

Mémoire présenté le :  
pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA  
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Ibrahima DOUMBIA

Titre : Analyse de l'impact de l'ajout du bitcoin dans le portefeuille d'un assureur vie

Confidentialité :  NON  (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres présents du jury de Signature  
l'Institut des Actuaires*

.....

.....

.....

*Membres présents du jury de  
l'ISFA*

.....

.....

.....

*Entreprise :*

*Nom : Nexialog Consulting*

*Signature :*



*Directeur de mémoire en entre-  
prise :*

*Nom : Areski Cousin, Habib Faye*

*Signature :*



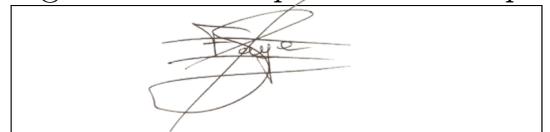
*Invité :*

*Nom :*

*Signature :*

*Autorisation de publication et  
de mise en ligne sur un site de  
diffusion de documents actua-  
riels (après expiration de l'éventuel  
délai de confidentialité)*

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



---

# Résumé

Ce mémoire explore l'intégration potentielle des cryptoactifs, en particulier du bitcoin, dans le portefeuille d'un assureur-vie sous le régime de Solvabilité II, en anticipant une évolution future de la réglementation européenne.

L'étude commence par une analyse du marché de l'assurance-vie et des cryptoactifs, avant de se focaliser sur l'adaptation d'un modèle d'Asset Liability Management (ALM) permettant d'inclure le bitcoin dans les projections de bilan de l'assureur. Des paramètres spécifiques au bitcoin sont calibrés, incluant un choc de marché conforme aux exigences du pilier I de Solvabilité II, en utilisant des approches paramétriques et stochastiques. Un générateur de scénarios économiques en risque-neutre pour le bitcoin est également conçu et validé conformément aux normes réglementaires.

Le mémoire s'attarde également sur le calibrage d'une matrice de corrélation de marché intégrant le bitcoin, en s'inspirant de la méthodologie de l'EIOPA. Enfin, une analyse d'impact évalue les répercussions de cette intégration sur divers indicateurs de performance et de risque pour les assureurs-vie.

L'objectif de cette recherche est de proposer un cadre méthodologique pour une intégration prudente des cryptoactifs dans les portefeuilles des assureurs-vie, tout en respectant les principes fondamentaux de Solvabilité II et en anticipant les évolutions potentielles de la réglementation.

**Mots-clés :** Assurance vie, Cryptoactifs, bitcoin, Gestion actif-passif, Modèle ALM, Calibration, Corrélation, Solvabilité.

# Abstract

This thesis explores the potential integration of crypto-assets, particularly bitcoin, into the portfolio of a life insurer under the Solvency II regime, anticipating a future evolution of European regulations.

The study begins with an analysis of the life insurance and crypto-asset markets, before focusing on the adaptation of an Asset Liability Management (ALM) model to include bitcoin in the insurer's balance sheet projections. Specific parameters for bitcoin are calibrated, including a market shock compliant with the Pillar I requirements of Solvency II, using parametric and stochastic approaches. A risk-neutral economic scenario generator for bitcoin is also designed and validated in accordance with regulatory standards.

The thesis also addresses the calibration of a market correlation matrix incorporating bitcoin, drawing inspiration from EIOPA's methodology. Finally, an impact analysis evaluates the effects of this integration on various performance and risk indicators for life insurers.

The objective of this research is to propose a methodological framework for the prudent integration of crypto-assets into life insurers' portfolios, while adhering to the core principles of Solvency II and anticipating potential regulatory changes.

**Keywords :** Life insurance, Crypto assets, bitcoin, Asset-liability management, ALM model, Calibration, Correlation, Solvency.

---

# REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je tiens à remercier chaleureusement Nexialog Consulting, le cabinet de conseil où j'ai eu l'opportunité de réaliser ce mémoire. Leur environnement de travail stimulant et leur soutien constant ont été essentiels à l'avancement et à l'achèvement de ce projet.

Je remercie chaleureusement mon ancien tuteur, Léo Schenk, dont l'idée de sujet a servi de fondation à ce travail. Son initiative a été le point de départ de mes recherches et a orienté mes réflexions tout au long de ce projet.

Je souhaite également exprimer ma reconnaissance à mes tuteurs actuels, Areski Cousin, Habib Faye, et Moustapha Sene, pour leur accompagnement précieux, leur expertise en actuariat, et leur soutien indéfectible. Leur supervision attentive et les efforts qu'ils ont déployés ont été déterminants pour la réussite de ce mémoire.

Je tiens également à exprimer ma reconnaissance envers l'Institut de Science Financière et d'Assurances (ISFA) et mes encadrants académiques. Leur expertise et leur disponibilité ont grandement contribué à mon parcours académique, me guidant avec dévouement à chaque étape.

Enfin, je tiens à adresser mes plus sincères remerciements à ma famille et à mes amis pour leur soutien moral et leurs encouragements tout au long de cette période intense. Leur présence et leurs conseils ont été une source d'énergie et d'inspiration inestimable. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous.

---

# NOTE DE SYNTHÈSE

## **Problématique :**

L'essor des crypto-actifs, stimulé par des événements tels que l'autorisation des ETFs Spot bitcoin par la SEC américaine et l'adoption de réglementations européennes comme MiCA, témoigne d'un attrait grandissant des investisseurs institutionnels pour ces nouveaux actifs. Ces derniers envisagent de plus en plus leur incorporation dans des portefeuilles d'investissement classiques. Étant donné l'importance des assureurs vie parmi les investisseurs institutionnels, cette étude cherche à déterminer les conséquences possibles de l'ajout du bitcoin, choisi comme représentant des crypto-actifs, dans le portefeuille d'un assureur vie. L'analyse se concentre particulièrement sur les produits d'épargne en euros, en supposant que la réglementation européenne en vigueur permet de tels investissements.

Parmi les crypto-actifs, le bitcoin a été choisi comme objet d'étude en raison de sa prééminence, de sa forte valorisation sur le marché et de ses fluctuations moins prononcées que celles d'autres monnaies numériques. Cette recherche a pour but d'évaluer les conséquences, tant chiffrables que non chiffrables, de l'incorporation du bitcoin dans les portefeuilles d'assurance-vie. Elle se penche sur les répercussions éventuelles concernant les revenus futurs de l'assureur, ses engagements à long terme, ainsi que les exigences en capital réglementaire (SCR). Par ailleurs, cette étude se propose d'explorer les défis liés à la gestion des risques et à la conformité réglementaire, tout en examinant les opportunités d'optimisation de la performance des portefeuilles d'assurance-vie, malgré l'instabilité caractéristique du bitcoin.

## **Cadre théorique et conceptuel :**

Les travaux réalisés dans le cadre du mémoire reposent sur un ensemble diversifié de cadres théoriques et conceptuels issus de la littérature académique et professionnelle. Ces références bibliographiques offrent une base pour l'analyse et la modélisation des données financières, en mettant en lumière des concepts clés tels que les distributions hyperboliques, les modèles de séries temporelles non stationnaires, l'évaluation des options financières, la modélisation des volatilités stochastiques, ainsi que les méthodes avancées d'estimation des risques extrêmes. En outre, des documents réglementaires et des travaux de recherche récents sur des sujets tels que Solvabilité II, la modélisation des crypto-actifs, et l'évaluation des performances des portefeuilles traditionnels et des actifs numériques ont fourni un contexte essentiel pour comprendre les défis actuels et les opportunités dans le domaine financier. En combinant ces différentes perspectives théoriques et empiriques, les travaux présentés dans ce mémoire visent modestement à apporter des contributions à la compréhension et à la gestion des risques financiers et assuranciers, en particulier dans le contexte de l'intégration du bitcoin dans les portefeuilles d'assurance vie.

## **Approche méthodologique pour répondre à la problématique :**

D'un point de vue qualitatif, l'analyse de l'impact de l'intégration du bitcoin s'est fondée sur la collecte et l'étude de données, d'articles, et de rapports issus de sources reconnues, telles que les textes réglementaires de Solvabilité II, les plateformes de trading (Binance Research, Fidelity, BitMEX, etc.), ainsi que les instituts de sondage comme IPSOS. Ces analyses ont permis de mettre en évidence les opportunités et les défis associés à l'ajout du bitcoin dans les portefeuilles d'assurance vie, ainsi qu'à challenger les résultats obtenus avec l'analyse quantitative.

D'un point de vue quantitatif, l'évaluation de l'impact de l'inclusion du bitcoin dans le portefeuille d'un assureur vie s'est concentrée sur trois indicateurs clés du pilier I de Solvabilité II : le Best Estimate (BE), la Valeur de l'In Force (VIF) et le Solvency Capital Requirement (SCR). La génération de

---

ces indicateurs a nécessité l'adaptation d'un modèle ALM afin d'intégrer la composante bitcoin dans le portefeuille d'actifs. Face à l'absence de réglementation spécifique de Solvabilité II concernant la gestion des cryptomonnaies dans le portefeuille d'un assureur vie, il a été indispensable de calibrer des métriques ad hoc, telles qu'un choc bitcoin, un générateur de scénarios économiques neutres au risque pour le bitcoin, ainsi qu'une matrice de corrélation de marché incluant le bitcoin. Ces métriques ont été intégrées comme paramètres d'entrée (inputs) dans le modèle ALM. Ainsi, une part substantielle du mémoire a été consacrée au calibrage rigoureux de ces inputs.

A) Synthèse des travaux quantitatifs réalisés :

### 1. Calibrage du choc :

L'EIOPA <sup>1</sup> a déjà établi et publié les valeurs de choc pour la majorité des actifs conventionnels. Pour calibrer le choc action de type I, l'EIOPA s'est appuyée sur le quantile d'une distribution normale, ajustée sur trois décennies d'historique des rendements annuels de l'indice MSCI World. Cependant, cette approche utilisant la loi normale a suscité de nombreuses réserves, étant considérée comme inadéquate pour représenter fidèlement la plupart des rendements des indices boursiers.

Le bitcoin, en tant qu'actif financier relativement récent avec des données historiques remontant seulement à 2010, présente un défi majeur pour un calibrage statistique robuste du choc Solvabilité II en raison de la brièveté de son historique annuel. Pour pallier cette contrainte, diverses méthodes alliant des approches paramétriques et stochastiques ont été employées, offrant ainsi un éventail comparatif de techniques et de valeurs de choc. Cette démarche a permis de déterminer une valeur de choc pertinente pour le bitcoin dans le contexte de Solvabilité II.

Le calibrage du choc par l'approche paramétrique a impliqué l'étude de plusieurs modèles statistiques largement utilisés dans les domaines financier et assurantiel. Outre les distributions paramétriques classiques telles que la loi Normale, la loi de Student, la GEV et la GPD, qui ont été adaptées aux données historiques pour calibrer le choc du bitcoin, une nouvelle catégorie de distributions peu communes a été explorée : les distributions hyperboliques généralisées (GHD). L'objectif était d'identifier le modèle statistique offrant la meilleure adéquation aux différents ensembles de données bitcoin étudiés, permettant ainsi le calcul ultérieur d'un quantile paramétrique à 0,5% basé sur la loi retenue.

Pour l'ajustement de ces modèles, trois jeux de données ont été pris en compte :

- l'historique des rendements annuels (12 observations)
- l'historique des rendements annuels glissants (4018 observations)
- l'historique des rendements mensuels (144 observations)

En pratique, l'ajustement initial des modèles s'est fait sur la base des 12 observations annuelles disponibles, fournissant un premier résultat de choc calibré. Toutefois, étant donné la faible profondeur de l'historique des rendements annuels, une extrapolation a été réalisée en utilisant la technique des rendements glissants. Les valeurs de choc ainsi obtenues ont été mises en parallèle avec celles issues du premier calibrage. Néanmoins, face à la complexité de quantifier le biais potentiellement induit par cette méthode des rendements glissants, une troisième approche paramétrique a été envisagée. Celle-ci a consisté à calibrer un choc mensuel à partir des 144 observations de rendement mensuel, puis à le convertir en choc annuel via un facteur

---

1. (Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles)

d'annualisation.

Une approche stochastique a été adoptée pour compléter les approches paramétriques. Cette dernière repose sur l'utilisation du modèle autorégressif à changement de régime markovien (MSAR) pour le calibrage du choc du bitcoin. Grâce au modèle MSAR, un générateur de scénarios économiques en monde réel pour le prix du bitcoin a été développé, enrichissant ainsi notre base de données historiques. Trois approches ont été adoptées avec ce modèle pour le calibrage du choc afin de tirer profit de tous les avantages que propose le modèle. En effet, le modèle peut être entraîné sur des séries stationnaires et non stationnaires.

- Modélisation et projection des log-prix version 1 : 10 000 scénarios de log-prix bitcoin ont été générés sur 1 an. Des rendements annuels ont été calculés à partir de ces trajectoires et un choc empirique est calculé.
- Modélisation et projection des log-prix version 2 : génération de 10 000 trajectoires sur 18 ans. Ces trajectoires simulées ont été complétées chacune avec les 12 années d'historique afin de constituer un historique de 30 ans. Chaque historique de 30 ans a permis le calcul d'un choc. Une distribution de choc a été ainsi obtenue, permettant une appréciation précise de la plage de variation du choc.
- Modélisation et projection des log-rendements : 10 000 scénarios de log-rendements bitcoin ont été générés sur 1 an. Des rendements relatifs annuels ont été calculés à partir de ces log-rendements et un choc empirique est calculé.

Les résultats obtenus fournissent une base pour la comparaison des méthodes et permettent d'observer les tendances convergentes, ce qui renforce la fiabilité de la valeur du choc sélectionnée. Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus à partir des différentes approches explorées pour le calibrage du choc.

Méthode	Synthèse des résultats			
	Approche	Meilleur modèle	Choc	Intervalle éligible
Paramétrique	Historique 12 ans	Fréchet	77%	[77%, 84%]
	Historique glissant	Fréchet	84%	
	Historique mensuel	Normal Inverse Gaussien	81%	
Stochastique	Log-prix Application 1	MS(3)-AR(3)	90%	[84%, 90%]
	Log-prix Application 2	MS(3)-AR(3)	84%	
	Log-rendement	MS(3)-AR(5)	90%	

**TABLE 0.1 Table récapitulative des chocs**

A travers les modèles paramétriques explorés, nous n'avons pas observé de convergence vers une valeur de choc spécifique, mais plutôt vers un intervalle de valeurs potentielles compris entre 77% et 84%. Cet intervalle a été déterminé en fonction de deux critères : l'ajustement global des modèles aux trois ensembles de données (historique annuel, historique mensuel, rendements annuels glissants) selon le critère AIC, et la comparaison des quantiles théoriques et empiriques pour les queues gauches de la distribution.

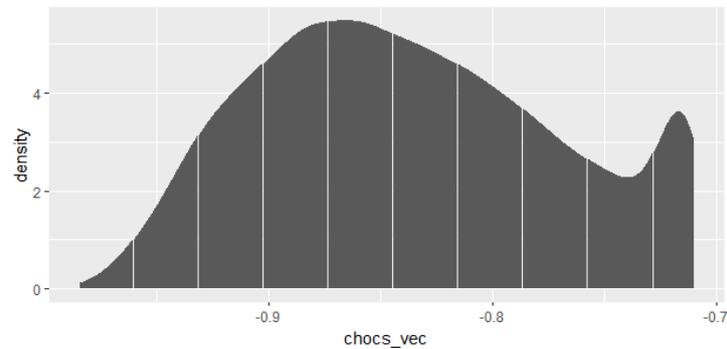
Suite aux arbitrages effectués entre les différents critères d'ajustement des modèles paramétriques, deux modèles ont été retenus pour les 3 jeux de données bitcoin : le modèle de Fréchet et le modèle Normal Inverse Gaussienne (NIG) de la famille des s distributions hyperboliques généralisé.

Pour l'ensemble de données sur les rendements mensuels, le modèle NIG s'est avéré être le mieux adapté parmi les modèles étudiés. Ainsi, le modèle de Fréchet et le modèle NIG ont

été sélectionnés comme les plus pertinents pour estimer le choc bitcoin à partir des différents ensembles de données analysés, et les valeurs de choc paramétrique obtenues avec ces modèles ont permis de construire l'intervalle de choc éligible [77%, 84%].

Les chocs obtenus par simulation lors du calibrage du MSAR avec la distribution des log-prix de l'approche 1 et la distribution des log-rendements présentent des similarités marquées (89,98% contre 89,64%). Cette convergence des méthodes est notable. Cependant, il est préférable d'accorder davantage de crédibilité au modèle ajusté sur la série temporelle non stationnaire des log-prix, car il offre un meilleur ajustement selon le critère du RMSE.

L'élargissement de l'échantillon simulé du log-prix avec l'historique des 12 dernières années observées - version 2 - afin de disposer de 10 000 échantillons sur 30 années d'observations nous a permis d'obtenir une distribution des quantiles à 0,5%. Ci-dessous, une illustration de la distribution de chocs obtenus avec la version 2, ainsi quelques statistiques calculées sur cette distribution.



**FIGURE 0.1** Densité empirique associée au 10000 quantiles à 0.5% calculés

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
98.4%	88.8%	84.2%	83.6%	78.7%	71.0%

**TABLE 0.2** Quelques statistiques sur la distribution de chocs calibrés

Cette distribution révèle une plage d'observation du choc entre 98,41% et 71,03%. Il est important de souligner que tous les chocs obtenus avec les "meilleurs modèles" des différentes approches paramétriques de calibrage du choc se situent dans cet intervalle de valeurs. De plus, l'écart de 10 points de pourcentage entre le premier quantile et le troisième quantile suggère une dispersion modérée des valeurs autour de la médiane, ce qui peut indiquer une certaine stabilité ou cohérence dans les données de choc.

