

Mémoire présenté pour l'obtention du DUAS et l'admission à l'Institut des Actuaires**le 19/04/2024**Par : W. Floriane Camille GansonréTitre: Revue du calibrage du modèle action au sein du GSE d'une compagnie de réassuranceConfidentialité : NON OUI Durée : 1 an 2 ans 3 ans 4 ans 5 ans*Membres du jury de l'IA :*

F. ROUCHATI

F. TSAYEM

*Entreprise : Partner Reinsurance**Directeur de mémoire (entreprise) :**Membres du jury de l'Unistra :*

J. BERARD

Nom : Florian Thomas-Laglayse

Signature du responsable entreprise

Secrétariat : Mme Stéphanie Richard

Signature du candidat



Résumé

La modélisation de l'indice action au sein d'un générateur de scénarios économiques (GSE), notamment dans le cadre de la valorisation de la garantie plancher en cas de décès dans un contrat en unités de compte (UC), revêt une importance cruciale pour le calcul des indicateurs clés de solvabilité d'une compagnie de réassurance vie. Le GSE projette les variations potentielles d'un certain nombre de facteurs de risque à travers des scénarios aléatoires; ces derniers permettent ainsi de valoriser le portefeuille d'actifs et les engagements de l'assureur sur un horizon de projection déterminé.

En raison de son rôle crucial dans le calcul du *Best Estimate* (BE), le générateur de scénarios économiques doit être soumis à une attention particulière et considéré comme une hypothèse clé (ACPR, 2020)¹. Les décisions structurantes liées au GSE, telles que le choix des modèles et des paramètres de calibrage, nécessitent un examen approfondi, au même titre que les autres hypothèses clés intervenant dans le calcul du *Best Estimate*. Dans ce mémoire, nous nous focaliserons sur le choix des paramètres de calibrage. Le GSE utilisé est fourni par une entreprise externe (Willis Towers Watson), ce qui limite notre influence sur les modèles utilisés.

Toutefois, les modèles d'actions à volatilité stochastique, tels que celui de Heston, employés par Partner Re, peuvent induire des erreurs de modèle. L'erreur de modèle se réfère à l'inexactitude dans l'évaluation des provisions techniques, résultant de l'utilisation de modèles inappropriés ou insuffisamment précis, comme indiqué par l'ACPR (2020). Certaines sources potentielles d'erreur de modèle comprennent notamment :

- L'utilisation d'une discrétisation trop grossière,
- Des erreurs opérationnelles lors de la mise en œuvre des formules théoriques du modèle.

Ainsi après une première partie qui présente la garantie plancher en cas de décès et les concepts clés de la directive Solvabilité II, la seconde partie du mémoire consiste à effectuer un calibrage du modèle de Heston en utilisant des données de marché annuelles au 31/03/2023, suivi d'une simulation de 1 000 scénarios stochastiques en univers risque neutre afin d'évaluer l'erreur de modèle. Ensuite, les tests de validation du GSE, notamment le test de *market consistency* et le test de martingalité, seront effectués dans le but d'apprécier la qualité des scénarios produits, en accord avec les exigences réglementaires.

En outre, le régulateur enjoint les organismes d'assurance à réaliser des tests et sensibilités sur le GSE pour assurer sa robustesse, conformément aux exigences de la Notice 5.15 (ACPR, 2015).

1. ACPR, pour Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution, est l'organe de supervision français de la banque et de l'assurance.

Ces tests de sensibilité peuvent notamment concerner le choix des modèles ou des données de calibrage.

La troisième section de ce mémoire portera sur la réalisation de tests de sensibilité concernant les données de marché utilisées pour le calibrage des actions au sein du GSE. En effet, afin de calibrer de manière plus précise les modèles constitutifs du GSE, des hypothèses de pondération sont généralement appliquées, classant ainsi les données de calibrage en fonction de leur importance relative. Ces modèles doivent être calibrés sur les données les plus pertinentes, en tenant compte des caractéristiques des engagements de l'assureur, notamment en termes de duration (ACPR, 2020). Nous nous intéresserons de fait à la mise en place de ces hypothèses de pondération dans le cadre du calibrage de l'indice action au sein du GSE, ainsi qu'à la validation du GSE ainsi créé à travers les tests de *market consistency*. En outre, nous évaluerons l'impact de ce calibrage sur les engagements de l'assureur.

Mots clés : Générateur de Scénarios Economiques, Actions, Heston, Calibrage, Simulations Monte Carlo, Solvabilité II, Erreur de modèle/ Biais de simulation/ Biais de discrétisation, Hypothèses de pondération, Tests de *market consistency*.

Abstract

Modeling the equity index within an Economic Scenario Generator (ESG), especially in the context of valuing the minimum death benefit guarantee in a unit-linked insurance contract, is crucial for calculating key solvency indicators for a life reinsurance company. The ESG projects the potential variations of several risk factors through random scenarios, enabling the valuation of the asset portfolio and insurer's liabilities over a specified projection horizon.

Due to its crucial role in calculating the Best Estimate (BE), the economic scenario generator (ESG) must be given particular attention and considered a key assumption (ACPR, 2020)². Decisive choices related to the ESG, such as selecting models and calibration parameters, require thorough examination, similar to other key assumptions involved in the BE calculation. In this thesis, our focus will be on the choice of calibration parameters. The ESG used is provided by an external company (Willis Towers Watson), limiting our influence over the models employed.

However, stochastic volatility models like the one used by Partner Re, such as the Heston model, can introduce model errors. Model error refers to inaccuracies in the valuation of technical provisions resulting from the use of inappropriate or insufficiently precise models, as indicated by ACPR (2020). Some potential sources of model error include :

- The use of too coarse discretization,
- Operational errors during the implementation of the theoretical model formulas.

Thus, after an initial section that presents the minimum death benefit guarantee and the key concepts of the Solvency II directive, the second part of the thesis involves calibrating the Heston model using annual market data as of 03/31/2023, followed by simulating 1,000 stochastic scenarios in a risk-neutral environment to assess model error. Subsequently, validation tests of the ESG, particularly the market consistency test and the martingale test, will be conducted to evaluate the quality of the generated scenarios, in accordance with regulatory requirements.

Additionally, the regulator requires insurance entities to conduct tests and sensitivities on the ESG to ensure its robustness, in accordance with the requirements of Notice 5.15, as indicated by ACPR (2015). These sensitivity tests may particularly focus on the choice of models or calibration data.

The third section of this thesis will address the execution of sensitivity tests concerning the calibration data used for modeling equities within the ESG. To calibrate the constituent models of the ESG more accurately, weighting assumptions are typically applied,

2. ACPR, the Prudential Supervision and Resolution Authority, is the French supervisory body for banking and insurance.

categorizing calibration data based on their relative importance. These models need to be calibrated using the most pertinent data, taking into account the characteristics of the insurer's commitments, especially in terms of duration (ACPR, 2020). We will thus explore the implementation of these weighting assumptions in the calibration of the equity index within the ESG, the calibration of the equity index within the GSE, as well as the validation of the ESG thus created through market consistency tests. Additionally, we will assess the impact of this calibration on the insurer's commitments.

Keywords : Economic Scenario Generator, Equities, Heston, Calibration, Monte Carlo Simulations, Solvency II, Model Error / Simulation Bias / Discretization Bias, Weighting Assumptions, Market Consistency Tests.

Note de synthèse

Depuis le 1er janvier 2016, la directive européenne Solvabilité II impose aux organismes d'assurance une nouvelle méthodologie pour évaluer leur bilan. Dans ce cadre, l'utilisation d'un générateur de scénarios économiques (GSE) est cruciale pour évaluer les provisions *Best Estimate* (BE) inscrites au passif de ce bilan prudentiel. Le GSE joue un rôle clé en projetant les évolutions aléatoires de plusieurs facteurs de risque, parmi lesquels les actions. Ces projections sont essentielles pour évaluer à la fois le portefeuille d'actifs et les engagements futurs de l'assureur. Ainsi, le modèle d'actions constitue l'un des éléments principaux du générateur de scénarios économiques et doit être sélectionné avec pertinence.

À ce jour, Partner Re utilise un GSE fourni par une entreprise externe, en l'occurrence Willis Towers Watson (WTW). Dans ce générateur, les rendements des actions sont modélisés à l'aide du modèle de Heston (1993), une extension du modèle de Black-Scholes. Une caractéristique distincte du modèle de Heston est l'intégration d'un processus de volatilité stochastique, permettant de reproduire le *smile* de volatilité.

Cependant, l'utilisation de ce modèle soulève deux problématiques majeures. La première concerne les biais potentiels de discrétisation qui peuvent survenir lorsqu'on discrétise et calcule numériquement des modèles continus à volatilité stochastique, tels que le modèle de Heston. Cela peut entraîner des écarts de convergence significatifs entre les simulations Monte Carlo et les prix théoriques. La deuxième problématique porte sur la pertinence des données de calibrage utilisées pour ajuster les paramètres du modèle. L'approche présentée dans ce mémoire consiste à accorder une importance accrue aux données de marché considérées comme les plus pertinentes, en tenant compte du profil de risque de l'assureur.

Le modèle de Heston est régi par les équations suivantes :

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sqrt{\nu(t)}S(t)dZ_1(t), \quad S(0) > 0$$

$$d\nu(t) = -\lambda(\nu(t) - \bar{\nu})dt + \eta\sqrt{\nu(t)}dZ_2(t), \quad \nu(0) > 0$$

Avec :

- $S(t)$ la valeur de l'indice à l'instant t ,
- $\mu(t)$ le *drift* avec lequel la valeur de l'indice augmente. Sous la mesure risque neutre, il s'agit du taux court local pour la période concernée (rendement espéré du prix du sous-jacent),
- $\nu(t)$ la variance instantanée de la valeur de l'indice au moment t , ($t \in [0, \infty)$),
- $\bar{\nu}$ le niveau de variance à long terme, ou variance moyenne des prix à long terme (lorsque t tend vers l'infini, la valeur attendue de $\nu(t)$ tend vers $\bar{\nu}$),

-
- λ la vitesse de retour à la moyenne i.e la vitesse à laquelle $\nu(t)$ revient à $\bar{\nu}$,
 - η la volatilité du processus de variance. En pratique, elle est soumise à une contrainte visant à garantir que la variance est positive,
 - Z_1 et Z_2 des mouvements browniens standard avec une corrélation ρ , ou de manière équivalente une covariance ρdt .

Le processus stochastique du prix de l'indice est simulé à l'aide d'un schéma d'Euler. Soit S la valeur de l'indice actualisé, il est simulé par :

$$S(t + \Delta t) = S(t) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\nu(t) \cdot \Delta t + \sqrt{\nu(t)} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot Z_1\right)$$

Soit :

$$S(t) = S(0) \cdot \exp\left(\int_0^t \mu(s) ds - \frac{1}{2}\nu(t) \cdot \Delta t + \sqrt{\nu(t)} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot Z_1\right)$$

Avec Δt le pas de temps de projection et $Z_1 \sim \mathbb{N}(0, 1)$.

Le processus stochastique de la variance de l'indice est quant à lui simulé à l'aide d'un schéma de Milstein formulé par :

$$\nu(t + \Delta t) = \nu(t) - \lambda(\nu(t) - \hat{\nu}) \cdot \Delta t + \eta\sqrt{\nu(t)} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot Z_2 + \frac{\eta^2}{4} \cdot \Delta t \cdot (Z_2^2 - 1)$$

Avec $Z_2 \sim \mathbb{N}(0, 1)$, une distribution normale de corrélation ρ avec Z_1 . La relation entre Z_1 et Z_2 est la suivante :

$$Z_2 = \sqrt{1 - \rho^2} Z_1 + \rho Z_1$$

Les modèles d'actions à volatilité stochastique, tels que celui de Heston, peuvent entraîner des erreurs de modèle. L'erreur de modèle se manifeste par une inexactitude dans l'évaluation des provisions techniques, découlant de l'utilisation de modèles inappropriés ou insuffisamment précis, comme stipulé par l'ACPR (2020). Certaines sources potentielles d'erreur de modèle comprennent notamment :

- L'utilisation d'une discrétisation trop grossière,
- Des erreurs opérationnelles lors de la mise en œuvre des formules théoriques du modèle.

Jusqu'au 31/12/2022, les scénarios étaient directement fournis par WTW, fournisseur de l'outil STAR RN de génération de scénarios économiques risque neutre. Depuis cette date, Partner Re a commencé à prendre partiellement en charge la génération des scénarios utilisés pour évaluer la garantie plancher. L'équipe *GMDB* (*Guaranteed Minimum Death Benefits* pour garantie plancher en cas de décès) s'est particulièrement préoccupée de garantir la qualité des modèles utilisés, en mettant l'accent sur le modèle d'action. Cela s'explique en partie par le fait que des modèles à volatilité stochastique tels que le modèle de Heston peuvent introduire des biais de discrétisation significatifs lorsqu'ils sont discrétisés et calculés numériquement, provoquant ainsi des écarts de convergence relativement importants entre simulations Monte Carlo et prix théoriques.

Dans cette optique, après une première partie qui présente la garantie plancher en cas de décès et les concepts clés de la directive Solvabilité II, la seconde partie de ce mémoire

implique le calibrage du modèle de Heston en utilisant des données de marché annuelles (prix d'options sur l'indice *Euro Stoxx 50*) au 31/03/2023, suivi d'une simulation de 1 000 scénarios stochastiques en univers risque neutre afin d'évaluer l'erreur de modèle. Les résultats obtenus seront exposés dans la section suivante.

Résultats du calibrage

Le processus de calibrage vise à déterminer les paramètres optimaux $(\nu_0, \bar{\nu}, \lambda, \eta, \rho)$ du modèle de Heston. En utilisant ces paramètres, nous calculons ensuite les prix impliqués par le modèle de Heston en utilisant sa forme analytique. Les ensembles de prix de *call* modèle et marché par maturité pour une *moneyness* égale à 100 % sont représentés graphiquement ci-dessous :

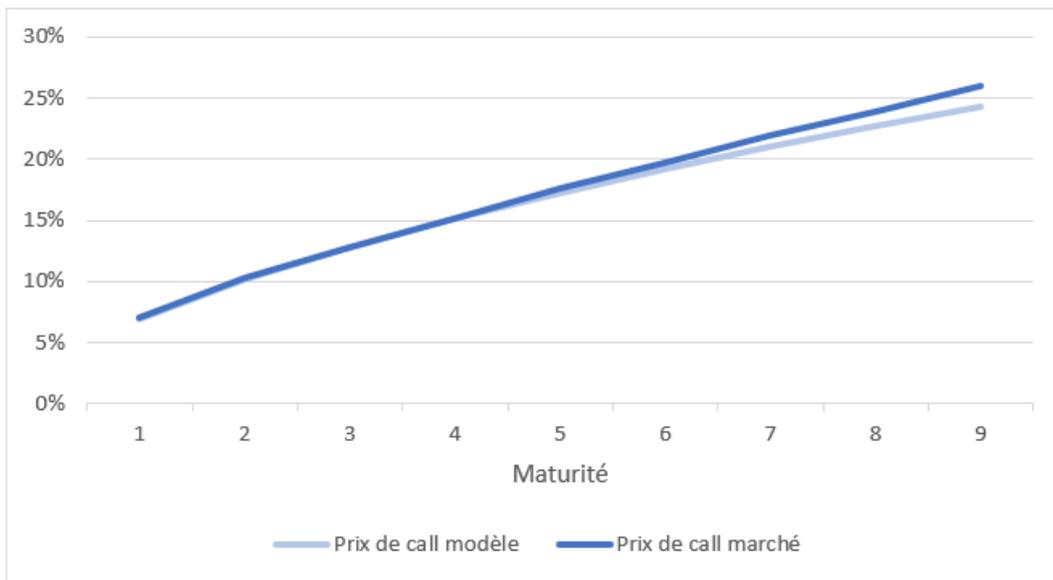


FIGURE 1 – Comparaison des prix de *call model*-marché pour une *moneyness* égale à 100%

Les résultats obtenus mettent en évidence une erreur de modèle observée lors du calibrage de l'indice action, notamment sur les maturités plus longues, comme illustré dans la Figure 1. Cette erreur de modèle peut être mesurée par l'écart absolu ou relatif entre les prix impliqués par le modèle Heston et les prix observés sur le marché. Elle reflète ainsi la déviation du test de *market consistency* des options sur l'indice *Euro Stoxx 50*. En notant C le prix du *Call*, le biais de calibrage et l'erreur relative (notée ER) liés à l'estimation des paramètres du modèle de Heston lors du calibrage peuvent être formulés comme suit :

$$bias_{calibrage} = C^{modele} - C^{marche}$$

$$ER_{calibrage} = \frac{C^{modele} - C^{marche}}{C^{marche}}$$

L'erreur relative moyenne de calibrage, obtenue en calculant la moyenne des erreurs de calibrage pour chaque maturité et chaque *moneyness*, est de **-3,16%**.

En utilisant les données initiales et une fois que le modèle a été calibré, nous procédons à la simulation des trajectoires des prix d'actions en discrétisant les équations différentielles

stochastiques associées. Ainsi, nous effectuons 1 000 simulations Monte Carlo et comparons les prix obtenus par Monte Carlo avec ceux impliqués par la forme analytique du modèle Heston.

L'erreur relative moyenne de simulation, calculée en prenant la moyenne des erreurs relatives de simulation pour chaque maturité et chaque *moneyness*, s'élève à **-0,75%**. L'erreur relative de simulation est formulée comme suit :

$$ER_{simulation} = \frac{C^{simulation} - C^{modele}}{C^{modele}}$$

En réalité, le biais de simulation (formulé par $C^{simulation} - C^{modele}$) se décompose en la somme de deux erreurs :

$$biais_{simulation} = biais_{discretisation} + variance$$

La variance liée à la simulation Monte Carlo du modèle de Heston fait référence à l'incertitude ou la dispersion des trajectoires de prix obtenues lors de la simulation, et peut être réduite en augmentant le nombre de simulations selon la loi forte des grands nombres.

Le biais de discrétisation survient quant à lui en raison de l'approximation des processus stochastiques sous-jacents du modèle par des pas de temps discrets, au lieu d'une représentation continue, et peut être diminué en réduisant le pas de temps de projection lors de la simulation. Afin d'illustrer cela, des prix de *Call* de maturités de 1 à 9 ont été simulés en fonction de différents pas de projection et différents nombre de simulations, pour des *moneyness* allant de 80 à 120%. La somme au carré des biais de simulation obtenue pour l'ensemble des maturités et *moneyness* pour chaque pas de projection et nombre de simulations, est présentée ci-dessous :

N	Pas de projection	Annuelle	Trimestrielle	Mensuelle	Hebdo
	1000	0,0571	0,0491	0,0472	0,0466
	2000	0,0485	0,0452	0,0449	0,0431
	10000	0,0477	0,0457	0,0423	0,0419

TABLE 1 – Comparaison de la somme des carrés des biais de simulation en fonction du pas de projection et du nombre de simulations N

Les résultats obtenus ci-dessus illustrent clairement que la réduction du pas de projection entraîne une diminution du biais de discrétisation pour tous les jeux de scénarios. On observe également une diminution progressive du biais de simulation, pour tous les pas de projection, en augmentant le nombre de simulations, conformément aux explications précédentes. Cependant, cette réduction du biais n'est pas toujours systématique d'un nombre de simulations à un autre. Cela peut être attribué à l'aléa ou au bruit inhérent à l'échantillonnage stochastique. Ainsi, un pas de projection plus fin et une augmentation du nombre de simulations contribuent à une réduction significative du biais de simulation.

Au sein de l'équipe *GMDB*, 1 000 simulations Monte Carlo sont réalisées avec un pas de projection trimestriel, dans le cadre des clôtures Solvabilité II. La réduction du pas de projection, par exemple en passant à un pas mensuel, hebdomadaire ou journalier, associée à un nombre plus important de simulations, aurait probablement permis d'accroître la précision du calcul des prix des actions. Il serait donc souhaitable de mettre en œuvre ces

changements. Cependant, leur mise en place présente des contraintes opérationnelles, car elles entraîneraient du temps et des coûts supplémentaires lors des clôtures trimestrielles. En effet, le GSE est utilisé conjointement avec d'autres composantes logiciel telles que le modèle *ALM*. La réduction du pas de projection au sein du GSE nécessiterait donc une adaptation également au sein du modèle *ALM*, rendant le processus de mise en œuvre plus complexe.

Pour atteindre une précision optimale tout en minimisant les contraintes opérationnelles, ce mémoire a mené une analyse approfondie du biais de simulation. L'objectif était de trouver le meilleur équilibre entre le nombre de simulations et la finesse du pas de temps de projection. Cet équilibre se base sur l'évolution de la précision du calcul en fonction du nombre de calculs effectués. L'analyse a révélé que l'équilibre optimal est atteint avec 2 500 simulations et un pas de projection bimestriel ($N = 2500, n = 6$). En comparaison, l'équipe *GMDB* utilise actuellement 1 000 simulations Monte Carlo avec un pas de temps trimestriel ($N = 1000, n = 4$), ce qui entraîne un biais de simulation de 0,0491. En adoptant le point optimal, la précision s'améliore de 14,66% par rapport à la configuration initiale. Néanmoins, le test de martingalité réalisé à la suite du calibrage initial a révélé la risque neutralité des trajectoires générées au seuil de 5%, et ce, pour toutes les dates de projection.

En outre, le calibrage des modèles constitutifs du GSE repose généralement sur des hypothèses de pondération, lesquelles servent à classer les données de calibrage en fonction de leur importance relative. Dans sa revue intitulée « Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques », l'ACPR recommande aux assureurs de calibrer ces modèles sur les données les plus pertinentes, en tenant compte des caractéristiques des engagements, notamment en termes de durée. Il est également recommandé d'effectuer des sensibilités aux hypothèses de pondération afin de garantir que le calibrage des modèles reflète au mieux le profil de risque de l'assureur.

A cet effet, la troisième section de ce mémoire porte sur la réalisation de tests de sensibilité concernant les données de marché utilisées pour le calibrage des actions au sein du GSE. Ainsi, un processus de calibrage du modèle d'action (Heston) en mettant l'accent sur les données pertinentes du point de vue de la garantie plancher en cas de décès, compte tenu de l'engagement du réassureur en termes de durée est mis en place. L'approche de cette méthode repose sur l'assignation de poids plus élevés à certaines données de marché, accordant ainsi davantage d'importance à ces données dans le processus de calibrage. Cette méthode conduit à des résultats d'optimisation plus alignés sur les données surpondérées.

Choix des données de calibrage pertinentes

Afin d'évaluer de manière plus précise les engagements du réassureur liés à la garantie plancher (*GMDB*), nous accordons des poids plus importants aux données que nous considérons comme les plus pertinentes dans le contexte de la *GMDB*. Ces données jugées pertinentes incluent particulièrement celles qui sont sensibles en termes de maturités, notamment celles situées autour de la durée des sinistres (c'est-à-dire du passif).

Choix des maturités les plus représentatives dans le cadre de la *GMDB*

La duration d'une série de flux financiers se définit comme la moyenne des durées à courir entre le jour du calcul et la date de paiement de chaque flux (durée de vie du flux), pondérée par la valeur actuelle probable du flux.

Pour des flux de passif, la duration représente la date moyenne de paiement de ces flux par l'assureur, pondérée par leur valeur probable actualisée. De fait, les données pertinentes à considérer en ce qui concerne les maturités sont celles qui entourent la duration des sinistres.

La duration des sinistres sur le périmètre *GMDB* étant d'environ 20 ans au 31/03/2023, nos flux de passif se matérialiseront dans environ 20 ans à partir de maintenant. Nous souhaitons donc que la valorisation des flux à 20 ans de nos différents produits dérivés, en particulier nos produits dérivés sur actions, soit la plus précise possible. Le but ultime est de valoriser le BE, qui est un vecteur de flux actualisés. Ainsi, pour garantir une valorisation la plus précise possible, il est crucial que nos flux, en particulier ceux autour de la duration, soient les plus justes possibles. Par conséquent, nous optons pour une pondération plus forte des données de calibrage correspondant aux maturités les plus longues disponibles.

Résultats

Le calibrage du modèle actions, tel que décrit précédemment, a été réalisé en utilisant des données de marché annuelles (prix d'options sur l'indice *Euro Stoxx 50*) au 31/03/2023. Les paramètres optimaux obtenus sont comparés à ceux obtenus dans le cadre du calibrage réalisé plus haut, c'est-à-dire sans pondération. Le tableau ci-dessous présente les résultats obtenus :

Paramètres	Valeurs optimisées sans pondération	Valeurs optimisées avec pondération
λ	0,13	0,03
η	0,13	0,11
ρ	-1	-1
ν_0	0,02	0,02
$\bar{\nu}$	0,07	0,2

TABLE 2 – Comparaison des résultats de calibrage obtenus à travers les deux méthodes de calibrage

A la suite du calibrage en attribuant des poids plus importants aux données les plus sensibles sur le périmètre *GMDB*, nous observons une variation significative de deux paramètres : le paramètre de volatilité à long terme $\bar{\nu}$ et le paramètre de vitesse de convergence vers la volatilité à long terme λ .

On observe une augmentation du paramètre de volatilité à long terme $\bar{\nu}$, passant de 7 % à 20 %. L'augmentation du paramètre de volatilité à long terme reflète une perception accrue de l'incertitude à long terme sur le marché et se traduit par une augmentation du prix des options.

Par ailleurs, nous observons une diminution du paramètre de vitesse de convergence vers la volatilité à long terme λ . Cette réduction indique que le marché réagit de manière plus lente aux chocs de volatilité. En conséquence, les volatilités stochastiques convergent progressivement vers des valeurs plus élevées avec une vitesse réduite. Cette modification

pourrait être attribuée à l'application de poids plus importants sur les maturités longues, influençant ainsi la valeur des volatilités à long terme.

1 000 simulations Monte Carlo de prix actions ont été réalisées à la suite de ce calibrage. La figure ci-dessous illustre les variations observées, résultant du calibrage en accordant des poids plus significatifs aux données de marché les plus pertinentes, telles qu'elles ont été décrites précédemment :

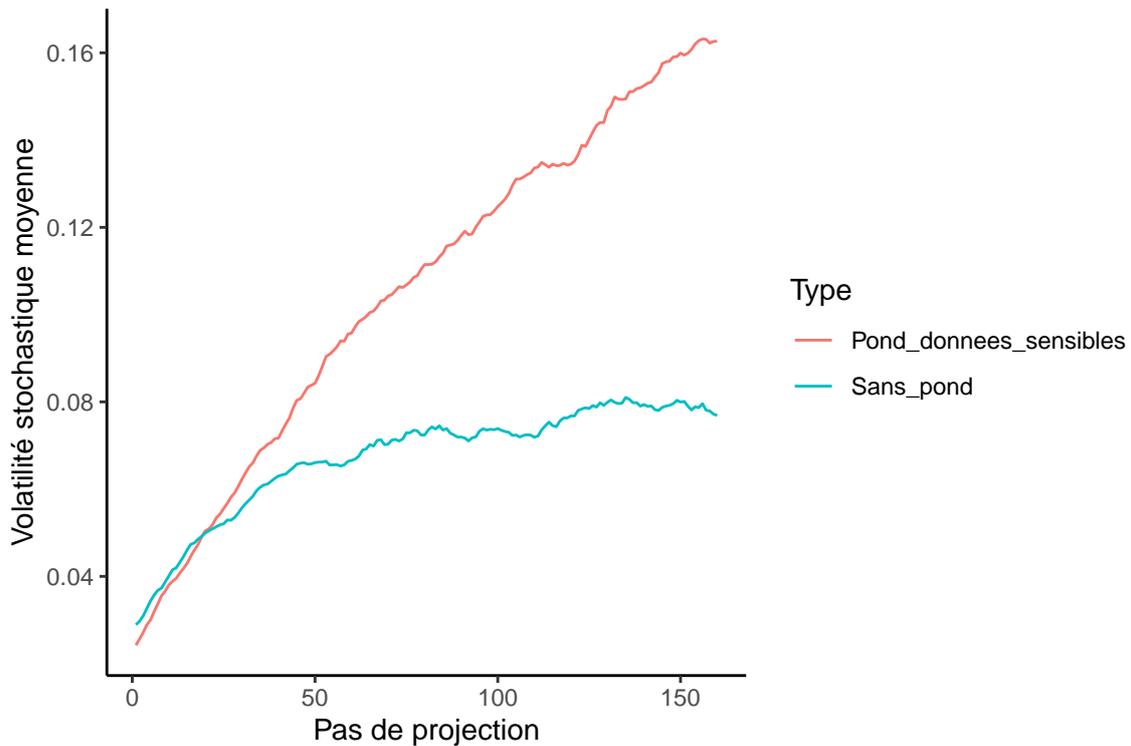


FIGURE 2 – Volatilité stochastique moyenne des prix actions pour chaque pas de projection pour les deux types de calibrage effectués

Impact sur la TVOG³

Le but du GSE étant de déterminer la TVOG, nous avons comparé la TVOG calculée à partir des 2 ensembles de 1 000 scénarios (1 000 scénarios sans pondération et 1 000 scénarios avec pondération des maturités longues) afin d'évaluer l'impact concret du calibrage par pondération des données les plus pertinentes. Le tableau suivant présente les résultats obtenus :

TVOG sans pondération	TVOG avec pondération	Δ TVOG
12 980 096 €	13 421 831 €	3,40%

TABLE 3 – Variation de la TVOG à la suite du calibrage par pondération des données les plus pertinentes

3. La TVOG pour *Time Value of Options and Guarantees* s'obtient par différence entre le BE stochastique et le BE déterministe et reflète la valeur de l'incertitude des obligations prises par une compagnie d'assurance-vie envers ses assurés.

L'optionalité sera plutôt exercée pour les maturités longues, c'est à ce moment que les engagements de passifs sont les plus importants. La duration moyenne du passif étant de 20 ans, la volatilité cruciale à calibrer est celle correspondant à une période de 20 ans. Par conséquent, si, à la suite de la pondération, cette volatilité devient plus élevée, comme c'est le cas actuellement, la valeur de l'option associée à la garantie plancher sera également plus élevée. Par extension, l'augmentation de la volatilité, qui mesure la variation potentielle des prix des actifs induit une augmentation de la TVOG et par conséquent du BE.

Ainsi, en accordant une pondération plus élevée aux données des maturités longues, on constate une augmentation de 3,4 % de la TVOG.

En outre, bien que l'augmentation de 3,4 % de la TVOG puisse paraître significative du point de vue d'une compagnie d'assurance, du point de vue du réassureur, cet impact demeure raisonnable. Il est important de rappeler que Partner Re réassure la garantie plancher en cas de décès sur l'unité de compte. L'engagement du réassureur associé à cette garantie dépend étroitement de l'évolution des fonds inclus dans le support en unités de compte. Ces fonds sont diversifiés et comprennent un mélange d'indice monétaire, d'indice obligataire et d'actions. Étant donné que les fonds sont principalement investis dans des indices actions (45% en moyenne au 31/03/2023) et que les actions sont considérées comme la classe d'actifs la plus risquée, une telle augmentation de la volatilité des actions peut entraîner un tel impact sur la TVOG.

Executive Summary

As of January 1, 2016, the European directive Solvency II mandates insurance companies to adopt a new methodology for assessing their balance sheets. In this context, the use of an Economic Scenario Generator (ESG) is crucial for evaluating the Best Estimate (BE) provisions recorded on the liability side of this prudential balance sheet. The ESG plays a key role in projecting the random evolutions of various risk factors, including equities. These projections are essential for assessing both the asset portfolio and the future commitments of the insurer. Thus, the equity model is one of the main components of the economic scenario generator and must be selected appropriately.

To date, Partner Re uses an Economic Scenario Generator (ESG) provided by an external company, namely Willis Towers Watson (WTW). In this generator, equity returns are modeled using the Heston model (1993), an extension of the Black-Scholes model. A distinctive feature of the Heston model is the integration of a stochastic volatility process, allowing it to replicate the volatility smile.

However, the use of this model raises two major issues. The first concerns potential discretization biases that can occur when discretizing and numerically calculating continuous models with stochastic volatility, such as the Heston model. This can lead to significant convergence differences between Monte Carlo simulations and theoretical prices. The second issue relates to the relevance of the calibration data used to adjust the model parameters. The approach presented in this thesis emphasizes the importance of considering the most relevant market data, taking into account the insurer's risk profile.

