2711$, $\theta = 0.1224$, $\xi = 0.3643$, $\rho = -0.8663$, $v_0 = 0.0646$.

Le rapport de Feller est $2\kappa\theta/\xi^2 = 0,5001$.

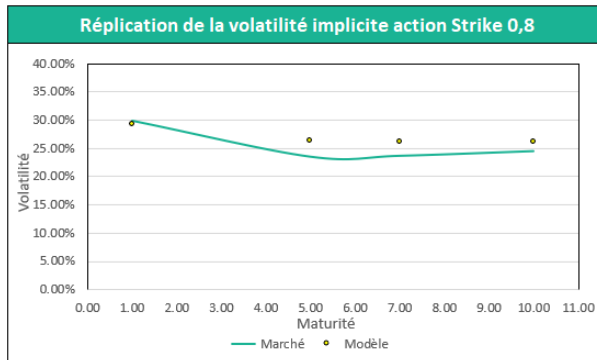
L'erreur quadratique d'optimisation est de 0,7161.



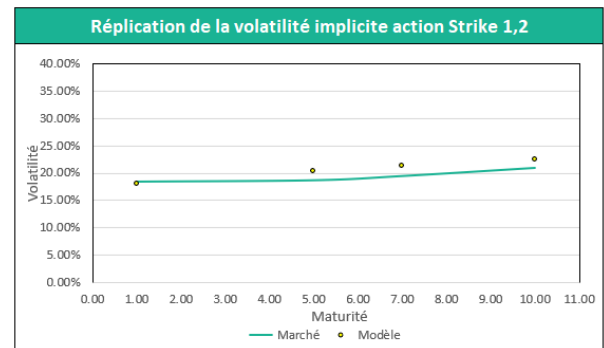
(a) Strike 0,5



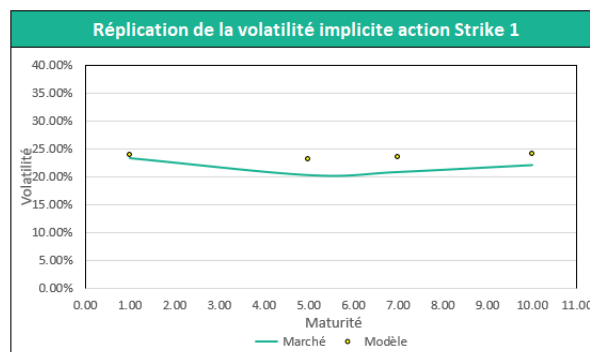
(b) Strike 1,5



(c) Strike 0,8



(d) Strike 1,2



(e) Strike 1

FIGURE 55 – Résultats du calibrage du modèle de Heston en relâchant partiellement la condition de Feller

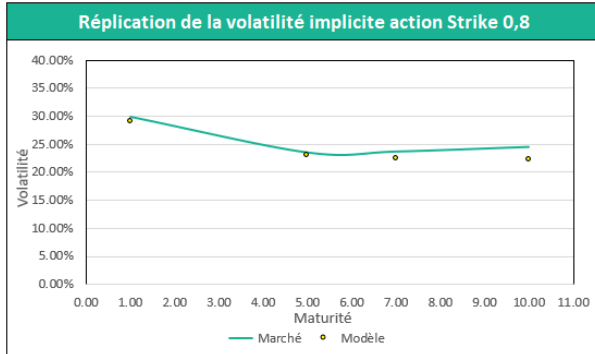
Calibrage (4) sous condition de Feller partielle :

L'algorithme converge en 387 itérations.

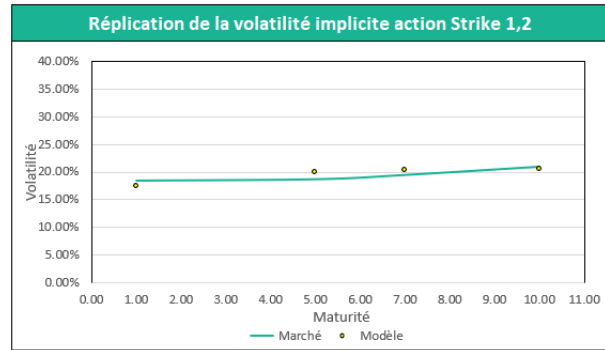
Les paramètres obtenus sont les suivants : $\kappa = 5.3248$, $\theta = 0.0503$, $\xi = 1.0350$, $\rho = -0.9987$, $v_0 = 0.1687$.

Le rapport de Feller est $2\kappa\theta/\xi^2 = 0,5$.