Ces analyses nous conduisent à retenir la valeur du choc bitcoin à 84% pour l'approche stochastique. Pour rappel, l'intervalle de choc éligible pour l'approche paramétrique est [77%, 84%]. Ainsi, la valeur retenue de 84% est cohérente avec les résultats obtenus par les deux approches paramétriques et stochastiques.

## 2. Construction GSE risque neutre bitcoin :

L'intégration du bitcoin dans le portefeuille d'un assureur vie exige la création d'un générateur de scénarios économiques (GSE) neutre au risque pour le bitcoin. Cet outil est essentiel pour projeter de façon stochastique, dans un univers risque-neutre, l'évolution future des cours du bitcoin sur une période réglementaire de 50 ans.

La littérature financière offre un large éventail de modèles d'évaluation de produits dérivés, allant du classique modèle de Black-Scholes aux plus complexes comme le modèle VG-CIR<sup>2</sup>. Ce dernier se démarque par sa précision dans la reproduction des prix observés, grâce à l'intégration d'une volatilité stochastique et d'une composante de saut. Néanmoins, sa complexité, due à ses huit paramètres difficilement interprétables, le rend moins attractif que le modèle d'Heston. Ce dernier présente un équilibre optimal entre précision prédictive et facilité d'interprétation et d'implémentation, particulièrement pour l'évaluation des options d'achat européennes sur le bitcoin.

Notre choix s'est porté sur le modèle d'Heston, dont les paramètres optimaux ont été déterminés par une procédure de minimisation de l'erreur quadratique moyenne (RMSE). Cette minimisation a été effectuée en comparant les prix des options d'achat (Calls) observés sur le marché, avec une maturité maximale d'un an, aux prix théoriques calculés à l'aide de la méthode de transformée de Fourier rapide (FFT). Les valeurs des paramètres optimaux ainsi estimés sont présentées ci-dessous.

algorithme	RMSE	$\kappa$	$\theta$	$\sigma$	$\rho$	$V_0$
Nelder-Mead	38.507	1.302	0.546	1.192	-0.097	0.355

**TABLE 0.3 Paramètres optimaux du modèle d'Heston**

Il est important d'attirer l'attention du lecteur sur les valeurs élevées de la volatilité du processus de volatilité et de la volatilité à long terme, ce qui est cohérent avec la forte volatilité inhérente à la dynamique du bitcoin. Cependant, on peut déjà anticiper la présence de phénomènes d'explosion plus marquée des trajectoires lors de la diffusion de processus, ce qui pourrait mettre en péril la validation de des tests réglementaires.

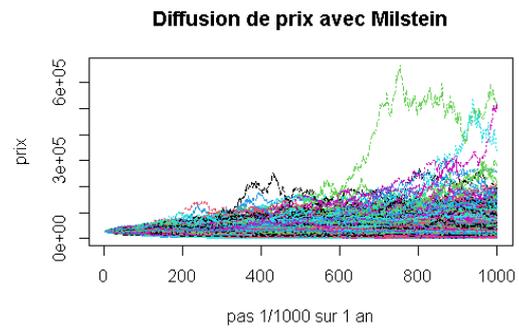
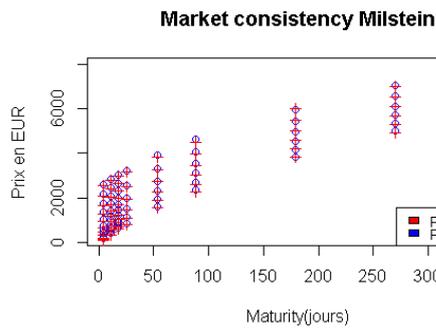
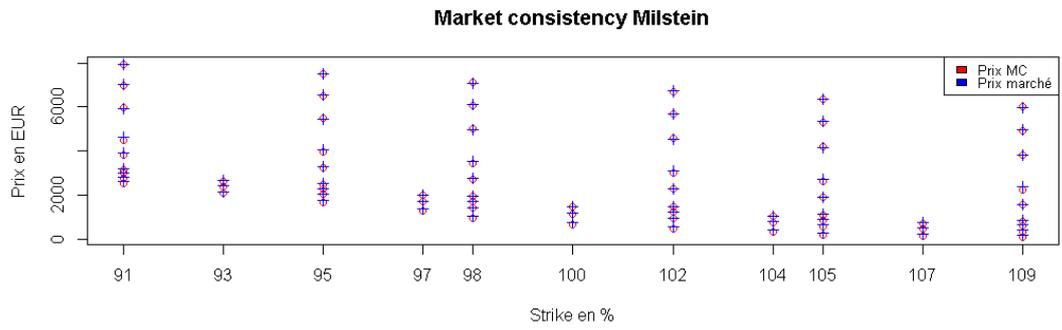
Après le calibrage du modèle d'Heston, l'étape suivante a consisté à simuler l'évolution du cours du bitcoin en utilisant diverses méthodes de discrétisation de trajectoire. Les schémas de discrétisation d'Euler, de Milstein et de l'exponentiel quadratique (QE) ont été appliqués pour générer les trajectoires du bitcoin.

Le schéma d'Euler, bien que largement répandu, a rapidement révélé ses limites, produisant des trajectoires explosives dès les premières années de projection. En revanche, la discrétisation de Milstein, qui représente une amélioration du schéma d'Euler, s'est avérée la plus performante, générant des trajectoires qui reflètent le mieux les prix observés sur le marché, avec une erreur quadratique moyenne (RMSE) de 56,8 € lors du test de Market Consistency. (Tableau 0.10 et Figure 3.3).

Méthode de discrétisation	RMSE
Euler	6221.5
QE	2779.9
Milstein	56.8

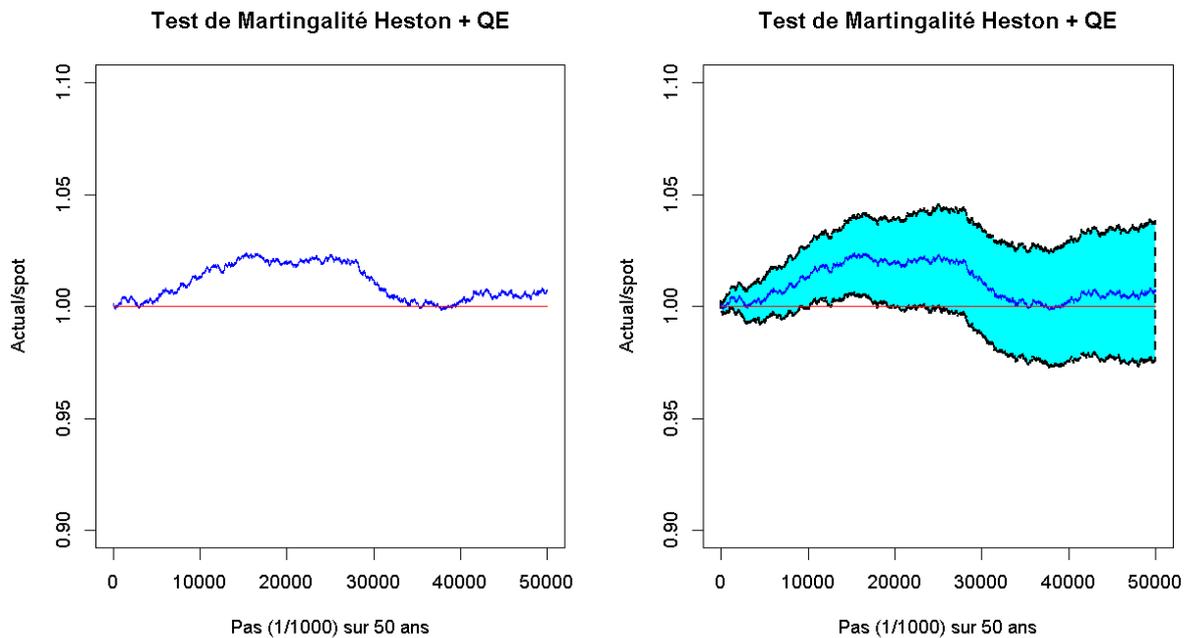
**TABLE 0.4 Test de Market Consistency**

2. Variance gamma - Cox-Ingersoll-Ross



**FIGURE 0.2 Test de Market Consistency avec Milstein**

Cependant, ces trajectoires issues de la discrétisation de Milstein ne sont plus martingales à partir d'un horizon de 12 ans de projection. À l'inverse, le modèle de discrétisation QE, bien que moins performant sur le test de Market Consistency, arrive à générer des trajectoires quasi martingales sur l'horizon de 50 ans de projection (Figure 0.14).



**FIGURE 0.3 Test de martingalité avec QE**

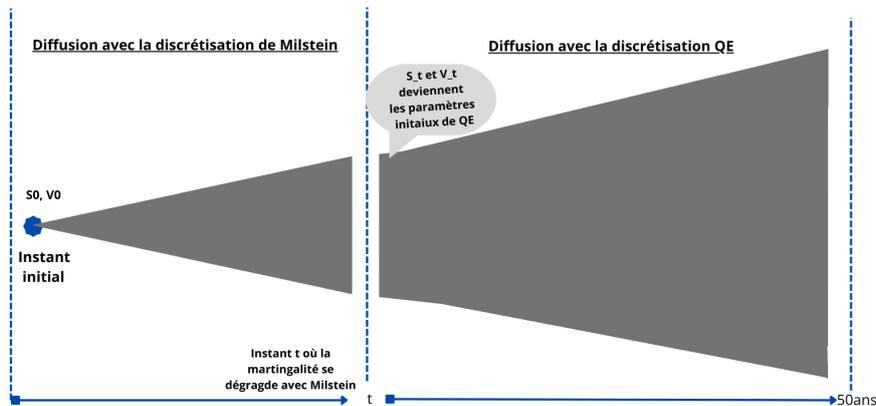
En effet, le schéma QE permet de contrôler les trajectoires explosives en ajustant dynamiquement la volatilité grâce à une approximation fondée sur la loi du  $\chi^2$  non centrée<sup>3</sup>. Cette approche garantit que les valeurs extrêmes de la variance sont traitées de manière appropriée, ce qui empêche une croissance incontrôlée de la volatilité tout en maintenant une stabilité dans les projections futures. Cependant, bien que cette approximation permette de contrôler les trajectoires explosives, elle altère les caractéristiques intrinsèques de la dynamique simulée du cours du bitcoin. En conséquence, les scénarios générés ne parviennent pas à reproduire fidèlement les prix observés.

Ainsi, aucun des schémas de discrétisation n'a réussi à générer des trajectoires vérifiant à la fois les 2 tests réglementaires. Pour surmonter ce défi lié à la discrétisation, une méthode que nous avons nommée "martingalisation des trajectoires" a été proposée dans ce mémoire.

Cette nouvelle méthode combine les avantages des deux schémas de discrétisation de Milstein et de QE. Le schéma de Milstein s'est avéré le plus performant pour reproduire les prix du marché lors du test de cohérence au marché, crucial pour associer un GSE à un actif spécifique. Cependant, la discrétisation QE produisait des trajectoires presque martingales sur 50 ans. La solution proposée combine ces avantages :

- i. Utiliser la discrétisation de Milstein jusqu'à la dégradation du test de martingalité.
- ii. Récupérer les prix et volatilités de Milstein à ce point.
- iii. Utiliser ces valeurs comme paramètres initiaux pour la discrétisation QE.
- iv. Poursuivre la diffusion avec QE jusqu'à l'horizon souhaité.

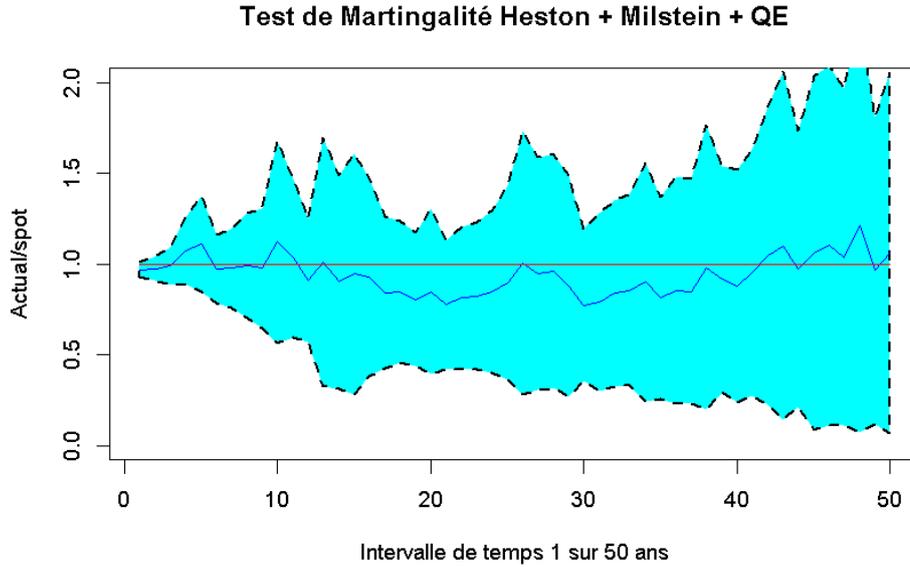
La méthode est résumée dans le schéma ci-dessous.



**FIGURE 0.4 Martingalisation des scénarios de prix**

Cette approche hybride vise à maintenir la cohérence du marché tout en assurant des propriétés de martingale à long terme. Le modèle d'Heston combiné avec cette méthode de "martingalisation des trajectoires" a permis de générer des trajectoires satisfaisant les 2 tests réglementaires. La Figure 3.9 illustre le test de martingalité validé par ces trajectoires générées.

3. Loi de transition d'un processus CIR : cette loi stipule que la variance future  $v_{n+1}$ , conditionnée par la valeur actuelle  $v_n$ , suit une distribution de  $\chi^2$  non centrée.



**FIGURE 0.5 Test de martingalité**

Le GSE issu de cette approche a servi de paramètres d'entrée pour le modèle ALM. Le chapitre 3 est consacré à la construction de ce GSE neutre au risque bitcoin.

### 3. Calibration matrice de corrélation de marché :

Le calcul du SCR selon la formule standard<sup>4</sup> repose sur l'agrégation de l'ensemble des risques auxquels sont exposées les compagnies d'assurance, tout en prenant en compte les effets de diversification via des matrices de corrélation fournies par l'EIOPA. Dans ce mémoire, l'analyse de l'impact du SCR se concentre spécifiquement sur le SCR de marché, calculé selon la formule suivante :

$$SCR_{mkt} = \sqrt{\sum_{i,j} \text{CorrMkt}_{i,j} \bullet Mkt_i \bullet Mkt_j}$$

où :

- $\text{CorrMkt}_{i,j}$  représente le coefficient de corrélation entre les sous-modules de risque marché  $i$  et  $j$ .
- $Mkt_j$  désigne le SCR associé au sous-module de risque marché  $j$ .

Cette formule permet d'agréger les différents risques de marché pris en compte dans le cadre de Solvabilité II, tout en tenant compte des effets de diversification entre les sous-modules de risque.

La calibration de la matrice de corrélation repose essentiellement sur une analyse empirique. L'EIOPA a utilisé des corrélogrammes linéaires pour détecter et évaluer la force et la direction des relations linéaires entre les paires de risques. Les coefficients de corrélation linéaire sont

4. La formule standard est la méthode par défaut utilisée pour le calcul du SCR, appliquée aux compagnies d'assurance ayant un profil de risque considéré comme standard ou typique.

définis par la formule suivante :

$$\text{CorrMkt}_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}$$

où  $X$  et  $Y$  sont les facteurs de risques étudiés. Les résultats obtenus sont ensuite ajustés afin d'intégrer des considérations pratiques et des évaluations d'experts.

Il est important de noter que l'utilisation de la corrélation linéaire pour mesurer les dépendances a suscité des critiques, auxquelles le régulateur a répondu en justifiant la pertinence de cette mesure pour évaluer les dépendances linéaires entre les actifs de marché.

Dans cette étude, la méthodologie de l'EIOPA a été adaptée pour évaluer la corrélation entre le bitcoin et les actifs traditionnels. Avant d'effectuer cette évaluation, une analyse de la possibilité d'une relation de causalité entre le bitcoin et les actifs traditionnels présents dans le portefeuille du modèle ALM a été réalisée.

Une fois les relations de causalité identifiées, un actif représentatif de chaque facteur de risque de marché a été sélectionné. Ensuite, des corrélations empiriques glissantes annuelles entre les paires de facteurs de risque ont été calculées, dans le but de capturer toutes les dépendances sur un horizon de 12 mois au sein de la période historique analysée. La matrice de corrélation ainsi obtenue a servi à agréger les capitaux de couverture annuels. Par mesure de prudence et en conformité avec la norme Solvabilité II, la corrélation positive la plus élevée observée pour chaque paire d'actifs au cours de la période historique a été retenue, étant donné qu'une corrélation négative pourrait avoir un effet favorable en réduisant le SCR.

Enfin, les corrélations mesurées ont été comparées avec les données de corrélation annuelles publiées sur les plateformes de trading.