The Heston model is governed by the following equations :

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sqrt{\nu(t)}S(t)dZ_1(t), \quad S(0) > 0$$

$$d\nu(t) = -\lambda(\nu(t) - \bar{\nu})dt + \eta\sqrt{\nu(t)}dZ_2(t), \quad \nu(0) > 0$$

With :

- $S(t)$ the value of the index at time t ,
- $\mu(t)$ the drift with which the index value increases. Under the risk-neutral measure, this is the local short rate for the relevant period (expected return of the underlying asset price),
- $\nu(t)$ the instantaneous variance of the index value at time t ($t \in [0, \infty)$),
- $\bar{\nu}$ the long-term variance level, or average variance of prices in the long term (as t tends to infinity, the expected value of $\nu(t)$ tends to $\bar{\nu}$),
- λ the speed of mean reversion, i.e., the speed at which $\nu(t)$ returns to $\bar{\nu}$,

-
- η the volatility of the variance process. In practice, it is subject to a constraint to ensure that the variance is positive,
 - Z_1 and Z_2 are standard Brownian motions with a correlation ρ , or equivalently, a covariance ρdt .

The stochastic process of the index price is simulated using an Euler scheme. Let S be the updated index value, and it is simulated by :

$$S(t + \Delta t) = S(t) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\nu(t) \cdot \Delta t + \sqrt{\nu(t)} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot Z_1\right)$$

Let :

$$S(t) = S(0) \cdot \exp\left(\int_0^t \mu(s) ds - \frac{1}{2}\nu(t) \cdot \Delta t + \sqrt{\nu(t)} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot Z_1\right)$$

Here, Δt is the time step, and $Z_1 \sim \mathbb{N}(0, 1)$.

The stochastic process of the index variance is simulated using a Milstein scheme formulated as :

$$\nu(t + \Delta t) = \nu(t) - \lambda(\nu(t) - \bar{\nu}) \cdot \Delta t + \eta\sqrt{\nu(t)} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot Z_2 + \frac{\eta^2}{4} \cdot \Delta t \cdot (Z_2^2 - 1)$$

Here, $Z_2 \sim \mathbb{N}(0, 1)$ is a normal distribution with a correlation ρ with Z_1 . The relationship between Z_1 and Z_2 is given by :

$$Z_2 = \sqrt{1 - \rho^2}Z_1 + \rho Z_1$$

Stochastic volatility models like Heston's can introduce model errors. Model error refers to inaccuracies in the valuation of technical provisions resulting from the use of inappropriate or insufficiently precise models, as stated by the ACPR (2020). Some potential sources of model error include :

- Using too coarse discretization,
- Operational errors during the implementation of the theoretical formulas of the model.

Until December 31, 2022, the scenarios were directly provided by WTW, the supplier of the STAR RN tool for generating neutral risk economic scenarios. From that date onwards, Partner Re has begun to partially take charge of generating the scenarios used to assess the floor guarantee. The GMDB team (GMDB for Guaranteed Minimum Death Benefits) has been particularly concerned with ensuring the quality of the models used, with a focus on the action model. This is partly explained by the fact that stochastic volatility models, such as the Heston model, can introduce significant discretization biases when they are discretized and computed numerically, leading to relatively large convergence discrepancies between Monte Carlo simulations and theoretical prices.

In this context, after a first part that presents the minimum death benefit guarantee and the key concepts of the Solvency II directive, the second part of this thesis involves calibrating the Heston model using annual market data (option prices on the Euro stoxx 50 index) as of March 31, 2023, followed by a simulation of 1,000 stochastic scenarios in a neutral risk universe to evaluate the model error. The results obtained will be presented in the following section.

Calibration Results

The calibration process aims to determine the optimal parameters $(\nu_0, \bar{\nu}, \lambda, \eta, \rho)$ of the Heston model. Using these parameters, we then calculate the prices implied by the Heston model using its analytical form. Model and market price sets by maturity for a moneyness equal to 100% are graphically represented below :



FIGURE 3 – Comparison of model-market call prices for a moneyness equal to 100%

The results highlight a model error observed during the calibration of the stock index, especially for longer maturities, as illustrated in Figure 3. This model error can be measured by the absolute or relative difference between the prices implied by the Heston model and the observed market prices. It reflects the deviation from the market consistency test for options on the Euro Stoxx 50 index. Denoting C as the Call price, the calibration bias and the relative error (denoted as ER) related to the estimation of the Heston model parameters during calibration can be formulated as follows :

$$bias_{calibration} = C^{model} - C^{market}$$

$$ER_{calibration} = \frac{C^{model} - C^{market}}{C^{market}}$$

The average relative calibration error, obtained by calculating the average of the calibration errors for each maturity and each moneyness, is -3.16%.

Using the initial data and once the model has been calibrated, we proceed with the simulation of stock price trajectories by discretizing the associated stochastic differential equations. Thus, we perform 1,000 Monte Carlo simulations and compare the prices obtained by Monte Carlo with those implied by the analytical form of the Heston model.

The average relative simulation error, calculated by taking the average of the relative simulation errors for each maturity and each moneyness, is -0.75%. The relative simulation error is formulated as follows :

$$ER_{simulation} = \frac{C^{simulation} - C^{model}}{C^{model}}$$

In reality, the simulation bias (expressed as $C^{simulation} - C^{model}$) can be decomposed into the sum of two errors :

$$bias_{simulation} = bias_{discretization} + variance$$

The variance associated with the Monte Carlo simulation of the Heston model refers to the uncertainty or dispersion of the price trajectories obtained during the simulation and can be reduced by increasing the number of simulations according to the law of large numbers.

Discretization bias, on the other hand, arises from the approximation of the model's underlying stochastic processes using discrete time steps instead of a continuous representation, and can be reduced by decreasing the projection time step during simulation. To illustrate this, call option prices with maturities from 1 to 9 years were simulated based on different projection time steps and different numbers of simulations, for moneyness ranging from 80% to 120%. The sum of squared simulation biases obtained for all maturities and moneyness for each projection time step and number of simulations is presented below :

N	TimeStep	Annual	Quarterly	Monthly	Weekly
	1,000		0.0571	0.0491	0.0472
2,000		0.0485	0.0452	0.0449	0.0431
10,000		0.0477	0.0457	0.0423	0.0419

TABLE 4 – comparison of the sum of squared simulation biases based on the projection step and the number of simulations N

The results above clearly illustrate that reducing the projection time step leads to a decrease in discretization bias for all scenario sets. There is also a progressive reduction in simulation bias for all projection time steps by increasing the number of simulations, consistent with the explanations given earlier. However, this reduction in bias is not always consistent from one number of simulations to another, which can be attributed to the inherent stochastic sampling noise. Thus, finer projection time steps and increased number of simulations contribute significantly to reducing simulation bias.

Within the GMDB team, 1,000 Monte Carlo simulations are performed with a quarterly projection time step as part of the Solvency II closings. Reducing the projection time step, for example, to monthly, weekly, or daily steps, combined with a larger number of simulations, would likely have increased the accuracy of stock price calculations. Therefore, implementing these changes would be desirable. However, their implementation poses operational constraints as they would require additional time and costs during quarterly closings. The ESG is used in conjunction with other software components such as the ALM model. Reducing the projection time step within the ESG would also require adaptation within the ALM model, making the implementation process more complex.

To achieve optimal accuracy while minimizing operational constraints, this thesis conducted an in-depth analysis of simulation bias. The goal was to find the best balance between

the number of simulations and the granularity of the projection time step. This balance is based on the evolution of calculation accuracy with the number of computations performed. The analysis revealed that the optimal balance is achieved with 2,500 simulations and a bi-monthly projection time step ($N = 2,500, n = 6$). In comparison, the GMDB team currently uses 1,000 Monte Carlo simulations with a quarterly time step ($N = 1,000, n = 4$), resulting in a simulation bias of 0.0491. Adopting the optimal point improves accuracy by 14.66% compared to the initial configuration. Nevertheless, the martingale test conducted following the initial calibration revealed the risk neutrality of the generated trajectories at the 5% threshold for all projection dates.

Moreover, the calibration of the constituent models within the ESG typically relies on weighting assumptions, which are used to rank the calibration data based on their relative importance. In its review titled "Economic Scenario Generators : Points of Attention and Best Practices," the ACPR advises insurers to calibrate these models using the most relevant data, considering the characteristics of their liabilities, particularly in terms of duration. It is also recommended to perform sensitivity analyses on the weighting assumptions to ensure that the model calibration accurately reflects the insurer's risk profile.

To this end, the third section of this thesis focuses on conducting sensitivity tests regarding the calibration data used for modeling actions within the GSE. Thus, a calibration process of the action model (Heston) emphasizing relevant data from the perspective of the death benefit floor, taking into account the reinsurer's commitment in terms of duration, is implemented. This methodological approach assigns higher weights to certain market data, giving more importance to these data in the calibration process. This method leads to more aligned optimization results with the overweighted data.

Selection of relevant calibration data

To more accurately assess the reinsurer's commitments related to the guaranteed minimum death benefit (GMDB), we assign higher weights to data considered most relevant within the GMDB scope. These relevant data include those particularly sensitive in terms of maturities, especially those around the duration of claims.

Choice of the most representative maturities in the GMDB framework

The duration of a series of financial cash flows is defined as the average of the time remaining between the calculation day and the payment date of each cash flow (the lifespan of the cash flow), weighted by the present probable value of the cash flow.

For liability cash flows, the duration represents the average payment date of these cash flows by the insurer, weighted by their discounted probable value. Therefore, the relevant data to consider regarding maturities are those surrounding the duration of the claims.

The duration of claims within the GMDB scope is approximately 20 years as of March 31, 2023. Our liability cash flows will materialize in about 20 years from now. Therefore, we aim for the valuation accuracy of our various derivative products, especially equity derivatives, over a 20-year horizon. The ultimate goal is to value the Best Estimate (BE), which represents a vector of discounted cash flows. To ensure the most accurate valuation, it is crucial that our cash flows, particularly those around the duration, are as accurate as possible. Hence, we choose a higher weighting for calibration data corresponding to the

longest available maturities.

Results

Calibrating the equity model, as described earlier, was carried out using annual market data (option prices on the Euro stoxx index) as of 03/31/2023. The optimal parameters obtained are compared with those obtained in the calibration conducted above, i.e., without weighting. The table below presents the results obtained :

Parameters	Optimized values without weighting	Weighted optimized values
λ	0,13	0,03
η	0,13	0,11
ρ	-1	-1
ν_0	0,02	0,02
$\bar{\nu}$	0,07	0,2

TABLE 5 – Comparison of calibration results obtained using the two calibration methods

Following the calibration with a higher weighting on the most sensitive data in the *GMDB* scope, we observe a significant variation in two parameters : the long-term volatility parameter $\bar{\nu}$ and the parameter for the speed of convergence to long-term volatility λ .

There is an increase in the long-term volatility parameter $\bar{\nu}$, rising from 7% to 20%. The increase in the long-term volatility parameter reflects an increased perception of long-term uncertainty in the market and results in an increase in option prices.

Additionally, we observe a decrease in the speed of convergence to long-term volatility parameter λ . This reduction indicates that the market reacts more slowly to volatility shocks. As a result, stochastic volatilities gradually converge to higher values with a reduced speed. This modification could be attributed to the application of higher weights on longer maturities, influencing the value of long-term volatilities.

1,000 Monte Carlo simulations of equity prices were carried out following this calibration. The figure below illustrates the variations observed, resulting from the calibration by giving more significant weights to the most relevant market data, as described above :

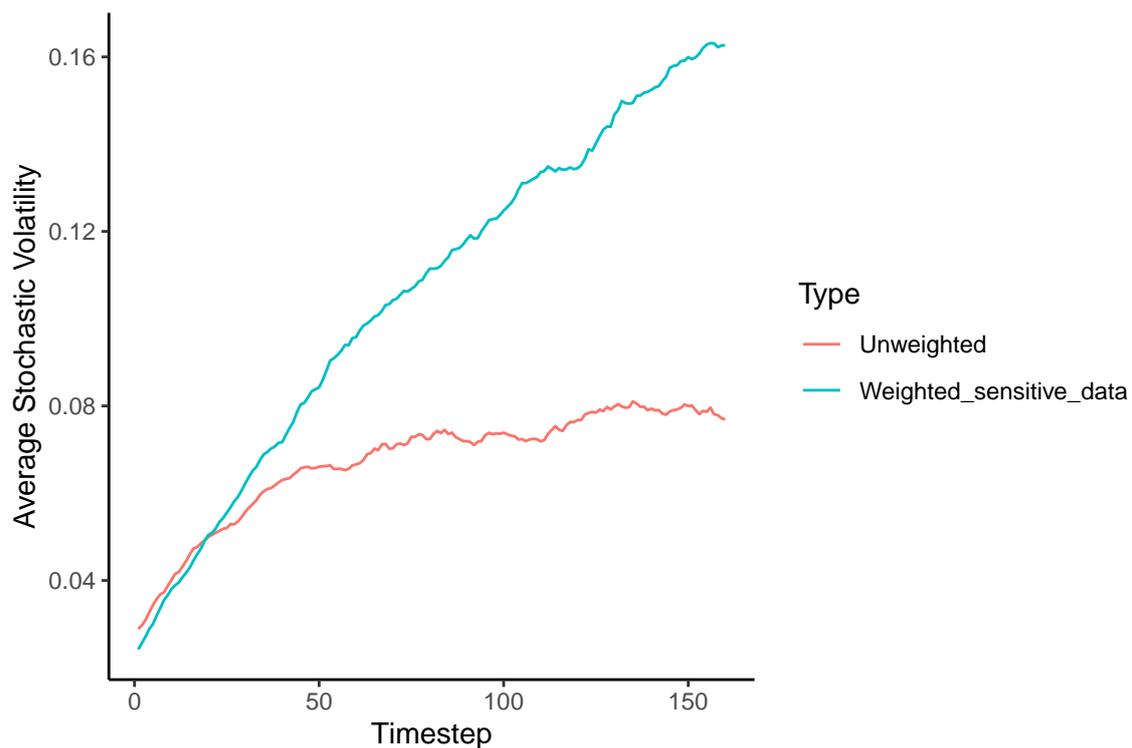


FIGURE 4 – Average stochastic volatility of equity prices for each projection step for the two types of calibration performed

Impact on the TVOG ⁴

The purpose of the ESG is to determine the TVOG. We compared the TVOG calculated from the two sets of 1,000 scenarios (1,000 scenarios without weighting and 1,000 scenarios with weighting of long maturities) to assess the concrete impact of calibrating by weighting the most relevant data. The following table presents the results obtained :

Unweighted TVOG	Weighted TVOG	Δ TVOG
12 980 096 €	13 421 831 €	3,40%

TABLE 6 – Variation in TVOG following calibration by weighting the most relevant data

The optionality is more likely to be exercised for longer maturities, as that's where the liabilities are most significant. With the average duration of the liabilities being 20 years, the crucial volatility to calibrate is the one corresponding to a 20-year period. Therefore, if, following the weighting, this volatility becomes higher, as is currently the case, the value of the option associated with the guaranteed minimum death benefit will also be higher. By extension, the increase in volatility, which measures the potential variation in asset prices, leads to an increase in the TVOG and consequently in the Best Estimate.

Thus, by assigning a higher weight to data from longer maturities, there is an observed increase of 3.4% in TVOG.

4. The TVOG (Time Value of Options and Guarantees) is obtained by subtracting the stochastic Best Estimate from the deterministic Best Estimate and reflects the value of the uncertainty associated with the obligations undertaken by an life insurance company towards its policyholders.

Furthermore, although the 3.4% increase in TVOG may seem significant from the perspective of an insurance company, from the reinsurer's point of view, this impact remains reasonable. It is important to recall that Partner Re reinsures the guaranteed minimum death benefit on the unit-linked product. The reinsurer's commitment associated with this guarantee is closely tied to the performance of the funds included in the unit-linked support. These funds are diversified and include a mix of currency, bond, and equity indices. Since the funds are primarily invested in equity indices (45% on average as of 03/31/2023) and equities are considered the riskiest asset class, such an increase in equity volatility can lead to this impact on TVOG.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude envers mon directeur de mémoire, Florian Thomas-Laglayse, pour sa disponibilité, sa bienveillance et son assistance précieuse tout au long de mon alternance. Ses conseils et son expertise ont été essentiels à la réalisation de ce mémoire.

Je souhaite également exprimer ma gratitude envers l'équipe pédagogique du DUAS, en particulier envers mon tuteur académique, M. Areski Cousin, pour l'attention portée à mon travail.

C'est également l'occasion pour moi de témoigner ma reconnaissance envers toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin au bon déroulement de mon alternance et de la rédaction de ce mémoire. Mes pensées vont particulièrement à M. Ulrich Kokou pour son regard critique et ses remarques pertinentes et à M. Toyasso Tala pour sa bonne humeur et son soutien.

Enfin, "*last but not least*", je souhaite chaleureusement remercier tous mes proches : un grand merci à eux pour leur patience et leurs encouragements. Un merci particulier à ma mère, Mme. Perpetue Nion, pour sa bienveillance et son soutien infaillible depuis le début de ma scolarité.

Table des matières

I	Contexte de l'étude	27
1	Périmètre de l'étude	28
1.1	Présentation du portefeuille	28
1.2	Assurance vie : généralités	30
1.3	La garantie plancher en cas de décès	31
1.3.1	La réassurance des garanties plancher	31
1.3.2	Provisionnement de la garantie plancher	33
1.4	Contexte réglementaire	33
1.4.1	Bilan prudentiel	34
1.4.2	Provisions techniques	34
1.5	Le modèle de gestion actif-passif	36
1.5.1	Modélisation de l'actif	36
1.5.2	Modélisation du passif	37
1.6	Les générateurs de scénarios économiques	38
1.6.1	Simulations via Monte-Carlo	39
1.6.2	Contraintes	40
1.6.3	Cadres de projection	40
II	Méthode de génération des scénarios	42
2	Concepts mathématiques et financiers	43
2.1	Concepts financiers	43
2.1.1	Obligation zéro-coupon	43
2.1.2	Taux zéro-coupon	43
2.1.3	Taux court	44
2.1.4	Taux <i>forward</i>	44
2.1.5	Déflateur	44
2.1.6	<i>Strike</i>	44
2.1.7	<i>Call</i>	45
2.1.8	<i>Put</i>	45
2.1.9	Parité call-put	45
2.2	Concepts mathématiques	46
2.2.1	Loi forte des grands nombres	46
2.2.2	Théorème central limite	46
2.2.3	Discrétisation d'Euler-Maruyama	47
2.2.4	Discrétisation de Milstein	48
2.2.5	Martingales	50
2.2.6	Probabilité risque-neutre	50

3	Les étapes de génération des scénarios	51
3.1	La phase Marché	51
3.1.1	Modélisation des taux d'intérêt nominaux	51
3.1.2	Modélisation de l'indice action	53
3.1.3	Modélisation de l'indice obligataire	54
3.1.4	Corrélations	54
3.2	La phase Simulation	54
3.3	La phase Calibrage	57
3.4	Résultats	62
3.4.1	Résultats du calibrage	62
3.4.2	Choix des paramètres optimaux	68
4	Validation du modèle action	74
4.1	Test de Martingalité	75
4.1.1	Intervalles de confiance	75
4.1.2	Méthode de réduction de variance	76
4.1.3	Résultats du test de martingalité de l'indice action	77
4.1.4	Influence du nombre de scénarios	78
III	Calibrage du modèle action sur les données les plus pertinentes compte tenu du risque du réassureur	80
5	Calibrage de l'indice action par pondération de certaines données de marché	81
5.1	Détermination des données de calibrage pertinentes	82
5.2	Résultats et impact sur le BE	83
5.2.1	Résultats du calibrage	83
5.2.2	Impact sur la TVOG	84
5.3	Critique de la méthode	86
5.4	Validation du GSE créé	87
5.4.1	Test de martingalité	87
	Annexes	99
A	Autres concepts mathématiques et financiers	99
A.1	Mouvement brownien	99
A.2	Lemme d'Itô	99
A.3	L'algorithme de Gauss-Newton	100
A.4	L'algorithme de descente de gradient	100
B	Méthode de discrétisation IJK de Kahl et Jäckel	101
C	Extrait de code R	102
D	Interpolation par splines cubiques	104
D.1	Définition	104
D.2	Formulation Mathématique	104
D.3	Résultats de l'interpolation des taux <i>spots</i> par splines cubiques	105
E	Autres tableaux	107

Introduction

Depuis le 1er janvier 2016, la directive européenne Solvabilité II impose aux organismes d'assurance et de réassurance une nouvelle évaluation de leur bilan. La valorisation prudentielle du passif d'assurance implique le calcul de provisions techniques *Best Estimate*, représentant la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs, conformément à l'article R351-2 du Code des assurances.

De manière générale, on peut distinguer deux principaux types de supports pour les contrats d'épargne : les supports dits « en euros » et les supports « en unités de compte » (UC). Les premiers assurent aux souscripteurs, à leur échéance, un montant prédéterminé auquel s'ajoutent les participations aux bénéfices techniques et financiers. En revanche, les seconds garantissent des parts d'actifs. Ces actifs se présentent sous diverses formes telles que des Fonds Communs de Placement (FCP), des actions, des Sociétés Civiles de Placement Immobilier (SCPI), des Sociétés d'Investissement à Capital Variable (SICAV), etc. L'assuré a la possibilité de les choisir lors de ses versements, selon des règles variables déterminées par les spécificités du contrat.

Ces deux supports d'investissement se déclinent en différents types de contrats :

- Les contrats monosupport, dont l'épargne est exclusivement investie soit en fonds euros, soit en fonds UC,
- Les contrats multisupports, combinent à la fois des fonds euros et des unités de compte, offrant ainsi à l'assuré la liberté de réaliser des arbitrages entre ceux-ci tout au long du contrat. Ces contrats représentent la grande majorité des contrats d'assurance vie épargne.

Par ailleurs, de nombreuses garanties sont associées aux supports en unités de compte (UC) afin de les rendre plus attractifs. Bien que ces garanties soient exprimées en euros, elles représentent un risque pour l'assureur, qu'il convient d'évaluer et de provisionner de manière *Best Estimate*.

La garantie plancher en cas de décès dans un contrat multisupport garantit au bénéficiaire le versement d'un capital minimum préalablement défini contractuellement, indépendamment des fluctuations de la valeur de son épargne liées aux marchés. Du point de vue de la théorie des options, l'engagement de l'assureur au titre de cette garantie peut être assimilé à une option de vente détenue par le bénéficiaire vis-à-vis de la compagnie d'assurance.

La projection des flux de trésorerie entrants et sortants liés à la garantie plancher en cas de décès dans un contrat multisupport nécessite l'utilisation d'un modèle de gestion actif-passif. Ce modèle, basé sur des hypothèses prédictives, projette l'actif et le passif de la société d'assurance ainsi que les interactions significatives existant entre eux. De plus,

les flux de trésorerie futurs associés à cette garantie étant aléatoires et dépendant de l'évolution de certaines grandeurs financières, l'utilisation d'un outil de projection de scénarios financiers est indispensable afin d'obtenir cette valorisation *Best Estimate*.

Un générateur de scénarios économiques (GSE) est composé d'un ensemble de modèles destinés à projeter, sur une période définie, des quantités financières telles que le rendement des actions, des obligations ou les taux d'intérêts. Les variations possibles de ces facteurs de risque sont simulées à travers des scénarios aléatoires et alimentent le modèle de gestion actif-passif. De cette manière, ils permettent d'évaluer l'actif et le passif d'assurance sur l'ensemble de la durée de projection.

L'objet central de ce mémoire réside dans le calibrage de l'indice action au sein du GSE de Partner Re. En effet, Partner Re réassure la garantie plancher en cas de décès, laquelle, pour rappel, représente une option visant à compenser le risque de perte lié aux supports en unités de compte. L'engagement du réassureur est donc étroitement lié à l'évolution des indices associés aux fonds en unités de compte, notamment ceux liés au monétaire, à l'obligataire et aux actions. Étant donné que les fonds sont principalement composés d'actions (45 % en moyenne au 31/03/2023) et que cette classe d'actifs est la plus risquée, l'engagement du réassureur à l'égard de cette garantie est fortement influencé par les variations du fonds actions. Ainsi, l'impact du modèle d'action sur les trajectoires projetées et sur le *Best Estimate* du réassureur est considérable.

À ce jour, Partner Re utilise un GSE fourni par une entreprise externe, en l'occurrence Willis Towers Watson (WTW). Les rendements des actions au sein de ce GSE sont modélisés à l'aide du modèle de Heston (1993, Heston), une extension du modèle de Black-Scholes. Contrairement à son prédécesseur, le modèle de Heston intègre un processus de volatilité stochastique qui permet de reproduire le *smile* de volatilité.

Cependant, les modèles d'actions à volatilité stochastique, tels que celui de Heston, engendrent généralement des erreurs de modèle en raison de l'utilisation de discrétisations trop grossières, ce qui peut affecter la précision du GSE. Dans cette optique, nous entreprendrons un calibrage du modèle de Heston, en utilisant des données de marché annuelles, à savoir des prix d'options sur l'indice *Euro Stoxx 50* datant du 31/03/2023, suivi d'une simulation de 1 000 scénarios stochastiques risque neutre afin d'évaluer le biais de discrétisation. Par la suite, les tests de validation du GSE tels qu'imposés par le régulateur, notamment le test de *market consistency* et le test de martingalité seront effectués sur l'indice action afin de garantir la qualité des scénarios utilisés pour le calcul du *Best Estimate*.

En outre, le régulateur enjoint les organismes d'assurance à réaliser des tests et sensibilités sur le GSE afin de garantir la robustesse de celui-ci comme requis par la Notice 5.15 (ACPR, 2015). Ces tests de sensibilité peuvent notamment porter sur le choix des modèles ou des données de calibrage. Dans ce contexte, des hypothèses de pondération visant à classer les données de calibrage en fonction de leur importance relative sont généralement utilisées afin de calibrer plus fidèlement les modèles constitutifs du GSE. Ceux-ci doivent être calibrés sur les données les plus pertinentes compte tenu des caractéristiques des engagements de l'assureur, notamment en termes de durée (ACPR, 2020). A cet effet, nous procéderons au calibrage du modèle de Heston en appliquant ces hypothèses de pondération sur des données de calibrage dûment sélectionnées, puis nous nous intéresserons à la validation du GSE ainsi créé à travers les tests de *market consistency*, enfin nous

évaluerons l'impact de ce calibrage sur l'engagement de l'assureur.

Ainsi, la structure de ce mémoire se décompose comme suit :

La première partie présentera la garantie plancher en cas de décès et exposera les notions essentielles de la directive Solvabilité II, ainsi que l'importance du générateur de scénarios économiques et de son interaction avec le modèle de gestion actif-passif pour valoriser l'option à sa juste valeur. Dans une deuxième partie, les fondements théoriques sur lesquels reposent l'ensemble des travaux réalisés seront introduits, puis la procédure de calibrage de l'indice action au sein du GSE et l'analyse de la précision du modèle seront étudiées. La méthode de calibrage du modèle de Heston par pondération de certaines données de marché sera détaillée dans une troisième partie. Celle-ci traitera notamment du choix des données à pondérer, de la validation du GSE résultant, ainsi que de l'impact de cette méthode sur l'engagement du réassureur au 31/03/2023.

Première partie

Contexte de l'étude

Ce mémoire vise à effectuer une revue du calibrage du modèle de projection de l'indice action, dont l'impact sera évalué au sein du périmètre *GMDB*. Étant donné que le produit *GMDB* peut être assimilé à une option de vente détenue par le bénéficiaire vis-à-vis de l'assureur, une approche traditionnelle de valorisation serait l'utilisation de la formule de Black-Scholes. Cette méthode, bien que déterministe, permet de déterminer des prix d'options de vente. Cependant, afin d'être en conformité avec les exigences réglementaires liées à Solvabilité II, une approche plus granulaire est nécessaire pour valoriser le produit à sa juste valeur. La méthode choisie est l'approche économique par Monte Carlo, qui implique l'utilisation de scénarios économiques qui doivent être conformes aux exigences réglementaires.

Cette première partie présente le produit *GMDB*, le cadre réglementaire sous-jacent à cette étude, ainsi que l'importance du générateur de scénarios économiques et son interaction avec le modèle de gestion actif-passif pour valoriser l'option à sa juste valeur.

Chapitre 1

Périmètre de l'étude

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre du calibrage de l'indice action au sein du GSE utilisé par l'équipe *GMDB* (*Guaranteed Minimum Death Benefits* pour garantie plancher en cas de décès). Seuls les contrats multisupports comprenant une garantie plancher en cas de décès réassurée auprès de Partner Re entrent dans le champ d'application de ce mémoire.

1.1 Présentation du portefeuille

La garantie plancher est une option visant à compenser le risque de perte des supports en unités de compte (UC). Celle en cas de décès prévoit le versement d'un capital minimal en cas de décès de l'assuré, quelles que soient les fluctuations de son épargne liées aux marchés. Ce montant minimal correspond aux primes investies accumulées sur la période de couverture, nettes des éventuels retraits effectués par l'assuré. Partner Re réassure la différence positive entre le capital minimal en cas de décès (souvent équivalent à 100% des primes investies) et la valeur actuelle des fonds. Les fonds se répartissent en deux types principaux : le fond sans risque (lié à l'euro) et le fond UC. Alors que pour le fond euro, le risque de marché est entièrement supporté par la cédante et n'est pas cédé au réassureur, le second est investi dans des fonds sous-jacents gérés par des gestionnaires d'actifs et est exposé au risque de marché intégralement porté par l'assuré.

La somme sous risque¹ du point de vue de Partner Re dépend de la performance des fonds sous-jacents et est comparable au *pay off* d'une option de vente.

L'exemple suivant illustre le mécanisme de la *GMDB*. Soit un assuré qui verse une prime unique de 1 000 euros (nette des frais) dans un contrat en UC doté d'une *GMDB* garantissant le remboursement de la prime. Nous supposons que l'assuré ne procédera à aucun rachat ni versement supplémentaire et que la performance de l'épargne suivra la trajectoire indiquée dans le graphique ci-dessous :

1. La somme sous risque dans le contexte de la garantie plancher en cas de décès correspond à la moins-value potentielle du contrat. Il s'agit de la différence entre la somme des primes investies (nettes des éventuels retraits, avances, intérêts non remboursés et frais associés), et la valeur de rachat actuelle du contrat (i.e la valeur de l'épargne).

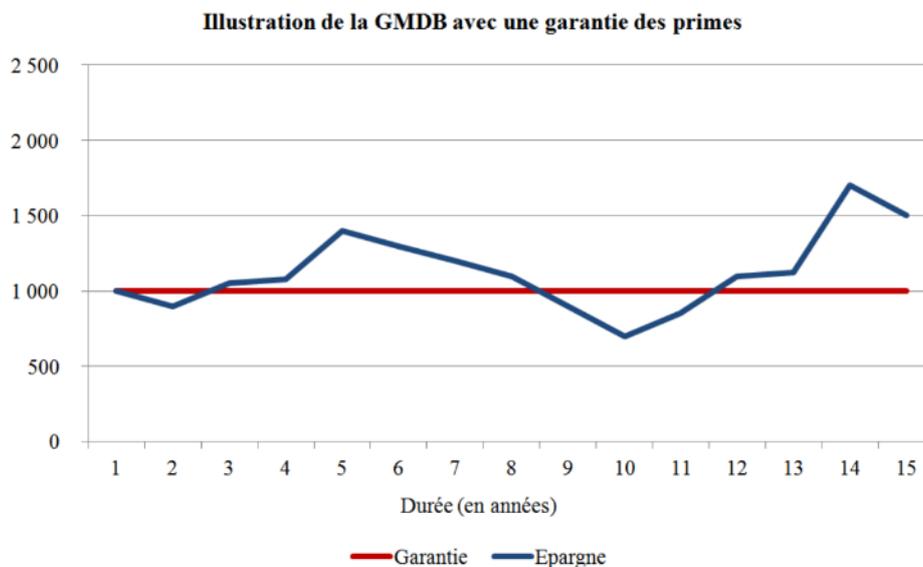


FIGURE 1.1 – Fonctionnement de la *GMDB*

Selon le graphique ci-dessus, en cas de décès de l'assuré à la fin de la 5e année du contrat, l'assureur versera au(x) bénéficiaire(s) un capital de 1 400 euros, correspondant à la valeur de l'épargne à cette date, puisque cette valeur excède le capital minimum garanti de 1 000 euros (la prime). En revanche, si l'assuré décède à la fin de la 10e année, la valeur de l'épargne (700 euros) est inférieure au capital minimum garanti. Dans ce cas, l'assureur compensera la différence (300 euros) en puisant dans ses propres fonds, assurant ainsi le versement des 1 000 euros garantis au(x) bénéficiaire(s).