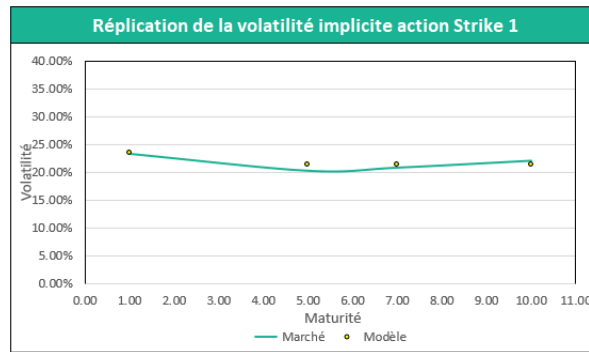
L'erreur quadratique d'optimisation est de 0,0663.



(a) Strike 0,8



(b) Strike 1,2



(c) Strike 1

FIGURE 56 – Résultats du calibrage du modèle de Heston en relâchant partiellement la condition de Feller

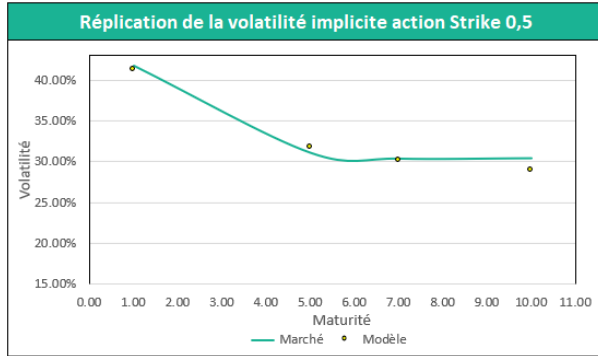
Calibrage (5) : sans condition de Feller

L'algorithme converge en 166 itérations.

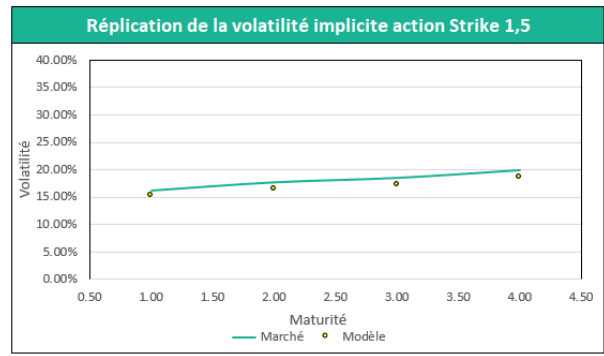
Les paramètres obtenus sont les suivants : $\kappa = 0.3325$, $\theta = 0.1159$, $\xi = 0.5836$, $\rho = -0.7709$, $v_0 = 0.0740$.

Le rapport de Feller est $2\kappa\theta/\xi^2 = 0,2366$.

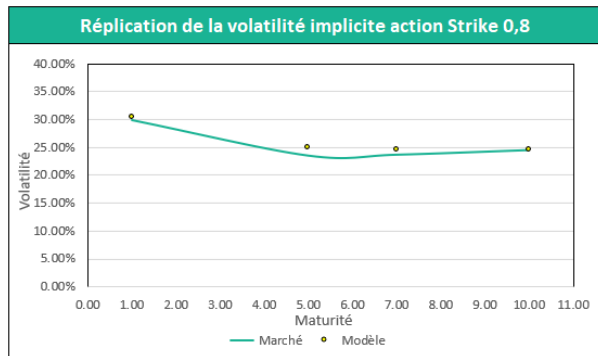
L'erreur quadratique d'optimisation est de 0,1545.



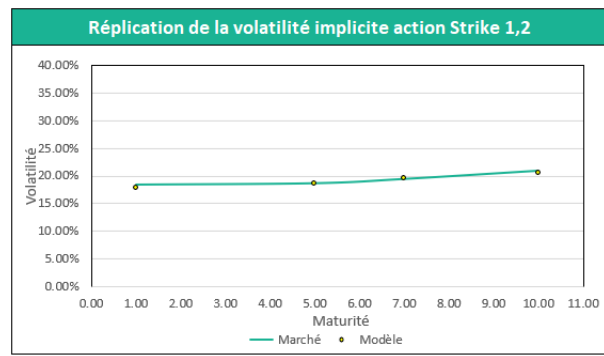
(a) Strike 0,5



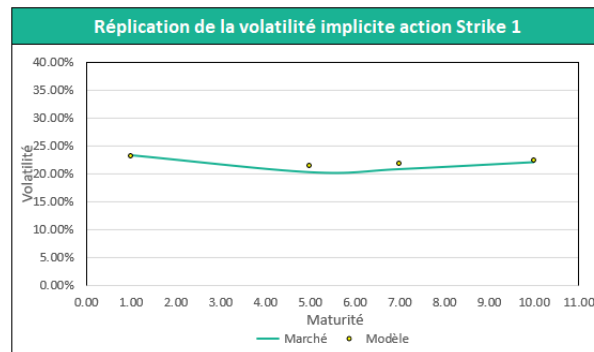
(b) Strike 1,5



(c) Strike 0,8



(d) Strike 1,2



(e) Strike 1

FIGURE 57 – Résultats du calibrage du modèle de Heston en relachant la condition de Feller