Les résultats obtenus confirment les observations faites sur la majorité des plateformes de trading : le bitcoin présente des corrélations faibles avec la plupart des actifs traditionnels, y compris ceux présents dans le portefeuille d'actifs étudié, comme le montre la matrice de corrélation calibrée ci-dessous :

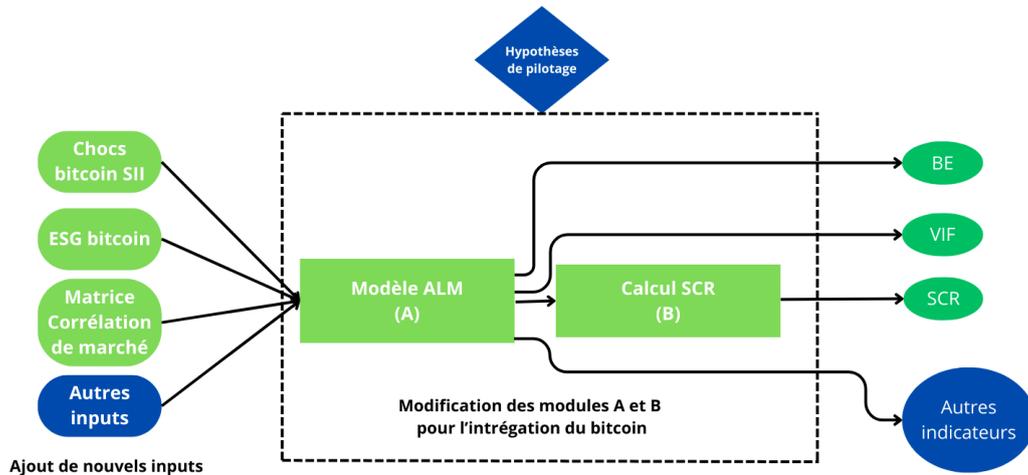
	bitcoin	Taux	Action	Immobilier	Spread
bitcoin	1				
Taux	0.15	1			
Action	0.5	0.5/0	1		
Immobilier	0.2	0.5/0	0.75	1	
Spread	0.35	0.5/0	0.75	0.5	1

**TABLE 0.5** Matrice de corrélation S2 calibrée pour l'outil ALM

Cette matrice est effectivement définie positive, comme le confirment ses valeurs propres, toutes positives. Le chapitre 4 est consacré à l'étude de la calibration de cette matrice.

#### 4. Ajustement du modèle ALM :

Des modifications ont été apportées au modèle ALM, notamment au niveau de la projection des actifs et de l'interaction actif-passif, afin de garantir un bilan équilibré pour l'assureur intégrant le bitcoin dans son portefeuille. Le schéma ci-dessous présente le processus de production des indicateurs, où les cases vertes indiquent les parties du modèle qui ont été modifiées ou adaptées.



**FIGURE 0.6 Évolution du modèle pour l'intégration du bitcoin**

La zone en pointillés contient les modules dédiés à la projection de l'activité de l'assureur vie ainsi qu'au calcul du SCR. Ci-dessous, nous résumons les principaux ajustements réalisés :

- Une nouvelle classe d'actifs a été ajoutée au portefeuille, et le bitcoin a été valorisé durant la projection de manière similaire aux actions. Le GSE neutre au risque bitcoin a permis de vieillir l'actif sur l'horizon de projection de 50 ans.
- Une nouvelle ligne de choc bitcoin a été ajoutée dans les chocs actifs, permettant de produire un scénario choqué pour le bitcoin.
- Les fonctions d'allocation cible, d'achat et de vente des actifs ont été ajustées pour inclure le bitcoin dans les interactions de l'actif et du passif pendant la demi-période de projection.
- La production financière intègre désormais les performances du bitcoin, impactant ainsi les mécanismes de revalorisation des contrats chaque année de projection.
- Le module CalculSCR a été modifié pour permettre le calcul d'un SCR bitcoin stand-alone. Ce module permet également le calcul d'un SCR marché agrégé via la nouvelle matrice de corrélation incluant le facteur de risque bitcoin.

#### B) Travaux d'analyse d'impact :

L'analyse quantitative de l'impact s'est concentrée sur la production d'indicateurs dérivés des exigences du pilier I de Solvabilité II, dans le contexte d'un assureur vie spécialisé en épargne en euros. Trois indicateurs clés ont été retenus :

- Le BEL (Best Estimate Liabilities) : représentant la valeur actuelle des engagements futurs de l'assureur
- La VIF (Value of In-Force) : correspondant à la valeur actuelle des profits futurs
- Le SCR (Solvency Capital Requirement) : le capital de solvabilité requis pour assurer la continuité des opérations

L'étude a mis en parallèle deux modèles : l'un excluant le bitcoin du portefeuille et l'autre l'y incorporant. Le portefeuille sans le bitcoin a été utilisé comme point de référence initial. Pour les portefeuilles intégrant le bitcoin, une stratégie d'allocation progressive a été mise en place, avec des proportions s'échelonnant de 1% à 5%, donnant lieu à cinq scénarios d'allocation distincts.

Cette approche vise à introduire graduellement le bitcoin dans le portefeuille tout en observant l'évolution concomitante des indicateurs Solvabilité II. L'ajout croissant du bitcoin s'accompagne d'une diminution équivalente du cash, les proportions des autres actifs demeurant constantes. Cette méthodologie vise à isoler et évaluer spécifiquement l'impact du bitcoin dans nos analyses.

schéma d'allocation	Obli	Immo	Action	Cash	Crypto
Référence	84%	6%	5%	5%	0%
1	84%	6%	5%	4%	1%
2	84%	6%	5%	3%	2%
3	84%	6%	5%	2%	3%
4	84%	6%	5%	1%	4%
5	84%	6%	5%	0%	5%

**TABLE 0.6 Stratégie d'allocation avec la poche bitcoin**

L'activité de l'assureur vie a été projetée sur 50 ans en mode stochastique et déterministe à l'aide du modèle ALM, ajusté avec des scénarios centraux et choqués. Les indicateurs BEL et VIF générés pour chaque mode de projection ont permis de calculer les TVOG pour chaque portefeuille, comme résumé dans le tableau ci-dessous en millions d'euros.

1. Analyse BEL-VIF :

Part bitcoin	VM_initiale	BE_Det	VIF_Det	TVOG	Portefeuille
0 %	23,2 M€	21,7 M€	1,54 M€	1,0 M€	Référence
1 %	23,2 M€	21,8 M€	1,45 M€	1,4 M€	1
2 %	23,2 M€	21,8 M€	1,37 M€	1,6 M€	2
3 %	23,2 M€	21,9 M€	1,28 M€	1,7 M€	3
4 %	23,2 M€	22,0 M€	1,19 M€	1,7 M€	4
5 %	23,2 M€	22,1 M€	1,11 M€	1,7 M€	5

**FIGURE 0.7 Analyse des indicateurs d'impact**

L'analyse a révélé une corrélation entre l'allocation croissante en bitcoin et l'évolution des indicateurs financiers clés. Le BEL, qui représente les engagements futurs de l'assureur, a affiché une tendance à la hausse à mesure que la part de bitcoin augmentait. Inversement, la VIF, reflétant la valeur actualisée des profits futurs, a suivi une trajectoire décroissante.

Parallèlement, la valeur temporelle des options et garanties (TVOG) a connu une augmentation significative, passant de 1,0 M€ à 1,7 M€ avec l'accroissement de la part de bitcoin. Cette hausse suggère que l'introduction du bitcoin dans le modèle de gestion actif-passif (ALM) amplifie l'importance des options inhérentes aux contrats d'assurance vie, telles que les options de rachat ou les garanties de taux minimum.

Une analyse approfondie a été réalisée pour comparer les évolutions entre le portefeuille de référence et le portefeuille 1, qui diffèrent par l'ajout de 1% de bitcoin compensé par une réduction équivalente du cash.

Les figures 0.8 et 0.9 illustrent que les variations du BEL et de la VIF sont principalement attribuables aux moins-values réalisées lors de la cession d'actifs pour couvrir les engagements

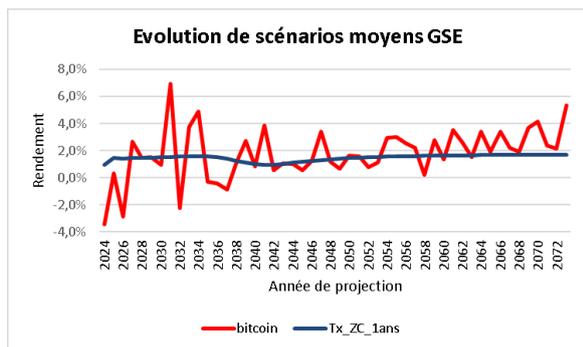


FIGURE 0.8 Scénario moyen GSE

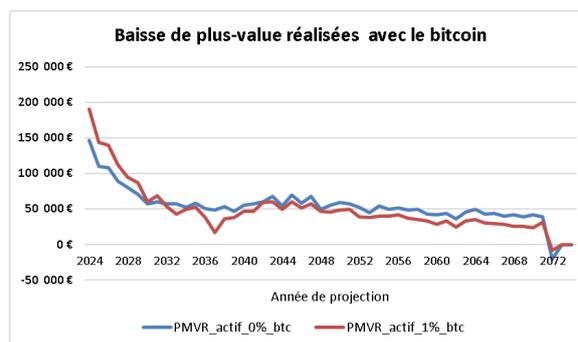


FIGURE 0.9 Évolution des PMVR

du passif à partir de 2032. Ces diminutions de produits financiers sont plus prononcées dans le portefeuille incluant du bitcoin, ce dernier introduisant une volatilité supérieure à celle du cash, comme le démontre la comparaison des courbes de rendements moyens des GSE ZC-1 an et GSE bitcoin dans l'univers risque neutre.

Cette analyse met en lumière un point crucial : la pertinence de la stratégie de vente d'actifs du modèle ALM, qui priorise la cession des actifs les plus risqués, est remise en question. Bien que cette approche soit courante dans l'assurance vie pour réduire la volatilité post-financement du passif, elle engendre une perte conséquente en année 2032, année marquée par une forte baisse du rendement moyen du bitcoin. Cette réduction de la production financière impacte la revalorisation des contrats et, par extension, le résultat de l'assureur (cf. chapitre 5).

Cette observation souligne l'inadéquation de certaines hypothèses actuelles du secteur pour l'intégration du bitcoin, appelant à approfondir les recherches pour exploiter pleinement le potentiel de cette crypto-monnaie. Une approche alternative, qui fait partie des pistes de réflexion de ce mémoire, consisterait à inclure une faible proportion de bitcoin dans le portefeuille, tout en l'excluant des mécanismes annuels de financement du passif. Cette stratégie permettrait d'évaluer l'impact à long terme du bitcoin sur la rentabilité de l'assureur vie.

## 2. Analyse du SCR marché

L'analyse révèle une augmentation progressive du SCR marché avec l'intégration croissante du bitcoin, comme le montre la figure 0.21.

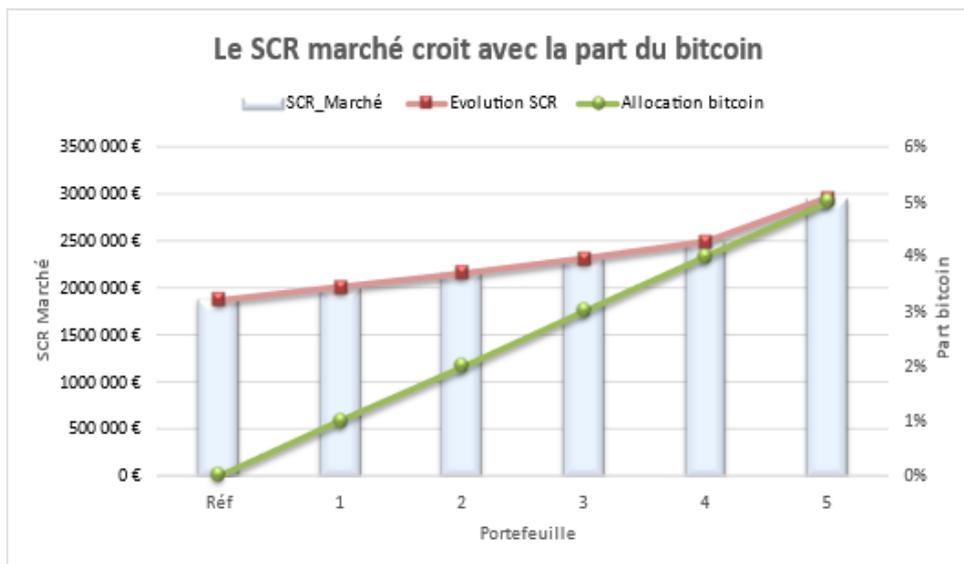


FIGURE 0.10 Évolution du SCR marché

Cette tendance était anticipée, car l'accroissement de la part d'un actif risqué nécessite logiquement plus de capital pour couvrir le risque associé.

L'examen des sous-modules du risque de marché a mis en évidence l'impact significatif du choc bitcoin calibré à 84% sur le capital requis. Une comparaison avec un portefeuille contenant 5% de bitcoin et 5% d'actions de type I illustre cette différence : le bitcoin subit un choc deux fois plus important (84% contre 39%), résultant en un SCR environ quatre fois plus élevé que celui des actions de type I. Cette observation souligne l'intensité du choc bitcoin dans le modèle, pouvant expliquer en partie l'augmentation de la TVOG.

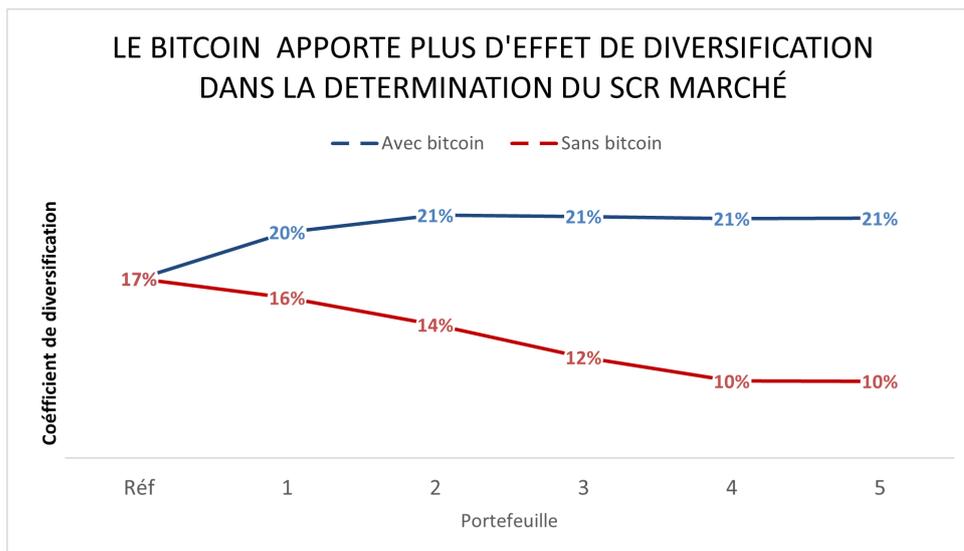
Une piste de réflexion proposée consiste à quantifier la sensibilité des indicateurs SII à une variation du choc, par exemple en analysant l'évolution des trois indicateurs suite à une variation de 84% à 83% ou 85%. Cet exercice pourrait aider au positionnement des compagnies face à une éventuelle communication de valeur de choc par le régulateur pour ces actifs numériques. Malgré le poids important du SCR Stand-Alone du bitcoin par rapport au SCR action, l'effet de diversification apporté par le bitcoin atténue son impact dans le calcul du SCR marché. En effet, l'étude de la matrice de corrélation calibrée (section 3.5) sur l'agrégation des sous-modules de risque de marché révèle que l'intégration du bitcoin améliore l'effet de diversification sur le SCR marché. Le bénéfice de diversification apporté par cette matrice peut être quantifié à travers cette formule :

$$1 - \frac{SCR_{mkt}}{\sum_r Mkt_r} \quad (0.1)$$

où,

- $SCR_{mkt}$  désigne la réserve en capital pour le risque de marché,
- $Mkt_r$  correspond aux réserves en capital pour les risques de marché individuels.

La diversification réduit le SCR global : plus le coefficient de diversification est élevé, plus le capital résultant de l'agrégation des sous-modules diminue. Le SCR marché, avec et sans bitcoin, a été calculé pour six schémas d'allocation en utilisant la formule (5.30). Les résultats sont présentés dans la figure 5.11.



**FIGURE 0.11 Gain de diversification avec la matrice de corrélation**

l'intégration du bitcoin améliore l'effet de diversification sur le SCR marché, cet effet étant optimal avec une allocation de 2% en bitcoin, au-delà de laquelle le coefficient reste stable à 21%.

### 3. Conclusion :

En conclusion, cette analyse d'impact met en exergue les complexités et les enjeux associés à l'intégration des crypto-actifs, en particulier le bitcoin, dans le secteur de l'assurance vie. Nos travaux, basés sur les hypothèses conventionnelles de l'industrie, révèlent que l'exploitation optimale des opportunités de rentabilité offertes par le bitcoin nécessite une approche plus nuancée et innovante que les stratégies traditionnelles.