Le portefeuille de Partner Re est concentré sur le marché français et se compose d'une vingtaine de traités avec 19 cédantes au 31/12/2022. Les données tête à tête sont fournies par chaque cédante à chaque date de clôture. Voici quelques caractéristiques du portefeuille au 31/03/2023 :

- 3 millions de polices dont l'âge moyen est de 61.3 ans,
- Plus de 68 Md€ de primes investies pour 75 Md€ de valeur de fond en moyenne,
- 71% sur le fond euro et 29% sur le fond UC (l'hypothèse d'*asset mix* est de 26% pour le *cash*, 29% pour l'indice obligataire et 45% pour les actions).

Le risque couvert englobe une combinaison de risques, comprenant à la fois un risque de marché et de mortalité, ainsi qu'un risque supplémentaire associé au comportement de l'assuré, qui peut choisir d'effectuer des rachats ou des modifications de fonds.

La valorisation de la garantie plancher en cas de décès sous la norme Solvabilité II nécessite des projections stochastiques risque neutre. Les classes d'actifs modélisées et projetées au sein du GSE utilisé sont les actions, l'indice obligataire et l'indice monétaire (le *cash*).

1.2 Assurance vie : généralités

En deuxième position derrière le livret A, l'assurance vie demeure l'un des placements financiers les plus prisés des ménages français (INSEE, 2022 [12]). Ce contrat d'épargne offre à son souscripteur la possibilité de constituer un capital au fil du temps tout en bénéficiant d'une fiscalité avantageuse à l'échéance. Les primes versées sont investies par l'assureur sur les marchés financiers. La rémunération des contrats s'opère à la fois par le versement d'intérêts sur le capital placé et par le mécanisme de participation aux bénéfices, comme spécifié à l'article A.132-11 du Code des assurances.

Les contrats d'assurance vie se distinguent notamment par leurs supports d'investissement :

- Les supports en euros garantissent à leur souscripteur l'intégralité du capital accumulé. À leur échéance, ces supports offrent aux assurés un montant fixe, auquel s'ajoutent les participations aux bénéfices techniques et financiers. La garantie en capital représente l'attrait principal de ce type de contrat. Les primes versées sont principalement investies dans des classes d'actifs relativement peu risquées, telles que les emprunts d'État, les Bons du Trésor (Obligations Assimilables du Trésor), ou des obligations,
- Les supports en unités de compte (UC) ne garantissent pas aux souscripteurs de récupérer le capital investi. Contrairement au support en euros, la valeur de l'épargne est exprimée en unités de compte. Le contrat assure à son détenteur un nombre d'UC ou des parts d'actifs, converti en euros à la date d'échéance du contrat. Le montant versé dépend donc de la valeur de l'unité de compte à la fin du contrat. Bien que ce support d'investissement soit plus risqué, il offre en contrepartie un rendement espéré supérieur au fonds euros. Les primes versées sont principalement investies dans des actions cotées en bourse, des SICAV (Société d'Investissement à Capital Variable), des FCP (Fonds Communs de Placement), etc. Dans ce support, l'assureur ne supporte aucun risque financier.

Ces deux supports d'investissement se déclinent en différents types de contrats :

- Les contrats monosupport, dont l'épargne est exclusivement investie soit en fonds euros, soit en fonds UC,
- Les contrats multisupports combinent à la fois des fonds euros et des unités de compte, offrant ainsi à l'assuré la liberté de réaliser des arbitrages entre ceux-ci tout au long du contrat. Ces contrats représentent la grande majorité des contrats d'assurance vie épargne.

Les contrats d'épargne comprennent des garanties spécifiques et des options dont peut user l'assuré :

- L'option de rachat, définie à l'article L132-21 du Code des assurances, donne à l'assuré le droit de récupérer une partie ou la totalité de l'épargne capitalisée avant la fin du contrat. Le calcul de la valeur de rachat est réglementé par le Code des assurances et doit être communiqué à l'assuré chaque année,

- Le taux minimum garanti, ou TMG, conformément à l'Article 132-3 du Code des assurances, est le taux de rendement minimal dont bénéficie l'assuré sur son épargne, s'il est stipulé dans les conditions générales du contrat. Il représente un risque additionnel porté par l'assureur, particulièrement notable dans le contexte de taux bas de ces précédentes années. En effet, en cas de baisse des taux, les rendements des actifs sur les marchés financiers peuvent ne plus être suffisants pour honorer cette garantie de rémunération. Dans ce cas, le résultat ou les fonds propres de l'assureur sont mobilisés pour servir le taux minimum garanti,
- Le mécanisme de participation aux bénéfices confère à l'assuré le droit de bénéficier des résultats générés par le placement de ses primes. Conformément à l'article A.132-11 du Code des assurances, les assureurs sont tenus de reverser au moins 85% de leurs résultats financiers et 90% de leurs résultats techniques. Cette redistribution aux assurés peut être immédiate ou différée, dans la limite d'un délai maximal de 8 ans. L'assureur peut alors affecter le montant de la participation aux bénéfices à une provision pour participation aux excédents (PPE),
- La garantie plancher est une option visant à compenser le risque de perte des supports en unités de compte. Elle est conçue, dans le cadre de contrats multisupports, pour assurer le versement d'un capital minimal au bénéficiaire en cas de décès (ou de survie) de l'assuré.

1.3 La garantie plancher en cas de décès

La garantie plancher en cas de décès dans un contrat en unités de compte assure au bénéficiaire le versement d'un capital minimum préalablement fixé contractuellement, indépendamment des fluctuations de son épargne liées aux mouvements de la bourse. Du point de vue de la théorie des options, l'engagement de l'assureur au titre de cette garantie peut être assimilé au *pay off* d'une option de vente détenue par le bénéficiaire envers la compagnie d'assurance. Dans ce contexte, le prix d'exercice (*strike*) est déterminé par les primes investies, et la date d'exercice correspond à la date de décès de l'assuré. La valeur du sous-jacent à la date d'expiration équivaut à la valeur des fonds investis sur le marché.

Le prix théorique d'un *put* européen, qui accorde le droit de vendre l'actif S , à la valeur K , en date T , est défini par son *pay off* : $(K - S_T)^+ = \max(K - S_T; 0)$.

Ainsi, l'assureur est en risque lorsque les primes investies excèdent la valeur des fonds.

1.3.1 La réassurance des garanties plancher

Le succès des contrats en unités de compte remonte au début de la deuxième moitié des années 90, une période marquée par la hausse des marchés financiers. À cette époque, le risque associé à la garantie plancher a souvent été sous-estimé. Les compagnies d'assurance n'avaient pas encore mis en place de méthodes de tarification ni de provisionnement, car le risque de baisse significative des marchés financiers était perçu comme faible à ce moment-là.

Les turbulences de 2001, marquées par la baisse d'environ 60 % du CAC 40, ont non seulement sensibilisé les investisseurs au risque associé à ce type de placements, mais ont

également totalement transformé l'approche des compagnies d'assurance en matière de gestion de ce risque.

Depuis ces événements, les sociétés d'assurance ont mis en œuvre des méthodes de tarification et de provisionnement qui ont naturellement des répercussions sur la gestion actif-passif de ce type de risque.

Le risque lié aux garanties plancher s'analyse de manière très différente selon que la tarification est effectuée a priori ou a posteriori.

Dans le cadre de la tarification a posteriori, l'assureur prélève périodiquement sur la provision mathématique de l'assuré le montant du capital sous risque multiplié par la probabilité de décès de l'assuré. Ce mode de tarification s'adapte ainsi à l'évolution du risque.

Dans le cadre de la tarification a priori, l'assureur prélève périodiquement une proportion fixe de la provision mathématique. Contrairement à la tarification a posteriori, ce mode de tarification ne s'adapte pas automatiquement au risque. Par conséquent, il est nécessaire de réaliser un provisionnement adéquat ou de mettre en place une stratégie de couverture afin d'anticiper et de gérer les éventuelles variations du risque au fil du temps.

De ce fait, les compagnies d'assurances ne souhaitant pas conserver le risque ou mettre en place des solutions de couverture (*hedging*) comme c'est souvent le cas pour d'autres types de produits *variable annuities*, optent pour la réassurance en quote-part suivant deux options liées à la tarification :

La réassurance a posteriori : la composante financière du risque est reflétée par la tarification. En effet, la prime de réassurance régulièrement payée par la compagnie d'assurance est directement liée aux moins-values réassurées (sommes sous risque). Ainsi, cette prime s'ajuste en fonction du risque financier, qui est déterminé par la probabilité de décès multipliée par les sommes sous risque. Dans ce contexte, la composante du risque liée aux variations financières est gérée dynamiquement à travers la tarification, et la seule composante résiduelle du risque est celle associée au décès.

La réassurance a priori : la compagnie d'assurance verse également de manière régulière une prime de réassurance. Contrairement à la réassurance a posteriori, le taux de cette prime est fixé indépendamment de l'âge de l'assuré et ne varie pas en fonction du niveau de risque financier à chaque date, notamment en lien avec l'évolution des sommes sous risque. En d'autres termes, le montant de la prime de réassurance est déterminé à l'avance et reste constant sur la durée du contrat, indépendamment des évolutions du risque financier.

La différence principale entre les deux approches réside dans le traitement des provisions. Dans le cas de la réassurance a posteriori, il n'est pas nécessaire de calculer des provisions prospectives, mais des provisions pour sinistres à payer. En effet, la prime versée régulièrement par la compagnie d'assurance est directement liée au risque financier, et elle s'ajuste en fonction de l'évolution des marchés financiers. Ainsi, cette approche permet de refléter dynamiquement le risque financier, et les provisions sont ajustées en conséquence au fil du temps. En revanche, dans le cas de la réassurance a priori, le montant de la prime de réassurance est fixé à l'avance et ne dépend pas des évolutions du risque financier. Cela signifie que les provisions prospectives doivent être calculées de manière plus prédictive,

car la prime de réassurance reste constante indépendamment des changements potentiels du risque financier.

Partner Re détient en portefeuille une vingtaine de traités type a priori, impliquant 19 cédantes (liste au 31/12/2022). Ces traités sont concentrés sur le marché français.

1.3.2 Provisionnement de la garantie plancher

Les provisions techniques sont définies dans Solvabilité II comme la somme de la meilleure estimation des engagements et de la marge de risque. L'article R.351-2 du code des assurances définit la meilleure estimation comme la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs compte tenu de la valeur temporelle de l'argent estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente, soit la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs.

L'article R351-10 du code des assurances prévoit que les entreprises d'assurance et de réassurance tiennent compte de la valeur des garanties financières et de toute option incluse dans leurs contrats lorsqu'elles calculent leurs provisions techniques prudentielles au sens de l'article L. 351-2 du même code.

Par ailleurs, le considérant 15 du règlement délégué précise que pour certains contrats d'assurance vie, notamment ceux qui donnent lieu à des prestations discrétionnaires dépendant de rendements d'investissements ou qui comportent des garanties financières et des options contractuelles, les méthodes par simulation sont susceptibles de produire un calcul plus approprié de la meilleure estimation.

De fait, la valorisation de la garantie plancher sous solvabilité II nécessite l'utilisation d'un GSE. Le GSE utilisé par Partner Re est le GSE Star RN (RN pour *Risk Neutral*) fourni par Willis Towers Watson (WTW).

Elle nécessite également des hypothèses non économiques notamment des hypothèses de mortalité, de rachats et de versements supplémentaires.

Les rachats et les versements supplémentaires (*top-ups*) sont modélisés en fonction de l'âge et de la durée de couverture de la police. Les taux de rachats et de versements supplémentaires par cédante et par durée de couverture sont d'abord calculés, ensuite un facteur d'ajustement dépendant de l'âge est appliqué.

Ces hypothèses servent à alimenter le modèle de gestion actif-passif (*ALM*, Asset and Liability Management). Le modèle *ALM* utilisé chez Partner Re est *RAF*M (RiskAgility Financial Modeller), il est également fourni par Willis Towers Watson.

1.4 Contexte réglementaire

La modélisation d'actifs financiers au sein d'un générateur de scénarios économiques s'inscrit dans le contexte réglementaire de Solvabilité II. Cette section rappelle les notions essentielles de la norme qui seront abordées dans ce mémoire.

S'inspirant de la structure de la norme bancaire Bâle II, la directive s'articule autour de trois piliers :

- Le pilier I définit les exigences quantitatives applicables à l'assureur. Son but est d'évaluer la capacité de l'organisme d'assurance à honorer ses engagements envers les assurés en détenant suffisamment de fonds propres, et de calculer au plus juste les engagements de l'assureur,
- Le Pilier II de Solvabilité II établit des exigences qualitatives de gouvernance des risques en instaurant un système de gestion des risques. Celui-ci est central dans l'identification, la quantification et le pilotage des risques auxquels est exposé l'organisme d'assurance,
- Le pilier III impose des contraintes de communication envers le superviseur ainsi que des obligations de transparence envers le public.

Le calibrage du modèle d'actions au sein du GSE s'inscrit dans le cadre du pilier I de la norme Solvabilité II.

1.4.1 Bilan prudentiel

La directive nécessite l'établissement d'un nouveau bilan afin d'évaluer la richesse des organismes d'assurance au plus proche de la réalité.

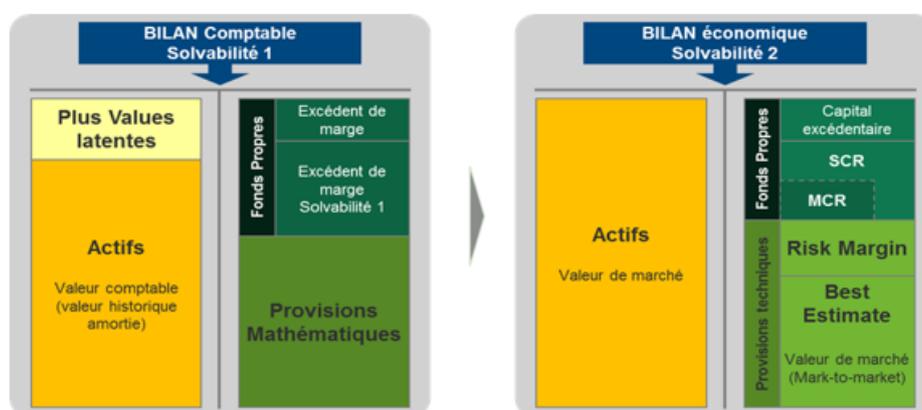


FIGURE 1.2 – Comparaison du bilan comptable sous Solvabilité I au bilan économique sous Solvabilité II

La perspective économique imposée par Solvabilité II diffère de l'approche sociale comptable. En effet, les actifs et les passifs sont évalués « au montant pour lequel ils pourraient être échangés (pour des actifs) ou transférés ou réglés (pour des passifs) dans le cadre d'une transaction conclue, dans des conditions de concurrence normales, entre des parties informées et consentantes » (considérant 7 du règlement délégué [15]). Dans cette situation, l'actif de l'entreprise n'est plus évalué en valeur d'acquisition, mais en valeur de marché. De plus, l'évaluation du passif nécessite le calcul de provisions techniques *Best Estimate*.

1.4.2 Provisions techniques

L'article R.351-2 du Code des assurances définit les provisions techniques comme la somme des provisions *Best Estimate* et de la marge de risque.

La meilleure estimation, ou *Best Estimate*, correspond à la somme des valeurs actualisées et probabilisées des flux de trésorerie futurs jusqu'à l'extinction des engagements de l'assureur. La courbe des taux utilisée lors de l'actualisation est la courbe des taux sans risque fournie par l'EIOPA². L'expression mathématique du *Best Estimate* est la suivante :

$$BE = \mathbb{E} \left[\sum_{t>0}^T D(0, t) \cdot CF_t \right]$$

Avec :

- $D(0, t)$ le facteur d'actualisation entre les dates 0 et t . Il s'agit d'une variable aléatoire dont l'espérance doit coïncider avec la valeur des prix zéro-coupon de la courbe EIOPA,
- T l'horizon de projection des engagements de l'assureur,
- CF_t la valeur des flux de trésorerie en date t .

Par conséquent, l'objectif n'est pas tant de déterminer la valeur exacte du *Best Estimate*, mais plutôt de s'en approcher à l'aide d'un estimateur pertinent.

Le calcul des engagements du réassureur au titre de la garantie plancher nécessite de modéliser à la fois le comportement des assurés (rachats, décès, arbitrages entre les différents fonds) et les évolutions des marchés financiers. De plus, l'engagement du réassureur étant dépendant des conditions de marché, son évaluation implique l'utilisation de méthodes par simulations stochastiques pour le calcul des provisions techniques (considérant 15 du règlement délégué [15]). Le *Best Estimate* est ainsi calculé comme l'engagement moyen de l'assureur sur un grand nombre de scénarios économiques.

Le BE se décompose en BE déterministe (calculé à partir d'un scénario déterministe) et en BE stochastique (calculé à partir de N scénarios stochastiques).

La méthode stochastique permet de capter l'asymétrie du caractère optionnel de l'engagement en prenant en compte un ensemble de scénarios, allant des plus favorables au plus défavorables.

La méthode de Monte-Carlo est utilisée pour le calcul du BE stochastique :

$$BE_{Stochastique} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N BE_i$$

La modélisation stochastique permet d'évaluer la valeur temps des options et garanties (*TVOG* pour *Time Value of Options and Guarantees*). Elle s'obtient par différence entre le BE stochastique et le BE déterministe. Elle reflète la valeur de l'incertitude des obligations prises par une compagnie d'assurance-vie envers ses assurés.

De fait, le GSE doit faire l'objet d'une attention particulière et être traité comme une hypothèse clé.

2. L'EIOPA, pour European Insurance and Occupational Pensions Authority, est l'autorité européenne de surveillance des assurances et des pensions professionnelles.

Enfin, la marge de risque correspond au montant additionnel au *Best Estimate* qu'exigerait un acquéreur pour reprendre les engagements d'assurance. Elle représente ainsi une marge de prudence garantissant que les provisions techniques reflètent bien la valeur de transfert des engagements. La marge de risque se calcule de la façon suivante (article 37 du règlement délégué) :

$$RM = CoC \sum_{t \geq 0} \frac{SCR(t)}{(1 + R(0, t + 1))^{t+1}}$$

Avec :

- t l'instant de projection considéré,
- $R(0, t + 1)$ le taux d'intérêt sans risque entre les dates 0 et $t + 1$,
- $SCR(t)$ le capital de solvabilité requis en date t ,
- CoC le coût du capital.

1.5 Le modèle de gestion actif-passif

Indispensable au calcul du *Best Estimate*, le modèle de gestion actif-passif (ou *ALM*) projette les flux inhérents aux contrats d'assurance vie et estime l'évolution future des comptes de la société. Il représente, à partir de prévisions, l'actif et le passif de la société d'assurance ainsi que les interactions entre ceux-ci. Le modèle *ALM* utilisé par Partner Re est fourni par WTW et est développé en langage C++.

1.5.1 Modélisation de l'actif

Le GSE doit permettre de modéliser les différents types d'actifs détenus par l'organisme. Les facteurs de risque modélisés sont donc fonction de son profil de risque et doivent permettre de refléter les différentes sources de volatilité auxquelles l'organisme est exposé. Trois classes d'actifs sont ainsi modélisées au sein du GSE utilisé pour la valorisation de la garantie plancher chez Partner Re. Ce sont les actions, les obligations et l'indice monétaire.

Les rendements de l'indice monétaire sont modélisés à l'aide du même modèle que le taux d'intérêt nominal, le *shifted Stochastic Alpha Beta Rho LIBOR Market Model* (shifted SABR LMM). Ce modèle, basé sur les travaux de Rebonato, Mackay et White (2009), combine le modèle de marché LIBOR (LMM, également appelé modèle BGM d'après Brace, Gatarek, Musiela (1997)) et le modèle SABR. Il génère des taux LIBOR *forward* de distribution log-normale, décalée d'un facteur de déplacement δ afin de simuler des taux négatifs, tout en respectant une valeur plancher δ . De plus, il intègre une volatilité stochastique, permettant de modéliser de manière réaliste les surfaces de volatilité implicite de différents instruments financiers.

Les rendements des actions sont modélisés à l'aide d'un modèle à volatilité stochastique de Heston tel que décrit dans Gatheral (2006). Ce modèle est une extension du modèle Black-Scholes. Par rapport à son prédécesseur plus simple et à d'autres modèles similaires, il possède un processus de volatilité distinct qui présente une corrélation non nulle avec le processus de rendement des actions. Ses paramètres sont sélectionnés de manière à minimiser les différences entre les prix des options du marché et les prix des options du modèle. A cet effet, la solution fermée de l'équation de Heston pour les prix d'options *Vanilla*, telle

que décrite dans l'article original de Heston, est utilisée.

La revue du calibrage du modèle de Heston constitue l'objet central de ce mémoire. Le processus de calibrage sera détaillé dans la seconde section.

L'indice obligataire est modélisé quant à lui comme une obligation d'état de maturité 10 ans, avec des taux de coupons fixés à 5% et réinvestis annuellement.

1.5.2 Modélisation du passif

L'information relative au passif est régulièrement fournie par la cédante sous forme de bordereaux. Ils contiennent les données tête à tête nécessaires à la valorisation du produit telles que la date de souscription, la durée de couverture, l'âge, le sexe, la prime investie, la valeur du fond euro, la valeur du fond UC, etc.

À chaque réception de nouveaux bordereaux, diverses validations sont effectuées, comprenant notamment la comparaison des primes investies, du nombre de polices, des sommes sous risque, etc, par rapport aux anciens bordereaux.

Il est à noter qu'il existe un décalage entre la date d'arrêté du portefeuille envoyé par la cédante et la date de calcul des provisions. Ce décalage est souvent entre un trimestre et une année car la fréquence de réception des bordereaux est annuelle dans la plupart des traités, alors que les clôtures se font de façon trimestrielle. Entre-temps, les assurés ont vieilli, la part investie sur le fonds euro a augmenté, et le fonds UC a fluctué avec les marchés financiers. Afin de refléter ces évolutions sur la période manquante, les ajustements suivants sont effectués :

- Ajustement de l'âge et de la durée de couverture afin de supprimer le décalage,
- Ajustement du nombre de polices via l'application d'un taux de chute constant afin de prendre en compte les décès et rachats de la période,
- Ajustement des fonds euro et UC.

Ensuite, les polices au sein de chaque cédante sont regroupées par *model point* suivant des critères d'agrégations pertinents tels que l'âge, l'année de souscription, la durée résiduelle du contrat, les primes investies, etc, afin de conserver les caractéristiques de risque initiales. À chaque *model point* est associée une valeur de provision mathématique, calculée à chaque pas de temps. Ces projections sont effectuées à l'aide du modèle *ALM RAFM* sur 160 trimestres.

L'engagement du réassureur au titre de la garantie plancher en cas de décès est comparable au *pay off* d'un *put* européen. Ainsi, le sinistre en cas de décès d'un assuré à l'instant t ayant investi G_t est égal à :

$$\max(G_t - FV_t; 0) , \text{ avec } FV_t \text{ la valeur du fond à la date d'expiration } t.$$

Sur un ensemble de N simulations de FV_t et G_t , notées respectivement $FV_{t,i}$ et $G_{t,i}$ avec $i = 1 \dots N$, la juste valeur de l'engagement du réassureur s'évalue de la manière suivante :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max(G_{t,i} - FV_{t,i}; 0) \cdot q_{x,t} \cdot e^{-rt}$$

Où $q_{x,t}$ représente la probabilité de décès à l'instant t de l'assuré d'âge x , et r le taux sans risque.

1.6 Les générateurs de scénarios économiques

La directive Solvabilité II impose aux entreprises d'assurance d'évaluer leurs engagements, y compris la garantie plancher en cas de décès, à leur juste valeur. Dans le cadre de cette évaluation *Best Estimate*, il est nécessaire de projeter les flux de trésorerie futurs associés à cette garantie, en les actualisant au taux sans risque. Cependant, la valeur économique de cette garantie, notamment le prix des options liées aux fluctuations du marché, n'est pas directement observable sur les marchés financiers. Cette valeur dépend toutefois des variations de ces marchés. Les générateurs de scénarios économiques jouent un rôle crucial en permettant d'estimer la valeur de cette garantie en se basant sur le prix d'autres instruments observés sur le marché.

Un « générateur de scénarios économiques » (GSE) est un ensemble de modèles conçus pour projeter, sur une période définie, des variables financières et économiques telles que le rendement des actions, le rendement immobilier, le spread de crédit, les taux d'intérêt ou encore l'inflation. Les variations potentielles de ces facteurs de risque sont modélisées à l'aide de scénarios aléatoires.

En pratique, le Générateur de Scénarios Économiques est initialisé pour reproduire les prix de marché de divers actifs financiers en utilisant la courbe des taux et les prix des instruments cotés (p.ex. calls ou puts pour les actions ; caps, floors ou swaptions pour les taux). En sortie, il génère un ensemble de N trajectoires d'évolution pour chaque variable modélisée, représentant autant de configurations possibles pour l'économie future. Ces trajectoires alimentent ensuite le modèle de projection actif-passif utilisé pour le calcul du *Best Estimate*.

Par exemple, les rendements des actions sont simulés à chaque instant de projection à l'aide d'un modèle stochastique. À partir d'un scénario économique donné, il est possible de projeter, à chaque pas de temps, l'ensemble des flux de trésorerie futurs associés à la garantie via le modèle *ALM*. La meilleure estimation est ensuite calculée en agrégeant toutes les trajectoires simulées, représentant ainsi l'engagement moyen de l'assureur sur N scénarios économiques futurs.

Par ailleurs, le GSE ainsi que les scénarios générés font l'objet de tests statistiques spécifiés dans la Notice ACPR 5.15 relative au calcul des provisions techniques. Ces tests ont pour objectif de s'assurer que le GSE est capable de simuler des prix d'actifs financiers cohérents avec ceux observés sur le marché.

Le schéma ci-dessous résume les interactions entre le GSE et le modèle *ALM*, ainsi que les tests imposés par la réglementation :

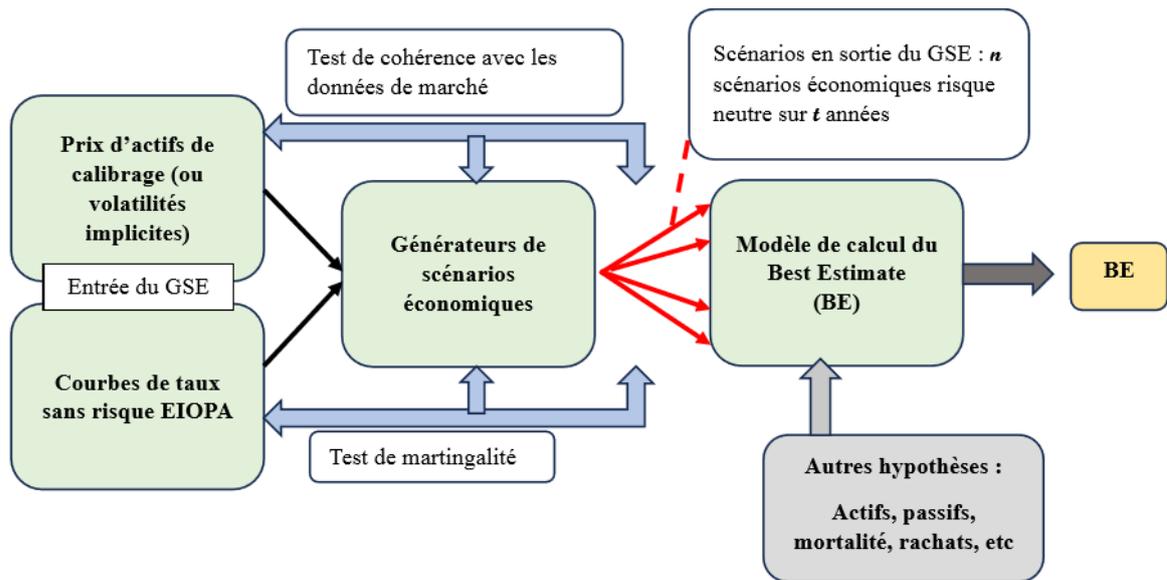


FIGURE 1.3 – Interactions entre le GSE et le modèle *ALM*

Le modèle d'action est l'un des constituants principaux du générateur de scénarios économiques utilisé au sein du périmètre *GMDB*. Puisque la garantie plancher vise à compenser le risque de perte des supports en unités de compte, l'engagement du réassureur associé à cette garantie dépend étroitement de l'évolution des fonds inclus dans le support en unités de compte. Ces fonds sont diversifiés et comprennent un mélange d'indice monétaire, d'indice obligataire et d'actions. Étant donné que les fonds sont principalement investis dans des indices actions (45% en moyenne au 31/03/2023) et que les actions sont considérées comme la classe d'actifs la plus risquée, il est essentiel de calibrer avec précision le modèle d'action dans le générateur de scénarios économiques. L'objectif est de reproduire de la manière la plus fidèle possible les variations de cet indice.

1.6.1 Simulations via Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est une technique de simulation employée pour évaluer le *Best Estimate*. Elle permet de calculer la valeur approchée d'une quantité d'intérêt à l'aide de simulations aléatoires.

La méthode de Monte-Carlo s'appuie sur la loi forte des grands nombres, qui énonce que pour tout échantillon X_1, \dots, X_N de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, toutes de même loi qu'une variable aléatoire X intégrable :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X]$$

Ainsi, en générant N scénarios économiques indépendants, dans lesquels une valeur du BE est calculée, il est possible de construire un estimateur sans biais pour le *Best Estimate* en utilisant la moyenne empirique.

Naturellement, plus le nombre de simulations est important, meilleure est la convergence de l'estimateur de Monte-Carlo. Dans sa revue intitulée « Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques », l'ACPR indique qu'un minimum de 1 000 scénarios est généralement nécessaire pour obtenir une précision convenable.

1.6.2 Contraintes

Le générateur de scénarios économiques doit répondre à diverses exigences réglementaires.

Conformément à l'article 22 §3 a. à c. du règlement délégué, les trois règles suivantes doivent être respectées :

- Le GSE doit être en adéquation avec la réalité des marchés financiers, répondant ainsi à l'exigence de *market consistency*. Cela implique que le modèle doit être capable de générer des prix d'actifs financiers en accord avec ceux effectivement constatés sur le marché,
- Il doit être élaboré en supposant l'absence d'opportunité d'arbitrage,
- Les scénarios de taux générés doivent être en cohérence avec la courbe des taux sans risque utilisée dans le calcul du *Best Estimate*.

D'autre part, la notice ACPR « Solvabilité II Provisions techniques » (2015) précise et complète les obligations mentionnées ci-dessus :

- Le GSE doit être calibré à l'aide de produits financiers provenant de marchés profonds, liquides et transparents. Ces instruments doivent être cohérents avec les caractéristiques des engagements de l'assureur,
- À l'issue des simulations, il est essentiel d'évaluer la précision, la robustesse et la cohérence du GSE. La précision peut être mesurée par l'écart de convergence généré par la méthode de Monte-Carlo. La robustesse du modèle peut être évaluée en effectuant des tests de sensibilité pour examiner la façon dont les résultats réagissent aux variations des hypothèses. En outre, des tests statistiques sont nécessaires pour valider la cohérence des scénarios générés avec la réalité.

1.6.3 Cadres de projection

Lors de la construction d'un GSE, deux cadres de modélisation s'opposent : les projections en monde réel et celles en univers risque-neutre. Ces cadres dépendent notamment de la mesure de probabilité utilisée.

Les projections en univers monde réel s'appuient sur des données historiques observées sur les marchés financiers. Les scénarios projetés reflètent ainsi l'évolution passée des variables d'intérêt et intègrent des primes de risque rémunérant l'incertitude supportée par les investisseurs. La prime de risque représente la différence entre le rendement de l'actif considéré et celui d'un placement sans risque. Les modèles en monde réel sont construits sous la probabilité historique. Cependant, ce cadre de modélisation nécessite une évaluation précise de la prime de risque attendue par les investisseurs. Cette approche est complexe et subjective, car les résultats varient en fonction de l'historique de données utilisé. Ces limitations justifient la mise en place d'un cadre de projection indépendant de la prime de risque.

L'univers risque-neutre est utilisé pour évaluer des engagements en supposant l'absence d'opportunité d'arbitrage. La mesure de probabilité utilisée pour valoriser les actifs est une

mesure fictive, équivalente à la probabilité historique et obtenue par changement de probabilité de Girsanov. L'existence et l'unicité de cette mesure de probabilité supposent la vérification d'hypothèses de marché. Sous la probabilité risque-neutre, tous les actifs ont un rendement espéré égal au taux sans risque, ce qui signifie qu'aucune prime de risque n'est incorporée dans le rendement des produits financiers. Le risque associé à chaque actif n'est plus inclus dans le rendement attendu, mais dans sa volatilité. Bien que l'univers risque-neutre n'ait pas de réalité économique ou financière, il permet de modéliser avec précision les quantités d'intérêt, à condition que les modèles utilisés soient correctement calibrés.

En raison des limites associées à l'univers monde réel et de la contrainte d'absence d'opportunité d'arbitrage imposée par la directive, le générateur de scénarios économiques étudié dans le cadre de ce mémoire est construit en univers risque-neutre.

Deuxième partie

Méthode de génération des scénarios

Compte tenu de son rôle crucial dans le calcul du *Best Estimate*, le GSE doit faire l'objet d'une attention particulière et être traité comme une hypothèse clé (ACPR, 2020). Les choix structurants relatifs au GSE, notamment les modalités de calibrage doivent être examinés avec le même soin que les autres hypothèses clés du calcul du BE.

Cependant, les modèles actions à volatilité stochastique, tels que celui de Heston utilisé chez Partner Re, peuvent engendrer des erreurs de modèle. Pour rappel, Partner Re utilise le GSE Star RN de WTW pour l'évaluation de la garantie plancher.

L'erreur de modèle correspond à l'erreur dans l'évaluation des provisions techniques due à l'utilisation de modèles inadaptés ou insuffisamment précis (ACPR, 2020).

Des sources d'erreur de modèle sont par exemple l'utilisation d'une discrétisation trop grossière ou des erreurs opérationnelles lors de la mise en œuvre des formules théoriques du modèle.

Cette partie du mémoire a pour vocation d'évaluer la précision du GSE à la suite du calibrage du modèle de Heston en utilisant des données de marché annuelles, à savoir des prix d'options sur l'indice *Euro Stoxx 50* datant du 31/03/2023, suivi d'une simulation de 1 000 scénarios stochastiques risque neutre.

Pour ce faire, nous commencerons par expliquer en détail les méthodes de calibrage et de simulation de l'indice action au sein du GSE Star RN.

Ensuite, nous présenterons les résultats de calibrage obtenus en calibrant le modèle sur des données de marchés annuelles au 31/03/2023, notamment les prix d'options sur l'indice *Euro Stoxx 50*.

Enfin, nous effectuerons les tests de *market consistency* et de martingalité, tels qu'imposés par le régulateur, afin de valider le GSE obtenu.

Chapitre 2

Concepts mathématiques et financiers

Les modèles de calibrage et de simulation des indices actions font appel à des concepts financiers et mathématiques fondamentaux. Ils sont exposés dans ce chapitre.

2.1 Concepts financiers

2.1.1 Obligation zéro-coupon

Une obligation zéro-coupon de maturité T est un actif financier versant un flux unique d'une unité monétaire à la date T . Elle ne verse donc aucun coupon intermédiaire. Son prix en date t est communément nommé le zéro-coupon $ZCB(t, T)$, et $ZCB(T, T) = 1$.

2.1.2 Taux zéro-coupon

Le taux spot ou taux zéro-coupon $R(t, T)$ est le taux de rendement actuariel en date t de l'obligation zéro-coupon de maturité T . Autrement dit, $R(t, T)$ est le taux d'actualisation qui égalise la valeur actuelle de l'obligation et son prix en date t .

En temps discret la valeur du zéro-coupon de maturité T s'écrit pour tout $t < T$:

$$ZCB(t, T) = \frac{1}{(1 + R(t, T))^{T-t}}$$

C'est-à-dire :

$$R(t, T) = \frac{1}{ZCB(t, T)^{\frac{1}{T-t}}} - 1$$

En composition continue des taux d'intérêt, le taux *spot* est tel que :

$$ZCB(t, T) = e^{-(T-t)R(t, T)}$$

Ce qui donne :

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln[ZCB(t, T)]$$

2.1.3 Taux court

Le taux court instantané à un moment donné t , également appelé taux spot instantané, représente le taux fictif $r(t)$ applicable sur une période de temps infiniment courte. Il est défini par la limite suivante :

$$r(t) = \lim_{h \rightarrow 0} R(t, t + h)$$

On peut le comprendre comme le taux d'intérêt en t pour un emprunt de durée extrêmement brève. Sa valeur est sujette à l'incertitude et fluctue en fonction des évolutions des marchés financiers. Sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, le taux court coïncide avec le rendement de l'actif sans risque.

Le taux court est ainsi modélisé en tant que processus aléatoire $(r(t))_{t \geq 0}$, et sa dynamique est utilisée dans certaines catégories de modèles pour expliquer les variations des taux d'intérêt.

2.1.4 Taux *forward*

Le taux *forward* $F(t, T_1, T_2)$ tels que $t < T_1 < T_2$, est le taux d'intérêt fixé en date t d'un emprunt sur une période ultérieure $[T_1; T_2]$. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, le taux *forward* s'exprime en fonction des prix zéro-coupon :

$$F(t, T_1, T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1} \ln\left(\frac{ZCB(t, T_1)}{ZCB(t, T_2)}\right)$$

2.1.5 Déflateur

Le déflateur $D(t, T)$, également appelé facteur d'actualisation stochastique, est une variable aléatoire représentant la valeur en date t équivalente à une unité monétaire versée en date T . Il se calcule comme la valeur actualisée entre les dates t et T d'une unité monétaire :

$$D(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}$$

où r_s est la valeur du taux court à une date s comprise entre t et T . Ce dernier étant aléatoire, il en est de même pour la valeur de $D(t, T)$.

Le zéro-coupon $P(t, T)$ et le déflateur $D(t, T)$ sont deux notions intimement liées et se différencient uniquement par le caractère aléatoire du déflateur en date t . En effet, ce dernier dépend des évolutions du taux court sur la période $[t, T]$, tandis que le prix zéro-coupon, de par sa définition, est connu en t . Le prix zéro-coupon correspond à l'espérance du déflateur sous la probabilité risque-neutre, au regard de l'information accumulée à la date de calcul :

$$P(t, T) = \mathbb{E}[D(t, T) | \mathcal{F}_t]$$

2.1.6 *Strike*

Le *strike* désigne le prix d'exercice d'une fonction qui correspond au prix fixé dans le contrat pour l'acquisition ou la cession du sous-jacent. Une option d'achat (respectivement de vente) est dite :

- « à la monnaie », si le sous-jacent cote le *strike*,

- « hors de la monnaie », si le cours du sous-jacent est inférieur (respectivement supérieur) au *strike*,
- « dans la monnaie » si le cours du sous-jacent est supérieur (respectivement inférieur) au *strike*.

Le *moneyness* correspond au ratio entre le *strike* et la valeur du sous-jacent dans le cas d'un *call* et inversement dans le cas d'un *put*.

2.1.7 *Call*

Un *call* ou option d'achat, est une option d'achat sur un instrument financier.

Il s'agit d'un contrat permettant à un souscripteur d'acquérir l'instrument financier concerné, appelé « sous-jacent », à un prix fixé à l'avance (prix d'exercice ou *strike*) et à une date de maturité du *call*. On parle de « *call* européen » si le souscripteur peut exercer son droit uniquement à la date de maturité et de « *call* américain » s'il peut l'exercer à tout moment avant la date de maturité inclusivement.

Le principal rôle des options d'achat est de se protéger contre la hausse du prix du sous-jacent. Si S est la valeur du sous-jacent à maturité, K le prix d'exercice (*strike*) de l'option et C la valeur du *call* à maturité, alors :

$$C = \max(0, S - K)$$

2.1.8 *Put*

En opposition au *call*, un *put* ou option de vente, est une option contractuelle de vente par laquelle deux parties s'accordent pour échanger un actif ou sous-jacent à un prix fixé (*strike*) et à une date prédéterminée (maturité).

L'acheteur du *put*, a le droit (non l'obligation) de vendre l'actif sous-jacent au prix d'exercice dans les délais spécifiés tandis le vendeur du *put*, a l'obligation de racheter cet actif au prix d'exercice si l'acheteur décide d'exercer l'option.

On parle de « *put* européen » si le souscripteur peut exercer son droit uniquement à la date de maturité et de « *put* américain » s'il peut l'exercer à tout moment avant la date de maturité inclusivement.

Il permet à son acheteur de se prémunir contre une baisse du prix du sous-jacent en dessous du prix d'exercice. La vente d'un *put* correspond à l'objectif inverse. Si S est la valeur du sous-jacent à maturité, K le prix d'exercice (*strike*) de l'option et P la valeur du *put* à maturité, alors :

$$P = \max(0, K - S)$$

2.1.9 Parité call-put

La parité *put-call* définit une relation entre le prix d'un *call* (option d'achat) et celui d'un *put* (option de vente), ayant tous les deux le même prix d'exercice et la même échéance. La formule s'énonce comme suit :

$$C(t) - P(t) = S(t) - K \cdot ZCB(t, T)$$

Avec :

- $C(t)$ la valeur du *call* à un instant t ,
- $P(t)$ la valeur du *put* à l'instant t ,
- $S(t)$ la valeur de l'actif sous-jacent à l'instant t ,
- K le prix d'exercice,
- $ZCB(t, T)$ la valeur à l'instant t d'une obligation zéro-coupon d'échéance T .

En absence d'opportunité d'arbitrage, la connaissance de trois termes parmi les quatre (*call*, *put*, obligation, valeur du sous-jacent), permet de calculer la valeur implicite du quatrième.

2.2 Concepts mathématiques

2.2.1 Loi forte des grands nombres

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires intégrables, mutuellement indépendantes et identiquement distribuées. Soit μ leur espérance commune. On note :

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Alors la suite \bar{X}_n tend vers μ en probabilité.

2.2.2 Théorème central limite

Soit X_1, X_2, \dots une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité, indépendantes et identiquement distribuées suivant la même loi D . Supposons que l'espérance μ et l'écart-type σ de D existent et sont finis avec $\sigma \neq 0$. En considérant la somme :

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

On a :

- $\mathbb{E}[S_n] = n\mu$
- $\mathbb{V}[S_n] = \sigma^2 n$

De plus, quand n est assez grand, la loi normale $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$ est une bonne approximation de la loi de S_n . Soit :

$$\bar{X}_n = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

et

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}$$

La variable Z_n est alors centrée et réduite.

Le théorème central limite énonce alors que la suite de variables aléatoires Z_1, Z_2, \dots, Z_n , converge en loi vers une variable aléatoire Z , définie sur le même espace probabilisé, et de loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ lorsque n tend vers l'infini.

Cela signifie que si \mathbb{F} est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0, 1)$, alors pour tout réel Z :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq z) = \mathbb{F}(z)$$

2.2.3 Discrétisation d'Euler-Maruyama

Principe de la discrétisation d'Euler-Maruyama

Soit l'équation différentielle de la forme :

$$dH_t = a(H_t, t)dt + b(H_t, t)dW_t$$

Où $a(H_t, t)$ est le coefficient de dérive et $b(H_t, t)$ est le coefficient de diffusion. Afin d'appliquer cette discrétisation, il faut que le coefficient de dérive et celui de diffusion soient différentiables. $W = (W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.

Une façon alternative d'écrire cette équation différentielle est d'utiliser sa forme intégrale :

$$H_{t+\Delta t} - H_t = \int_t^{t+\Delta t} a(H_u, u)du + \int_t^{t+\Delta t} b(H_u, u)dW_u$$

Le principe général de la discrétisation d'Euler-Maruyama est de supposer que, sur un intervalle de temps suffisamment petit, la valeur du processus H_t changera très peu. Sous cette hypothèse, comme le changement de valeur du processus H_t est très petit et que la période de temps t est très petite, les coefficients de dérive et de diffusion seront plus ou moins constants sur cette période de temps. L'hypothèse utilisée dans la méthode d'Euler-Maruyama est que la valeur des coefficients de dérive et celle du coefficient de diffusion seront constantes sur cet intervalle et seront égales à leur valeur au temps t . Ceci se justifie en considérant tout changement de valeur des coefficients de dérive et de diffusion comme étant négligeable.

Sous cette hypothèse, l'intégrale du processus de dérive peut être approximée par :

$$\int_t^{t+\Delta t} a(H_u, u)du \approx \int_t^{t+\Delta t} a(H_t, t)du$$

Comme le processus de dérive au temps t est une constante par rapport à u , il faut l'isoler pour le sortir de l'intégrale. Ce qui donne :

$$\int_t^{t+\Delta t} a(H_u, u)du \approx a(H_t, t) \int_t^{t+\Delta t} du = a(H_t, t)\Delta t$$

De manière analogue, l'intégrale du processus de diffusion s'approxime par :

$$\int_t^{t+\Delta t} b(H_u, u)dW_u \approx \int_t^{t+\Delta t} b(H_t, t)dW_u$$

Comme le processus de diffusion au temps t est une constante par rapport à u , il est possible de le sortir de l'intégrale. Il vient donc que :

$$\int_t^{t+\Delta t} b(H_u, u)dW_u \approx b(H_t, t) \int_t^{t+\Delta t} dW_u \stackrel{d}{=} b(H_t, t)\sqrt{\Delta t}W^c$$

où W^c suit une loi normale centrée et réduite et où $\stackrel{d}{=}$ dénote une égalité en distribution.

L'approximation de l'équation différentielle est finalement donnée par :

$$H_{t+\Delta_t} \stackrel{d}{=} H_t + a(H_t, t)\Delta_t + b(H_t, t)\sqrt{\Delta_t}W^c, \quad \Delta_t > 0$$

Application au modèle d'Heston

En appliquant le dernier résultat obtenu ci-dessus aux rendements stochastiques, on obtient :

$$S_{t+\Delta_t} = S_t \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}v_t \cdot \Delta_t + \sqrt{v_t} \cdot \sqrt{\Delta_t} \cdot Z_1\right)$$

où Z_1 suit une loi normale centrée réduite.

2.2.4 Discrétisation de Milstein

Principe

La discrétisation de Milstein est une version un peu plus complexe du schéma d'Euler-Maruyama. Cette discrétisation a été introduite par Milstein (1975). La discrétisation de Milstein réduit fortement la probabilité que la valeur de la variance devienne négative.

Afin de pouvoir appliquer la discrétisation de Milstein, le coefficient de dérive et le coefficient de diffusion doivent être choisis de façon à ne varier qu'en fonction du processus H_t . Le modèle de Heston respecte cette contrainte. De cette façon, le coefficient de dérive devient $a_t = a(H_t)$ et le coefficient de diffusion devient $b_t = b(H_t)$. Sous cette hypothèse, l'équation différentielle de H_t devient :

$$dH_t = a_t dt + b_t dW_t$$

D'après le lemme d'Itô, les coefficients de dérive et de diffusion peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} da_t &= \frac{\partial a_t}{\partial H_t} dH_t + b_t \frac{\partial^2 a_t}{\partial H_t^2} dt \\ &= \left(a_t \frac{\partial a_t}{\partial H_t} + \frac{1}{2} b_t^2 \frac{\partial^2 a_t}{\partial H_t^2}\right) dt + b_t \frac{\partial a_t}{\partial H_t} dW_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} db_t &= \left(\frac{\partial b_t}{\partial H_t} dH_t + b_t \frac{\partial^2 b_t}{\partial H_t^2} dt\right) \\ &= \left(a_t \frac{\partial b_t}{\partial H_t} + \frac{1}{2} b_t^2 \frac{\partial^2 b_t}{\partial H_t^2}\right) dt + b_t \frac{\partial b_t}{\partial H_t} dW_t \end{aligned}$$

Avec $\frac{\partial a_t}{\partial t} = 0$ et $\frac{\partial b_t}{\partial t} = 0$ (le coefficient de dérive et celui de diffusion ne dépendant pas de t).

En intégrant les équations différentielles de a_t et b_t :

$$a_s = a_t + \int_t^s \left(a_u \frac{\partial a_u}{\partial H_u} + \frac{1}{2} b_u^2 \frac{\partial^2 a_u}{\partial H_u^2}\right) du + \int_t^s b_u \frac{\partial a_u}{\partial H_u} dW_u$$

$$b_s = b_t + \int_t^s \left(a_u \frac{\partial b_u}{\partial H_u} + \frac{1}{2} b_u^2 \frac{\partial^2 b_u}{\partial H_u^2} \right) du + \int_t^s b_u \frac{\partial b_u}{\partial H_u} dW_u$$

En insérant les équations ci-dessus dans l'équation d'Euler, il est obtenu que :

$$H_{t+\Delta_t} = H_t + \int_t^{t+\Delta_t} a_s ds + \int_t^{t+\Delta_t} b_s dW_s$$

Selon les hypothèses de Milstein, tous les termes de degrés supérieurs à 1 dans l'expansion stochastique de la série Taylor peuvent être éliminés (voir Kloeden et Platen (2011) pour plus de détails sur le sujet), car l'impact de ceux-ci sur H_t est négligeable. De cette façon, les termes variant en fonction de dt^2 ou de $dW_t dt$ sont considérés comme nuls. Ceci permet de simplifier l'équation précédente à :

$$H_{t+\Delta_t} = H_t + \int_t^{t+\Delta_t} a_t ds + \int_t^{t+\Delta_t} \left(b_t + \int_t^s b_u \frac{\partial b_u}{\partial H_u} dW_u \right) dW_s$$

La seconde hypothèse utilisée par Milstein est qu'il est possible d'utiliser l'approximation d'Euler-Maruyama pour résoudre l'intégrale de droite dans l'équation précédente. L'équation précédente se simplifie donc à :

$$H_{t+\Delta_t} = H_t + a_t \int_t^{t+\Delta_t} ds + b_t \int_t^{t+\Delta_t} dW_s + b_t \frac{\partial b_t}{\partial H_t} \int_t^{t+\Delta_t} \int_t^s dW_u dW_s$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} H_{t+\Delta_t} &= H_t + a_t \Delta_t + b_t \sqrt{\Delta_t} W + b_t \frac{db_t}{dH_t} \int_t^{t+\Delta_t} (W_s - W_t) dW_s \\ &= H_t + a_t \Delta_t + b_t \sqrt{\Delta_t} W + b_t \frac{db_t}{dH_t} \left(\int_t^{t+\Delta_t} W_s dW_s - W_t \int_t^{t+\Delta_t} dW_s \right) \end{aligned}$$

D'après le Lemme d'Itô sur W_t^2 par rapport à l'équation différentielle de dW_t , la dynamique de ce processus stochastique est de :

$$dW_t^2 = \frac{\partial W_t^2}{\partial W_t} dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_t^2}{\partial W_t^2} dt = 2W_t dW_t + dt$$

La forme intégrale de l'équation ci-dessus donne :

$$W_{t+\Delta_t}^2 - W_t^2 = \int_t^{t+\Delta_t} 2W_s dW_s + \int_t^{t+\Delta_t} ds$$

Ce qui permet d'obtenir que :

$$\int_t^{t+\Delta_t} W_s dW_s - W_t \int_t^{t+\Delta_t} dW_s = \frac{(W_{t+\Delta_t} - W_t)^2}{2} - \frac{1}{2} \Delta_t$$

Comme $W_{t+\Delta_t} - W_t$ suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type Δ_t , l'équation précédente est équivalente à :

$$\int_t^{t+\Delta_t} W_s dW_s - W_t \int_t^{t+\Delta_t} dW_s \stackrel{d}{=} \frac{W^2 - \Delta_t}{2}$$

Avec $W \sim N(0, 1)$.

Finalement :

$$H_{t+\Delta_t} \stackrel{d}{=} H_t + a_t \Delta_t + b_t \sqrt{\Delta_t} W + \frac{1}{2} b_t \Delta_t \frac{db_t}{dH_t} (W^2 - 1)$$

Application

A partir de l'équation déduit précédemment, nous pouvons approximer l'équation différentielle stochastique de la variance stochastique par :

$$v_{t+\Delta_t} = v_t - \lambda(v_t - \bar{v})\Delta_t + \eta\sqrt{v_t}\sqrt{\Delta_t}Z_2 + \frac{\eta^2}{4}\Delta_t(Z_2 - 1)$$

Avec $Z_2 \sim N(0, 1)$ ayant une corrélation ρ avec Z_1 . Il est possible de se baser sur la décomposition de Cholesky pour s'assurer de cette corrélation. Elle est donnée par :

$$Z_2 = \sqrt{1 - \rho^2}Z_1 + \rho Z_1$$

2.2.5 Martingales

Supposons que $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ soit une séquence croissante de tribus, représentant l'information cumulée à chaque instant t . Un processus aléatoire $(X_t)_{t \geq 0}$ est défini comme une martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$ si et seulement si (Cousin, 2021) :

1. $(X_t)_{t \geq 0}$ est adapté à $(\mathcal{F})_{t \geq 0}$, ce qui signifie que X_t est \mathcal{F}_t -mesurable pour tout t .
2. X_t est intégrable pour tout t .
3. La valeur de X_t à la date s est égale à son espérance conditionnelle par rapport à l'information observée en s :

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s, \text{ pour tout } s < t.$$

En d'autres termes, il s'agit d'un processus stochastique qui ne présente ni tendance à la hausse ni à la baisse.

2.2.6 Probabilité risque-neutre

L'univers risque-neutre permet de valoriser des instruments financiers sans tenir compte de l'appétence au risque des investisseurs. Il repose sur la construction d'une mesure de probabilité fictive, dont l'existence est établie en l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), et l'unicité sous l'hypothèse de complétude des marchés financiers.¹

Un arbitrage est une stratégie d'investissement engendrant un profit certain sans mise de fonds. En effet, soit un portefeuille dont la valeur $(X_t)_{t \geq 0}$ est évaluée à chaque instant t . Il y a arbitrage s'il existe un instant $T \geq 0$ tel que :

- $X_0 = 0$
- $\mathbb{P}[X_T > 0] > 0$
- $\mathbb{P}[X_T < 0] = 0$

L'absence d'opportunité d'arbitrage au sein d'un marché financier requiert l'existence d'une mesure de probabilité équivalente à l'historique, sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales. Il s'agit de la probabilité risque-neutre, construite à l'aide d'un numéraire² bien spécifique.

1. Un marché financier est dit complet lorsque chaque actif peut être répliqué à l'aide d'un portefeuille d'actifs sous-jacents.

2. Un numéraire est un instrument financier ne versant aucun dividende et dont le prix est strictement positif.

Chapitre 3

Les étapes de génération des scénarios

Afin de simuler l'évolution des différentes classes d'actifs (l'indice monétaire, l'indice obligataire et les actions), trois étapes à savoir les phases marché, *model* et simulation sont nécessaires.

Le calibrage des différents modèles est effectué sur des données de marché annuelles fournies principalement par WTW. Ce processus vise à déterminer les paramètres optimaux des modèles, qui sont ensuite utilisés pour la simulation des scénarios économiques. L'équipe *GMDB* effectue des projections trimestrielles, simulant les prix des différents indices sur une période de 160 trimestres à partir de la date de *reporting*.

L'ordre dans lequel les différents modèles sont calibrés n'est pas arbitraire. En effet, les scénarios sont générés à l'aide d'une structure en cascade. Le modèle situé au sommet de la cascade est le modèle de taux d'intérêt nominal. Les modèles de change, d'actions et d'inflation nécessitent tous les *outputs* de l'indice monétaire (le *cash*) provenant du modèle de taux d'intérêt nominal.

3.1 La phase Marché

La première étape consiste à renseigner les données de marché nécessaires au calibrage et à la simulation des différentes classes d'actifs. La plupart des hypothèses économiques sont fournies par WTW sur une base trimestrielle dans le cadre de la clôture Solvabilité II.

3.1.1 Modélisation des taux d'intérêt nominaux

Les taux qui sont pertinents pour la valorisation de la *GMDB* dans le cadre de Solvabilité II sont ceux qui s'appliquent à la zone euro, sans prime de liquidité ni ajustement de volatilité. L'horizon temporel retenu est de 160 trimestres pour correspondre à la projection sur 40 ans du modèle *ALM* utilisé. Les taux sont fournis sous la forme de taux annuels au comptant, qui sont convertis en taux trimestriels dans l'outil de génération de scénarios Star RN. La courbe des taux utilisée au premier trimestre 2023 se trouve ci-dessous :

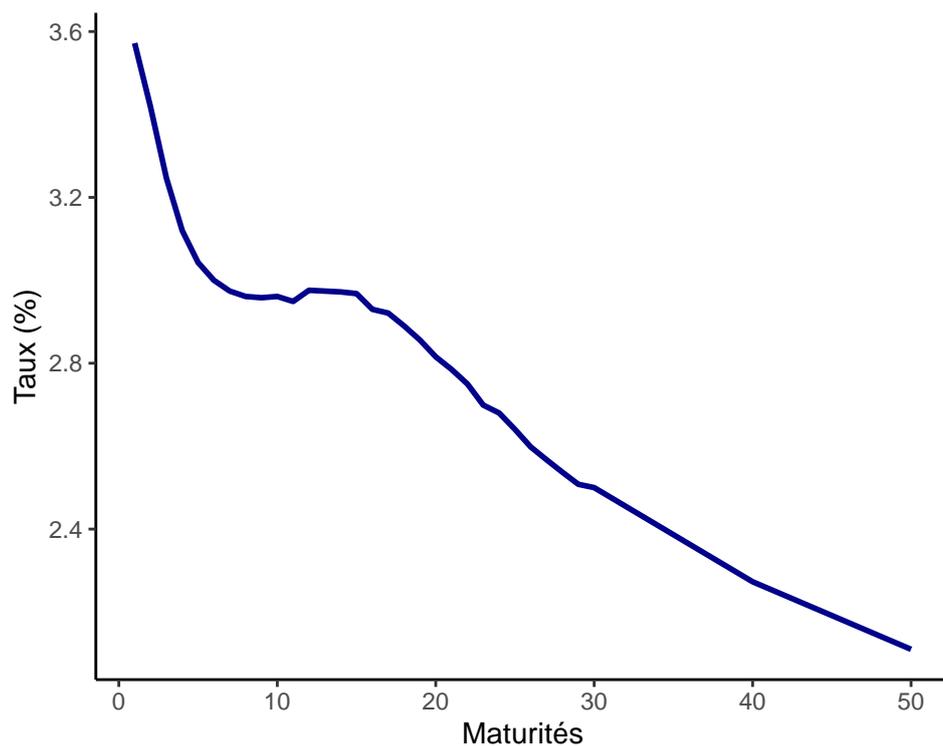


FIGURE 3.1 – Courbe des taux au 31/03/2023 fournie par l'EIOPA, pour des dates de maturité de 1 à 50 ans

La surface de volatilité implicite des swaptions est également utilisée dans le cadre de la modélisation des taux d'intérêt. Celle utilisée au premier trimestre 2023 est la suivante :

Maturité / Tenor	1	2	3	4	5	6	7
1	121%	125%	122%	118%	115%	113%	112%
2	113%	113%	111%	109%	107%	107%	106%
3	107%	107%	106%	105%	104%	103%	102%
4	104%	104%	102%	101%	100%	99%	98%
5	100%	101%	99%	97%	96%	95%	94%
7	95%	95%	92%	91%	89%	87%	86%
10	87%	87%	85%	83%	81%	80%	79%
15	78%	78%	76%	74%	72%	71%	70%

TABLE 3.1 – Volatilités implicites de marché des *swaptions* pour les *tenor* de 1 à 7 ans au premier trimestre 2023

Maturité / Tenor	8	9	10	15	20	25	30
1	110%	108%	106%	101%	97%	94%	92%
2	105%	104%	103%	97%	94%	92%	90%
3	101%	100%	99%	94%	90%	88%	86%
4	97%	96%	95%	89%	86%	83%	81%
5	93%	92%	91%	85%	82%	80%	78%
7	85%	84%	83%	78%	75%	72%	70%
10	78%	77%	75%	70%	66%	64%	62%
15	69%	67%	66%	60%	57%	55%	53%

TABLE 3.2 – Volatilités implicites de marché des *swaptions* pour les *tenor* de 8 à 30 ans au premier trimestre 2023

Cette matrice est fournie par WTW et prend sa source dans *Bloomberg Normal volatilities*, les *tenor* fournies vont de 1 à 30 ans.

3.1.2 Modélisation de l'indice action

Les actions sont modélisées à l'aide d'une diffusion de Heston. Les paramètres de ce modèle sont calibrés en utilisant des données de marché annuelles, plus précisément les prix d'options d'achat et de vente sur l'indice *Euro Stoxx 50* en date du 31/03/2023. Ces derniers sont calculés à partir des volatilités implicites de marché correspondantes, via le modèle de Black-Scholes.

Maturité/Moneyness	80%	90%	95%	100%	105%	110%	120%
1	20,76%	19,14%	18,35%	17,54%	16,71%	15,82%	13,88%
2	21,29%	19,73%	18,98%	18,24%	17,49%	16,72%	15,06%
3	21,18%	19,81%	19,15%	18,51%	17,89%	17,25%	15,87%
4	21,62%	20,38%	19,77%	19,17%	18,58%	17,97%	16,80%
5	22,02%	20,93%	20,39%	19,85%	19,31%	18,78%	17,74%
6	22,34%	21,32%	20,85%	20,39%	19,93%	19,47%	18,55%
7	22,89%	21,92%	21,46%	21,01%	20,58%	20,15%	19,31%
8	23,24%	22,37%	21,94%	21,53%	21,13%	20,74%	19,98%
9	23,80%	22,94%	22,53%	22,13%	21,75%	21,38%	20,67%

TABLE 3.3 – Volatilités implicites de marché de l'indice *Euro Stoxx 50* au premier trimestre 2023

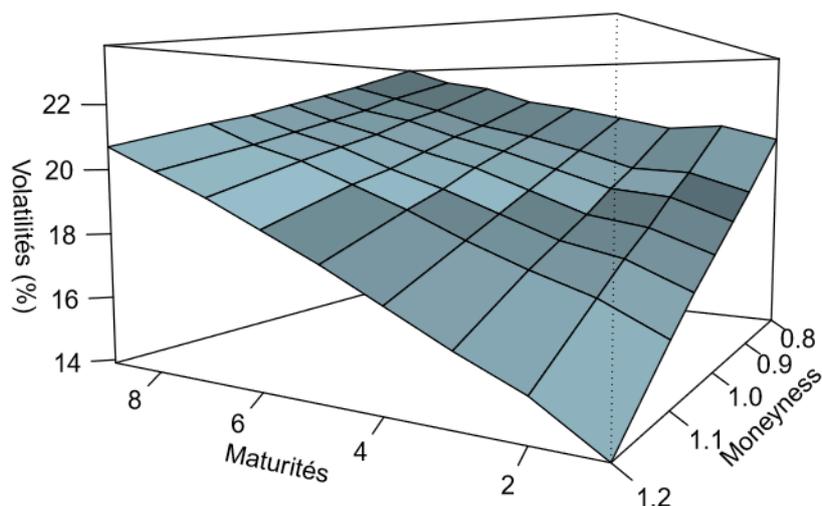


FIGURE 3.2 – Surface de volatilités implicites de marché de l'indice *Euro Stoxx 50* au premier trimestre 2023, représentée en 3D

Cette surface de volatilités est fournie par Willis Towers Watson et provient de Markit. Les maturités proposées vont de 1 à 9 ans et les *moneyness* vont de 80 à 120 %.

3.1.3 Modélisation de l'indice obligataire

L'indice obligataire est modélisé comme une obligation d'état de maturité 10 ans, avec des taux de coupons fixés à 5% et réinvestis annuellement.

3.1.4 Corrélations

La corrélation entre les taux d'intérêt nominaux et les actions est la seule renseignée au sein de l'outil. Les hypothèses de corrélation proviennent d'une combinaison de données historiques et de jugement d'experts en raison du manque de corrélations implicites sur le marché. La corrélation de marché entre les taux nominaux et les actions au premier trimestre 2023 est de 20%.