Cette étude met en évidence la nécessité cruciale d'approfondir la recherche sur les crypto-actifs dans le contexte spécifique de l'assurance. Il est impératif de développer des modèles de gestion actif-passif (ALM) novateurs et des stratégies d'investissement adaptées qui prennent en compte les caractéristiques uniques du bitcoin, telles que sa volatilité élevée et son potentiel de rendement à long terme. Ces approches doivent être conçues tout en respectant scrupuleusement les contraintes réglementaires et en préservant les objectifs de stabilité inhérents à l'assurance vie. Par ailleurs, il est essentiel que le marché européen de l'assurance adopte une posture proactive dans le domaine des crypto-actifs. Cette démarche permettrait non seulement de réduire l'écart croissant avec la dynamique du marché américain, mais aussi de positionner l'Europe comme un acteur innovant et compétitif dans ce secteur en pleine évolution. Une telle approche pourrait ouvrir de nouvelles opportunités de croissance et d'innovation pour l'industrie de l'assurance européenne, tout en garantissant une gestion prudente des risques associés à ces nouveaux actifs.

De plus, nos résultats mettent en lumière l'importance d'une réévaluation des méthodes de calibrage des chocs et des matrices de corrélation dans le cadre de Solvabilité II pour ces nouveaux actifs. Cette adaptation permettrait une meilleure appréciation des risques et des avantages potentiels liés à l'inclusion des crypto-actifs dans les portefeuilles d'assurance.

Enfin, cette étude ouvre la voie à de nouvelles pistes de recherche, notamment sur l'optimisation de l'allocation d'actifs intégrant les crypto-monnaies, l'adaptation des stratégies de

---

couverture, et l'exploration de produits d'assurance innovants tirant parti des spécificités des actifs numériques. Ces avancées pourraient non seulement améliorer la performance financière des assureurs, mais aussi offrir de nouvelles opportunités de diversification et de création de valeur pour les assurés.

## EXECUTIVE SUMMARY

### **Problem Statement :**

This work aims to assess the potential impact of integrating a cryptocurrency representative – bitcoin – into a life insurer's portfolio, focusing specifically on Euro-denominated savings products, under the assumption that current European regulations allow such investments. bitcoin was chosen to represent cryptocurrencies due to its popularity, large market capitalization, and relatively lower volatility compared to other cryptocurrencies. The analysis objectives are both quantitative and qualitative. These objectives include studying the effects on the Solvency Capital Requirement (SCR), analyzing challenges related to risk management and regulatory compliance, and identifying opportunities to increase the profitability of life insurance portfolios despite bitcoin's inherent volatility.

### **Theoretical and Conceptual Framework :**

The work carried out within this thesis is based on a diverse set of theoretical and conceptual frameworks from academic and professional literature. These bibliographic references provide a foundation for the analysis and modeling of financial data, highlighting key concepts such as hyperbolic distributions, non-stationary time series models, financial option pricing, stochastic volatility modeling, and advanced methods for extreme risk estimation. Additionally, regulatory documents and recent research on topics such as Solvency II, cryptocurrency modeling, and the performance evaluation of traditional and digital asset portfolios have provided essential context for understanding current challenges and opportunities in the financial domain. By combining these theoretical and empirical perspectives, this thesis aims to modestly contribute to the understanding and management of financial and insurance risks, particularly in the context of integrating bitcoin into life insurance portfolios.

### **Methodological Approach to Address the Problem :**

From a qualitative perspective, the analysis of bitcoin's integration impact was based on the collection and study of data, articles, and reports from recognized sources such as Solvency II regulatory texts, trading platforms (Binance Research, Fidelity, BitMEX, etc.), and polling institutes like IPSOS. These analyses highlighted the opportunities and challenges associated with adding bitcoin to life insurance portfolios, as well as challenged the results obtained through quantitative analysis.

From a quantitative perspective, the evaluation of bitcoin's inclusion in a life insurer's portfolio focused on three key indicators of Solvency II Pillar I : Best Estimate (BE), Value of In Force (VIF), and Solvency Capital Requirement (SCR). Generating these indicators required adapting the internal ALM model to integrate the bitcoin component into the asset portfolio. In the absence of specific Solvency II regulations regarding cryptocurrency management within a life insurer's portfolio, it was necessary to calibrate ad

---

hoc metrics, such as a bitcoin shock, a risk-neutral economic scenario generator for bitcoin, and a market correlation matrix including bitcoin. These metrics were integrated as input parameters into the ALM model. Consequently, a significant portion of the thesis was dedicated to the rigorous calibration of these inputs.

A) Summary of Quantitative Work :

1. **Shock Calibration :**

Shock values for most traditional assets are already calibrated and published by EIOPA <sup>5</sup>. However, there remains a regulatory gap regarding the treatment of crypto assets under Solvency II, necessitating specific calibration of a shock for bitcoin.

For equity shock calibration, EIOPA used the quantile of a normal distribution fitted to 30 years of historical returns of the MSCI World Index. However, the use of the normal distribution has been widely criticized as it does not accurately model most equity index returns.

Since bitcoin is a relatively recent financial asset, with historical data only dating back to 2010, the limited depth of annual history poses significant challenges for rigorous statistical calibration of the Solvency II shock. To overcome this limitation, several strategies combining parametric and stochastic approaches were implemented to provide a comparative basis of methods and shock values. This enabled the selection of a relevant bitcoin shock value within the Solvency II framework.

The parametric approach examined various statistical models commonly used in finance and insurance. In addition to traditional parametric distributions such as the Normal, Student's t, GEV, and GPD distributions, which were fitted to historical data to calibrate the bitcoin shock, a new family of less frequent distributions was explored, namely the Generalized Hyperbolic Distributions (GHD). The objective was to identify the statistical model that best fits the different bitcoin datasets considered, in order to subsequently calculate a 0.5% parametric quantile with the selected distribution.

For the fitting of these models, three datasets were considered :

- Historical annual returns (12 observations)
- Historical rolling annual returns (4018 observations)
- Historical monthly returns (144 observations)

Concretely, the models were first fitted to the 12 annual observations, providing an initial calibrated shock result. Then, the annual returns dataset was extrapolated using the rolling returns method, and the shock values obtained were compared to those from the first calibration. However, the quantification of the bias potentially introduced by this rolling returns approach led to considering a third parametric method. This involved calibrating a monthly shock from the 144 monthly return observations and then converting it into an annual shock via an annualization factor.

A stochastic approach was adopted to complement the parametric approaches. This approach relies on the use of the Markov-Switching Autoregressive (MSAR) model for bitcoin shock calibration. Through the MSAR model, a real-world economic scenario generator for bitcoin's price was developed, enriching our historical data. Three approaches were adopted with this model for shock calibration to take advantage of all the benefits the model offers. Indeed, the model can be trained on both stationary and non-stationary series.

---

5. European Insurance and Occupational Pensions Authority

- Modeling and projection of log-prices version 1 : 10,000 scenarios of bitcoin log-prices were generated over 1 year. Annual returns were calculated from these trajectories, and an empirical shock was computed.
- Modeling and projection of log-prices version 2 : generation of 10,000 trajectories over 18 years. Each simulated trajectory was complemented with 12 years of historical data to create a 30-year history. Each 30-year history allowed the calculation of a shock. A shock distribution was thus obtained, providing a precise understanding of the shock's variation range.
- Modeling and projection of log-returns : 10,000 scenarios of bitcoin log-returns were generated over 1 year. Annual relative returns were calculated from these log-returns, and an empirical shock was computed.

The results obtained provide a basis for comparing methods and observing converging trends, which strengthens the reliability of the selected shock value. The table below summarizes the results obtained from the various approaches explored for shock calibration.

Method	Summary of Results			
	Approach	Best Model	Shock	Eligible Range
Parametric	12-Year History	Fréchet	77%	[77%, 84%]
	Rolling History	Fréchet	84%	
	Monthly History	Normal Inverse Gaussian	81%	
Stochastic	Log-Price Application 1	MS(3)-AR(3)	90%	[84%, 90%]
	Log-Price Application 2	MS(3)-AR(3)	84%	
	Log-Return	MS(3)-AR(5)	90%	

**TABLE 0.7 Summary Table of Shocks**

Through the parametric models explored, we did not observe convergence towards a specific shock value but rather towards a potential value range between 77% and 84%. This range was determined based on two criteria : the overall fit of the models to the three bitcoin datasets (annual history, monthly history, rolling annual returns) according to the AIC criterion, and the comparison of theoretical and empirical quantiles for the left tails of the distribution.

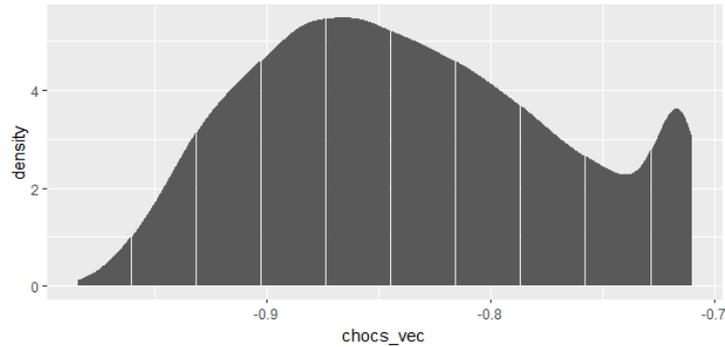
Following the trade-offs made between the different parametric model fit criteria, two models were selected for the three bitcoin datasets : the Fréchet model and the Normal Inverse Gaussian (NIG) model.

For the monthly returns dataset, the NIG model, which belongs to the generalized hyperbolic distribution family, proved to be the best fit among the models studied. Thus, the Fréchet model and the NIG model were selected as the most relevant to estimate the bitcoin shock from the different datasets analyzed, and the parametric shock values obtained with these models allowed for the construction of the eligible shock range.

The shocks obtained through simulation during the MSAR calibration with the log-price distribution of approach 1 and the log-return distribution exhibit marked similarities (89.98% versus 89.64%). This convergence of methods is notable. However, it is preferable to give more credibility to the model fitted to the non-stationary log-price time series, as it offers a better fit according to the RMSE criterion.

Expanding the simulated log-price sample with the last 12 observed years of history - Application 2 - to obtain 10,000 samples over 30 years of observations allowed us to obtain a distribution of 0.5% quantiles. This distribution reveals a shock observation range between

98.41% and 71.03%. Below is an illustration of the shock distribution obtained with application 2, along with some statistics calculated on this distribution.



**FIGURE 0.12 Empirical Density Associated with the 10,000 0.5% Quantiles Calculated**

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
98.4%	88.8%	84.2%	83.6%	78.7%	71.0%

**TABLE 0.8 Some Statistics on the Calibrated Shock Distribution**

It is important to note that all shocks obtained with the "best models" from the different parametric shock calibration approaches mentioned in this document fall within this value range. Moreover, the 10 percentage point gap between quartiles suggests moderate dispersion of values around the median, which may indicate some stability or consistency in the shock data.

These analyses lead us to retain the bitcoin shock value of 84% for the stochastic approach. As a reminder, the eligible shock range for the parametric approach is [77%, 84%]. Thus, the retained value of 84% is consistent with the results obtained from both the parametric and stochastic approaches.

## 2. Construction of a Risk-Neutral bitcoin ESG :

Including bitcoin in a life insurer's portfolio necessitates the development of a specific risk-neutral economic scenario generator (ESG) for bitcoin. This tool enables stochastic projection of bitcoin's future returns over a regulatory horizon of 50 years.

The literature offers many models for derivative pricing, ranging from traditional ones like the Black-Scholes model to more sophisticated ones like the VG-CIR model. The latter stands out for its ability to accurately replicate observed prices, thanks to stochastic volatility and a jump component. However, its complexity, with eight parameters to calibrate, makes it less appealing than the Heston model, which offers a good balance between prediction accuracy and simplicity of interpretation and implementation, particularly for evaluating European call options on bitcoin.

We opted for the Heston model, and the optimal parameters of the model were estimated by minimizing the RMSE between observed Call prices and theoretical prices calculated using the Fast Fourier Transform (FFT) method. Below are the estimated optimal parameter values.

algorithm	RMSE	$\kappa$	$\theta$	$\sigma$	$\rho$	$V_0$
Nelder-Mead	38.507	1.302	0.546	1.192	-0.097	0.355

**TABLE 0.9 Optimal Heston Model Parameters**

It is important to draw the reader's attention to the high values of volatility in the volatility process and long-term volatility, which is consistent with the inherent high volatility in bitcoin dynamics. However, one can already anticipate the occurrence of trajectory explosion phenomena during process diffusion, which could jeopardize the validation of these regulatory tests.

Euler, Milstein, and quadratic exponential (QE) discretization techniques are used to diffuse the underlying bitcoin. The Milstein discretization generated trajectories that best replicated observed prices, with an RMSE of €56.8 in the Market Consistency test (Table 0.10 and Figure 3.3).

Discretization Method	RMSE
Euler	6221.5
QE	2779.9
Milstein	56.8

TABLE 0.10 Market Consistency Test

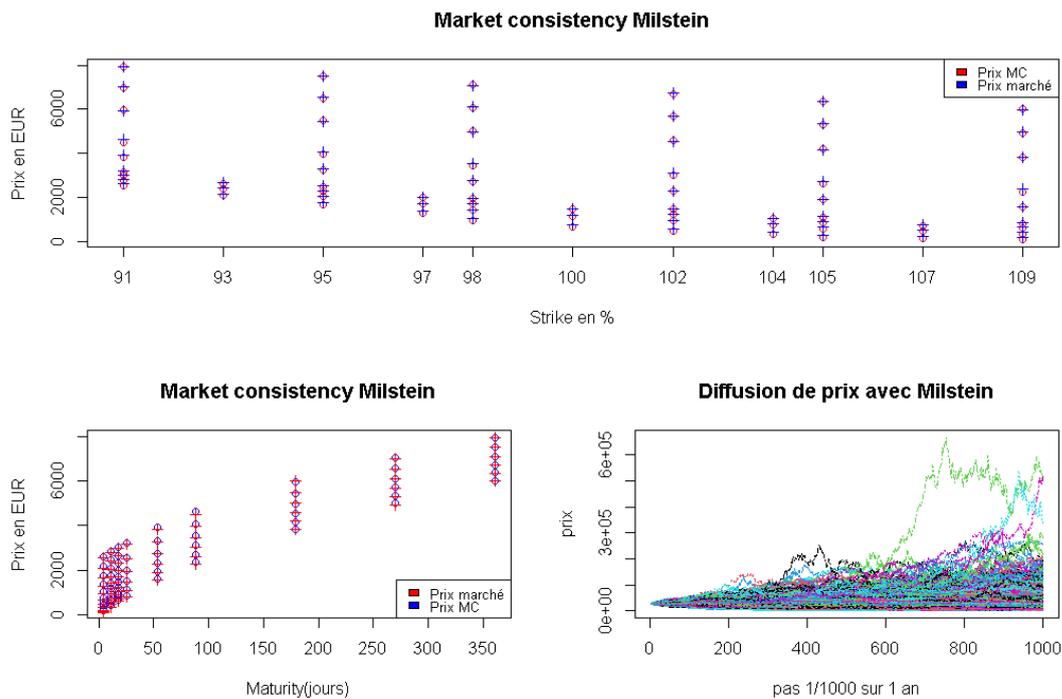


FIGURE 0.13 Market Consistency Test with Milstein

However, these trajectories from Milstein discretization cease to be martingales after a 12-year projection horizon. In contrast, the QE discretization model, while less effective in the Market Consistency test, manages to generate quasi-martingale trajectories over the 50-year projection horizon (Figure 0.14).

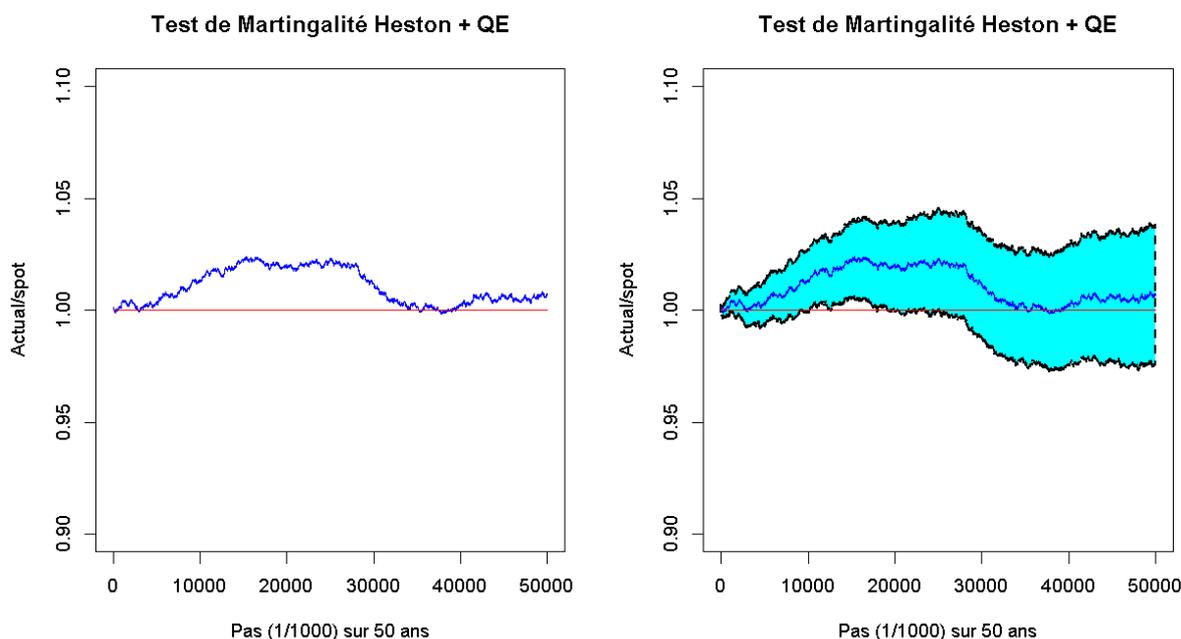


FIGURE 0.14 Martingale Test with QE

Indeed, the QE scheme helps control explosive trajectories by dynamically adjusting volatility using an approximation based on the non-central  $\chi^2$  distribution<sup>6</sup>. This approach ensures that extreme variance values are appropriately handled, preventing uncontrolled growth of volatility while maintaining stability in future projections.