Dans la suite, nous nous focaliserons sur le calibrage et la simulation de l'indice action via le modèle à volatilité stochastique de Heston. Deux approches sont possibles pour utiliser ce modèle : la simulation de Monte Carlo du processus décrivant le prix de l'action ou la résolution analytique du prix de l'option, qui nécessite l'évaluation d'intégrales complexes.

3.2 La phase Simulation

Les prix des actions ainsi que leurs rendements sont déterminés à travers la simulation de Monte Carlo du processus décrivant le prix de l'action du modèle à volatilité stochastique de Heston (1993, Heston). Le modèle est une extension du modèle de Black-Scholes.

Par rapport à son prédécesseur plus simple et à d'autres modèles similaires, il dispose d'un processus de volatilité distinct qui présente une corrélation non nulle avec le processus de rendement des actions. En effet, le modèle de valorisation des options de Black-Scholes reposait sur une volatilité constante, qui ne représente plus suffisamment la dynamique des marchés financiers. L'assouplissement de cette hypothèse a conduit à des modèles appelés modèles de volatilité stochastique tel que celui de Heston.

Le modèle de Heston est régi par les équations suivantes :

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sqrt{\nu(t)}S(t)dZ_1(t), \quad S(0) > 0$$

$$d\nu(t) = -\lambda(\nu(t) - \bar{\nu})dt + \eta\sqrt{\nu(t)}dZ_2(t), \quad \nu(0) > 0$$

Avec :

- $S(t)$ la valeur de l'indice à l'instant t ,
- $\mu(t)$ le *drift* avec lequel la valeur de l'indice augmente. Sous la mesure risque neutre, il s'agit du rendement espéré du prix du sous-jacent,
- $\nu(t)$ la variance instantanée de la valeur de l'indice au moment t , ($t \in [0, \infty)$),
- $\bar{\nu}$ le niveau de variance à long terme, ou variance moyenne des prix à long terme (lorsque t tend vers l'infini, la valeur attendue de $\nu(t)$ tend vers $\bar{\nu}$),
- λ la vitesse de retour à la moyenne i.e la vitesse à laquelle $\nu(t)$ revient à $\bar{\nu}$,
- η la volatilité du processus de variance. En pratique, elle est soumise à une contrainte visant à garantir que la variance est positive,
- Z_1 et Z_2 des mouvements browniens standard avec une corrélation ρ , ou de manière équivalente une covariance ρdt .

Le second processus stochastique décrit l'évolution de la variance et confère au modèle de Heston la capacité de capturer le *smile* de volatilité. Ce phénomène fait référence à l'observation selon laquelle les volatilités implicites des options sur actions varient fréquemment en fonction de la maturité et de la *moneyness*. Ainsi, le modèle permet de reproduire de manière plus précise les prix des options, tenant compte de ces variations spécifiques de volatilité.

En pratique, il est fréquent d'observer un effet de levier entre le rendement de l'action et sa variance. L'effet de levier signifie que lorsque la variance d'un titre augmente, son rendement moyen tend à diminuer. Inversement, lorsque la variance d'un titre diminue, son taux de rendement tend à augmenter. Ce phénomène est modélisé par la corrélation ρ entre les mouvements browniens Z_1 et Z_2 . Soit :

$$d \langle Z_1, Z_2 \rangle = \rho dt$$

Lorsque ρ est négatif, la corrélation entre Z_1 et Z_2 est négative. La dynamique du modèle aura donc l'effet de levier désiré.

Le processus stochastique du prix de l'indice est simulé à l'aide d'un schéma d'Euler. Soit S la valeur de l'indice actualisé, il est simulé par :

$$S(t + \Delta t) = S(t) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\nu(t) \cdot \Delta t + \sqrt{\nu(t)} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot Z_1\right)$$

Soit :

$$S(t) = S(0) \cdot \exp\left(\int_0^t \mu(s) ds - \frac{1}{2}\nu(t) \cdot \Delta t + \sqrt{\nu(t)} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot Z_1\right)$$

Avec Δt le pas de temps de projection réel (c'est-à-dire le rapport entre le pas de temps spécifié par l'utilisateur et le nombre d'étapes intermédiaires) et $Z_1 \sim \mathbb{N}(0, 1)$.

En effet, il est possible au sein de l'outil, de définir un nombre de pas de temps intermédiaires qui sera utilisé lors de la projection. L'augmentation du nombre de pas de temps intermédiaires réduit l'erreur de discrétisation inévitablement présente lorsque des modèles continus tel que le modèle de Heston sont discrétisés et simulés. Le nombre de pas de temps intermédiaires peut être interprété comme le nombre de sous-intervalles entre un pas et un autre. Par exemple, un pas de temps de projection annuel avec douze pas de temps intermédiaires et un pas de temps de projection mensuel avec un pas de temps intermédiaire modéliseront tous deux les taux d'intérêt, les actions et les obligations à des intervalles d'un mois (c'est-à-dire qu'il s'agira de projections mensuelles). Au sein de l'équipe *GMDB*, les projections sont réalisées selon un pas de temps annuel avec quatre pas de temps intermédiaires. De fait, les prix des différents indices sont simulés à des intervalles de trois mois, i.e de façon trimestrielle.

Le processus stochastique de la variance de l'indice est quant à lui simulé à l'aide d'un schéma de Milstein formulé par :

$$\nu(t + \Delta t) = \nu(t) - \lambda(\nu(t) - \bar{\nu}) \cdot \Delta t + \eta\sqrt{\nu(t)} \cdot \sqrt{\Delta t} \cdot Z_2 + \frac{\eta^2}{4} \cdot \Delta t \cdot (Z_2^2 - 1)$$

Avec $Z_2 \sim \mathbb{N}(0, 1)$, une distribution normale de corrélation ρ avec Z_1 . Pour rappel, il existe la relation suivante entre Z_1 et Z_2 :

$$Z_2 = \sqrt{1 - \rho^2}Z_1 + \rho Z_1$$

Limites et alternatives du modèle

- Une alternative plus simple serait le modèle original de Black-Scholes. Cependant, il est basé sur des hypothèses irréalistes, telle qu'une volatilité constante, qui ne permet pas de déterminer avec précision le prix des options qui ne sont pas à la monnaie,
- Une approche fréquemment utilisée dans le cadre du modèle à volatilité stochastique de Heston consiste à introduire des sauts dans la dynamique du sous-jacent à travers le modèle de Merton. La fusion de ces deux modèles est communément appelée le modèle de Bates. L'avantage principal de cette approche réside dans sa capacité à capturer les asymétries à court terme résultant des sauts dans la valeur des actions. En intégrant les caractéristiques des sauts, le modèle de Bates offre une représentation plus réaliste des mouvements soudains et des événements exceptionnels sur les marchés financiers, ce qui contribue à une meilleure modélisation des risques et des variations de prix,

- Comme pour la plupart des modèles, la discrétisation d'un modèle à temps continu entraîne des erreurs de discrétisation,
- La principale limite du calibrage du modèle est qu'il ne tient pas compte de la composante stochastique du taux d'intérêt dans le prix de l'option. Cela peut conduire à une surestimation des volatilités à long terme.

3.3 La phase Calibrage

Le modèle Heston a été l'un des premiers modèles à permettre un calibrage sur les données réelles du marché en utilisant une solution fermée pour les prix des options d'achat et de vente européennes.

Le modèle est calibré en utilisant des prix d'options d'achat et de vente sur l'indice *Euro Stoxx 50*. Ces prix sont dérivés d'une surface de volatilités implicites, laquelle est définie par deux dimensions : la maturité d'une option sur l'indice *Euro Stoxx 50* et la *moneyness* de l'option. La disponibilité des données dépend des devises et des indices. Pour certains marchés émergents, seules les volatilités implicites à la monnaie sont disponibles. En règle générale, les échéances disponibles s'étendent de 1 mois à un maximum de 10 ans ; le marché étant jugé *Deep Liquid and Transparent (DLT)* pour ces maturités. Cette classification indique que le marché est jugé comme étant profond, liquide et transparent pour ces périodes, ce qui signifie qu'il existe une ample liquidité et une visibilité suffisante pour ces échéances spécifiques.

Le processus de calibrage repose sur l'utilisation de la formule fermée de tarification de Heston, conjointement avec un optimiseur contraint non linéaire et multivarié pour résoudre le programme d'optimisation. Comparée à l'approche précédente basée sur la génération de trajectoires de prix, cette méthode présente une rapidité accrue. Cependant, son implémentation est plus complexe en raison de l'évaluation d'intégrales complexes lors du calcul des probabilités risque neutres P_j (elles seront décrites plus bas). Le calibrage du modèle est une étape cruciale, et bien que cette approche soit plus rapide, la contrepartie est la complexité accrue du processus de calibrage.

L'approche adoptée au sein de l'outil consiste à minimiser la somme des carrés des différences entre les prix de marché des options européennes et les prix impliqués par le modèle de Heston. Des prix d'options d'achat sont utilisés lorsque la *moneyness* est d'au plus 100%, tandis que des prix d'options de vente sont utilisés dans le cas contraire.

Le programme d'optimisation est résolu à l'aide d'un algorithme de Programmation Quadratique Séquentielle (SQP), qui peut être envisagé comme une généralisation de la méthode de Newton-Raphson. Il s'applique particulièrement aux situations où des contraintes linéaires et/ou non linéaires sont intégrées au problème d'optimisation. L'algorithme SQP est une méthode itérative qui combine des techniques de programmation quadratique avec des mises à jour basées sur la résolution de problèmes sous-jacents. Son utilisation dans le processus de calibrage permet d'ajuster de manière efficace les paramètres du modèle Heston tout en tenant compte des contraintes définies par les conditions du marché.

Le processus de calibrage permet ainsi de déterminer les paramètres optimisés $(\nu_0, \bar{\nu}, \lambda, \eta, \rho)$ du modèle de Heston décrits précédemment.

Le processus complet de calibrage comprend les étapes suivantes :

1. Les volatilités implicites de marché sont utilisées pour déterminer des prix de marché de *call* européens à travers la formule de Black-Scholes. Cela se fait pour chaque combinaison de maturité et de *moneyness* disponible. Chaque fois qu'une volatilité de marché est manquante, le résultat est automatiquement fixé à 0.

$$C^{mkt}(r^{mkt}, T-t, S, K, \sigma^{mkt}) = S \cdot N(d_1) - Ke^{-r^{mkt}(T-t)} \cdot N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma^{mkt} \cdot \sqrt{T-t}} \left(\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r^{mkt} + \frac{1}{2}\sigma^{mkt^2})(T-t) \right)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma^{mkt} \sqrt{T-t}$$

Avec :

- S la valeur de l'indice action, elle est fixée à 1 dans le cadre du calibrage,
- K le niveau du *strike*,
- σ^{mkt} la volatilité implicite de marché pour une maturité et une *moneyness* donnée,
- r^{mkt} le taux *spot* pour une maturité donnée,
- $N(\cdot)$ la fonction de distribution cumulative de la distribution normale standard,
- $T-t$ la maturité de l'option en $t = 0$.

2. Pour déterminer les prix de *call model*, nous utilisons la formule fermée du modèle de Heston afin d'obtenir un prix pour un ensemble de paramètres donnés.

$$C^{Heston}(r^{mkt}, T-t, S, K, \nu) = S \cdot P_1(u, \nu) - Ke^{-r^{mkt}(T-t)} \cdot P_0(u, \nu)$$

Où :

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{C_j(u, T-t)(\nu) + D_j(u, T-t)\nu + iu \ln\left(\frac{Se^{mkt}(T-t)}{K}\right)}}{iu} \right\}$$

$$C(u, T-t) = \lambda \left\{ s_-(T-t) - \frac{2}{\eta^2} \ln\left(\frac{1-ge^{-d(T-t)}}{1-g}\right) \right\}$$

$$D(u, T-t) = s_- \frac{1 - e^{-d(T-t)}}{1 - ge^{-d(T-t)}}$$

$$g = \frac{S_-}{S_+}$$

$$S_{+/-} = \frac{\beta \mp \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\gamma} = \frac{\beta \mp d}{\eta^2}$$

$$\alpha = -\frac{\mu^2}{2} - \frac{iu}{2} + iju$$

$$\beta = \lambda - \rho\eta j - \rho\eta ju$$

$$\gamma = \frac{\eta^2}{2}$$

Avec :

- $j = 0, 1,$
- $Re\{.\}$ la partie réelle d'un nombre complexe,
- i l'unité imaginaire.

3. Le calcul de l'intégrale est effectué par intégration numérique. La méthode d'intégration numérique utilisée pour le calcul du coût d'une option sous le modèle de Heston est la méthode de Gauss-Legendre à N points. Cette approche offre d'excellents résultats en termes de précision, du moment où la fonction à intégrer est suffisamment régulière. Le principe général de la méthode vise à calculer une quantité de la forme :

$$\int_a^b f(x) dx$$

où f est une fonction continue. L'intervalle $[a, b]$ est subdivisé en petits intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de même longueur h , avec $x_i = a + ih, i = 0 \dots n, h = \frac{b-a}{n}$. Ainsi, on peut exprimer l'intégrale comme une somme des intégrales sur chaque sous-intervalle :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{i+1}}^{x_i} f(x) dx$$

Les intégrales sur les sous-intervalles $[x_{i+1}, x_i]$ sont ensuite approchées par la méthode de Gauss-Legendre. En effectuant un changement de variable affine, on ramène l'intervalle $[a, b]$ à l'intervalle canonique $[-1, 1]$ avec $x = \frac{x_i+x_{i+1}}{2} + \frac{x_{i+1}-x_i}{2}t$. Ainsi, l'intégrale sur $[x_{i+1}, x_i]$ devient :

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \int_{-1}^1 g(t) dt$$

où $g(t) = f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2} + \frac{x_{i+1}-x_i}{2}t\right), t \in [-1, 1]$.

La méthode de Gauss consiste à approcher la quantité $I(g) = \int_{-1}^1 g(t) dt$ par une expression de la forme :

$$J(g) = \sum_{k=1}^N \omega_k g(t_k)$$

où les t_k sont les points de Gauss et les ω_k sont les poids de Gauss. Ainsi, l'intégrale initiale est approximée par

$$\int_a^b f(x) dx \approx L_h(f)$$

où

$$L_h(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k g(t_k)$$

Le critère de choix des t_k et des ω_k est l'égalité stricte entre $I(g)$ et $J(g)$ pour les fonctions polynomiales g de degré r aussi grand que possible. La méthode de Gauss-Legendre vise à choisir les t_k de manière optimale pour satisfaire ce critère. Les t_k et les ω_k forment $2N$ inconnues, permettant d'espérer $r = 2N - 1$. En vertu du théorème de Weierstrass, qui stipule que toute fonction continue d'un compact $[a, b]$ peut être approchée uniformément par des polynômes, des résultats sur la précision de la méthode peuvent être déduits en fonction de la régularité de la fonction à intégrer.

Pour les t_k , on choisit les N racines du polynôme de Legendre de degré N , donné par

$$L_N = \frac{1}{2^N N!} \frac{d^N}{dt^N} [(t^2 - 1)^N]$$

Et pour les ω_k , on utilise la formule

$$\omega_k = \int_{-1}^1 \phi_k(t) dt$$

où ϕ_k est la base de Lagrange de degré N associée aux points t_k . La fonction ϕ_k est donnée par

$$\phi_k(t) = \frac{(t - t_1) \dots (t - t_{k-1})(t - t_{k+1}) \dots (t - t_N)}{(t_k - t_1) \dots (t_k - t_{k-1})(t_k - t_{k+1}) \dots (t_k - t_N)}$$

Avec ce choix, on démontre l'égalité stricte $I(g) = J(g)$ pour tous les polynômes g de degré inférieur ou égal à $r = 2N - 1$. L'avantage de cette méthode réside dans le fait que les t_k (points de Gauss) et les ω_k (poids de Gauss) pour $1 \leq k \leq N$ sont indépendants de la fonction g à intégrer. Ces valeurs peuvent donc être calculées avec précision et tabulées. Il est ensuite très facile de les intégrer une fois pour toutes dans un calculateur.

4. La fonction objectif est la somme pondérée des carrés des différences entre les prix de marché des options et les prix *model* calculés aux étapes 1 et 2. Pour les *moneyness* supérieures à 100%, la parité *call-put* est utilisée afin de convertir les prix des *call* calculés en 1 et 2 en prix de *put*.

Soit f cette fonction. Elle s'écrit comme suit :

$$f(T, K) = \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^K (C_{i,j}^{mkt} - C_{i,j}^{Heston})^2$$

Avec T et K respectivement la maturité et le *strike*.

L'inclusion de poids w_j dans l'optimisation fournit le résultat suivant :

$$f(T, K) = \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^K w_{i,j} \cdot (C_{i,j}^{mkt} - C_{i,j}^{Heston})^2$$

Soit le vecteur de paramètres $p = (\nu_0, \bar{\nu}, \lambda, \eta, \rho)$. Le programme d'optimisation peut s'écrire de la manière suivante :

$$\underset{p \in \mathbb{R}^5}{\operatorname{argmin}} f(T, K)$$

5. Un optimisateur à contraintes non-linéaire est utilisé pour minimiser le résultat de la fonction objectif. La méthode d'optimisation la plus appropriée et celle utilisée au sein de l'outil est l'algorithme de Levenberg-Marquardt. En effet, cet algorithme s'applique principalement à la régression linéaire à travers la méthode des moindres carrés. Nous décrivons ici le cadre général de la méthode. Étant donné un certain nombre de paires de données (t_i, y_i) , on cherche le paramètre p (qui peut être un vecteur) de la fonction $f(t, p)$ qui minimise la somme des carrés des déviations :

$$S(p) = \sum_{i=1}^m [y_i - f(t_i, p)]^2$$

que l'on notera sous forme d'une erreur quadratique moyenne :

$$S(p) = \frac{1}{D} \sum_{i=1}^m (f(t, p) - y)^2$$

Dans la suite, on se place dans le cas où f est une fonction scalaire pour simplifier les notations.

L'algorithme consiste à interpoler l'algorithme de Gauss-Newton et la méthode de descente de gradient ; ceux-ci seront détaillés en annexe. L'algorithme est plus stable que celui de Gauss-Newton, c'est-à-dire qu'il trouve une solution même s'il est démarré loin du minimum. Cependant, pour certaines fonctions très régulières, il peut converger légèrement moins vite.

L'idée est donc d'utiliser un algorithme de Gauss-Newton dans les zones où S est quasi-quadratique (c'est-à-dire où f est quasi-linéaire) et une descente de gradient dans les autres cas. Le pas d'une itération de cet algorithme est calculé de la façon suivante :

$$p_n = p_{n-1} - (H + \lambda I)^{-1} \mathbf{d}$$

Lorsque λ est petit, cette équation est équivalente à l'équation (1.2), et le nouveau vecteur p_n est déterminé à partir d'une approximation quadratique de S . Lorsque λ est grand, cette équation est équivalente à :

$$p_n = p_{n-1} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{d} = p_{n-1} - \frac{1}{\lambda} \langle (f(t, p_{n-1}) - y), \nabla f(t, p_{n-1}) \rangle = p_{n-1} - \frac{1}{2\lambda} \nabla S(t, p_{n-1})$$

Ce qui correspond bien à une descente de gradient. Pour des valeurs intermédiaires de λ , l'algorithme est un mélange entre la descente de gradient et l'approche quadratique basée sur l'approximation linéaire de f . Ce coefficient est modifié à chaque

itération, comme pour la descente de gradient adaptative. Si $S(p_n)$ diminue au cours de l'itération, on diminue λ (en le divisant par 10, par exemple), et l'on se rapproche ainsi de la méthode quadratique. Au contraire, si $S(p_n)$ augmente, cela signifie que nous nous trouvons dans une région où S n'est pas très quadratique, et donc on augmente λ (en le multipliant par 10, par exemple) afin de se rapprocher de la descente de gradient.

Cet algorithme a ensuite été amélioré par Marquardt, le pas de l'itération étant cette fois-ci défini par :

$$p_n = p_{n-1} - (H + \lambda \text{diag}(H))^{-1} \mathbf{d}$$

La matrice identité a été remplacée par la diagonale de H . Le but ici est de modifier le comportement de l'algorithme dans les cas où λ est grand, c'est-à-dire lorsque l'on est proche d'une descente de gradient. Avec cette modification, on se déplace plus rapidement dans les directions vers lesquelles le gradient est plus fiable, afin d'éviter de passer de nombreuses itérations sur un plateau. Ceci est appelé l'algorithme de Levenberg-Marquardt.

En pratique, cet algorithme permet de converger avec beaucoup moins d'itérations. Cependant, chaque itération demande plus de calculs, en particulier pour l'inversion de la matrice H . Son utilisation se limite donc aux cas où le nombre de paramètres à optimiser n'est pas très élevé. En effet, si p est un vecteur de dimension N , H est une matrice $N \times N$, et le nombre d'opérations nécessaires à l'inversion d'une matrice $N \times N$ est proportionnel à N^3 .

6. La contrainte non-linéaire est la suivante :

$$\frac{2\lambda\bar{\nu}}{\eta^2} > 1$$

Si cette contrainte est respectée, la variance est garantie positive.

3.4 Résultats

3.4.1 Résultats du calibrage

Le processus de calibrage vise à déterminer les paramètres optimaux $(\nu_0, \bar{\nu}, \lambda, \eta, \rho)$ du modèle de Heston. Le tableau ci-dessous présente ces paramètres obtenus suite au calibrage sur des données de marché annuelles (prix d'options sur l'indice *Euro Stoxx 50*) en date du 31/03/2023.

Paramètres	Bornes inférieures	Valeurs initiales	Bornes supérieures	Valeurs optimisées
λ	0	0,2	1	0,13
η	0,0001	0,02	0,7	0,14
ρ	-1	-0,1	1	-1
ν_0	0,0001	0,04	0,2	0,03
$\bar{\nu}$	0,0001	0,04	0,2	0,07

TABLE 3.4 – Paramètres du modèle de Heston avant et après le calibrage au 31/03/2023

En utilisant ces paramètres, nous calculons ensuite les prix impliqués par le modèle de Heston en utilisant sa forme analytique. Ces résultats sont comparés aux prix de marché, et les écarts entre ces deux ensembles de prix peuvent être quantifiés à travers le biais de calibrage (erreurs absolues) ou l'erreur relative (notée ER). En notant C le prix du *Call*, ces deux erreurs peuvent être exprimées comme suit :

$$biais_{calibrage} = C^{modele} - C^{marche}$$

$$ER_{calibrage} = \frac{C^{modele} - C^{marche}}{C^{marche}}$$

Le tableau suivant présente les erreurs relatives observées :

Maturité/Moneyness	80%	90%	95%	100%	105%	110%	120%
1	0.03%	-0.06%	-0.16%	-0.92%	-1.48%	-3.72%	-13.65%
2	-0.20%	-0.25%	-0.67%	-0.77%	-1.36%	-2.57%	-5.55%
3	0.30%	0.50%	0.57%	0.54%	-0.08%	-0.35%	-2.19%
4	-0.11%	-0.34%	-0.43%	-0.80%	-1.03%	-1.55%	-3.29%
5	-0.56%	-1.20%	-1.67%	-2.14%	-2.72%	-3.54%	-5.74%
6	-0.94%	-1.67%	-2.26%	-2.97%	-3.84%	-4.76%	-7.28%
7	-1.92%	-2.91%	-3.52%	-4.28%	-5.14%	-6.16%	-8.67%
8	-2.42%	-3.61%	-4.33%	-5.14%	-6.07%	-7.12%	-9.71%
9	-3.48%	-4.79%	-5.54%	-6.37%	-7.34%	-8.43%	-11.00%

TABLE 3.5 – Erreurs relatives des prix de *call model*-marché d'options de l'indice Euro Stoxx 50

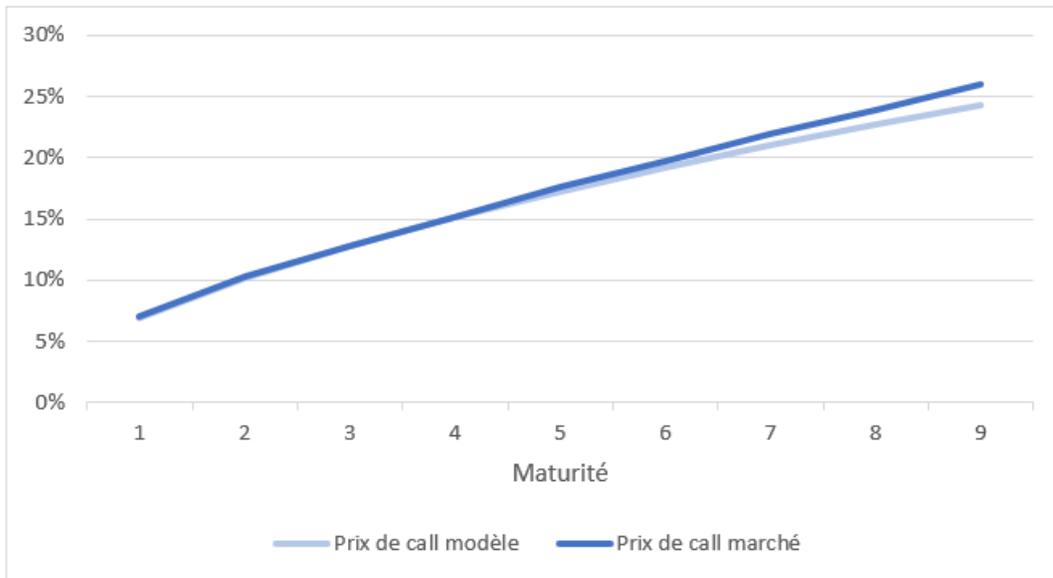


FIGURE 3.3 – Comparaison des prix de *call model*-marché par maturité pour une *moneyness* égale à 100%

Les résultats obtenus mettent en lumière une erreur de modèle observée lors du calibrage de l'indice action, notamment sur les maturités plus longues, comme illustré dans la Figure 3.2. Cette erreur de calibrage, quantifiée par la moyenne des erreurs de calibrage pour chaque maturité et chaque *moneyness*, s'élève à **-3,16%**. Elle reflète ainsi la déviation du test de *market consistency* des options sur l'indice *Euro Stoxx 50*.

En utilisant les données initiales et une fois que le modèle a été calibré, nous procédons à la simulation des trajectoires des prix d'actions en discrétisant les équations différentielles stochastiques associées.

L'étape de discrétisation implique souvent un compromis entre la précision (erreur de discrétisation) et le temps de calcul. Il est nécessaire de trouver un équilibre entre la qualité de la projection et la complexité du modèle utilisé. Dans le cadre du GSE Star RN utilisé chez Partner Re, des schémas classiques tels que ceux d'Euler et de Milstein sont employés respectivement pour la simulation des processus de rendement et de volatilité des actions, en considérant des pas de projection trimestriels. Cette approche permet de concilier une représentation réaliste des trajectoires des prix d'actions avec une efficacité computationnelle.

Ainsi, nous effectuons 1 000 simulations Monte Carlo dans le cadre d'une projection avec un pas de temps trimestriel et comparons les prix obtenus par Monte Carlo avec ceux observés sur le marché. Le tableau suivant présente les erreurs relatives (notées ER_{total}) entre ces deux ensembles de prix, avec :

$$ER_{total} = \frac{C^{simulation} - C^{marche}}{C^{marche}}$$

L'erreur relative moyenne ainsi obtenue, calculée en prenant la moyenne des erreurs relatives sur l'ensemble de la matrice d'options, s'élève à **-2,5%**.

Maturité/Moneyness	80%	90%	95%	100%	105%	110%	120%
1	-0.27%	0.20%	1.05%	2.11%	3.98%	5.52%	9.36%
2	-0.78%	-1.44%	-1.56%	-1.96%	-2.73%	-3.56%	-4.36%
3	-0.57%	-0.51%	-0.42%	-0.26%	-0.30%	-0.18%	0.58%
4	-0.32%	-0.17%	-0.01%	0.13%	-0.09%	-0.36%	-1.02%
5	-1.05%	-1.39%	-1.47%	-1.41%	-1.36%	-1.33%	-2.13%
6	-2.82%	-3.81%	-4.39%	-4.98%	-5.38%	-5.72%	-6.80%
7	-3.96%	-4.95%	-5.39%	-5.96%	-6.54%	-7.09%	-7.77%
8	-3.04%	-4.20%	-4.79%	-5.37%	-5.99%	-6.63%	-8.00%

TABLE 3.6 – Erreurs relatives des prix Monte Carlo-*marché* d'options de l'indice Euro Stoxx 50

Par ailleurs, il convient de souligner que le biais issu de la comparaison des prix Monte Carlo avec les prix de marché est la somme de deux composantes : le biais de calibrage évalué précédemment et celui résultant de la simulation des prix Monte Carlo. Ainsi, il peut être exprimé comme suit :

$$biais_{total} = biais_{calibrage} + biais_{simulation}$$

Avec :

$$biais_{simulation} = C^{simulation} - C^{modele}$$

Cependant, il est possible que ces deux biais se compensent mutuellement en raison des signes négatifs ou positifs qu'ils peuvent présenter.

Le biais de simulation est lié quant à lui à la convergence de l'estimateur empirique du prix lors de la réalisation de simulations Monte Carlo et se décompose en la somme de deux erreurs :

$$biais_{simulation} = biais_{discretisation} + variance$$

La variance liée à la simulation Monte Carlo du modèle de Heston fait référence à l'incertitude ou la dispersion des trajectoires de prix obtenues lors de la simulation. Cette variance reflète la variabilité des résultats de simulation due aux processus aléatoires sous-jacents du modèle de Heston, et peut être réduite en augmentant le nombre de simulations selon la loi forte des grands nombres qui stipule que, à mesure que le nombre de simulations N augmente, la moyenne des prix simulés converge vers la valeur espérée, et la variance des prix moyens diminue proportionnellement à $\frac{1}{N}$.

Illustration mathématique

Soit C_i le prix simulé de l'option pour la i -ème trajectoire, avec $i = 1, 2, \dots, N$. La moyenne des prix simulés est donc donnée par :

$$\hat{C} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i$$

La variance de la moyenne des prix simulés est :

$$\text{Var}(\hat{C}) = \frac{\text{Var}(C_i)}{N}$$

Ainsi, quand N augmente, la variance de \hat{C} diminue, ce qui réduit l'incertitude des estimations obtenues.

Le biais de discrétisation survient quant à lui en raison de l'approximation des processus stochastiques sous-jacents du modèle par des pas de temps discrets, au lieu d'une représentation continue. Ce biais est d'autant plus important lorsque des modèles continus à volatilité stochastique, tels que le modèle de Heston, sont discrétisés et calculés numériquement. Pour réduire ce biais, la méthode de discrétisation d'origine, à savoir la discrétisation de Milstein (1974), a été comparée à celle développée par Kahl et Jackel (2006) par le fournisseur de l'outil. Il a été constaté que cette dernière méthode n'était pas systématiquement supérieure à la méthode originale. Par conséquent, le changement de méthode de discrétisation n'a pas conduit à une réduction systématique du biais de discrétisation.

Une autre méthode permettant de réduire le biais de discrétisation consiste à diminuer le pas de temps de projection lors de la simulation Monte Carlo. Pour illustrer cela, des prix de *call* de maturités de 1 à 9 ans ont été simulés en fonction de différents pas de projection et différents nombre de simulations, pour des *moneyness* allant de 80 à 120%. La somme des carrés des biais de simulation obtenue pour l'ensemble des maturités et *moneyness* pour chaque pas de projection et nombre de simulations, est présentée dans la table 3.7.

Il est essentiel de noter que les valeurs de biais de simulation présentées dans la table 3.6 ont été calculées localement en utilisant le logiciel R, sur la base des paramètres optimaux obtenus lors du calibrage. En effet, en raison d'un accès limité aux outils de l'entreprise, ces calculs ont été effectués au moyen d'une fonction implémentée sur R permettant de générer des prix simulés via la méthode de Monte Carlo. Cette fonction (nommée *HestonCallMonteCarlo*) est présentée dans l'annexe C. Elle requiert en entrée les paramètres spécifiques du modèle de Heston, ainsi que le prix actuel du sous-jacent, le prix d'exercice, la maturité, le nombre de pas de temps, le nombre de simulations et le taux de rendement r .

Le taux de rendement utilisé à chaque pas de temps t pour calculer S_t à partir de S_{t-1} est le taux *forward* $r(0, t-1, t)$ de maturité t et de date d'exercice $t-1$. Il est calculé à partir de la courbe des taux *spot* au 31/03/2023, selon la formule suivante :

$$r(0, t-1, t) = \frac{(1 + s(0, t))^t}{(1 + s(0, t-1))^{t-1}} - 1 ,$$

Où $s(0, t)$ est le taux *spot* à l'instant t .

Une interpolation est réalisée à partir des taux *spot* exprimés en base annuelle, afin d'obtenir des taux *spot* correspondants au pas de temps choisi (trimestriel, mensuel ou hebdomadaire).

Cette interpolation utilise des *splines* cubiques, une méthode qui permet de conserver la forme initiale de la courbe des taux *spot* tout en fournissant une bonne approximation. Les détails de cette méthode sont fournis en annexe D.

Cependant, la limite principale de cette méthodologie est que le taux de rendement considéré à chaque pas de temps t pour diffuser les trajectoires de prix est un taux déterministe entre deux dates consécutives (taux *forward*). L'utilisation de taux courts (taux *spot* instantanés), tel que décrit en 2.1.3 aurait permis d'obtenir des résultats plus précis et plus conformes à ceux fournis par le GSE Star RN.

La fonction implémentée calcule donc le prix d'un *call* pour une maturité et un *strike* donnés, en simulant N trajectoires de prix en n étapes intermédiaires. Le nombre de simulations N et le nombre de pas de temps n sont spécifiés en paramètres.

À chaque intervalle de temps, N trajectoires du prix de l'actif (S) et de la volatilité (ν) sont simulées. Les volatilités sont déterminées en utilisant la méthode de Milstein, en prenant la valeur $-\nu$ pour les volatilités négatives.

Les valeurs du prix de l'actif obtenues au dernier pas de temps sont ensuite utilisées pour calculer le prix moyen du *call* correspondant à la maturité et au *strike* concernés.

N	Pas de projection	Annuelle	Trimestrielle	Mensuelle	Hebdo
		1000	0,0571	0,0491	0,0472
	2000	0,0485	0,0452	0,0449	0,0431
	10000	0,0477	0,0457	0,0423	0,0419

TABLE 3.7 – Comparaison de la somme des carrés des biais de simulation en fonction du pas de projection et du nombre de simulations N

Les résultats obtenus ci-dessus illustrent clairement que la réduction du pas de projection entraîne une diminution du biais de discrétisation pour tous les jeux de scénarios. On observe également une diminution progressive du biais de simulation, pour tous les pas de projection, en augmentant le nombre de simulations, conformément aux explications précédentes. Cependant, cette réduction du biais n'est pas toujours systématique d'un nombre de simulations à un autre. Cela peut être attribué à l'aléa ou au bruit inhérent à l'échantillonnage stochastique. Ainsi, un pas de projection plus fin et une augmentation du nombre de simulations contribuent à une réduction significative du biais de simulation.

Au sein de l'équipe *GMDB*, 1 000 simulations Monte Carlo sont réalisées avec un pas de projection trimestriel, dans le cadre des clôtures Solvabilité II. Il est à noter que la réduction du pas de projection, par exemple en passant à un pas mensuel ou hebdomadaire, associée à un nombre plus important de simulations, aurait probablement permis d'accroître la précision du calcul des prix des actions. Il serait donc souhaitable de mettre en œuvre ces changements. Cependant, leur mise en place présente des contraintes opérationnelles, car elles entraîneraient du temps et des coûts supplémentaires lors des clôtures trimestrielles. En effet, le GSE est utilisé conjointement avec d'autres composantes logiciel telles que le modèle *ALM*. Une réduction du pas de projection au sein du GSE nécessiterait donc également une adaptation au sein du modèle *ALM*, rendant le processus de mise en œuvre plus complexe.

Ainsi, pour atteindre une précision optimale tout en minimisant les contraintes opérationnelles, il est essentiel de trouver un équilibre entre le nombre de simulations et la finesse du pas de temps de projection. Cet équilibre peut être atteint en considérant l'évolution de la précision du calcul en fonction du nombre de calculs effectués.

A cet effet, une analyse approfondie du biais de simulation doit être réalisée pour déterminer le point où l'augmentation du nombre de simulations ou la réduction du pas de temps n'améliore plus significativement la précision des résultats. Identifier ce point permettrait de maximiser l'efficacité des ressources tout en assurant des estimations précises.

En conclusion, bien que l'augmentation du nombre de simulations et la réduction du pas de projection améliorent la précision, il est crucial de prendre en compte les contraintes opérationnelles et les coûts associés pour déterminer le paramétrage optimal. Cela sera détaillé dans la prochaine section.

3.4.2 Choix des paramètres optimaux

Le choix des paramètres optimaux de simulation Monte Carlo consiste à déterminer le nombre de simulations N et le nombre de pas de temps intermédiaires n qui permettent d'obtenir une meilleure précision tout en minimisant la complexité de calcul. Cette complexité est mesurée en prenant en compte le nombre d'opérations effectuées lors du calcul du prix Monte Carlo et s'exprime comme le produit de N et n :

$$C(N, n) = N \cdot n$$

Ainsi, afin d'observer l'évolution de la précision du calcul du prix Monte Carlo en fonction de cette complexité, nous calculons différents prix de *call* en faisant varier N et n . Pour se faire, nous utilisons la fonction Monte Carlo implémentée sur R et décrite précédemment en prenant des valeurs de N entre 1 000 et 50 000 et des valeurs de n de 1, 2, 4, 6, 8, 10 et 12, correspondant à des pas de projection intermédiaires allant d'annuel à mensuel. Nous obtenons ainsi 1 108 combinaisons possibles de couples (N, n) .

Pour chaque couple (N, n) , nous calculons les prix de *call* pour l'ensemble de la matrice d'options en utilisant la forme Monte Carlo du modèle de Heston. Nous comparons ensuite ces prix simulés avec les prix théoriques en calculant la somme des carrés des biais de simulation. Ces erreurs indiquent la précision du modèle et sont associées à une certaine complexité $C(N, n)$. Le graphique ci-dessous illustre l'évolution du biais de simulation en fonction de la complexité :

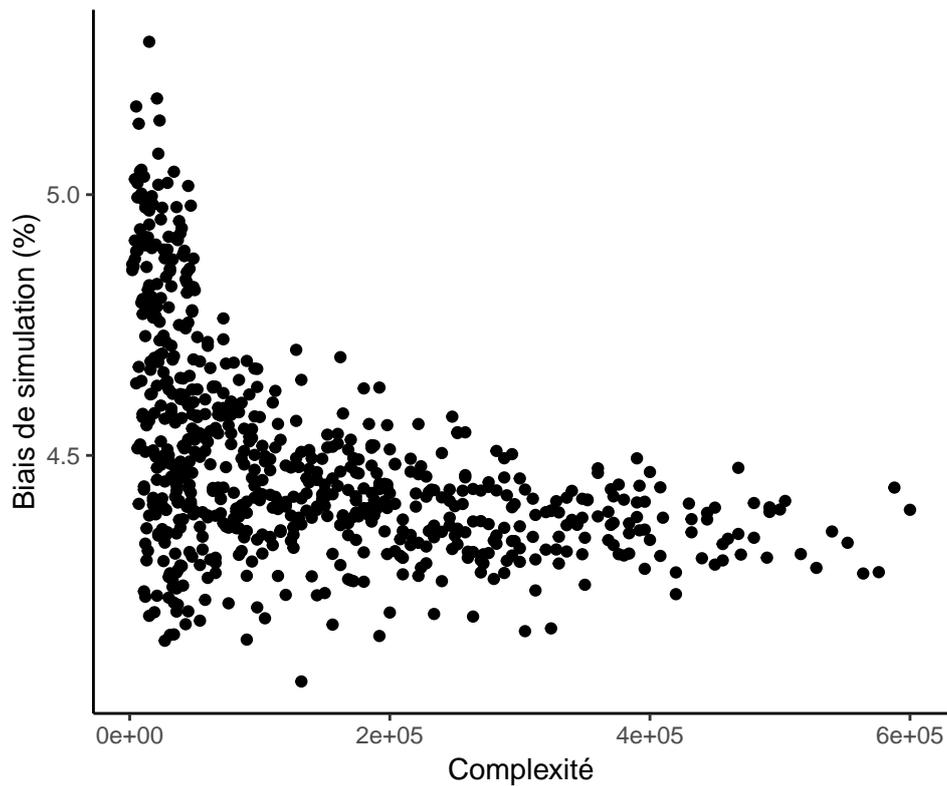


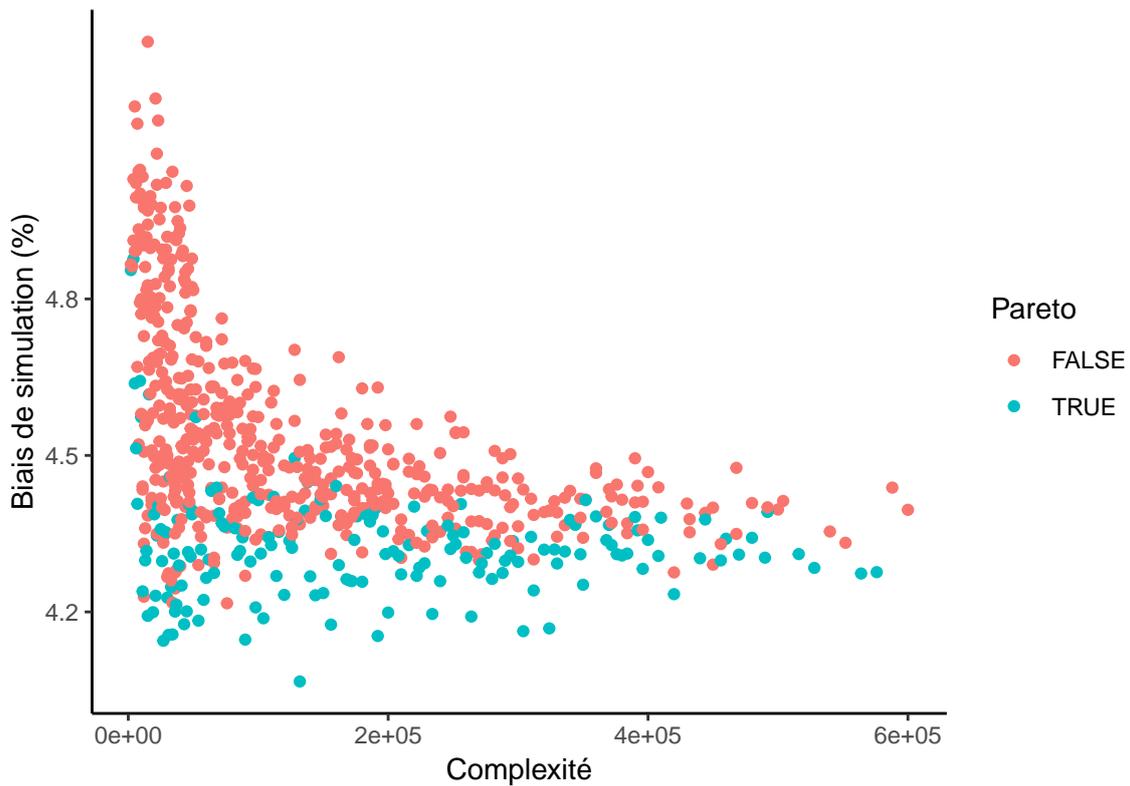
FIGURE 3.4 – Représentation de la somme des carrés des biais de simulation en fonction du niveau de complexité

Il est important de noter que différents couples (N, n) peuvent avoir la même complexité mais des biais de simulation différents. Par exemple, les couples $(1000;4)$, $(4000;1)$ et $(2000;2)$ ont tous les trois la même complexité, mais donnent des biais de simulation différents :

$$C(1000, 4) = C(4000, 1) = C(2000, 2) = 4000$$

En observant le graphique, on remarque une tendance décroissante du biais de simulation en fonction de la complexité. Cependant, cette réduction n'est pas proportionnelle. À mesure que la complexité augmente, le biais de simulation diminue moins significativement, indiquant qu'un très grand nombre de simulations et/ou de pas de temps intermédiaires n'est pas optimal compte tenu du faible gain de précision sur le calcul du prix Monte Carlo.

Pour identifier les combinaisons optimales (N, n) pour chaque niveau de complexité, dans la mesure où il peut exister plusieurs couples (N, n) associés à la même complexité, nous sélectionnons ceux qui offrent le biais de simulation le plus faible. Ces points optimaux sont appelés points de *Pareto* et la courbe passant par ces points est la frontière d'efficacité ou frontière de *Pareto*. Le graphique ci-dessous illustre ces points optimaux marqués par « True » :


 FIGURE 3.5 – Représentation des points de *Pareto* par niveau de complexité

Il est crucial de noter, en considérant le nuage de points de *Pareto* obtenu, qu'il existe certaines complexités C_1 et C_2 tels que $C_2 > C_1$ et $biais_{simu2} > biais_{simu1}$, avec $biais_{simu1}$ et $biais_{simu2}$ étant la somme des carrés des biais de simulation respectivement associée aux complexités C_1 et C_2 . Nous pouvons donc en déduire que l'augmentation de la complexité n'améliore pas systématiquement la précision. Ceci est illustré dans le tableau suivant :

N	n	$C(N, n)$	$biais_{simu}$
11000	12	132000	0.0407
32000	8	256000	0.0441

 TABLE 3.8 – Exemple de combinaisons (N, n) avec complexité croissante mais précision décroissante

Cette observation est due à l'aléa inhérent à l'échantillonnage lors de la simulation des trajectoires de prix, comme indiqué à la suite de la table 3.7. Ce bruit d'échantillonnage provoque la dispersion observée dans le nuage de points de *Pareto* pour des complexités élevées, comme l'illustre la figure 3.5. Par conséquent, pour certaines valeurs élevées de N , et donc de complexité, nous n'observons pas une réduction systématique du biais de simulation.

Ainsi, pour construire la frontière d'efficience, nous sélectionnons les points qui offrent une amélioration de la précision à mesure que la complexité augmente. Autrement dit, nous excluons du nuage de points de *Pareto* les couples (N, n) pour lesquels l'augmentation de la complexité n'apporte pas de gain de précision. Les points restants constituent la frontière d'efficience, à partir de laquelle nous identifierons le point optimal offrant le

meilleur compromis entre précision et complexité.

Construction de la frontière de *Pareto*

La première étape consiste à identifier les points qui constituent la frontière de *Pareto*. Un point appartient à cette frontière s'il n'est dominé par aucun autre point dans l'ensemble de données. Un point x est dit dominé par un point y si et seulement si y est au moins aussi bon que x pour tous les critères et strictement meilleur pour au moins un critère. Dans notre cas, cela signifie :

$$C(x) > C(y) \text{ et } biais_{simu}(x) \geqslant biais_{simu}(y)$$

La fonction `find_pareto_front` illustrée en annexe C, implémente cette identification de manière itérative :

- Elle initialise la frontière de *Pareto* avec le point ayant la plus petite valeur pour le critère d'erreur.
- Pour chaque point du jeu de données, elle vérifie s'il est dominé par un quelconque point déjà sur la frontière. Si le point n'est dominé par aucun des points sur la frontière, il est ajouté à celle-ci.

Concrètement, en considérant l'ensemble des points retenus précédemment (*Pareto* = *True*), soit x_1, \dots, x_k , avec x_p le point ayant la plus petite erreur, la fonction vérifie dans un premier temps si x_1 n'est pas dominé par x_p . Si oui (i.e. si x_1 est dominé par x_p), elle passe à x_2 , et ainsi de suite jusqu'à ce qu'elle trouve le point x_i tel que x_i n'est pas dominé par x_p . Ces deux points sont alors conservés sur la frontière de *Pareto* et testés avec les points restants.

Sélection du point optimal sur la frontière de *Pareto*

Une fois la frontière de *Pareto* identifiée, la sélection du point optimal est réalisée en utilisant une fonction objectif pondérée. Cette fonction combine les critères de complexité et d'erreur, normalisés pour les rendre comparables, et applique une pondération reflétant l'importance relative de chaque critère.

La fonction `find_optimal_point` également illustrée en annexe C, procède comme suit :

- Normalisation des critères de complexité ($C(N, n)$) et d'erreur ($biais_{simu}$) afin que leurs valeurs soient comprises entre 0 et 1. Posons $x = (N, n)$, on a :

$$f_1(x) = \frac{C(x) - \min(C(x))}{\max(C(x)) - \min(C(x))}$$

$$f_2(x) = \frac{biais_{simu}(x) - \min(biais_{simu}(x))}{\max(biais_{simu}(x)) - \min(biais_{simu}(x))}$$

- Calcul d'une fonction objectif pondérée pour chaque point x de la frontière de *Pareto* :

$$g(x) = \alpha \cdot f_1(x) + \beta \cdot f_2(x)$$

où α et β sont les poids attribués à la complexité et à l'erreur respectivement. Nous utilisons des poids égaux ($\alpha = \beta = 0,5$) pour ne pas favoriser un critère par rapport à l'autre,

- Identification du point ayant la plus petite valeur de cette fonction objectif pondérée, qui est alors considéré comme le point optimal.

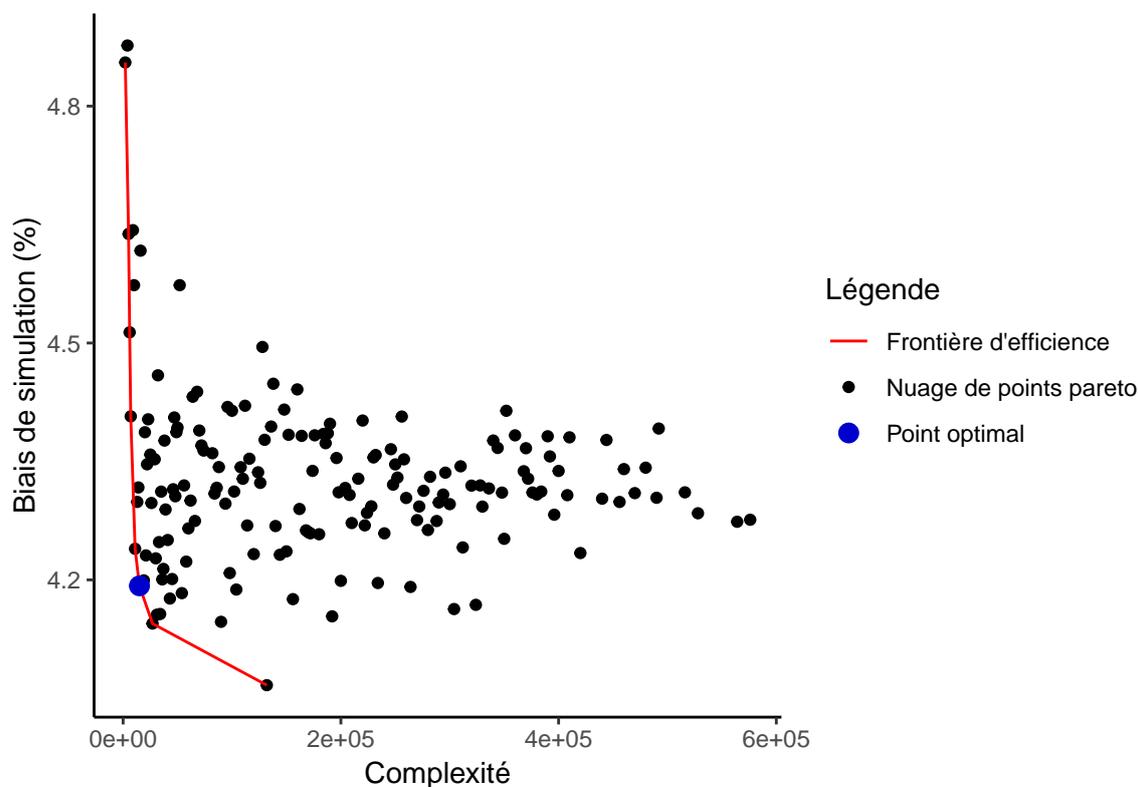


FIGURE 3.6 – Frontière d’efficacité avec point optimal

Les points de la frontière d’efficacité sont ceux qui ne sont pas dominés, chaque point ayant une complexité plus grande présente une meilleure précision. Ces points de *Pareto* sont résumés dans le tableau suivant :

N	n	$C(N, n)$	$biais_{simu}$	$\Delta bias_{simu}(\%)$	opti ($g(x)$)
2000	1	2000	0,0486	0,0000	0,5000
2500	2	5000	0,0464	-4,4731	0,3739
1500	4	6000	0,0451	-2,6860	0,2987
3500	2	7000	0,0441	-2,3581	0,2351
1375	8	11000	0,0424	-3,8065	0,1441
2500	6	15000	0,0419	-1,1069	0,1298
4500	6	27000	0,0414	-1,1393	0,1456
11000	12	132000	0,0407	-1,8834	0,5000

TABLE 3.9 – Points de *Pareto* avec les résultats de minimisation de la fonction objectif

Le point optimal pour l’assureur, c’est-à-dire celui qui minimise la fonction objectif est le couple ($N = 2500, n = 6$), qui correspond à 2 500 simulations Monte Carlo et un pas de projection bimestriel, comme illustré sur la figure 3.5. C’est celui qui offre le meilleur compromis entre précision et complexité. Comparativement, l’équipe *GMDB* génère actuellement 1 000 simulations Monte Carlo avec un pas de temps trimestriel ($N = 1000, n = 4$),

entraînant un biais de simulation de 0,0491. Le passage au point optimal améliore la précision de 14,66% par rapport à la configuration initiale.

Néanmoins, le test de martingalité réalisé à la suite du calibrage initial a révélé la risque neutralité des trajectoires générées au seuil de 5%, et ce, pour toutes les dates de projection.

Somme toute, le modèle de Heston permet une répliation plus précise des prix de marché du fait du processus de volatilité qui permet de capturer le *smile* de volatilité observé sur le marché. Cela justifie son utilisation, même si le modèle a tendance à générer des écarts de convergence plus importants entre les prix simulés via Monte Carlo et les prix théoriques, en raison notamment de son processus de volatilité stochastique.

L'objectif de cette partie était de s'assurer de la précision du GSE en réalisant une étude en interne. Jusqu'au 31/12/2022, les scénarios étaient directement fournis par WTW, le fournisseur de l'outil Star RN de génération de scénarios économiques risque neutre. Depuis cette date, Partner Re a commencé à prendre partiellement en charge la génération des scénarios utilisés pour évaluer la garantie plancher. L'une des préoccupations de l'équipe *GMDB* était de s'assurer de la qualité des modèles utilisés, en particulier du modèle action, sachant que, comme expliqué précédemment, des modèles continus à volatilité stochastique tels que le modèle de Heston peuvent induire des écarts de convergence relativement importants.

Chapitre 4

Validation du modèle action

La gouvernance applicable au GSE doit permettre de garantir que l'erreur de modèle demeure limitée et fait l'objet d'un suivi, notamment en ce qui concerne les tests de validation statistique mentionnés dans la Notice 5.15 (martingalité, corrélation et cohérence avec les données de marché) (ACPR, 2020). En outre, l'externalisation du GSE n'exonère pas l'organisme d'assurance de s'assurer de la qualité des travaux réalisés par le prestataire et des scénarios produits par le GSE, dont l'organisme conserve la responsabilité ; il doit en particulier procéder au test dit de « martingalité », le test de corrélation et le test de cohérence avec les données de marché, appelé également test de « *market consistency* » (ACPR, 2020). Le chapitre précédent a permis d'évaluer, entre autres, la « *market consistency* » de produits dérivés d'actions. Toutefois, il s'agit également d'examiner la cohérence des prix issus des trajectoires projetées avec ceux observés sur le marché à travers le test de martingalité.

Le GSE utilisé par Partner Re pour la valorisation de la *GMDB* est fourni par WTW. L'entreprise fournit à chaque clôture les jeux de scénarios, ainsi que les tests de martingalité associés à ceux-ci.

De fait, afin d'être conforme aux exigences réglementaires liées à Solvabilité II citées ci-dessus, nous effectuons dans le cadre de ce mémoire le test de martingalité sur l'indice action, à la suite du calibrage effectué au premier trimestre 2023. L'objectif est d'évaluer la précision et la cohérence des trajectoires simulées. Étant donné l'impact significatif du modèle d'actions sur le GSE, il est essentiel de garantir sa validité.

Dans un modèle *market consistent*, le rendement attendu de tous les actifs négociés est le taux d'intérêt sans risque et les scénarios doivent reproduire les prix actuels du marché. Cela signifie que pour tous les actifs négociés non générateurs de revenus, l'équation suivante s'applique à tous les moments futurs T :

$$\mathbb{E} (A(T) \cdot D(T)) = A(0) \cdot D(0)$$

,

Avec :

- $A(T)$ la valeur de l'actif au temps T , $A(0) = 1$
- $D(T)$ le déflateur au temps T , $D(0) = 1$

4.1 Test de Martingalité

Le test martingale repose sur la règle financière suivante : « sous la probabilité risque neutre, la valeur actualisée du sous-jacent est une martingale », ce qui n'est valable qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA).

Soit un actif quelconque de valeur $(A_t)_{t \geq 0}$, avec $X_t = D(t) \cdot A(t)$ le processus de prix actualisé lui étant associé. M_t est une martingale si pour tout $s < t$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$$

En particulier, pour $s = 0$:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_t] = X_0 = A(0)$$

Le test de martingalité consiste à vérifier numériquement l'égalité ci-dessus. Cependant, il convient de noter que, bien que cette dernière valide une caractéristique des processus martingales, elle n'est qu'une condition nécessaire et non suffisante à la martingalité. Néanmoins, ce test permet de détecter de manière efficace les écarts de convergence dus à la non-martingalité des actifs projetés. A cette fin, un test bilatéral au seuil α égal à 5%, est mis en place, les hypothèses du test sont les suivantes :

$$\begin{cases} H_0 : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_t] = A(0) \\ H_1 : \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_t] \neq A(0) \end{cases}$$

Afin de réaliser ce test, un échantillon de $n = 1000$ variables aléatoires indépendantes et de même loi que X_t est constitué, à chaque pas de projection t . Il contient les déclinaisons de X_t dans chacune des trajectoires économiques simulées et s'écrit :

$$(X_t^1, \dots, X_t^n)$$

Ci-dessous, sera présentée la notion d'intervalles de confiance, permettant de valider le test de martingalité. En effet, comme nous travaillons avec des simulations de Monte Carlo, le résultat attendu est compris dans un intervalle de confiance, exprimé en particulier à l'aide de la variance de la loi empirique. Nous présenterons également la méthode de réduction de la variance utilisée au sein de l'outil pour améliorer la précision des résultats de la simulation en diminuant la variabilité associée à un cycle de Monte Carlo. Cette approche s'avère particulièrement utile lorsque le nombre de scénarios est limité.

4.1.1 Intervalles de confiance

L'idée de la construction des intervalles de confiance est d'arriver à déterminer la probabilité avec laquelle les scénarios économiques permettent de valider le test martingale.

En posant $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ avec $X_i = A_i(T) \cdot D_i(T)$, où n représente le nombre de scénarios, puis en utilisant le théorème central limite et la loi forte des grands nombres, l'intervalle de confiance est donné par :

$$P \left(x \in \left[-q_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{V(X)}{n}} + \bar{X}; q_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{V(X)}{n}} + \bar{X} \right] \right) = 1 - \alpha$$

Avec $V(X)$ la variance de X .

En supposant $A(0) = 1$, nous obtenons la relation suivante :

$$P\left(x - A(0) \in \left[-q_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{V(X)}{n}} + \bar{X} - 1; q_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{V(X)}{n}} + \bar{X} - 1\right]\right) = 1 - \alpha$$

Etant donné que $|x - A(0)| < \epsilon$, il peut être déduit par indentification que :

$$\begin{cases} q_{-\frac{\alpha}{2}} = (0,5\% - 1 + \bar{X}) \cdot \sqrt{\frac{n}{V(X)}} \\ q_{\frac{\alpha}{2}} = (0,5\% + 1 - \bar{X}) \cdot \sqrt{\frac{n}{V(X)}} \end{cases}$$

Il est alors possible de déterminer la valeur des quantiles, et en déduire la probabilité que la différence entre la moyenne des scénarios économiques et la première valeur soit supérieure à $-\epsilon$, et la probabilité que la différence entre la moyenne des scénarios économiques soit inférieure à ϵ , à l'aide d'une table de loi normale, et ce, à chaque pas de temps.

En cas de probabilités fortes, surtout pour un nombre important d'années, il sera plus facile d'avoir des scénarios économiques validant le test correspondant au seuil choisi.

4.1.2 Méthode de réduction de variance

Dans le cadre d'une valorisation Monte-Carlo, le nombre de scénarios utilisés influe directement sur la précision du calcul. De fait, plus le nombre de scénarios est important, plus les simulations moyennes en valeur actuelle à chaque pas de projection vont se rapprocher de la valeur initiale.

Dans de nombreuses situations pratiques, le choix du nombre de simulations est guidé par la nécessité de concilier deux objectifs contradictoires. D'une part, il est fortement souhaitable d'opter pour un nombre plus élevé de simulations afin de réduire la variance associée à l'exécution de Monte Carlo et, par conséquent, l'erreur de simulation. D'autre part, étant donné que le GSE fait partie d'un système d'entreprise plus vaste et qu'il est utilisé en conjonction avec d'autres composants logiciels tels que le modèle *ALM*, l'utilisation d'un nombre plus élevé de simulations peut entraîner des temps d'exécution peu pratiques.

Un minimum de 1 000 scénarios est généralement nécessaire pour garantir une précision convenable (ACPR, 2020).

L'équipe *GMDB* utilise 1 000 scénarios aléatoires risque neutre pour valoriser le produit. Afin de réduire l'incertitude entourant la valeur du BE à un nombre de scénarios constant, une méthode de réduction de variance est utilisée au sein du GSE Star RN lors de la simulation des scénarios.

Les techniques de réduction de la variance sont des méthodes conçues pour réduire la variance associée à un cycle de Monte Carlo en utilisant un nombre fini de simulations. Ces techniques permettent à un GSE d'atteindre un niveau de précision élevé même avec un nombre limité de simulations. La technique spécifique de réduction de la variance employée est le rééchantillonnage.

Le rééchantillonnage est une technique de réduction de la variance utilisée pour réduire les erreurs dans les tests de martingale. Cette méthode implique le rééchantillonnage des nombres aléatoires (c'est-à-dire la génération de nouveaux nombres aléatoires) et la re-simulation de l'étape de projection si l'erreur du test de martingale dépasse un certain seuil. Ainsi, cette approche vise à garantir que les tests de martingale se rapprochent davantage de leur valeur théorique, même avec un nombre réduit de scénarios.

Plus précisément, le processus de simulation s'effectue comme suit : tout d'abord, les taux sont simulés pour toutes les trajectoires et à tous les pas de temps. Ensuite, les indices sont générés un par un (chaque indice est simulé pour toutes les trajectoires et à tous les pas de temps avant de passer au suivant). Lorsqu'un actif donné est généré (qu'il s'agisse des taux ou d'un indice), toutes les trajectoires sont générées pour le premier pas de temps, puis pour le deuxième pas de temps, et ainsi de suite jusqu'au dernier pas de temps souhaité. À chaque pas de temps, un test martingale est effectué pour vérifier si la différence entre la moyenne des rendements générés pour l'actif considéré et la valeur initiale de l'actif est suffisamment proche de la valeur attendue. Si ce n'est pas le cas pour un pas de temps donné, la génération de l'actif en question est reprise pour le pas de temps concerné.

4.1.3 Résultats du test de martingalité de l'indice action

Le test de martingalité de l'indice action vérifie à chaque pas de temps si :

$$\frac{E(S(T) \cdot D(T))}{S(0)} = 1$$

Avec $S(T)$ le prix de l'indice action au temps T . L'espérance est approchée par l'estimateur empirique de la moyenne.

Cela implique à tester en pratique si :

$$\left| \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i(t) \cdot D_i(t)\right)}{S(0)} - 1 \right| < \epsilon$$

Avec n le nombre de trajectoires et ϵ le niveau du test martingale.