However, although this approximation controls explosive trajectories, it distorts the intrinsic characteristics of the simulated bitcoin price dynamics. As a result, the generated scenarios fail to accurately replicate observed prices.

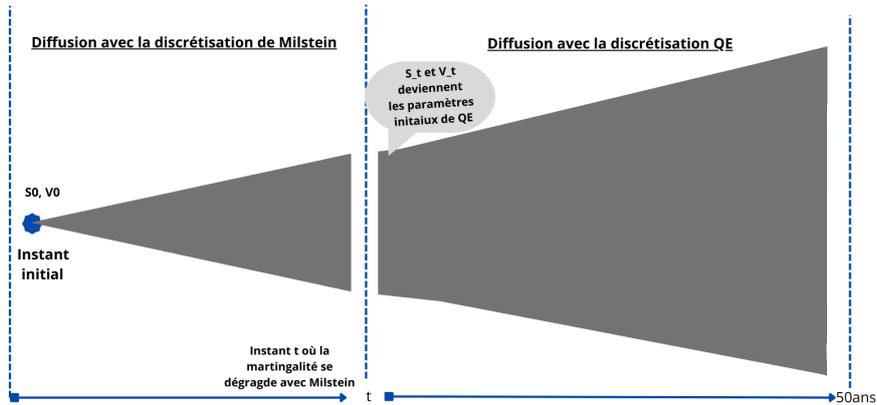
Thus, none of the discretization schemes managed to generate trajectories that passed both regulatory tests. To overcome this discretization error problem, a "trajectory martingalization" method was proposed in this paper.

This novel approach merges the benefits of both Milstein and QE discretization schemes. The Milstein scheme proved to be the most effective in reproducing market prices during the market consistency test, which is crucial for associating an ESG with a specific asset. However, the QE discretization produced near-martingale trajectories over 50 years.

The proposed solution combines these advantages :

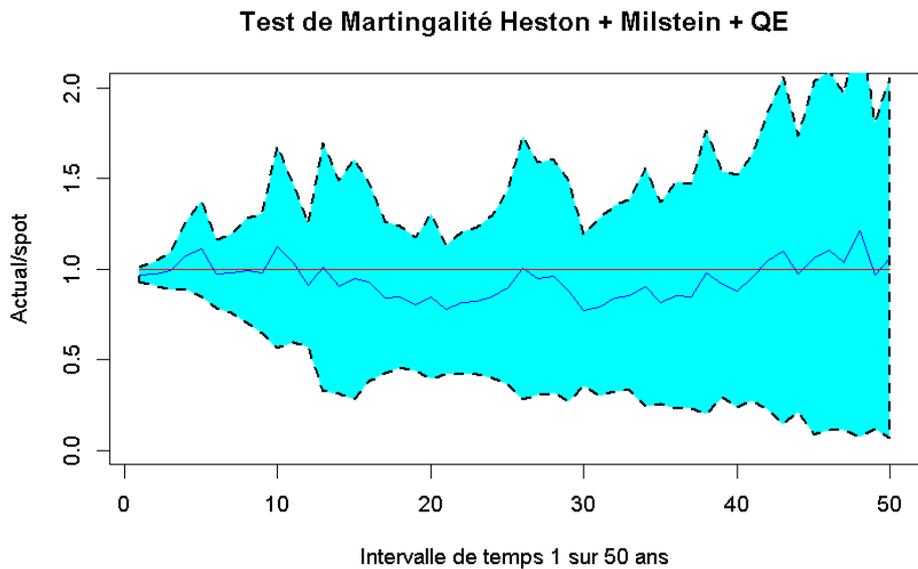
- i. Use Milstein discretization until the martingale test begins to degrade.
- ii. Retrieve the Milstein prices and volatilities at this point.
- iii. Use these values as initial parameters for QE discretization.
- iv. Continue the diffusion with QE until the desired horizon.

6. CIR process transition law : this law states that future variance  $v_{n+1}$ , conditional on the current value  $v_n$ , follows a non-central  $\chi^2$  distribution.



**FIGURE 0.15** Martingalization of price scenarios

This hybrid approach aims to maintain market consistency while ensuring long-term martingale properties. The Heston model, combined with this martingale discretization method, generated trajectories that passed the regulatory tests. The ESG resulting from this approach served as input parameters for the ALM model. Figure 3.9 illustrates the martingale test validated by these generated trajectories.



**FIGURE 0.16** Martingale Test

The ESG derived from this approach served as input parameters for the ALM model. Chapter 3 is dedicated to the development of this risk-neutral bitcoin ESG.

### 3. Calibration of market correlation matrix :

The standard formula is the default method for calculating the SCR, used for insurance companies whose risk profile is considered standard or typical.

The calculation of the SCR according to the standard formula is carried out by aggregating all risks taken by insurance companies, integrating diversification effects through correlation matrices. The risk sub-modules and modules are thus aggregated following the correlation matrices provided by EIOPA. In this thesis, particular attention is paid to the market SCR, which is calculated according to the following formula :

$$SCR_{mkt} = \sqrt{\sum_{i,j} \text{CorrMkt}_{i,j} \bullet Mkt_i \bullet Mkt_j}$$

where :

- $\text{CorrMkt}_{i,j}$  represents the correlation coefficient between market risk sub-modules  $i$  and  $j$ .
- $Mkt_j$  denotes the SCR associated with market risk sub-module  $j$ .

This formula allows for the aggregation of different market risks taken into account under Solvency II, while considering the diversification effects between risk sub-modules.

The calibration of the correlation matrix is essentially based on empirical analysis. EIOPA used linear correlograms to detect and evaluate the strength and direction of linear relationships between pairs of risks. The linear correlation coefficients are defined by the following formula :

$$\text{CorrMkt}_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}$$

where  $X$  and  $Y$  are the risk factors studied. The results obtained are then adjusted to incorporate practical considerations and expert assessments.

It is important to note that the use of linear correlation to measure dependencies has drawn criticism, to which the regulator has responded by justifying the relevance of this measure for assessing linear dependencies between market assets.

#### 4. Calibration of market correlation matrix :

The standard formula is the default method for calculating the SCR, used for insurance companies whose risk profile is considered standard or typical.

The calculation of the SCR according to the standard formula is carried out by aggregating all risks taken by insurance companies, integrating diversification effects through correlation matrices. The risk sub-modules and modules are thus aggregated following the correlation matrices provided by EIOPA. In this thesis, particular attention is paid to the market SCR, which is calculated according to the following formula :

$$SCR_{mkt} = \sqrt{\sum_{i,j} \text{CorrMkt}_{i,j} \bullet Mkt_i \bullet Mkt_j}$$

where :

- $\text{CorrMkt}_{i,j}$  represents the correlation coefficient between market risk sub-modules  $i$  and  $j$ .
- $Mkt_j$  denotes the SCR associated with market risk sub-module  $j$ .

This formula allows for the aggregation of different market risks taken into account under Solvency II, while considering the diversification effects between risk sub-modules.

The calibration of the correlation matrix is essentially based on empirical analysis. EIOPA used

linear correlograms to detect and evaluate the strength and direction of linear relationships between pairs of risks. The linear correlation coefficients are defined by the following formula :

$$\text{CorrMkt}_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}}$$

where  $X$  and  $Y$  are the risk factors studied. The results obtained are then adjusted to incorporate practical considerations and expert assessments.

It is important to note that the use of linear correlation to measure dependencies has drawn criticism, to which the regulator has responded by justifying the relevance of this measure for assessing linear dependencies between market assets.

In this study, EIOPA’s methodology has been adapted to assess the correlation between bitcoin and traditional assets. Before conducting this assessment, an analysis of the possibility of a causal relationship between the digital asset and the traditional assets present in the ALM model portfolio was carried out.

Once causal relationships were identified, a representative asset for each market risk factor was selected. Then, annual rolling empirical correlations between pairs of risk factors were calculated, with the aim of capturing all dependencies over a 12-month horizon within the analyzed historical period. The resulting correlation matrix was used to aggregate annual coverage capitals. As a precautionary measure and in compliance with Solvency II standards, the highest positive correlation observed for each pair of assets during the historical period was retained, given that a negative correlation could have a favorable effect by reducing the SCR.

Finally, the measured correlations were compared with annual data published on trading platforms.

The results obtained confirm the observations made on the majority of trading platforms : bitcoin shows low correlations with most traditional assets, including those present in the studied asset portfolio, as shown in the calibrated correlation matrix below :

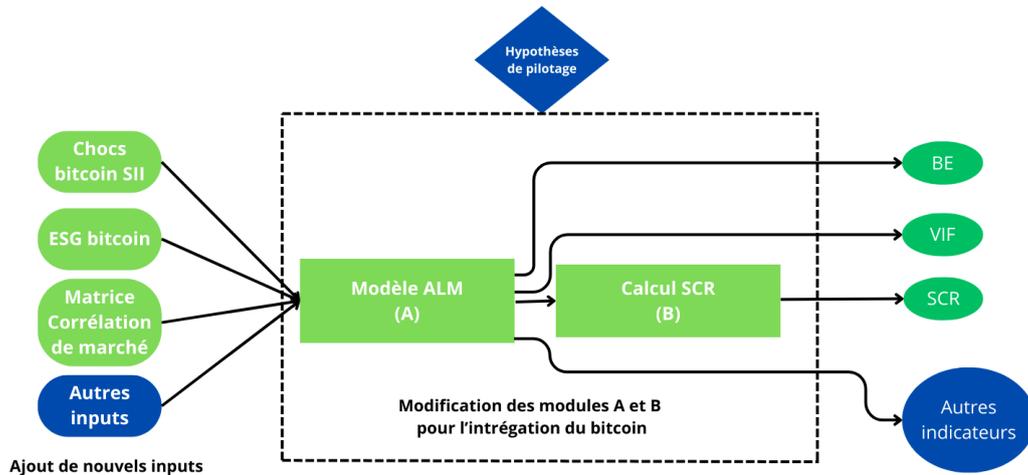
	bitcoin	Interest Rate	Equity	Real Estate	Spread
bitcoin	1				
Interest Rate	0.15	1			
Equity	0.5	0.5/0	1		
Real Estate	0.2	0.5/0	0.75	1	
Spread	0.35	0.5/0	0.75	0.5	1

**TABLE 0.11 S2 correlation matrix calibrated for the ALM tool**

This matrix is indeed positive definite, as confirmed by its eigenvalues, which are all positive. Chapter 4 is dedicated to the study of the calibration of this matrix.

## 5. ALM Model Adjustment :

Modifications have been made to the ALM model, particularly in asset projection and asset-liability interaction, to ensure a balanced financial statement for insurers incorporating bitcoin into their portfolios. The following template illustrates the process for generating the relevant indicators, with green boxes highlighting the parts of the model that were modified or adapted.



**FIGURE 0.17 Model Evolution for Bitcoin Integration**

The dotted area contains the dedicated modules for projecting the life insurer's activity and calculating the SCR. Below, we summarize the key adjustments made :

- A new asset class was added to the portfolio, and bitcoin was valued during the projection similar to equity assets. The risk-neutral bitcoin ESG enabled aging the asset over the 50-year projection horizon.
- A new bitcoin shock line was added to the asset shocks, allowing for the production of a shocked bitcoin scenario.
- The target allocation, purchase, and sale functions for assets were adjusted to include bitcoin in the asset and liability movements during the half-period projection.
- Financial production now includes bitcoin's performance, influencing the contract revaluation mechanisms each projection year.
- The CalculSCR module was modified to allow for the calculation of a stand-alone bitcoin SCR. Additionally, this module calculates an aggregated market SCR using the new correlation matrix that includes the bitcoin risk factor.

#### A) Impact Analysis Work :

The quantitative impact analysis focused on producing indicators derived from the Pillar I requirements of Solvency II, in the context of a life insurer specialized in euro-denominated savings. Three key indicators were selected :

- BEL (Best Estimate Liabilities) : representing the present value of the insurer's future obligations
- VIF (Value of In-Force) : corresponding to the present value of future profits
- SCR (Solvency Capital Requirement) : the required solvency capital to ensure business continuity

The study compared two models : one excluding bitcoin from the portfolio and the other incorporating it. The portfolio without bitcoin was used as the initial reference point. For portfolios including bitcoin, a progressive allocation strategy was implemented, with proportions ranging from 1% to 5%, resulting in five distinct allocation scenarios. This approach aims to gradually introduce bitcoin into the portfolio while observing the simultaneous evolution of the Solvency II indicators. The

increasing addition of bitcoin is accompanied by an equivalent reduction in cash, while the proportions of other assets remain constant. This methodology aims to isolate and specifically evaluate the impact of bitcoin in our analyses.

Allocation scheme	Bonds	Real Estate	Stocks	Cash	Crypto
Reference	84%	6%	5%	5%	0%
1	84%	6%	5%	4%	1%
2	84%	6%	5%	3%	2%
3	84%	6%	5%	2%	3%
4	84%	6%	5%	1%	4%
5	84%	6%	5%	0%	5%

**TABLE 0.12 Allocation strategy with bitcoin pocket**

The life insurer's activity was projected over 50 years in stochastic and deterministic modes using the ALM model, adjusted with central and shocked scenarios. The BEL and VIF indicators generated for each projection mode allowed the calculation of TVOGs for each portfolio, as summarized in the table below in millions of euros.

1. BEL-VIF Analysis :

Part bitcoin	VM_initiale	BE_Det	VIF_Det	TVOG	Portefeuille
0 %	23,2 M€	21,7 M€	1,54 M€	1,0 M€	Référence
1 %	23,2 M€	21,8 M€	1,45 M€	1,4 M€	1
2 %	23,2 M€	21,8 M€	1,37 M€	1,6 M€	2
3 %	23,2 M€	21,9 M€	1,28 M€	1,7 M€	3
4 %	23,2 M€	22,0 M€	1,19 M€	1,7 M€	4
5 %	23,2 M€	22,1 M€	1,11 M€	1,7 M€	5

**FIGURE 0.18 Analysis of impact indicators**

It was observed that the BEL increased with a growing allocation in bitcoin, while the VIF decreased. Additionally, the time value of options and guarantees (TVOG) also increased, going from €1.0M to €1.7M with an increasing share of bitcoin, suggesting that the options embedded in the life insurance contract, such as surrender options or minimum rate guarantees, become more significant with the addition of bitcoin in the ALM model.

An in-depth analysis was conducted to compare the evolutions between the reference portfolio and portfolio 1, which differ by the addition of 1% bitcoin offset by an equivalent reduction in cash.

Figures 5.7 and 5.8 show that the fluctuations in BEL and VIF are mainly related to capital gains or losses realized when selling assets to finance liability outflows each year. These variations are more significant in the portfolio containing bitcoin, which introduces more volatility compared to cash.

The asset selling strategy adopted in the ALM model, which consists of selling assets in order of decreasing risk, can be questioned. This strategy, common in the life insurance sector to reduce portfolio volatility after liability financing, leads to a significant loss in 2032, a year marked by a sharp decline in the average return of bitcoin. This decrease in financial production affects the revaluation of contracts, and therefore the insurer's result, as detailed in

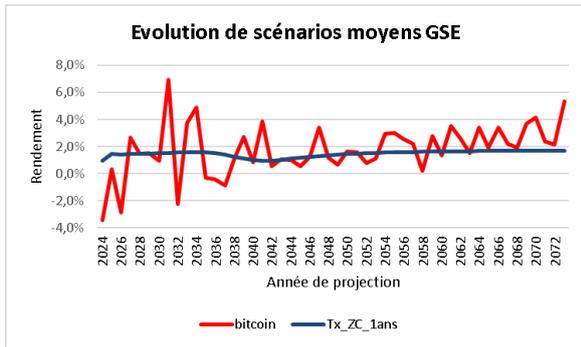


FIGURE 0.19 Mean GSE scenario

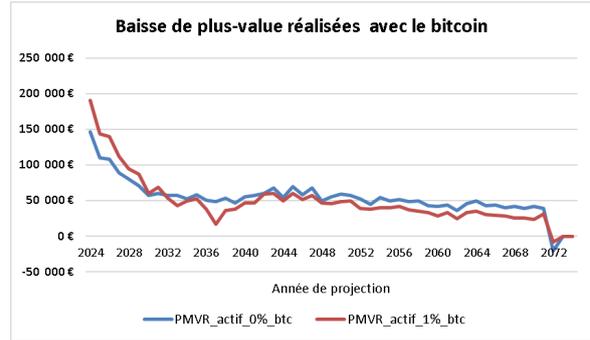


FIGURE 0.20 Evolution of unrealized capital gains/losses

chapter 5. This highlights that the current industry assumptions seem inadequate for integrating bitcoin, emphasizing the need to deepen research in this area to take advantage of the opportunities offered by this cryptocurrency. An alternative approach, which is part of the considerations explored in this paper, would involve including a small amount of bitcoin in the portfolio while excluding it annually from liability funding mechanisms. This strategy would allow for an assessment of bitcoin’s long-term profitability potential.

## 2. Market SCR Analysis

The analysis reveals a gradual increase in market SCR with the growing integration of bitcoin, as shown in Figure 0.21.

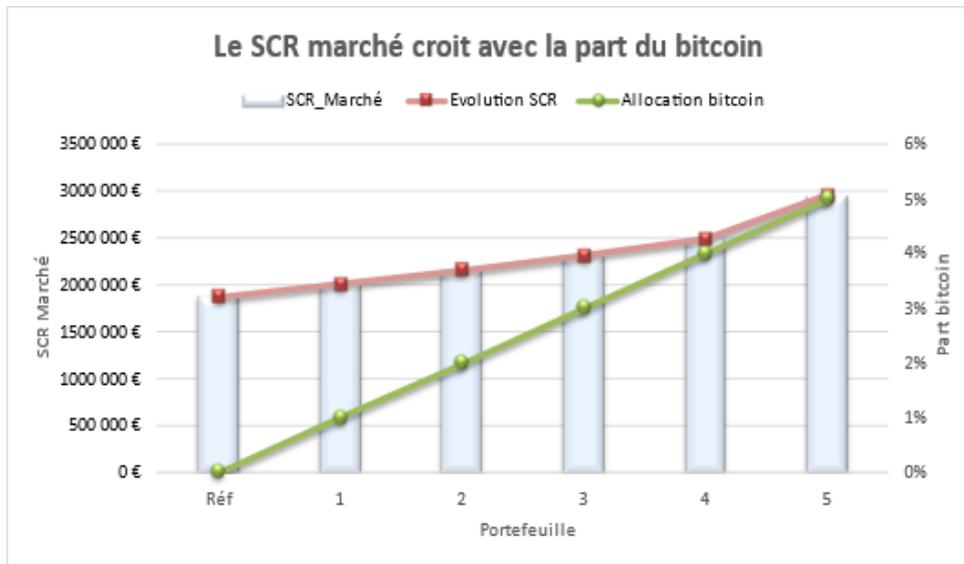


FIGURE 0.21 Evolution of market SCR

This trend was anticipated, as increasing the share of a risky asset logically requires more capital to cover the associated risk.

Examination of the market risk sub-modules highlighted the significant impact of the bitcoin shock calibrated at 84% on the required capital. A comparison with a portfolio containing 5% bitcoin and 5% type I equities illustrates this difference : bitcoin undergoes a shock twice as

large (84% vs 39%), resulting in an SCR about four times higher than that of type I equities. This observation underscores the intensity of the bitcoin shock in the model, which may partly explain the increase in TVOG.

A proposed avenue for reflection is to quantify the sensitivity of SII indicators to a variation in the shock, for example by analyzing the evolution of the three indicators following a variation from 84% to 83% or 85%. This exercise could help companies position themselves in the face of a potential shock value communication by the regulator for these digital assets.

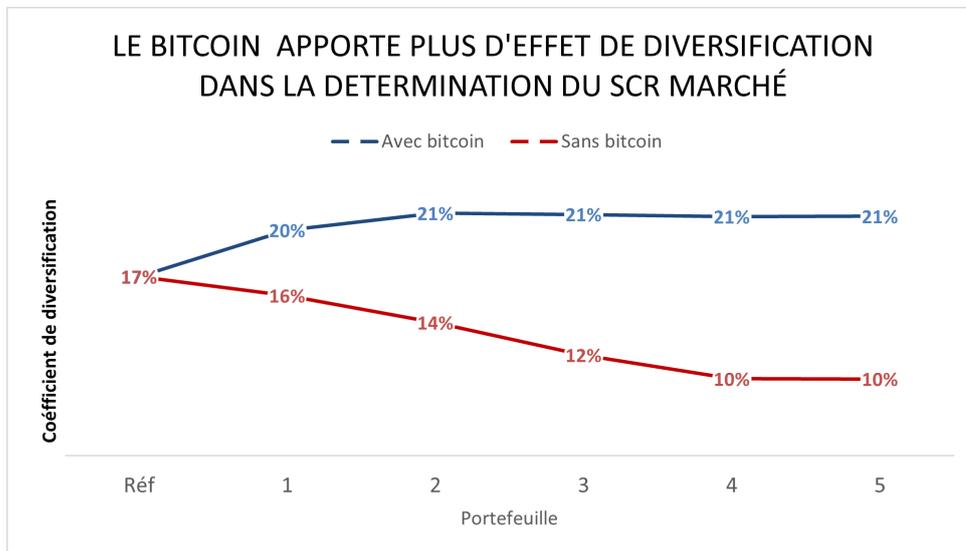
Despite the significant weight of bitcoin's Stand-Alone SCR compared to the equity SCR, the diversification effect provided by bitcoin mitigates its impact in the market SCR calculation. The study of the calibrated correlation matrix (section 3.5) on the aggregation of market risk sub-modules reveals that the integration of bitcoin improves the diversification effect on market SCR. The diversification benefit provided by this matrix can be quantified using the following formula :

$$1 - \frac{SCR_{mkt}}{\sum_r Mkt_r} \quad (0.2)$$

where,

- $SCR_{mkt}$  denotes the capital reserve for market risk,
- $Mkt_r$  corresponds to the capital reserves for individual market risks.

Diversification reduces the overall SCR : the higher the diversification coefficient, the lower the capital resulting from the aggregation of sub-modules. The market SCR, with and without bitcoin, was calculated for six allocation schemes using formula (5.30). The results are presented in figure 5.11.



**FIGURE 0.22 Diversification gain with the correlation matrix**

the integration of bitcoin improves the diversification effect on market SCR, this effect being optimal with a 2% allocation in bitcoin, beyond which the coefficient remains stable at 21%.

### 3. Conclusion :

---

In conclusion, this impact analysis highlights the complexities and challenges associated with integrating crypto-assets, particularly bitcoin, into the life insurance sector. Our work, based on conventional industry assumptions, reveals that fully capitalizing on the profitability opportunities offered by bitcoin requires a more nuanced and innovative approach than traditional strategies.

This study underscores the critical need to deepen research on crypto-assets within the specific context of insurance. It is imperative to develop innovative asset-liability management (ALM) models and tailored investment strategies that consider the unique characteristics of bitcoin, such as its high volatility and long-term return potential. These approaches must be designed while scrupulously adhering to regulatory constraints and preserving the stability objectives inherent in life insurance. Furthermore, it is essential for the European insurance market to adopt a proactive stance on crypto-assets. This would not only help reduce the growing gap with the U.S. market dynamics but also position Europe as an innovative and competitive player in this rapidly evolving sector. Such an approach could open new growth and innovation opportunities for the European insurance industry while ensuring prudent risk management associated with these new assets.

Moreover, our findings highlight the importance of reassessing shock calibration methods and correlation matrices within the Solvency II framework for these new assets. Such adaptations would allow for a better understanding of the risks and potential benefits associated with the inclusion of crypto-assets in insurance portfolios.

Finally, this study paves the way for new avenues of research, particularly in optimizing asset allocation that incorporates cryptocurrencies, adapting hedging strategies, and exploring innovative insurance products that leverage the unique features of digital assets. These advances could not only improve the financial performance of insurers but also offer new opportunities for diversification and value creation for policyholders.

# Table des matières

<b>RESUME</b>	<b>ii</b>
<b>REMERCIEMENTS</b>	<b>iii</b>
<b>NOTE DE SYNTHÈSE</b>	<b>iv</b>
<b>LISTE DES FIGURES</b>	<b>xxxvii</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX</b>	<b>xxxix</b>
<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE 1. Présentation de la problématique</b>	<b>3</b>
1.1 Le marché de l'assurance vie . . . . .	3
1.1.1 Présentation de l'assurance vie . . . . .	3
1.1.2 Environnement réglementaire autour de l'assurance vie . . . . .	7
1.1.3 La gestion actif-passif en assurance vie . . . . .	10
1.2 Généralités sur les cryptoactifs . . . . .	11
1.2.1 Présentation des cryptoactifs . . . . .	11
1.2.2 État des lieux des cryptoactifs et événements récents favorisant son adoption . . . . .	13
1.2.3 Sélection du bitcoin comme actif représentatif des cryptoactifs . . . . .	16
1.2.4 Le potentiel du bitcoin comme actif d'investissement pour un assureur . . . . .	16
1.2.5 Les défis des assureurs liés l'intégration du bitcoin. . . . .	20
1.3 Analyse d'impacts prospective . . . . .	22
1.3.1 Impacts potentiels sur la gestion actif-passif . . . . .	22
1.3.2 Sélection des indicateurs d'analyse d'impact . . . . .	23
1.4 Nécessité de mettre à jour les outils de projection actuels . . . . .	27
1.4.1 Nécessité de calibrer de nouvelles métriques spécifiques au bitcoin . . . . .	28
1.4.2 Adaptation du modèle ALM et du calcul du SCR marché . . . . .	29
1.5 Conclusion du chapitre . . . . .	29
<b>CHAPITRE 2 : Calibration du choc bitcoin</b>	<b>30</b>
2.1 Cadre de l'étude . . . . .	30
2.1.1 Méthode de calibrage de l'EIOPA pour le choc action . . . . .	30

---

2.1.2	Méthodes développées pour le calibrage du choc bitcoin S2. . . . .	32
2.1.3	Sélection du type de rendement dans le cadre du calibrage d'un choc S2 . . . . .	35
2.1.4	Critères de sélection des modèles . . . . .	36
2.1.5	Présentation des données . . . . .	37
2.2	Approches paramétriques du calibrage du choc . . . . .	41
2.2.1	Sélection des modèles paramétriques . . . . .	41
2.2.2	Principes de base des modèles paramétriques sélectionnés . . . . .	42
2.2.3	Calibrage du chocs sur les 12 années d'historique . . . . .	45
2.2.4	Calibrage du choc sur la base de données de rendements annuels glissants . . . . .	51
2.2.5	Calibrage du choc annuel à partir du choc mensuel . . . . .	66
2.2.6	Synthèse des résultats des modèles paramétriques . . . . .	70
2.3	Approches stochastiques pour le calibrage du choc - Modèle MSAR . . . . .	72
2.3.1	Généralités . . . . .	72
2.3.2	Principe de base du modèle MSAR . . . . .	72
2.3.3	Calibration du modèle MSAR sur les log-prix . . . . .	74
2.3.4	Calibration du modèle MSAR sur les log-rendements et calibration du choc . . . . .	80
2.3.5	Synthèse des 2 approches . . . . .	84
2.4	Conclusion de le calibrage du choc bitcoin . . . . .	84
	<b>CHAPITRE 3 : Construction d'un GSE risque-neutre bitcoin</b>	<b>86</b>
3.1	Cadre de l'étude . . . . .	86
3.2	Modèle d'Heston . . . . .	87
3.2.1	Structure du Modèle . . . . .	87
3.2.2	Évaluation des options avec la méthode FFT . . . . .	88
3.2.3	Calibration des paramètres du modèle Heston . . . . .	89
3.3	Modèles de discrétisation de processus . . . . .	91
3.3.1	Schéma de discrétisation de Milstein . . . . .	92
3.3.2	Modèle Quadratique Exponentielle (QE) pour la volatilité . . . . .	92
3.4	Tests réglementaires pour la validation du modèle . . . . .	94
3.4.1	Test de Market Consistency . . . . .	94
3.4.2	Test de martingalité . . . . .	95
3.4.3	Martingalisation des scénarios de prix . . . . .	97
3.4.4	Discussion sur la méthode de martingalisation . . . . .	100
3.5	Conclusion du chapitre . . . . .	102
	<b>CHAPITRE 4 : Calibration d'une nouvelle matrice de corrélation du marché</b>	<b>103</b>

---

4.1	Cadres de l'étude . . . . .	103
4.2	La méthodologie de l'EIOPA pour le calibrage de la matrice de corrélation . . . . .	104
4.2.1	Présentation de la méthode . . . . .	104
4.2.2	Quelques limites exprimées sur l'approche de l'EIOPA . . . . .	105
4.3	Adaptation de la méthodologie de l'EIOPA au bitcoin . . . . .	106
4.3.1	Vérification d'un lien de causalité entre le bitcoin et les actifs traditionnels . . . . .	106
4.3.2	Corrélation bitcoin - Action . . . . .	107
4.3.3	Corrélation bitcoin - Taux . . . . .	109
4.3.4	Corrélation bitcoin - Immobilier . . . . .	111
4.3.5	Corrélation bitcoin - Spread . . . . .	112
4.4	Analyse comparative . . . . .	114
4.5	Test de positivité de la matrice de corrélation . . . . .	115
4.6	Conclusion du chapitre . . . . .	116
	<b>CHAPITRE 5 : Application : Ajustement du modèle ALM et analyse d'impact</b>	<b>117</b>
5.1	Développement du modèle ALM pour l'intégration du bitcoin . . . . .	117
5.1.1	Modèle ALM sans la poche crypto . . . . .	117
5.1.2	Modèle ALM avec la poche crypto . . . . .	120
5.2	Étude d'impact . . . . .	124
5.2.1	Présentation des hypothèses . . . . .	124
5.2.2	Analyse d'impact . . . . .	125
5.3	Conclusion du chapitre . . . . .	132
	<b>CONCLUSION</b>	<b>134</b>
	<b>REFERENCES</b>	<b>136</b>
A.	Évaluation des options avec la méthode FFT . . . . .	139

# Table des figures

Figure 1.1	Assurance-vie . . . . .	3
Figure 1.2	Composition moyenne du portefeuille d'un fonds euros en 2020 . . . . .	4
Figure 1.3	Récapitulatif de l'environnement de l'assurance vie . . . . .	5
Figure 1.4	Les 3 piliers de solvabilité II . . . . .	8
Figure 1.5	Fiscalité en cas de vie pour un contrat d assurance vie de plus de 8 ans . . . . .	9
Figure 1.6	Les principaux crypto-actifs . . . . .	11
Figure 1.7	L'investissement institutionnel en cryptomonnaies . . . . .	14
Figure 1.8	Différence entre la DeFi et les autres produits bancaires . . . . .	15
Figure 1.9	Répartition de la capitalisation des cryptomonnaies . . . . .	16
Figure 1.10	Dynamique du cours du bitcoin sur 10 ans . . . . .	17
Figure 1.11	Portefeuille 60/40 avec 5/10/30% d'allocation bitcoin . . . . .	17
Figure 1.12	Corrélations des rendements hebdomadaires sur trois ans. . . . .	18
Figure 1.13	Volume des échanges de bitcoins sur 24 heures (en millions d'USD) . . . . .	19
Figure 1.14	Comparaison du spread et du volume sur les principales paires de BTC . . . . .	20
Figure 1.15	Structure du SCR formule standard . . . . .	27
Figure 1.16	Évolution du modèle pour l'intégration du bitcoin . . . . .	28
Figure 2.1	Comparaison rendements relatifs et rendements log . . . . .	36
Figure 2.2	Évolution journalière du prix et du rendement . . . . .	37
Figure 2.3	Densité de rendements journaliers . . . . .	38
Figure 2.4	Évolution mensuelle du prix et du rendement . . . . .	39
Figure 2.5	Densité empirique de rendements mensuels . . . . .	39
Figure 2.6	Évolution annuelle des prix et rendements . . . . .	40
Figure 2.7	Densité empirique rendements annuels . . . . .	40
Figure 2.8	Diagrammes pour l'ajustement de la loi normale sur la distribution . . . . .	46
Figure 2.9	Ajustement des rendements annuels par une loi de Student . . . . .	47
Figure 2.10	Diagrammes ajustement loi . . . . .	48
Figure 2.11	Ajustement des rendements annuels par une loi hyperbolique . . . . .	49
Figure 2.12	Ajustement des rendements annuels par une loi NIG . . . . .	50
Figure 2.13	Zoom sur le comportement des quantiles empiriques et paramétriques des queues à gauche . . . . .	51
Figure 2.14	Densité empirique rendements annuels glissants . . . . .	52
Figure 2.15	Paramètres optimaux obtenus . . . . .	53
Figure 2.16	Ajustement d'une loi de Student aux rendements annuels glissants . . . . .	54

---

Figure 2.17	Densité estimée . . . . .	55
Figure 2.18	Ajustement des rendements annuels glissants par une loi hyperbolique . . . . .	56
Figure 2.19	Ajustement des rendements annuels glissants par une loi NIG . . . . .	57
Figure 2.20	Densité estimée de l'échantillon modifié . . . . .	58
Figure 2.21	Mean Excess Function Plot . . . . .	59
Figure 2.22	Hill Plot . . . . .	60
Figure 2.23	Alternative & Smooth Hill Plots . . . . .	61
Figure 2.24	Diagrammes de l'ajustement de la loi Pareto II . . . . .	63
Figure 2.25	Densité de la loi estimée . . . . .	63
Figure 2.26	Comparaison quantiles calibrés vs quantiles empiriques . . . . .	66
Figure 2.27	chocs empiriques mensuels et chocs calibrés mensuels . . . . .	70
Figure 2.28	Log-prix journalier du bitcoin . . . . .	74
Figure 2.29	Autocorrélogrammes simple et partiel . . . . .	75
Figure 2.30	A droite modèle MS(2)-AR(3), A gauche modèle MS(3)-AR(3) . . . . .	76
Figure 2.31	Validation du modèle MSAR sur les log-prix . . . . .	77
Figure 2.32	Cône de validation du modèle . . . . .	77
Figure 2.33	Densité des rendements annuels simulés . . . . .	79
Figure 2.34	Densité empirique associée au 10000 quantiles à 0.5% calculés . . . . .	80
Figure 2.35	Autocorrélogrammes simple et partiel . . . . .	81
Figure 2.36	Régimes détectés par le modèle MSAR(3,5) . . . . .	81
Figure 2.37	Validation du modèle MSAR sur les log-rendements . . . . .	82
Figure 2.38	Cône de validation : Échelle normale Vs Échelle logarithmique . . . . .	83
Figure 2.39	Densité des rendements simulés . . . . .	84
Figure 3.1	Données Call spot bitcoin cotées à la date du 14 avril 2023 . . . . .	87
Figure 3.2	Adéquation entre prix de marché et prix théoriques . . . . .	91
Figure 3.3	Test de Market Consistency avec Milstein . . . . .	95
Figure 3.4	Test de martingalité avec Milstein . . . . .	96
Figure 3.5	Test de martingalité avec QE . . . . .	96
Figure 3.6	Martingalisation des scénarios de prix . . . . .	97
Figure 3.7	Étape 1 du processus de martingalisation . . . . .	98
Figure 3.8	Étape 2 du processus de martingalisation . . . . .	99
Figure 3.9	Étape 3 du processus de martingalisation . . . . .	100
Figure 3.10	Évolution du rendement moyen du GSE bitcoin sur 50 ans . . . . .	101
Figure 3.11	Évolution du rendement moyen GSE action sur 50 ans . . . . .	101
Figure 4.1	Matrice de corrélation EIOPA . . . . .	104