Avec $n = 1000$ simulations Monte Carlo, nous procédons initialement au calcul des prix $S(t)$ des actions sur 160 trimestres. Ensuite, les valeurs du déflateur sont calculées trimestriellement à partir des rendements du *cash*, également obtenus par simulations Monte Carlo à l'aide du modèle de taux. Nous déterminons ainsi le prix moyen des actions pour chaque pas de projection t en prenant la moyenne des prix des actions sur les n scénarios économiques. L'hypothèse H_0 est conservée au niveau de confiance $1 - \alpha = 95\%$ pour toutes les dates de projection t . Les résultats graphiques présentant les valeurs des intervalles de confiance ainsi que les rapports $\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i(t) \cdot D_i(t)}{S(0)}$ (représentant les valeurs de la martingale) sont illustrés ci-dessous :

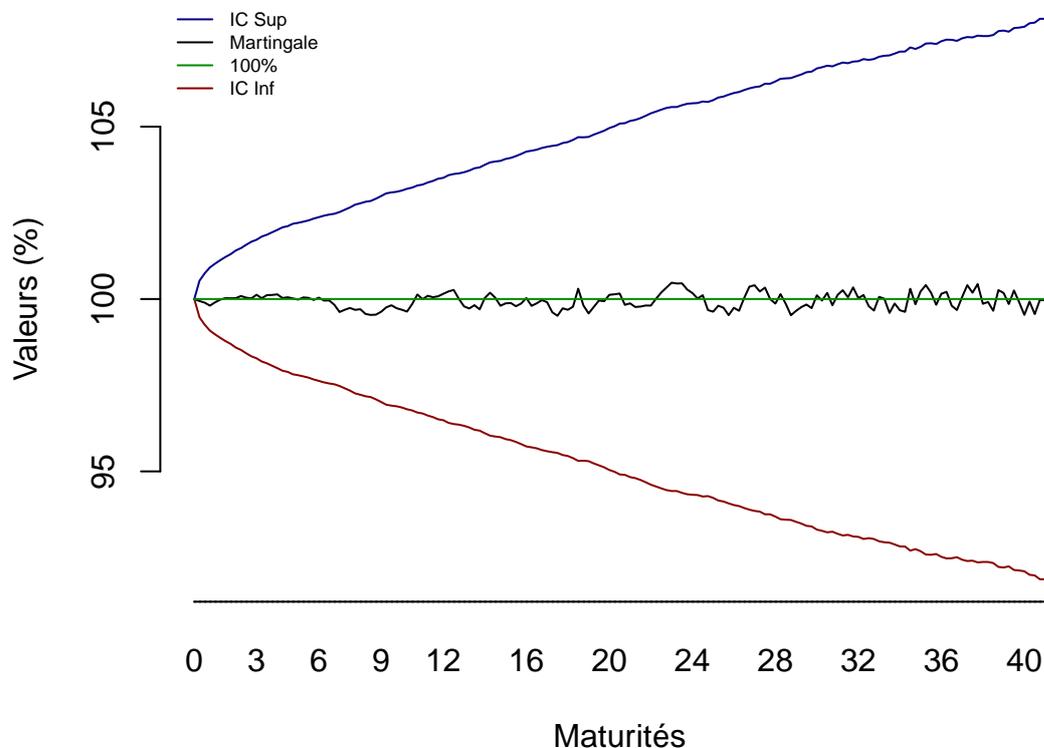


FIGURE 4.1 – Résultats du test de martingalité de l’indice action suite au calibrage effectué au 31/03/2023

Les intervalles de confiance s’éloignent de plus en plus de la valeur cible de 100% à mesure de la projection. Les valeurs de la martingale, représentant le rapport entre le prix obtenu à partir de la moyenne des n scénarios économiques et la valeur initiale du prix, semblent être relativement proches de 100% pour toutes les dates de projection.

4.1.4 Influence du nombre de scénarios

Les résultats issus du test de martingalité varient en fonction du nombre scénarios. Le nombre de scénarios est un paramètre essentiel dans l’optimisation de la convergence, un nombre de scénarios plus important améliore la convergence du GSE. Cela découle de la loi forte des grands nombres.

Pour illustrer ce point, nous avons simulé un indice action en maintenant tous les autres paramètres égaux et en faisant varier le nombre de scénarios économiques simulés. Le schéma ci-dessous illustre l’évolution de l’écart de convergence ($|$ valeur de la martingale - 1 $|$) suite au test de martingalité en fonction du nombre de scénarios.

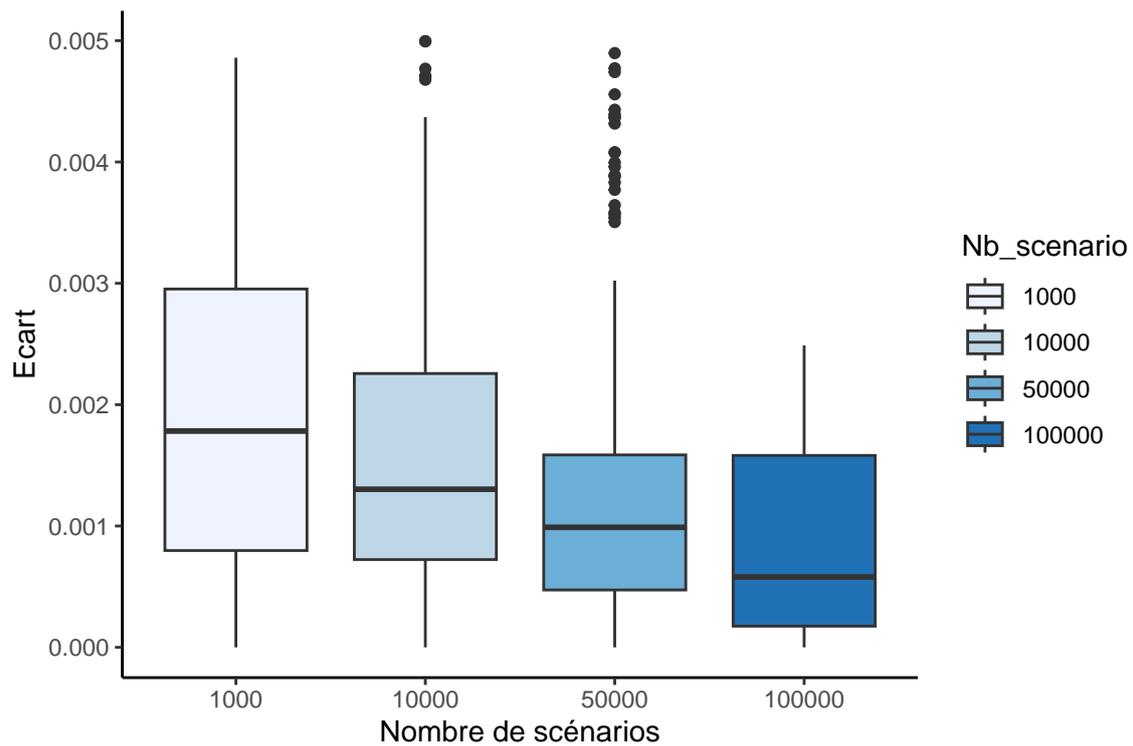


FIGURE 4.2 – Evolution des écarts de convergence en fonction du nombre de scénarios suite au test de martingalité

Le schéma présenté ci-dessus illustre une diminution de la médiane issue de la distribution des écarts de convergence en fonction du nombre de scénarios. On observe des valeurs d'écarts de plus en plus petites à mesure que le nombre de trajectoires simulées augmente. La médiane varie d'environ 0,17% pour 1 000 scénarios à environ 0,05% pour 100 000. Ainsi, l'augmentation du nombre de scénarios semble considérablement réduire les écarts de convergence de l'estimateur de Monte-Carlo.

Troisième partie

Calibrage du modèle action sur les données les plus pertinentes compte tenu du risque du réassureur

Le calibrage des modèles constitutifs du GSE repose généralement sur des hypothèses de pondération, lesquelles servent à classer les données de calibrage en fonction de leur importance relative. Dans sa revue intitulée « Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques », l'ACPR recommande aux assureurs de calibrer ces modèles sur les données les plus pertinentes, en tenant compte des caractéristiques des engagements, notamment en termes de durée. Par ailleurs, il est recommandé d'effectuer des sensibilités aux hypothèses de pondération afin de garantir la stabilité du BE vis-à-vis de celles-ci.

Des approches basées sur le *vega*¹ peuvent également être employées pour déterminer les données de calibrage les plus pertinentes compte tenu des caractéristiques des engagements, permettant ainsi d'objectiver les pondérations retenues.

Dans cette section, nous présentons un processus de calibrage du modèle d'action (Heston) en mettant l'accent sur les données pertinentes du point de vue de la garantie plancher, compte tenu de l'engagement du réassureur en termes de durée.

1. Le *vega* mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations de la volatilité implicite.

Chapitre 5

Calibrage de l'indice action par pondération de certaines données de marché

L'approche de cette méthode repose sur l'assignation de poids plus élevés à certaines données de calibrage, accordant ainsi davantage d'importance à ces données dans le processus de calibrage. La sélection de ces données tient compte du profil de risque du réassureur, notamment en termes de durée. Cette méthode conduit à des résultats d'optimisation plus alignés sur les données surpondérées.

La méthode implique de spécifier les parties de la matrice d'options considérées comme les plus ou les moins pertinentes en leur appliquant des valeurs de pondération supérieures ou inférieures à 1. Par exemple, pour focaliser le calibrage sur les données des maturités longues, des valeurs de pondération supérieures à 1 sont attribuées aux données correspondantes. En parallèle, afin que le processus de calibrage ne tienne pas compte de certaines données, peut-être en raison de la présence de points non liquides, des valeurs de pondération inférieures à 1 sont attribuées à ces données.

Naturellement, les données ayant une pondération inférieure à 1 présenteront, à la suite du calibrage, des erreurs quadratiques plus élevées.

La fonction objectif adopte la forme suivante :

$$R_w = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^T w_{i,j} (C_{i,j}^{market} - C_{i,j}^{Heston})^2$$

En notant N et T , respectivement le *Strike* et la maturité de l'option.

Dans le cadre de cette étude, les données de calibrage auxquelles seront attribués des poids plus importants sont sélectionnées en fonction du risque accru qu'elles représentent pour le réassureur, en considération des caractéristiques spécifiques de ses engagements. Ces données seront identifiées dans le chapitre suivant.

5.1 Détermination des données de calibrage pertinentes

Afin d'évaluer de manière plus précise les engagements du réassureur dans le cadre de la garantie plancher (*GMDB*), nous appliquons des poids plus importants aux données considérées comme les plus pertinentes sur le périmètre *GMDB*. Ces données dites pertinentes correspondent à celles qui sont les plus sensibles en termes de maturités, notamment celles situées autour de la durée des sinistres (c'est-à-dire du passif).

Choix des maturités les plus représentatives

La durée d'une série de flux financiers se définit comme la moyenne des durées à courir entre le jour du calcul et la date de paiement de chaque flux (durée de vie du flux), pondérée par la valeur actuelle probable du flux :

$$Duration = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{i \cdot Flux_i \cdot Proba_i}{(1+r)^i}}{\sum_{i=1}^n \frac{Flux_i \cdot Proba_i}{(1+r)^i}}$$

Avec :

- i l'année de paiement,
- $Flux_i$ le flux payé l'année i ,
- $Proba_i$ la probabilité de payer le flux de l'année i ,
- r le taux d'actualisation.

Pour des flux de passif, la durée représente la date moyenne de paiement de ces flux par l'assureur, pondérée par leur valeur probable actualisée.

De fait, les données pertinentes à considérer en ce qui concerne les maturités sont celles qui entourent la durée des sinistres.

La durée des sinistres sur le périmètre *GMDB* étant d'environ 20 ans au 31/03/2023, nos flux de passif se matérialiseront dans environ 20 ans à partir de maintenant. Nous souhaitons donc que la valorisation des flux à 20 ans de nos différents produits dérivés, en particulier nos produits dérivés sur actions, soit la plus précise possible. Le but ultime est de valoriser le BE, qui est un vecteur de flux actualisés. Ainsi, pour garantir une valorisation la plus précise possible, il est crucial que nos flux, en particulier ceux autour de la durée, soient les plus justes possibles. Par conséquent, nous optons pour une pondération plus forte des données de calibrage correspondant aux maturités les plus longues.

Pour rappel, le calibrage du modèle est réalisé sur des données de marché, à savoir les prix d'options sur l'indice *Euro Stoxx 50* datant du 31/03/2023, qui couvrent une plage de maturités allant de 1 à 9 ans. Cette sélection de maturités est guidée par des considérations de liquidité du marché. En effet, il est essentiel que les données utilisées pour le calibrage du GSE respectent les exigences de transparence, de liquidité et de profondeur définies aux articles 1§32 à 1§35 du règlement délégué.

Ainsi, dans cette méthode de calibrage, les données de marché jugées les plus pertinentes à surpondérer sont celles correspondant aux maturités les plus longues disponibles, soit de 5 à 9 ans. Le niveau de surpondération a été déterminé de manière empirique, en

testant plusieurs niveaux de pondération jusqu'à identifier celui qui permettait de réduire efficacement le biais de calibrage sur les maturités longues. L'idée sous-jacente est que, en cherchant à reproduire de manière plus précise les prix des options sur ces maturités plus étendues, le modèle sera meilleur pour les maturités encore plus longues.

Afin d'illustrer notre approche en ce qui concerne les données de calibrage représentatives au sein du périmètre *GMDB*, nous avons effectué un calibrage en accordant des pondérations plus élevées aux données des maturités courtes (soit celles de 1 à 4 ans). Les résultats seront présentés ultérieurement.

Il est important de rappeler qu'à ce stade, nous avons accompli trois processus de calibrage. Le premier a été réalisé sans pondération, le deuxième en appliquant une surpondération de 100 sur les maturités longues, et enfin le troisième avec une surpondération de 100 sur les maturités courtes. Ce dernier processus de calibrage nous servira à étayer nos arguments concernant le choix des données de calibrage pertinentes à surpondérer au sein du périmètre *GMDB*, à savoir les données des maturités longues.

5.2 Résultats et impact sur le BE

Le calibrage du modèle actions, tel que décrit précédemment (surpondération des données de calibrage pertinentes), a été réalisé en utilisant des données de marché annuelles au 31/03/2023. Les résultats obtenus seront décrits dans les prochains paragraphes.

5.2.1 Résultats du calibrage

Paramètres	Bornes inférieures	Valeurs initiales	Bornes supérieures	Valeurs optimisées
λ	0	0,2	1	0.03
η	0,0001	0,02	0,7	0.11
ρ	-1	-0,1	1	-1
ν_0	0,0001	0,04	0,2	0.02
$\bar{\nu}$	0,0001	0,04	0,2	0.2

TABLE 5.1 – Résultats du calibrage du modèle de Heston par pondération des données pertinentes (maturités longues)

Paramètres	Sans pondération	Surpondération des maturités longues
λ	0,13	0,03
η	0,13	0,11
ρ	-1	-1
ν_0	0,02	0,02
$\bar{\nu}$	0,07	0,2

TABLE 5.2 – Comparaison des résultats de calibrage obtenus à travers les deux méthodes

A la suite du calibrage en attribuant des poids plus importants aux données les plus sensibles, nous observons une variation significative de deux paramètres : le paramètre de volatilité à long terme $\bar{\nu}$ et le paramètre de vitesse de convergence vers la volatilité à long terme λ .

On observe une augmentation du paramètre de volatilité à long terme $\bar{\nu}$, passant de 7 % à 20 %. L'augmentation du paramètre de volatilité à long terme reflète une perception accrue de l'incertitude à long terme sur le marché et se traduit par une augmentation du prix des options.

Par ailleurs, nous observons une diminution du paramètre de vitesse de convergence vers la volatilité à long terme λ . Cette réduction indique que le marché réagit de manière plus lente aux chocs de volatilité. En conséquence, les volatilités stochastiques convergent progressivement vers des valeurs plus élevées avec une vitesse réduite. Cette modification pourrait être attribuée à l'application de poids plus importants sur les maturités longues, influençant ainsi la valeur des volatilités à long terme.

En outre, les valeurs de volatilité initiales ν_0 restent constantes, et le paramètre η , représentant la volatilité du processus de variance, varie très faiblement.

1 000 simulations Monte Carlo de prix actions ont été réalisées à la suite de ce calibrage. La figure ci-dessous illustre les variations observées, résultant du calibrage en accordant une pondération plus importante aux données de marché sensibles, telles qu'elles ont été décrites précédemment :

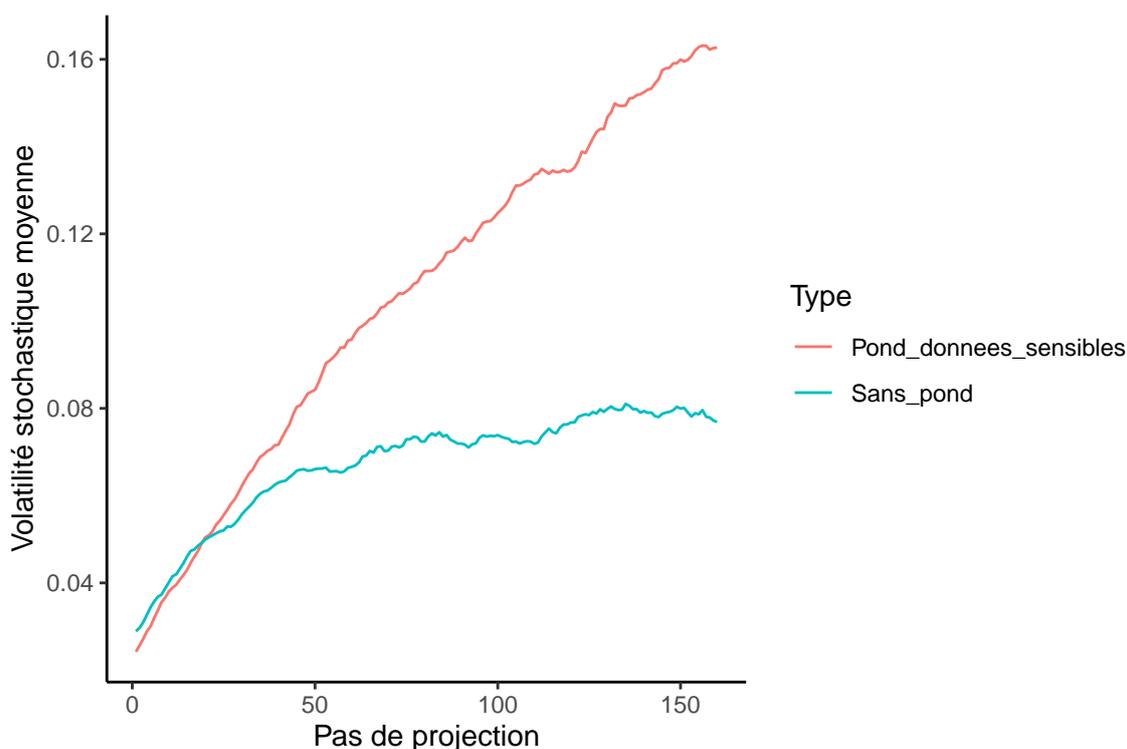


FIGURE 5.1 – Volatilité stochastique moyenne des prix actions pour chaque pas de projection pour les deux types de calibrage effectués

5.2.2 Impact sur la TVOG

Le but du GSE étant de déterminer la TVOG, nous avons comparé la TVOG calculée à partir des 2 ensembles de 1 000 scénarios (1 000 scénarios sans pondération et 1 000 scénarios avec pondération des maturités longues) afin d'évaluer l'impact concret du calibrage par pondération des données les plus sensibles.

CHAPITRE 5. CALIBRAGE DE L'INDICE ACTION PAR PONDÉRATION DE CERTAINES DONNÉES DE MARCHÉ

Les calculs ont été effectués exclusivement sur une cédante spécifique, choisie en raison de son rapport TVOG de sinistres sur TVOG de primes particulièrement élevé. De plus, il est important de noter que cette cédante est entièrement investie en unités de compte.

Cédante	Valeur du fond euro	Valeur du fond UC	% du <i>cash</i>	% de l'indice obligataire	% des actions
X	0	265 495 372,90 €	45,19%	11,86%	42,94%

TABLE 5.3 – Répartition des fonds au sein de la cédante choisie

TVOG sans pondération	TVOG avec pondération	Δ TVOG
12 980 096€	13 421 831 €	3,40%

TABLE 5.4 – Variation de la TVOG à la suite du calibrage par pondération des données les plus pertinentes

L'optionnalité sera plutôt exercée pour les maturités longues, car c'est à ce moment que les engagements de passifs sont les plus importants. La durée moyenne du passif étant de 20 ans, la volatilité cruciale à calibrer est celle correspondant à une période de 20 ans. Par conséquent, si, à la suite de la pondération, cette volatilité devient plus élevée, comme c'est le cas, la valeur de l'option associée à la garantie plancher sera également plus élevée. Par extension, l'augmentation de la volatilité, qui mesure la variation potentielle des prix des actifs induit une augmentation de la TVOG et par conséquent du BE. Cela implique que l'entreprise devra constituer des provisions techniques plus élevées pour couvrir le coût potentiel de la garantie en raison de l'incertitude accrue sur les marchés financiers.

Ainsi, en accordant une pondération plus élevée aux données des maturités longues, on constate une augmentation de 3,4 % de la TVOG.

En outre, bien que l'augmentation de 3,4 % de la TVOG puisse paraître significative du point de vue d'une compagnie d'assurance, du point de vue du réassureur, cet impact demeure raisonnable. Il est important de rappeler que Partner Re réassure la garantie plancher en cas de décès sur l'unité de compte. La cédante choisie pour évaluer l'engagement du réassureur au 31/03/2023 est entièrement composée d'UC, avec une part importante en actions (43 %). Par conséquent, une augmentation de la volatilité des actions peut entraîner un tel impact sur la TVOG.

Comme précédemment mentionné, afin d'illustrer le fait que les maturités courtes ne sont pas représentatives de notre portefeuille, nous avons réalisé 1 000 simulations de prix actions dans lesquelles une pondération plus importante a été appliquée uniquement sur les maturités courtes. Les résultats obtenus sont les suivants :

TVOG sans pondération	TVOG avec pondération des maturités courtes	Δ TVOG
12 980 096€	12 399 514 €	-4,47%

TABLE 5.5 – Variation de la TVOG à la suite du calibrage par pondération des maturités courtes

Le calibrage de l'indice action en appliquant une pondération plus importante sur les maturités courtes conduit à une sous-estimation du passif en induisant une baisse de la volatilité à long terme.

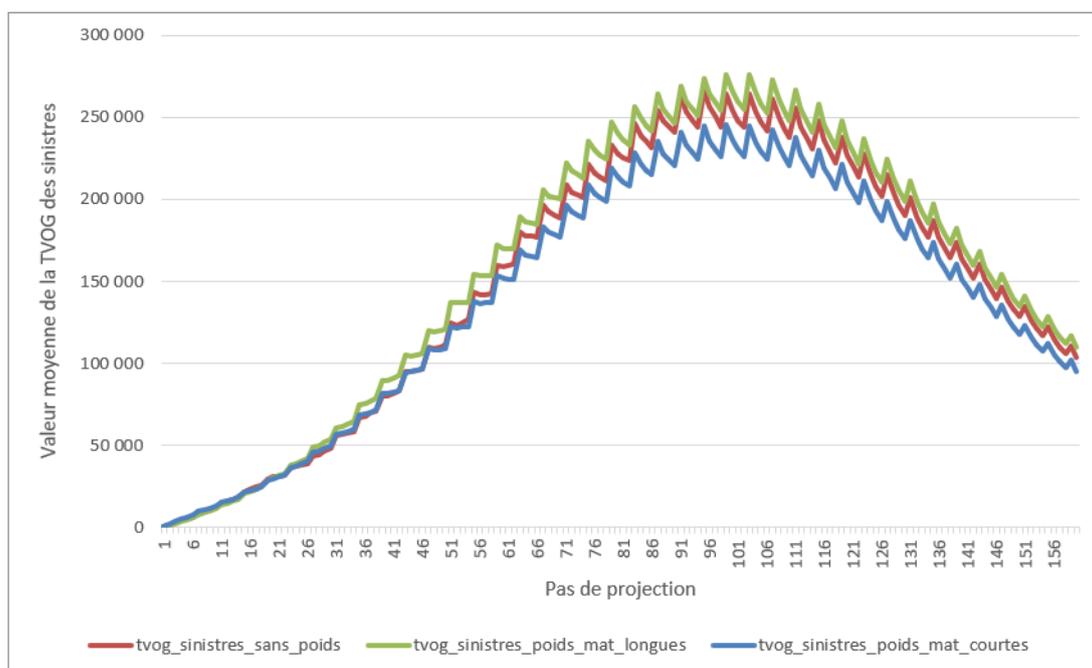


FIGURE 5.2 – Evolution de la valeur moyenne de la TVOG de sinistres sur toute la durée de projection en fonction du type de calibrage

On observe graphiquement qu'en appliquant une pondération plus importante sur les maturités longues, nous parvenons à bien correspondre au pic des sinistres (ainsi que leur montant), qui est atteint au moment de la durée, c'est-à-dire à 20 ans. En revanche, en attribuant une pondération plus élevée aux maturités courtes, le pic des sinistres est plus bas en raison de la sous-estimation des volatilités à long terme. Cela conduit à une sous-estimation du passif, qui a une durée de 20 ans, comme le montre le pic de la cloche sur le graphique.

5.3 Critique de la méthode

Dans le tableau ci-dessous, nous observons que le calibrage du modèle d'action, en attribuant des poids plus significatifs aux données les plus pertinentes dans le cadre du périmètre *GMDB*, a permis d'améliorer la précision de la reproduction des prix du marché, principalement pour les maturités 8 et 9.

Maturités/Moneyness	80%	90%	95%	100%	105%	110%	120%
5	-1.122%	-1.510%	-1.782%	-1.951%	-2.421%	-2.611%	-3.666%
6	-0.616%	-0.818%	-0.837%	-1.061%	-1.104%	-1.273%	-1.603%
7	-0.039%	-0.036%	-0.100%	-0.065%	-0.076%	-0.158%	-0.205%
8	0.454%	0.603%	0.688%	0.780%	0.811%	0.938%	0.994%
9	0.988%	1.243%	1.403%	1.511%	1.684%	1.806%	2.086%

TABLE 5.6 – Variation en valeur absolue des erreurs relatives de calibrage ($|ER_{calibrage}(sans\ poids)| - |ER_{calibrage}(avec\ poids_mat_longues)|$) des parties surpondérées

Cette observation découle de l'application de valeurs de poids identiques aux parties pertinentes de la matrice. Il est important de noter que les prix des options de type *call* évoluent de manière croissante en fonction de la maturité. Par conséquent, les maturités plus longues présentent naturellement une représentation plus prononcée en raison de la croissance des prix au fil du temps. L'application de poids égaux renforce ainsi la représentativité des maturités les plus longues, expliquant la meilleure adéquation du modèle aux prix observés pour les maturités 8 et 9.

Par ailleurs, la méthode de calibrage proposée a entraîné une augmentation globale du biais de calibrage précédemment décrit, due à l'accroissement de ce biais sur les maturités courtes. En effet, la réduction du biais sur les maturités 8 et 9 n'a pas réussi à compenser l'augmentation du biais sur les maturités courtes.

Ainsi, le biais de calibrage, représenté par la somme des carrés des erreurs absolues de calibrage sur l'ensemble de la matrice d'options, passe de 0,0039 à 0,0041. Cela se traduit par une perte globale en termes de cohérence avec le marché (*market consistency*). Cependant, la valeur globale du biais de calibrage reste toujours relativement faible malgré cette augmentation.

5.4 Validation du GSE créé

Pour terminer, le test de martingalité est réalisé pour évaluer la risque neutralité des scénarios générés à la suite du calibrage proposé dans cette section. Ce test a pour vocation de valider le caractère martingale des éléments calculés, en l'occurrence les prix des actions et de garantir la convergence des prix issus du modèle de Heston envers les prix de marché. Pour se faire, 1 000 trajectoires de prix d'actions sont simulées à l'aide de la forme Monte Carlo du modèle de Heston.

5.4.1 Test de martingalité

Le test de martingalité a été effectué en suivant les détails fournis dans le chapitre 4. Les résultats du test de martingalité, réalisé suite au calibrage attribuant des poids plus importants aux données de calibrage les plus pertinentes en fonction du profil de risque du réassureur, sont présentés ci-dessous :

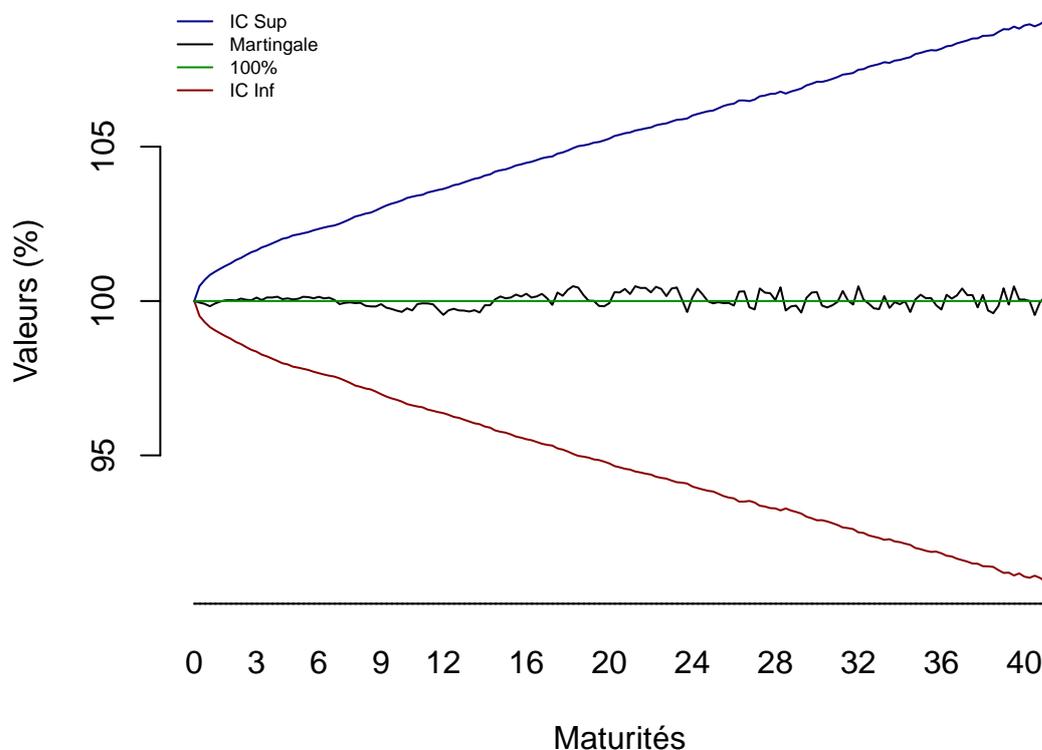


FIGURE 5.3 – Test martingale réalisé suite à la surpondération des données de calibrage les plus pertinentes

L'hypothèse H_0 est conservée au niveau de confiance $1 - \alpha = 95\%$ pour toutes les dates de projection t .