---

Figure 4.2	Densité empirique	108
Figure 4.3	Corrélation empirique	109
Figure 4.4	Densité empirique	110
Figure 4.5	Corrélation empirique	110
Figure 4.6	Densité empirique	111
Figure 4.7	Corrélation empirique	112
Figure 4.8	Densité empirique	113
Figure 4.9	Corrélation empirique	113
Figure 4.10	Matrice de corrélation sur 12 mois (source Fidelity Investment)	114
Figure 5.1	Étape de projection sur un an du modèle ALM implémenté	118
Figure 5.2	Analyse d'indicateurs d'impact	126
Figure 5.3	Zoom sur 2 portefeuilles	126
Figure 5.4	Comparaison PM centraux	127
Figure 5.5	Évolution du facteur d'actualisation	128
Figure 5.6	Évolution des produits financiers	128
Figure 5.7	Scénario moyen GSE	129
Figure 5.8	Évolution des PMVR	129
Figure 5.9	Évolution du SCR marché	130
Figure 5.10	Comparaison SCR des sous modules du risque du marché	131
Figure 5.11	Gain de diversification avec la matrice de corrélation	132

---

## Liste des tableaux

Table 2.1	Résumé des prix et rendements journaliers . . . . .	37
Table 2.2	Résumé des prix et rendements mensuels . . . . .	38
Table 2.3	Résumé des prix et rendements annuels du bitcoin . . . . .	40
Table 2.4	Quelques statistiques . . . . .	41
Table 2.5	Statistiques des 12 ans de rendements historiques . . . . .	45
Table 2.6	Calibration des paramètres de la loi normale. . . . .	45
Table 2.7	Calibration des paramètres de la loi de Student. . . . .	47
Table 2.8	Calibration des paramètres de la loi GEV. . . . .	48
Table 2.9	Calibration des paramètres de la loi hyperbolique. . . . .	49
Table 2.10	paramètres optimaux de la loi NIG. . . . .	50
Table 2.11	Synthèse des résultats . . . . .	50
Table 2.12	Résumé statistique de l'échantillon de rendements annuels glissants . . . . .	52
Table 2.13	Calibration des paramètres de la loi normale . . . . .	53
Table 2.14	Paramètres optimaux de la loi de Student . . . . .	54
Table 2.15	Calibration des paramètres de la loi GEV . . . . .	55
Table 2.16	Calibration des paramètres de la loi Hyperbolique . . . . .	56
Table 2.17	Calibration des paramètres de la loi NIG . . . . .	56
Table 2.18	Paramètres optimaux calibrés - loi GPD . . . . .	62
Table 2.19	Comparaison des modèles . . . . .	65
Table 2.20	Facteurs d'échelle calibrés sur les lois usuelles. . . . .	68
Table 2.21	Chocs annuels. . . . .	69
Table 2.22	AIC des modèles . . . . .	71
Table 2.23	Chocs obtenus des modèles . . . . .	71
Table 2.24	BIC des cinq modèles. . . . .	76
Table 2.25	Coefficient de la composante auto-régressive . . . . .	78
Table 2.26	Quelques statistiques sur la distribution de chocs calibrés . . . . .	80
Table 2.27	Paramètres optimaux du modèle MSAR(3,5) . . . . .	83
Table 2.28	Table récapitulative des chocs . . . . .	85
Table 3.1	Paramètres optimaux du modèle d'Heston . . . . .	90
Table 3.2	Comparaison des modèles des diffusion . . . . .	94
Table 4.1	Valeurs propres de la matrice de corrélation . . . . .	116
Table 4.2	Matrice de corrélation S2 calibrée pour l'outil ALM . . . . .	116
Table 5.1	Stratégie d'allocation avec la poche bitcoin . . . . .	124

---

Table 5.2	Valeur initial actif . . . . .	124
Table 5.3	MP passif . . . . .	125

---

# Introduction

L'évolution rapide du paysage financier mondial, marquée par l'émergence des crypto-monnaies et des crypto-actifs, a suscité un intérêt croissant parmi les investisseurs institutionnels. La récente approbation des ETFs Spot sur le bitcoin par la SEC (Securities and Exchange Commission) aux États-Unis a ouvert de nouvelles opportunités d'investissement pour des acteurs majeurs tels que Blackrock. Parallèlement, l'exemple de Meanwhile, la première compagnie d'assurance vie fonctionnant entièrement avec le bitcoin, illustre la dynamique en cours dans le secteur de l'assurance, où l'intégration des crypto-actifs est envisagée comme une stratégie potentielle pour rendre l'assurance vie plus accessible et mieux adaptée à cette évolution du marché.

L'assurance vie se concentre sur la protection des risques liés à la vie et à la survie de l'assuré, ainsi que sur les aléas financiers qui en découlent, offrant diverses garanties telles que le décès, la vie, l'épargne et la rente. Les contrats d'assurance vie, conçus pour le long terme, permettent à l'assureur de gérer les cotisations sur une période étendue, lui offrant ainsi la possibilité de constituer des réserves et de réaliser des investissements stratégiques pour répondre aux besoins des assurés. Les résultats financiers d'un assureur vie dépendent en grande partie des rendements générés par la gestion financière de ces contrats, ce qui suscite un intérêt croissant pour l'exploration des crypto-actifs comme une opportunité potentielle d'améliorer la rentabilité globale du portefeuille.

Depuis le 1er janvier 2016, la directive Solvabilité II impose des restrictions strictes sur les types d'actifs dans lesquels les assureurs peuvent investir, afin de garantir un équilibre entre leurs engagements contractuels et leurs ressources disponibles. Les fonds collectés par les assureurs doivent être placés dans des investissements conformes au principe de la personne prudente, en tenant compte de leur nature, de leur répartition et de leur durée de vie moyenne. La composition du portefeuille d'actifs des assureurs doit répondre aux exigences de sécurité, de liquidité et de rentabilité, tout en respectant les limitations réglementaires visant à éviter la concentration des risques selon les catégories d'actifs. Et les crypto-actifs, étant très volatils et spéculatifs, sont souvent considérés comme incompatibles avec ces exigences réglementaires. Par ailleurs, l'intégration de ces actifs dans un portefeuille d'assurance présente des défis significatifs en matière de gestion des risques et de réputation.

Cependant, les récentes évolutions réglementaires ouvrent de nouvelles perspectives pour l'intégration des crypto-actifs dans l'assurance-vie. En France, bien que la détention directe de crypto-actifs soit interdite dans les contrats d'assurance-vie, la loi Pacte II (2019) permet une exposition indirecte via des fonds professionnels spécialisés tels que les FPS et FPCI. Au niveau européen, l'adoption du règlement MiCA (2023) encadre les services liés aux crypto-actifs, tandis qu'aux États-Unis, l'approbation des ETF bitcoins ouvre l'accès aux investisseurs institutionnels. Cette dynamique, combinée à l'évolution rapide du paysage financier, aux avancées technologiques et à l'intérêt croissant des investisseurs institutionnels et des régulateurs internationaux, suggèrent qu'une révision du cadre réglementaire européen pourrait être envisagée à l'avenir. Cette révision potentielle viserait à faciliter l'adoption des crypto-actifs et à permettre aux assureurs vie d'avoir une exposition directe au bitcoin en Europe.

Ce mémoire a pour objectif d'analyser l'impact potentiel de l'intégration des crypto-actifs, notamment du bitcoin, dans le portefeuille d'un assureur vie opérant sur le périmètre de l'épargne Euro. Plus spécifiquement, les objectifs de recherche incluent l'examen des implications sur le capital réglementaire de solvabilité, l'analyse des défis en matière de gestion des risques et de conformité réglementaire, l'évaluation des opportunités pour améliorer la rentabilité des portefeuilles d'assurance-vie malgré la volatilité des crypto-actifs, ainsi que la formulation de recommandations pour une intégration efficace et prudente

---

de ces actifs dans les portefeuilles d'assurance-vie.

Le bitcoin, en raison de sa forte capitalisation boursière et de sa volatilité relativement inférieure à celle d'autres crypto-monnaies, est envisagé comme le premier crypto-actif susceptible d'être intégré dans la réglementation prudentielle. C'est pourquoi il a été sélectionné comme représentant de la classe des crypto-actifs dans ce mémoire.

Ce mémoire est structuré en trois parties distinctes. Initialement, nous explorons les motivations qui ont éveillé notre intérêt pour cette problématique d'analyse d'impact. La première partie comprend également une analyse qualitative pour identifier les défis et les opportunités liés à l'intégration des crypto-actifs dans le portefeuille d'une compagnie d'assurance-vie. Ensuite, l'étude examinera la calibration des métriques de risque bitcoin, y compris un choc S2 bitcoin, un générateur de scénarios de risque neutre bitcoin, et une matrice de corrélation de marché incluant le bitcoin. Ces métriques serviront de paramètres pour notre modèle ALM (Asset-Liability Management), qui projetera l'activité de l'assureur sur 50 ans, en accord avec la directive Solvabilité II. Cette section sera divisée en trois chapitres d'études quantitatives et représente une part importante du mémoire. Finalement, les résultats du modèle ALM seront utilisés comme indicateurs pour évaluer l'impact sur la solvabilité d'une allocation progressive de bitcoin dans le portefeuille d'une compagnie d'assurance-vie, avec un focus particulier sur les contrats en fonds en euros.

Par cette approche méthodologique, le mémoire vise à apporter des éclairages précieux sur les impacts potentiels de l'ajout de crypto-actifs dans le portefeuille d'un assureur, en termes des engagements et profits futurs de l'assureur, et du capital de solvabilité requis, dans un contexte de possible évolution réglementaire marquant un changement significatif dans l'industrie de l'assurance.

# CHAPITRE 1. Présentation de la problématique

## 1.1 Le marché de l'assurance vie

Cette section initiale du mémoire s'articule autour de trois axes principaux. Dans un premier temps, nous présenterons succinctement l'assurance vie et le cadre réglementaire qui régit ses opérations. Ensuite, nous explorerons les concepts fondamentaux des cryptoactifs, en nous concentrant particulièrement sur le bitcoin. Enfin, nous conduirons une analyse qualitative approfondie des implications potentielles de l'intégration du bitcoin dans la stratégie de l'entreprise d'assurance. Cette analyse, fondée sur des rapports d'études, des publications sectorielles et la littérature relative à la norme prudentielle Solvabilité II, mettra en lumière les impacts possibles sur la gestion des risques et l'optimisation de la rentabilité.

### 1.1.1 Présentation de l'assurance vie

L'assurance vie se distingue de l'assurance non-vie sur plusieurs aspects. Tandis que l'assurance vie offre une protection financière liée à la vie humaine, souvent à long terme, l'assurance non-vie couvre les risques matériels et de responsabilité à court terme. Un exemple pratique de l'assurance non vie est l'assurance automobile.

Les contrats d'assurance vie peuvent être utilisés à des fins de protection de la famille, d'épargne à long terme, ou de planification successorale. La prime est le montant payé par l'assuré pour bénéficier de cette couverture. Elle peut être versée en une seule fois ou régulièrement tout au long de la durée du contrat. Ses caractéristiques, notamment un placement financier flexible offrant un cadre fiscal et juridique avantageux, en ont fait une composante incontournable de toute stratégie patrimoniale ainsi qu'un des placements favoris des Français qui y ont investi 1 885 milliards d'euros (encours global à fin novembre 2022).

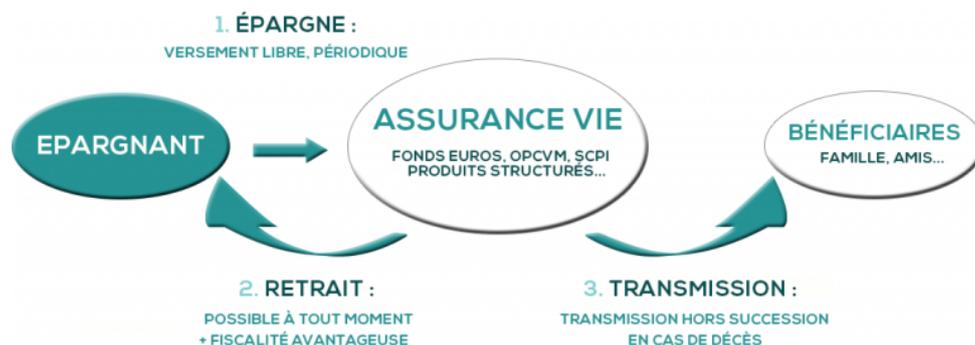


FIGURE 1.1 Assurance-vie

Les contrats d'assurance vie se distinguent principalement selon le type de risque couvert et le nombre de signataires. En fonction du risque, on trouve par exemple le contrat d'assurance vie en cas de vie, où la prestation est liée à la survie de l'assuré jusqu'à une date spécifiée ; le contrat d'assurance vie en cas de décès, où la prestation est versée aux bénéficiaires dès le décès de l'assuré ; et les contrats mixtes, qui couvrent à la fois les risques de vie et de décès. Selon le nombre de signataires, on distingue l'assurance vie individuelle, un contrat personnalisé entre l'assureur et un individu pour répondre à des besoins

spécifiques tels que la retraite ou l'épargne, et l'assurance vie collective, un contrat moins personnalisé souscrit par une entreprise ou une association pour couvrir des risques tels que le décès, l'invalidité ou l'incapacité de travail au sein d'un groupe de personnes.

L'assurance vie s'étend à plusieurs produits diversifiés qui peuvent être applicables tant aux assurances individuelles qu'aux collectives. Il existe des contrats d'épargne, qui permettent à l'assuré de constituer un capital grâce aux primes versées, et des contrats de retraite, visant à offrir un complément de revenus à l'assuré à la retraite. Les contrats de santé, d'un autre côté, servent à couvrir les frais médicaux non remboursés par la Sécurité sociale. Les contrats de prévoyance, quant à eux, offrent une protection contre divers aléas de la vie tels que le décès, l'invalidité, l'incapacité, et la dépendance. En outre, il y a les contrats emprunteurs qui garantissent le remboursement d'un prêt si l'emprunteur est incapable d'honorer ses échéances en raison d'un accident, d'une maladie ou d'un décès.

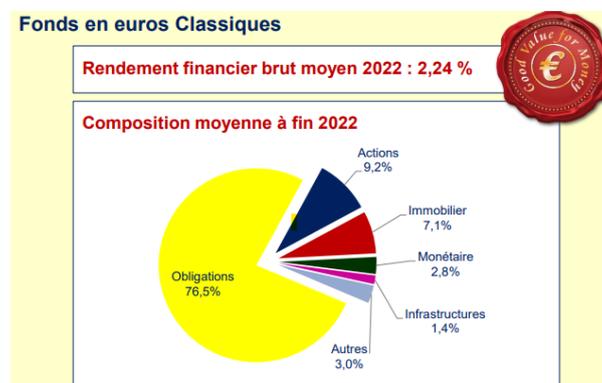
Dans le contexte spécifique de ce mémoire, l'accent sera mis sur l'assurance vie dans le domaine de l'épargne individuelle ou collective.

### 1.1.1.1 Zoom sur les types de supports des contrats d'assurance vie

Il existe trois principaux types de supports d'investissement pour les contrats d'assurance vie, les fonds en euros, les unités de compte et les contrats multi supports.

#### Les fonds en euros :

Le fonds en euros est un support d'investissement largement répandu, principalement dans le contexte des contrats d'assurance vie, constituant 80% des encours dans ce domaine. Il se caractérise par un produit dont la valeur est exprimée en euros, avec une orientation notable vers la sécurité. L'assureur garantit le capital investi, faisant abstraction de la fluctuation des marchés financiers, rendant ce produit attrayant pour ceux qui cherchent à investir sans s'exposer à des risques importants. La diversification est un principe clé dans la gestion de ce fonds, permettant ainsi de minimiser le risque de marché. Les fonds de l'assuré sont réajustés chaque année en fonction du rendement engendré par les actifs financiers de l'assureur. Plus précisément, cette réévaluation est influencée par un taux technique (TMG ou Taux Minimum Garanti), auquel s'ajoute un taux de participation aux bénéfices, déterminé soit par la réglementation, soit contractuellement.