Cependant, pour ce test, la moyenne des écarts de convergence est de 1,7%, ce qui est légèrement plus élevé que la moyenne de 1,5% obtenue lors du test de martingalité effectué suite au calibrage sans pondération. Cette observation est cohérente avec l'augmentation des volatilités à long terme observée à la suite du calibrage proposé dans cette section. Pour une volatilité moyenne à long terme de 7% (niveau de volatilité correspondant au calibrage sans pondération) ou de 20% (niveau de volatilité correspondant au calibrage avec pondération des données de marché pertinentes), les écarts de convergence du test martingale pour 1 000 simulations Monte Carlo sont indiquées ci-dessous :

CHAPITRE 5. CALIBRAGE DE L'INDICE ACTION PAR PONDÉRATION DE CERTAINES DONNÉES DE MARCHÉ

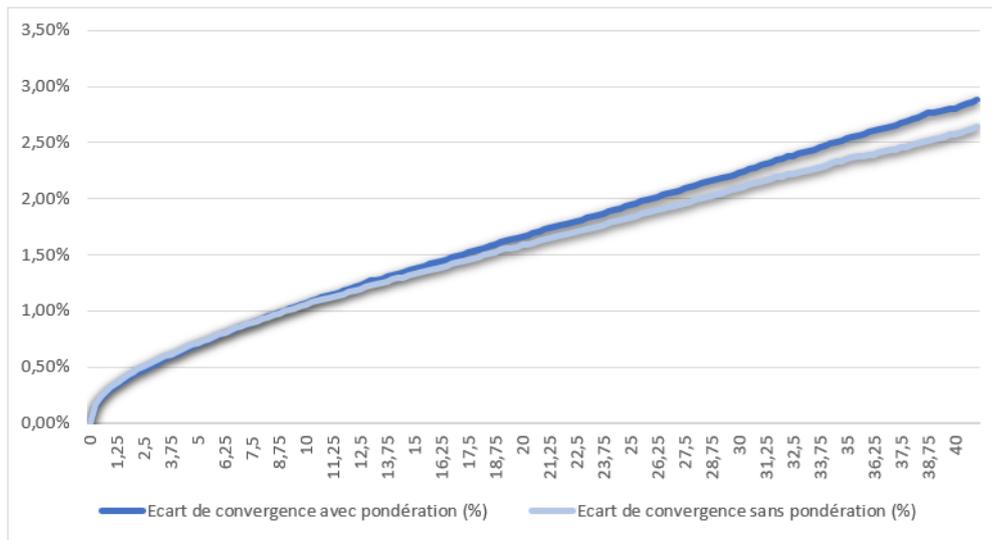


FIGURE 5.4 – Comparaison des écarts de convergence en fonction du type de calibrage

Conclusion

La modélisation stochastique des actions à l'aide du modèle de Heston conduit généralement à des erreurs de discrétisation. A cet effet, l'ACPR enjoint les assureurs à garantir que cette erreur demeure limitée et fait l'objet d'un suivi, notamment en ce qui concerne les tests de validation statistique mentionnés dans la Notice 5.15 (martingalité, cohérence avec les données de marché et corrélation). Ces tests visent à s'assurer de la qualité des scénarios utilisés pour le calcul du BE.

Les travaux réalisés ont permis, d'une part, d'évaluer l'erreur de simulation au sein du GSE Star RN, qui est utilisé pour évaluer la garantie plancher en cas de décès dans un contrat en unités de compte chez Partner Re. Ils ont également permis d'attester de la précision du GSE, en particulier du modèle d'actions, à travers les tests de *market consistency* et de martingalité.

En outre, l'ACPR recommande aux assureurs de réaliser des tests de sensibilité, notamment sur les données de calibrage des modèles constitutifs du GSE, afin de garantir sa robustesse, en accord avec les exigences de la Notice 5.15.

D'autre part, les travaux entrepris ont permis d'établir des hypothèses de pondération lors du calibrage de l'indice action, dans le but de classer les données de calibrage en fonction de leur importance relative. Par conséquent, les données de calibrage les plus pertinentes, en tenant compte des caractéristiques des engagements du réassureur, notamment en termes de durée, ont été soumises à une pondération plus élevée. Ils ont également permis de quantifier l'impact de l'adoption de cette méthode de calibrage sur le *Best Estimate* du réassureur.

Dans le cadre de ce mémoire, les données de marché les plus représentatives, soumises à une pondération plus importante, ont été choisies par le biais d'un jugement d'expert basé sur notre connaissance approfondie du passif, notamment en termes de durée. Avec une durée de 20 ans, la décision de surpondérer les données s'est orientée vers les maturités les plus longues disponibles, caractérisées par des volatilités plus marquées. En effet, une fluctuation des volatilités à long terme a un impact plus significatif sur le portefeuille, et cette pondération est prudente car elle vise à anticiper une hausse de ces volatilités.

Cependant, le choix des données représentatives aurait également pu être réalisé en utilisant d'autres méthodes pour déterminer les données de calibrage pertinentes, telles que les approches basées sur le *vega*. Le *vega* mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations de la volatilité implicite. En pratique, cette approche aurait consisté à recalibrer le modèle en augmentant la volatilité de 1%, puis à évaluer la variation des prix résultants par rapport aux prix initiaux, compte tenu de la variation de volatilité de

1%. Ensuite, les options qui présentent une sensibilité plus élevée auraient été identifiées en fonction de leurs valeurs de *vega*, une valeur élevée indiquant une sensibilité plus prononcée.

L'évaluation des exigences quantitatives imposées par Solvabilité II, réalisée suite au calibrage par pondération des données les plus pertinentes proposée dans le cadre de cette étude, présente un impact de 3,4% sur la TVOG par rapport au calibrage sans pondération utilisé à ce jour au sein de l'équipe *GMDB*. Cette augmentation de la TVOG s'explique par la hausse de la volatilité à long terme, qui induit une augmentation du prix des options, et est cohérente avec le profil de risque du réassureur.

Bibliographie

- ACPR. (2020). Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques.
- ACPR. (2015). NOTICE « Solvabilité II » Provisions techniques (y compris mesures « branches longues »). (s. d.). <https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/%20media/2017/09/25/20151218-notice-solvabilite2-provisions-techniques.pdf>
- ARESKEI, C. (2022). Cours de calcul stochastique appliqué. [Support de cours].
- ASSAM, K. (2011). *Discrétisation de la distribution des trajectoires de l'actif – Application au calcul du Best Estimate d'un contrat d'épargne* (mém. de mast.). CNAM.
- BEN, L. A. (2008). *Recherche de la duration optimale - optimisation par l'algorithme génétique* (mém. de mast.). ISUP.
- BERNARD, R. (2013). *Rentabilité d'un contrat épargne sous Solvabilité 2* (mém. de mast.). ISFA.
- BOCQUAIRE, É., & CAMUS-PARADIS, M. L. (Éd.). (2019). *Les grands principes de l'actuariat* (2^e éd.). L'Argus Éditions.
- BRECHOT, B. (2012). *Enjeux relatifs à l'évaluation d'un portefeuille de contrats participatifs dans le nouvel environnement IFRS* (mém. de mast.). Centre d'études actuarielles.
- BURG, A. (2018). *Etude de la calibration du modèle de taux LMM+* (mém. de mast.). ISFA.
- C., K., & P., J. (2006). Fast strong approximation monte carlo schemes for stochastic volatility models.
- CALIXTE, H. (2010). *Etude de la convergence du générateur de scénarios économiques servant aux calculs de l'European Embedded Value pour les Variable Annuities* (mém. de mast.). ISUP.
- CZARNECKI, P. (2018). *Les générateurs de scénarios économiques dans un environnement de taux bas* (mém. de mast.). ENSAE.
- DELORD, M. (2017). *Evaluation market-consistent des engagements en assurance-vie - Réduction de variance par variable de contrôle* (mém. de mast.). Centre d'études actuarielles.
- GARRIGUE, N. (2011). *Valorisation d'une obligation à sous-jacent panier d'indices* (mém. de mast.). ISFA.
- GIET, L. (2003). *Estimation par inférence indirecte des équations de diffusion : l'impact du choix du procédé de discrétisation* (mém. de mast.). GREQAM.
- MA, H. (2012). *Calibration of Heston Pricing Model -using for the valuation of employee stock option* (mém. de mast.). ISFA.
- POUTÇOU, V. (2022). *Calibrage et impacts du modèle G2++ sur le bilan d'une société d'assurance vie* (mém. de mast.). Université de Strasbourg.
- Règlement délégué (UE) 2015/35 de la commission du 10 octobre 2014 complétant la directive 2009/138/CE du Parlement européen et du Conseil sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (Solvabilité 2). (J.O. 17 janvier

- 2015). <https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/%20media/2017/09/25/20151218-notice-solvabilite2-provisions-techniques.pdf>
- ROMAIN, G. H. L. (2012). *Variable Annuities : Incertitude de Valorisation et Risk Management* (mém. de mast.). ENSAE.
- VELLONE-SCOTT, N. (2020). *Calibration du modèle de Heston avec filtres à particules et ré-échantillonnage par branchement* (mém. de mast.). Université du Québec à Montréal.
- YEDDER, A. B. H. (2007). *Modèle de Heston : Pricing d'options européennes et calibration.*

Table des figures

1	Comparaison des prix de <i>call model</i> -marché pour une <i>moneyness</i> égale à 100%	7
2	Volatilité stochastique moyenne des prix actions pour chaque pas de projection pour les deux types de calibrage effectués	11
3	Comparison of model-market call prices for a moneyness equal to 100% . . .	15
4	Average stochastic volatility of equity prices for each projection step for the two types of calibration performed	19
1.1	Fonctionnement de la <i>GMDB</i>	29
1.2	Comparaison du bilan comptable sous Solvabilité I au bilan économique sous Solvabilité II	34
1.3	Interactions entre le GSE et le modèle <i>ALM</i>	39
3.1	Courbe des taux au 31/03/2023 fournie par l'EIOPA, pour des dates de maturité de 1 à 50 ans	52
3.2	Surface de volatilités implicites de marché de l'indice <i>Euro Stoxx 50</i> au premier trimestre 2023, représentée en 3D	54
3.3	Comparaison des prix de <i>call model</i> -marché par maturité pour une <i>moneyness</i> égale à 100%	64
3.4	Représentation de la somme des carrés des biais de simulation en fonction du niveau de complexité	69
3.5	Représentation des points de <i>Pareto</i> par niveau de complexité	70
3.6	Frontière d'efficience avec point optimal	72
4.1	Résultats du test de martingalité de l'indice action suite au calibrage effectué au 31/03/2023	78
4.2	Evolution des écarts de convergence en fonction du nombre de scénarios suite au test de martingalité	79
5.1	Volatilité stochastique moyenne des prix actions pour chaque pas de projection pour les deux types de calibrage effectués	84
5.2	Evolution de la valeur moyenne de la TVOG de sinistres sur toute la durée de projection en fonction du type de calibrage	86
5.3	Test martingale réalisé suite à la surpondération des données de calibrage les plus pertinentes	88
5.4	Comparaison des écarts de convergence en fonction du type de calibrage . .	89
C.1	Capture du code R utilisé pour la simulation des prix actions via la forme Monte Carlo du modèle de Heston	102
C.2	Capture du code R des fonctions d'interpolation et de calcul des taux <i>forward</i>	103
C.3	Capture du code R permettant de construire la frontière de <i>pareto</i> et de déterminer le point de <i>pareto</i> optimal	103

TABLE DES FIGURES

D.1 Taux <i>spot</i> annuels au 31/03/2023 interpolés en base mensuelle	106
---	-----

Liste des tableaux

1	Comparaison de la somme des carrés des biais de simulation en fonction du pas de projection et du nombre de simulations N	8
2	Comparaison des résultats de calibrage obtenus à travers les deux méthodes de calibrage	10
3	Variation de la TVOG à la suite du calibrage par pondération des données les plus pertinentes	11
4	comparison of the sum of squared simulation biases based on the projection step and the number of simulations N	16
5	Comparison of calibration results obtained using the two calibration methods	18
6	Variation in TVOG following calibration by weighting the most relevant data	19
3.1	Volatilités implicites de marché des <i>swaptions</i> pour les <i>tenor</i> de 1 à 7 ans au premier trimestre 2023	52
3.2	Volatilités implicites de marché des <i>swaptions</i> pour les <i>tenor</i> de 8 à 30 ans au premier trimestre 2023	53
3.3	Volatilités implicites de marché de l'indice <i>Euro Stoxx 50</i> au premier trimestre 2023	53
3.4	Paramètres du modèle de Heston avant et après le calibrage au 31/03/2023	63
3.5	Erreurs relatives des prix de <i>call model</i> -marché d'options de l'indice Euro Stoxx 50	63
3.6	Erreurs relatives des prix Monte Carlo- <i>marché</i> d'options de l'indice Euro Stoxx 50	65
3.7	Comparaison de la somme des carrés des biais de simulation en fonction du pas de projection et du nombre de simulations N	67
3.8	Exemple de combinaisons (N, n) avec complexité croissante mais précision décroissante	70
3.9	Points de <i>Pareto</i> avec les résultats de minimisation de la fonction objectif .	72
5.1	Résultats du calibrage du modèle de Heston par pondération des données pertinentes (maturités longues)	83
5.2	Comparaison des résultats de calibrage obtenus à travers les deux méthodes	83
5.3	Répartition des fonds au sein de la cédante choisie	85
5.4	Variation de la TVOG à la suite du calibrage par pondération des données les plus pertinentes	85
5.5	Variation de la TVOG à la suite du calibrage par pondération des maturités courtes	85
5.6	Variation en valeur absolue des erreurs relatives de calibrage ($ ER_{calibrage}(sans\ poids) - ER_{calibrage}(avec\ poids_mat_longues) $) des parties surpondérées	86

E.1 Prix de *Call* obtenus par simulation Monte Carlo à la suite du calibrage sans pondération 107

E.2 Prix de *Call* obtenus par simulation Monte Carlo à la suite du calibrage par pondération des données de marché pertinentes 107

E.3 Variation en valeur absolue des erreurs relatives de calibrage ($|ER_{calibrage}(sans\ poids)| - |ER_{calibrage}(avec\ poids_mat_longues)|$) sur l'ensemble de la matrice d'options 108

Annexes

Annexe A

Autres concepts mathématiques et financiers

A.1 Mouvement brownien

Un processus stochastique en temps continu $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien avec dérive si (Cousin, 2021 [8]) :

1. $B_0 = 0$ presque sûrement
2. Les accroissements $B_t - B_s$ du processus sont indépendants et stationnaires. Autrement dit, pour toute suite de dates $0 \leq t_1 < \dots < t_n$, les variables $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_1} - B_0$ sont indépendantes, et $\forall t, h > 0$ la loi de $B_{t+h} - B_t$ ne dépend pas de t , mais uniquement de la durée h
3. Les trajectoires de B sont continues

Ces trois conditions impliquent la normalité des incréments :

$$\forall t, h > 0, \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ et } \sigma > 0 \text{ tel que } B_{t+h} - B_t \sim N(\mu h, \sigma^2 h)$$

Lorsque $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, le processus $(B_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard.

A.2 Lemme d'Itô

Le lemme d'Itô est un résultat fondamental de calcul stochastique, permettant de dériver l'expression de processus à partir de leur dynamique.

Soit un processus d'Itô X_t , tel que :

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

Avec W_t un mouvement brownien standard de filtration \mathcal{F}_t et σ_t, μ_t deux processus stochastiques adaptés à \mathcal{F}

Le lemme d'Itô stipule que la dynamique de toute fonction $f(X_t, t)$ de classe \mathcal{C}^2 s'écrit :

$$df(X_t, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)\sigma_t^2 dt$$

A.3 L'algorithme de Gauss-Newton

Soit la fonction à minimiser $S(p)$. Supposons que nous soyons à l'itération n (le vecteur p_{n-1} est connu) de l'algorithme, et que nous cherchions à calculer le vecteur p_n de manière à ce que $S(p_n)$ se rapproche davantage d'un minimum local de S . Pour ce faire, nous calculons une approximation quadratique de S à partir d'une approximation linéaire de f autour de p_{n-1} :

$$f(t, p) = f(t, p_{n-1}) + \nabla f(t, p_{n-1}) \cdot p + \dots$$

Il est important de noter que le gradient $\nabla f(t, p_{n-1})$ est calculé uniquement à partir des composantes du vecteur p . En remplaçant (1.1) dans (0.1), et en déterminant le point p_n où le gradient de S s'annule, on obtient :

$$p_n = p_{n-1} - H^{-1} \cdot \mathbf{d}$$

où

$$\mathbf{d} = \frac{\partial}{\partial p} (S(f(t, p_{n-1}) - y)(\nabla f(t, p_{n-1})))$$

$$H = \frac{\partial}{\partial p} (\nabla f(t, p_{n-1}))(\nabla f(t, p_{n-1}))^T$$

à condition que H soit inversible. La matrice H est une approximation de la hessienne de S au point p_{n-1} calculée à partir du gradient de f . Cet algorithme de Gauss-Newton ne donne en pratique de bons résultats que si f est effectivement proche d'une fonction affine au point p_{n-1} . Sinon, cet algorithme donne de très mauvais résultats.

A.4 L'algorithme de descente de gradient

En considérant de nouveau la fonction $S(p)$ à minimiser, supposons une fois de plus que nous sommes à l'itération n et que nous cherchons à calculer le vecteur p_n en fonction de p_{n-1} de manière à ce que $S(p_n)$ se rapproche d'un minimum local de S . L'idée de la descente de gradient est de suivre la direction opposée au gradient de S au point p_{n-1} :

$$p_n = p_{n-1} - \theta_{n-1} \nabla S(p_{n-1})$$

La longueur du pas θ_{n-1} peut être choisie de différentes manières. Dans une descente de gradient à pas constant, θ_n est constant et sa valeur est fixée au début de l'algorithme. Une autre façon est de prendre une suite décroissante $(\theta_n)_{n \geq 1}$, par exemple $\theta_n = \frac{\alpha}{n}$. Enfin, θ_{n-1} peut être choisie de manière à minimiser S le long de la droite vectorielle dirigée par le gradient $\nabla S(p_{n-1})$. Ainsi,

$$\theta_{n-1} = \operatorname{argmin}_{\theta} S(p_{n-1} - \theta \nabla S(p_{n-1}))$$

Annexe B

Méthode de discrétisation IJK de Kahl et Jäckel

La méthode IJK, introduite par Kahl et Jäckel [Kahl et Jaeckel 78], est utilisée pour simuler l'évolution du prix d'un actif financier et de sa volatilité. Les équations de mise à jour pour le prix de l'actif ($S(t + \Delta t)$) et la volatilité ($\nu(t + \Delta t)$) sont données par :

$$\nu(t + \Delta t) = \frac{\nu(t) + \lambda \bar{\nu} \Delta t + \eta \sqrt{\nu(t)} Z_2 \sqrt{\Delta t} + \frac{1}{4} \eta^2 \Delta t (Z_2^2 - 1)}{(1 + \lambda \Delta t)},$$
$$\ln(S(t + \Delta t)) = \ln(S(t)) + \mu \Delta t - \frac{1}{4} (\nu(t + \Delta t) + \nu(t)) \Delta t + \rho \sqrt{\nu(t)} \sqrt{\Delta t} Z_2$$
$$+ \frac{1}{2} (\sqrt{\nu(t)} + \sqrt{\nu(t + \Delta t)}) (Z_1 - \rho Z_2) \sqrt{\Delta t} + \frac{1}{4} \eta \rho (Z_2^2 - 1) \Delta t.$$

où Z_2 et Z_1 sont les variables aléatoires décrites plus haut.

Les auteurs soulignent que bien que la méthode IJK n'excelle pas en termes d'ordre de convergence par rapport à la méthode log-Euler, elle se distingue par un comportement de convergence supérieur, plus rapide d'un facteur multiplicatif.

Annexe C

Extrait de code R

```
HestonCallMonteCarlo <- function(lambda, vbar, eta, rho, v0, r, tau, S0, K, n, N) {  
  dt <- tau / n          # Pas de temps  
  S <- rep(S0, N)        # Initialisation des prix de l'actif sous-jacent  
  v <- rep(v0, N)        # Initialisation de la variance instantanée  
  
  # Interpolation de la courbe de taux spot pour les pas de temps intermédiaires inférieurs à 1 an  
  if (n != 1) {  
    pas_intermediaires <- seq(0, tau, by = 1/n)  
    taux_spot_interpoles <- interpolation_taux_spot(  
      maturites_cible = pas_intermediaires,  
      maturites_init = seq(1, tau, by = 1),  
      taux_spot_init = r[1:tau]  
    )  
  }  
  
  # Boucle de simulation pour chaque pas de temps  
  for (i in 1:n) {  
    W1 <- rnorm(N)  
    W2 <- rnorm(N)  
  
    # Détermination des taux forward à partir des taux spot  
    if (n == 1) {  
      taux_fwd <- r[tau] # Utiliser le taux à l'échéance si n = 1  
    }  
  
    if (n != 1) {  
      taux_fwd <- calculer_taux_forward(  
        r_t = taux_spot_interpoles[i],  
        r_T = taux_spot_interpoles[i+1],  
        maturite_t = pas_intermediaires[i],  
        maturite_T = pas_intermediaires[i+1]  
      )  
    }  
  
    # Mise à jour des prix de l'actif et de la variance  
    sqvdt <- sqrt(v * dt)  
    S <- S * exp((taux_fwd - v/2) * dt + sqrt(v * dt) * W1)  
  
    v <- (sqrt(v) + eta/2 * sqrt(dt) * W2)^2 - lambda * (v - vbar) * dt - eta^2/4 * dt  
    negCount <- negCount + length(v[v < 0])  
    v <- ifelse(v < 0, -v, v) # Réflexion pour garder v positif  
  }  
  
  # Calcul du prix moyen du call  
  V <- exp(-r[tau] * tau) * (S * pmax(S - K, 0))  
  AV <- mean(V)  
  AVdev <- 2 * sd(V) / sqrt(N) # Erreur standard  
  
  list(value = AV, lower = AV - AVdev, upper = AV + AVdev)  
}
```

FIGURE C.1 – Capture du code R utilisé pour la simulation des prix actions via la forme Monte Carlo du modèle de Heston

```

# Fonction d'interpolation des taux spot avec une spline cubique
interpolation_taux_spot <- fonction(maturites_init, maturites_cible, taux_spot_init) {
  taux_spot_cible <- spline(x = maturites_init, y = taux_spot_init, xout = maturites_cible)
  return(taux_spot_cible$y)
}

# Fonction permettant de calculer les taux forward à partir des taux spot
calculer_taux_forward <- fonction(r_t, r_T, maturite_t, maturite_T) {
  forward_rate <- (1 / (maturite_T - maturite_t)) * ((1 + r_T) ^ maturite_T / (1 + r_t) ^ maturite_t -
1)
  return(forward_rate)
}

```

FIGURE C.2 – Capture du code R des fonctions d'interpolation et de calcul des taux *forward*

```

# Fonction permettant de déterminer les points de pareto
find_pareto_front <- fonction(data) {
  # Initialisation de la frontière de pareto (récupération du point ayant la plus petite erreur)
  pareto_front <- data[which.min(data$V1),]
  for (i in 2:nrow(data)) {
    # Ajout des points non dominés à la frontière de pareto
    if (!any(data[i, "C_N_n"] >= pareto_front$C_N_n & data[i, "V1"] >= pareto_front$V1)) {
      pareto_front <- rbind(pareto_front, data[i,])
    }
  }
  return(pareto_front)
}

# Fonction permettant de déterminer le point de pareto optimal
find_optimal_point <- fonction(pareto_front, weight_C_N_n = 0.5, weight_error = 0.5) {
  # Normalisation des vecteurs de complexité et d'erreur
  normalized_C_N_n <- (pareto_front$C_N_n - min(pareto_front$C_N_n)) / (max(pareto_front$C_N_n) -
min(pareto_front$C_N_n))
  normalized_error <- (pareto_front$V1 - min(pareto_front$V1)) / (max(pareto_front$V1) -
min(pareto_front$V1))

  # Calcul de la fonction objectif pour tous les points
  objective_values <- weight_C_N_n * normalized_C_N_n + weight_error * normalized_error

  # Recherche du point minimisant la fonction objectif (point de pareto optimal)
  optimal_index <- which.min(objective_values)

  return(pareto_front[optimal_index, ])
}

```

FIGURE C.3 – Capture du code R permettant de construire la frontière de *pareto* et de déterminer le point de *pareto* optimal

Annexe D

Interpolation par splines cubiques

D.1 Définition

L'idée fondamentale du lissage par splines est de diviser l'intervalle sur lequel la fonction doit être ajustée en plusieurs sous-intervalles. Pour chaque sous-intervalle, une fonction simple est ajustée, en veillant à ce que les segments s'assemblent correctement aux points de jonction, appelés nœuds. Cette approche permet de simplifier considérablement le problème : en décomposant la fonction en segments plus petits, on peut utiliser des fonctions plus simples sur chaque sous-intervalle plutôt que d'ajuster une fonction complexe sur tout l'intervalle.

Les polynômes sont souvent choisis pour cette tâche en raison de leur simplicité et de leur flexibilité. En pratique, on utilise principalement des polynômes de degré trois, ce qui nous conduit à l'utilisation de splines cubiques. Les splines cubiques sont particulièrement efficaces car elles offrent un bon équilibre entre flexibilité et complexité.

Pour assurer une transition fluide entre les segments adjacents, on impose que les courbes soient continues aux points de jonction. De plus, non seulement la courbe elle-même doit être continue, mais aussi sa première et sa deuxième dérivée, ce qui signifie que la pente (première dérivée) et la courbure (deuxième dérivée) sont égales aux nœuds. Cela garantit que les segments se rejoignent sans créer de discontinuités ou de changements abrupts de direction ou de courbure, produisant ainsi une courbe lisse et cohérente sur l'ensemble de l'intervalle.

D.2 Formulation Mathématique

Pour une série de points de données $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, nous cherchons à construire une spline cubique $S(x)$ qui passe par chaque point de données.

Chaque segment $S_i(x)$ de la spline entre deux points (x_i, y_i) et (x_{i+1}, y_{i+1}) est défini par un polynôme cubique de la forme :

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

Les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i sont déterminés de manière à satisfaire les conditions suivantes :

1. **Interpolation** : La spline doit passer par chaque point de données :

$$S_i(x_i) = y_i \quad \text{et} \quad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

2. **Continuité de la première dérivée** : La première dérivée de $S_i(x)$ doit être continue aux nœuds x_i :

$$S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$$

3. **Continuité de la deuxième dérivée** : La deuxième dérivée de $S_i(x)$ doit être continue aux nœuds x_i :

$$S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$$

4. **Conditions aux bords** : Des conditions spécifiques peuvent être appliquées aux extrémités de la spline. Les conditions de bord courantes incluent :

- **Splines naturelles** : La courbure aux extrémités est nulle : $S''(x_1) = 0$ et $S''(x_n) = 0$.
- **Splines clamped** : Les dérivées aux bords sont spécifiées : $S'(x_1) = m_1$ et $S'(x_n) = m_n$.

Les coefficients a_i, b_i, c_i, d_i sont donc déterminés en résolvant un système d'équations linéaires qui incorpore les conditions d'interpolation et de continuité mentionnées ci-dessus. Typiquement, cela mène à un système tridiagonal qui peut être résolu efficacement.

En conclusion, l'interpolation par spline cubique est une méthode efficace et flexible pour ajuster des courbes lisses à des ensembles de données, en assurant à la fois la continuité et la lissité de la courbe.

D.3 Résultats de l'interpolation des taux *spots* par splines cubiques

Le graphique ci-dessous présente les taux *spot* annuels interpolés en base mensuelle sur un horizon $T = 9$ ans.

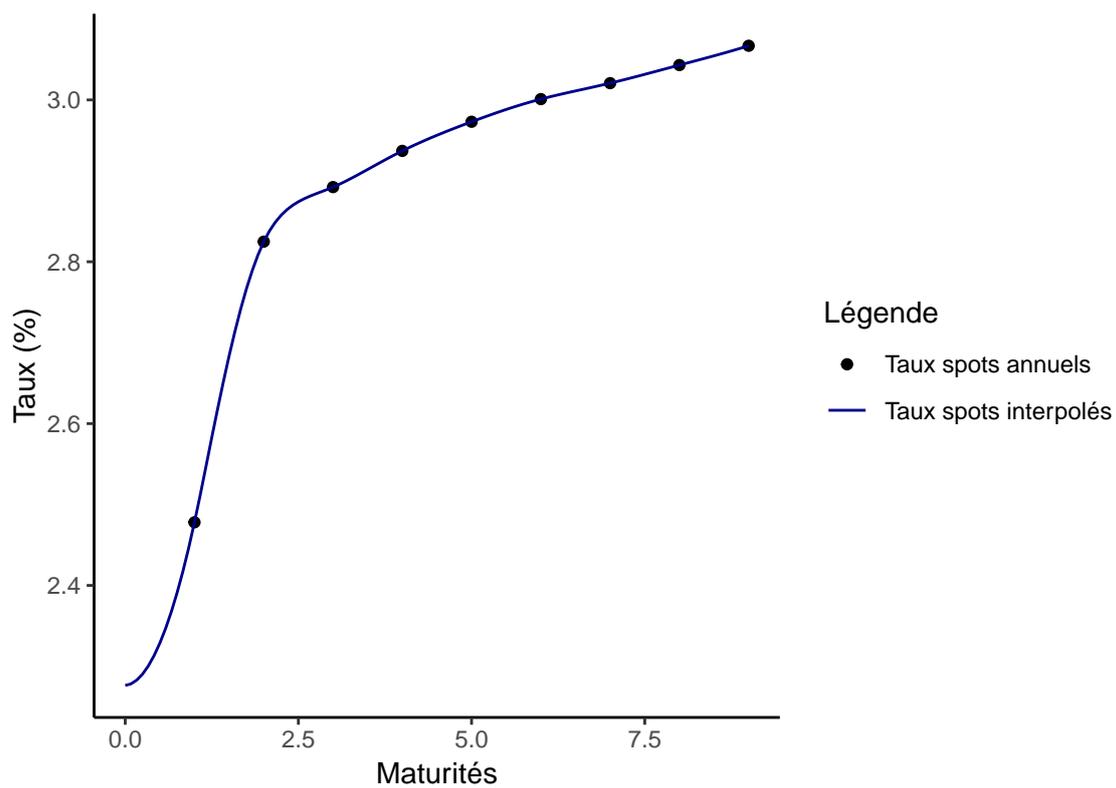


FIGURE D.1 – Taux *spot* annuels au 31/03/2023 interpolés en base mensuelle

Annexe E

Autres tableaux

Maturité/Moneyness	80%	90%	95%	100%	105%	110%	120%
1	21,28%	13,34%	10,01%	7,14%	4,80%	2,94%	0,74%
2	23,38%	16,04%	12,89%	10,06%	7,57%	5,47%	2,42%
3	25,27%	18,45%	15,43%	12,70%	10,24%	8,08%	4,58%
4	27,28%	20,81%	17,91%	15,22%	12,72%	10,46%	6,69%
5	28,92%	22,69%	19,89%	17,32%	14,93%	12,73%	8,86%
6	30,07%	24,01%	21,27%	18,74%	16,43%	14,31%	10,54%
7	31,50%	25,69%	23,07%	20,59%	18,30%	16,18%	12,49%
8	33,40%	27,68%	25,08%	22,64%	20,36%	18,24%	14,45%
9	34,97%	29,47%	27,01%	24,70%	22,50%	20,45%	16,73%

TABLE E.1 – Prix de *Call* obtenus par simulation Monte Carlo à la suite du calibrage sans pondération

Maturité/Moneyness	80%	90%	95%	100%	105%	110%	120%
1	20,98%	12,87%	9,49%	6,60%	4,29%	2,50%	0,52%
2	22,97%	15,49%	12,30%	9,47%	7,00%	4,95%	2,05%
3	24,80%	17,89%	14,86%	12,13%	9,69%	7,54%	4,14%
4	26,85%	20,34%	17,42%	14,74%	12,25%	10,01%	6,30%
5	28,59%	22,31%	19,50%	16,89%	14,51%	12,33%	8,48%
6	29,85%	23,76%	21,02%	18,47%	16,13%	13,98%	10,24%
7	31,37%	25,55%	22,92%	20,43%	18,11%	16,00%	12,30%
8	33,45%	27,74%	25,15%	22,71%	20,41%	18,27%	14,46%
9	35,20%	29,75%	27,28%	24,95%	22,76%	20,69%	16,92%

TABLE E.2 – Prix de *Call* obtenus par simulation Monte Carlo à la suite du calibrage par pondération des données de marché pertinentes

Maturités/Moneyness	80%	90%	95%	100%	105%	110%	120%
1	-1.224%	-3.232%	-5.033%	-7.138%	-10.323%	-14.466%	-25.888%
2	-1.911%	-3.384%	-4.473%	-5.609%	-7.428%	-9.117%	-14.981%
3	-1.314%	-2.014%	-2.385%	-3.435%	-5.366%	-6.370%	-9.352%
4	-1.489%	-2.184%	-2.706%	-3.179%	-3.624%	-4.520%	-5.899%
5	-1.122%	-1.510%	-1.782%	-1.951%	-2.421%	-2.611%	-3.666%
6	-0.616%	-0.818%	-0.837%	-1.061%	-1.104%	-1.273%	-1.603%
7	-0.039%	-0.036%	-0.100%	-0.065%	-0.076%	-0.158%	-0.205%
8	0.454%	0.603%	0.688%	0.780%	0.811%	0.938%	0.994%
9	0.988%	1.243%	1.403%	1.511%	1.684%	1.806%	2.086%

TABLE E.3 – Variation en valeur absolue des erreurs relatives de calibrage ($|ER_{calibrage}(sans\ poids)| - |ER_{calibrage}(avec\ poids_mat_longues)|$) sur l'ensemble de la matrice d'options