(Source : Good for Money)

FIGURE 1.2 Composition moyenne du portefeuille d'un fonds euros en 2020

#### Les unités de compte :

Quant à elles, sont des supports d'investissement plus risqués et potentiellement plus rentables. Le

risque financier est assumé par l'assuré et non par l'assureur, ce qui diminue le besoin en capital pour l'assureur.

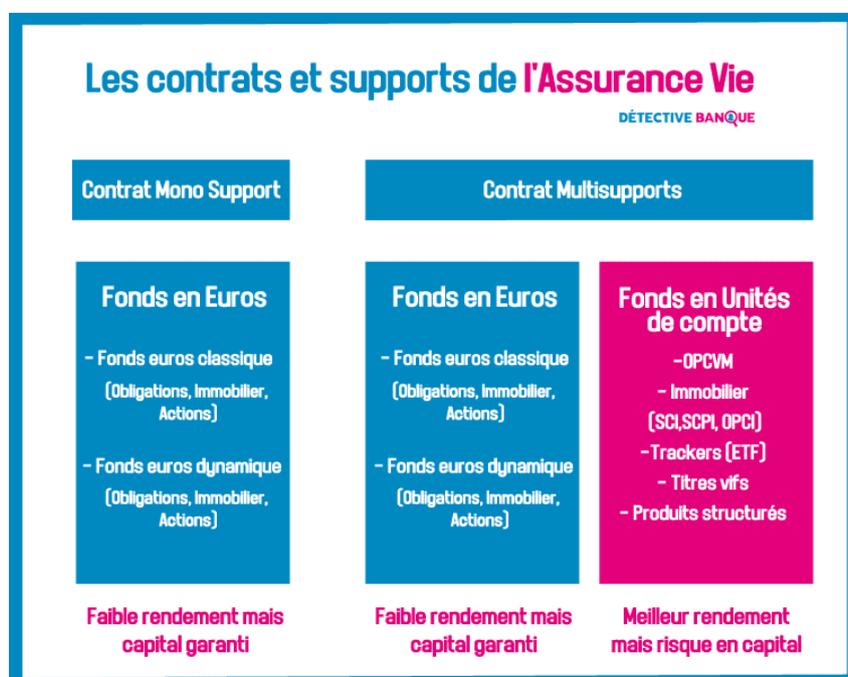
Le fonctionnement des unités de compte (UC) diffère de celui des fonds en euros. En effet, dans le cadre des UC, le portefeuille d'investissement n'est pas exprimé en euros ou en une autre devise, mais en unités d'un actif financier quelconque. Les unités de compte représentent des parts sur différents supports financiers qui peuvent inclure des actions, des obligations, des parts de placement collectifs (OPC, fonds . . .), des parts de SCI (Société Civile Immobilier), de SCPI (Société Civile de Placement Immobilier), de SICAV (Société d'Investissement à Capital Variable), des FCP (Fonds Commun de Placement), des titres monétaires ou même des titres de créances négociables.

Pour minimiser les pertes, le souscripteur a la possibilité de choisir une option payante appelée garantie plancher. Cette option garantit que les bénéficiaires désignés recevront au minimum un pourcentage (généralement 100%) du capital investi, indépendamment des fluctuations du marché.

### Les contrats multisupports :

Les investisseurs peuvent choisir d'allouer leur capital sur les deux principaux types de supports. Dans ce cas, on parlera de contrat multisupports. Les contrats multi-supports constituent un choix intermédiaire entre le fonds en euros et les fonds en unités de compte. Dans ces contrats, l'assuré a la possibilité de placer son capital de départ sur les deux types de fonds, dans les proportions de son choix.

Le principal atout des contrats multi-supports réside dans leur souplesse. Ils fusionnent les bénéfices de deux formes d'investissement distinctes : la garantie d'un capital à terme grâce au fonds en euros, et la possibilité de prendre des risques plus conséquents par le biais des fonds en unités de compte pour tenter d'augmenter le rendement. Cette alternative est particulièrement attrayante pour les souscripteurs ayant une tolérance au risque qui peut être modérée ou variable.



(Source : Detective-Banque)

FIGURE 1.3 Récapitulatif de l'environnement de l'assurance vie

En France, la quasi-totalité des contrats d'assurance vie sont multi-supports, ce qui signifie que le

capital investi ainsi que les cotisations sont répartis entre un ou plusieurs supports. L'arbitrage<sup>7</sup> devient alors un aspect clé de ces contrats.

Cette possibilité d'arbitrage est particulièrement importante en période de crise ou lorsque l'assuré pressent un danger sur ses unités de compte. Dans ce cas, il peut choisir de transférer une partie de son capital vers d'autres unités de compte ou vers le fonds en Euros.

L'Euro-croissance est une catégorie de fonds incorporable dans les contrats d'assurance vie, y compris les contrats multi-supports, et se positionne entre les fonds en euros, qui assurent une garantie constante, et les supports en unités de compte (UC), qui offrent un risque et un potentiel de rendement plus élevés. Le caractère distinctif de l'Euro-croissance réside dans sa garantie de capital, effective après une période minimale de détention, généralement fixée à 8 ou 10 ans. Contrairement au support euro, cette garantie n'est pas continue et peut être inférieure à 100%, permettant ainsi d'éviter l'effet cliquet. Si l'investissement est retiré avant l'échéance, la garantie de capital ne s'applique pas, et le montant récupéré dépend de la valorisation du fonds à la date de retrait, pouvant entraîner soit une plus-value soit une perte en capital. Des restrictions et pénalités peuvent également être associées à une sortie anticipée du fonds Euro-croissance, sauf dans des circonstances exceptionnelles.

### 1.1.1.2 Zoom sur les contrats d'épargne en euro

- Taux techniques :

Le Taux Minimum Garanti (TMG) constitue un élément fondamental des contrats d'épargne en euros, défini contractuellement lors de la souscription. Il représente le taux minimum de revalorisation annuelle garanti à l'assuré, indépendamment des performances financières effectives de l'assureur. Cette garantie stipule que l'assureur doit verser à l'assuré, chaque année, au moins le TMG convenu. Si les rendements des actifs de l'assureur sont inférieurs au TMG promis, l'assureur est alors contraint de puiser dans ses réserves pour honorer cette garantie.

Les contrats d'épargne en euros offrent l'avantage majeur d'assurer que l'épargne investie ne diminuera jamais, grâce à l'effet cliquet. Le taux technique ne peut être inférieur à 0% et est défini lors de la souscription, tenant compte du contexte économique actuel, des objectifs commerciaux de l'assureur, et doit être conforme à la réglementation en vigueur.

- Options de rachat :

L'option de rachat constitue un trait essentiel des contrats d'épargne en Euro, jouant un rôle majeur dans leur attractivité. Elle confère à l'assuré la possibilité de retirer en totalité ou en partie les fonds investis avant l'échéance du contrat, instaurant ainsi une importante liquidité dans ces produits financiers. Les participations aux bénéfices (PB) représentent un mécanisme de revalorisation des contrats que l'assureur peut utiliser pour fidéliser ses clients et gérer l'évolution de ses provisions mathématiques (PM). Cette notion sera détaillée plus loin dans cette section. Parmi les options de rachat, on distingue :

- Rachat partiel :

Il permet à l'assuré de retirer une partie de son épargne (généralement avec un montant minimal défini par le contrat), sans clôturer le contrat.

- Rachat partiel programmé :

Ce type de rachat permet de retirer à intervalles réguliers (mensuellement, trimestriellement,

---

7. Il signifie ici la modification de la répartition du capital de l'assuré parmi les différents supports disponibles au contrat.

semestriellement ou annuellement) une partie de l'épargne. Il peut être utilisé pour compléter des revenus ou faire face à des dépenses récurrentes.

- **Rachat total :**

Il consiste à retirer en une seule fois la totalité de l'épargne investie sur le contrat d'assurance vie. Cette action met un terme définitif au contrat et peut entraîner la perte des avantages fiscaux associés, selon la durée de détention et la législation en vigueur.

- **Participation aux bénéfices :**

La participation aux bénéfices (PB) est également une composante cruciale des contrats d'assurance, représentant la part des revenus financiers attribuée aux assurés en sus des intérêts techniques. Conformément aux dispositions contractuelles et réglementaires, cette participation peut être versée immédiatement ou répartie sur une période pouvant aller jusqu'à 8 ans. En ce qui concerne sa répartition, les intérêts techniques, comprenant le TMG et la PB, doivent représenter au moins 85 % du rendement financier de l'assureur (ou être maintenus à 0% s'il est négatif) et 90% du résultat technique (ou 100 % en cas de résultat technique négatif).

Trois principaux types de PB peuvent être identifiés :

- **PB réglementaire :** cette PB est déterminée par des critères réglementaires fixant le niveau minimum de distribution. Il convient de noter que, dans le cadre de ce seuil réglementaire, l'assureur a la latitude de répartir discrétionnairement les PB, ce qui lui permet de privilégier certains contrats.
- **PB contractuel :** outre les obligations réglementaires, certains contrats peuvent stipuler des engagements supplémentaires concernant la PB. Ces engagements sont établis lors de la souscription du contrat et peuvent garantir, par exemple, une redistribution d'une part plus importante des bénéfices financiers que ce qui est requis par la réglementation.
- **PB discrétionnaire :** il s'agit d'une marge de manœuvre laissée à l'assureur pour octroyer des bonus supplémentaires aux assurés. Ces avantages dépassent les cadres réglementaires et contractuels et sont souvent utilisés comme levier pour retenir ou attirer des clients.

## 1.1.2 Environnement réglementaire autour de l'assurance vie

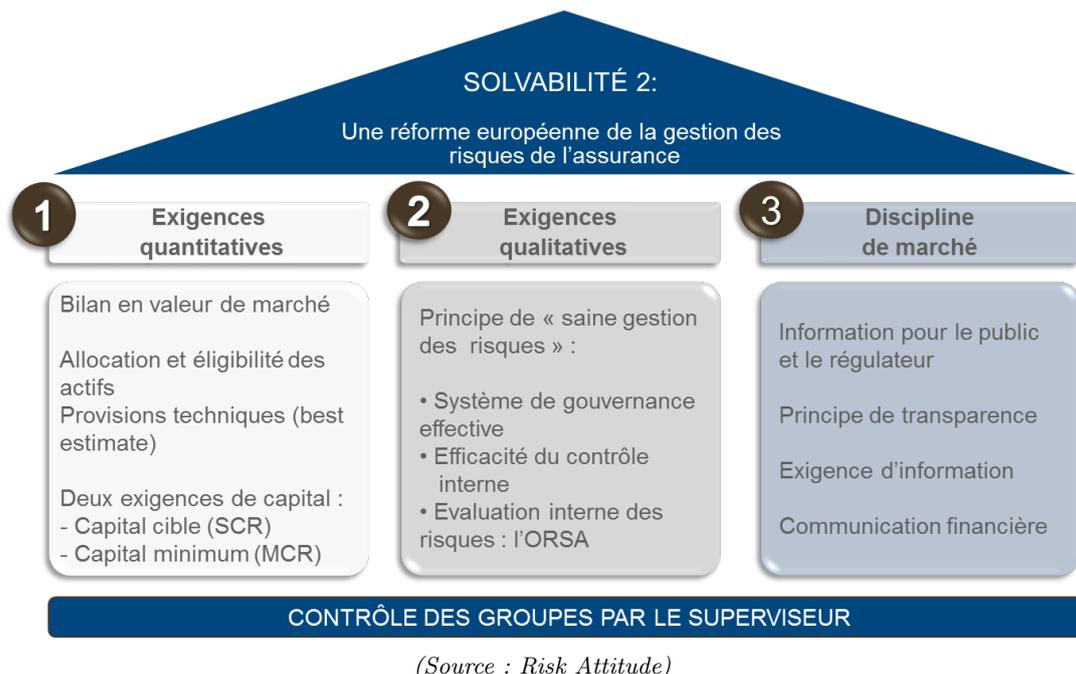
Solvabilité II et le code des assurances sont deux cadres réglementaires distincts qui régissent le secteur de l'assurance, mais ils opèrent à différents niveaux et ont des objectifs et des portées différents.

### 1.1.2.1 Cadre réglementaire de Solvabilité II

Solvabilité II est un cadre réglementaire européen qui vise à garantir la solvabilité des assureurs. Son entrée en vigueur le 1<sup>er</sup> janvier 2016, constitue le changement le plus important qu'ait connu ce secteur depuis des dizaines d'années. Une description complète de la réforme est disponible sur le site de l'ACPR [Solvabilité II 2017](#).

Cette directive, inspirée de la réforme Bâle II dans le secteur bancaire, vient combler les lacunes de la première directive Solvabilité I et modifie en profondeur le régime existant.

La norme réglementaire a pour enjeux d'harmoniser et de soutenir le marché de l'assurance européen, en garantissant la solvabilité des assureurs à savoir leur aptitude à faire face à leurs engagements envers les assurés.



**FIGURE 1.4 Les 3 piliers de solvabilité II**

Elle est structurée en trois piliers : le premier pilier concerne les exigences quantitatives en termes de capital, le deuxième pilier concerne la gouvernance et la gestion des risques, et le troisième pilier concerne la transparence et la communication d'informations.

La norme Solvabilité II impose aux assureurs vie des exigences strictes en matière de capital pour couvrir les risques spécifiques liés à la durée des engagements, tels que les risques de taux d'intérêt, de longévité et de marché. Elle exige une gestion rigoureuse des actifs et des passifs pour garantir la solvabilité à long terme, avec des provisions adéquates et des stratégies d'investissement prudentes. De plus, Solvabilité II impose une transparence accrue et un reporting détaillé aux régulateurs, tout en encourageant une bonne gouvernance et une évaluation continue des risques à travers le processus ORSA.

### 1.1.2.2 Code des assurances

Le code des assurances en France est le cadre juridique régissant le secteur de l'assurance dans le pays. Il codifie les lois et réglementations relatives à la souscription, à la distribution, et à la gestion des contrats d'assurance. Il définit également les règles de conduite et les obligations des assureurs, des intermédiaires et des assurés, en veillant à la protection des consommateurs. Le code couvre des aspects variés tels que les conditions d'agrément, les règles de solvabilité, les dispositions contractuelles, et les mécanismes de contrôle et de sanction pour garantir la stabilité et l'intégrité du marché de l'assurance en France. Par exemple, c'est dans ces textes réglementaires qu'on retrouve les articles R332-1 à R332-10 (*Sous-section 1 : Dispositions applicables aux entreprises d'assurance. (Articles R332-1 à R332-10) - Légifrance 2023*) qui traitent de la réglementation relative aux placements et à la diversification des actifs des entreprises d'assurance. Ils définissent les catégories d'actifs dans lesquelles les entreprises d'assurance peuvent investir, ainsi que les limites quantitatives et qualitatives à respecter pour garantir une répartition équilibrée des risques. Le code des assurances est supervisé par l'autorité de contrôle prudentiel et de résolution (ACPR). Toute autorisation future permettant aux assureurs d'investir dans les cryptomonnaies devrait être préalablement réglementée dans ce code.

### 1.1.2.3 Fiscalité de l'assurance vie

La fiscalité de l'assurance vie est favorable en France. Les gains sont soumis aux prélèvements sociaux, mais bénéficient d'une exonération d'impôt sur le revenu après 8 ans. En cas de décès, les capitaux transmis bénéficient également d'une exonération de droits de succession dans certaines limites.

En cas de retrait du vivant de l'assuré, les gains matérialisés lors du retrait sont soumis à une fiscalité qui se décompose en taxes et prélèvements sociaux.

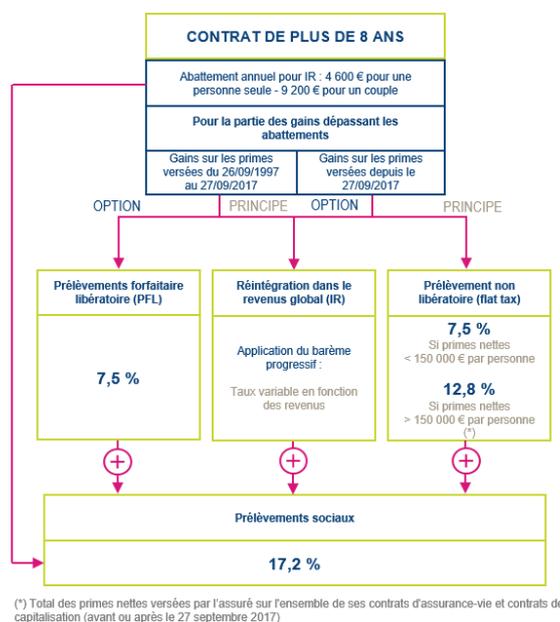
Dans tous les cas, les prélèvements sociaux seront prélevés au nouveau taux de 17,2% pour les retraits effectués à compter du 1er janvier 2018.

Concernant la taxation des gains, la règle s'est considérablement complexifiée depuis la *LOI n° 2017-1837 du 30 décembre 2017 de finances pour 2018 (1) 2017*. La fiscalité de l'assurance vie est désormais différente selon la date d'ouverture du contrat, la date et le montant des primes versées.

Si vous effectuez un rachat total ou partiel sur un contrat d'assurance-vie de moins de 8 ans, la fiscalité applicable dépend à la fois de la date de versement des primes et de la date du rachat :

- Pour un rachat effectué entre 0 et 4 ans : vous avez le choix entre déclarer les produits (intérêts et plus-values) du contrat à l'impôt sur le revenu, ou opter pour le prélèvement forfaitaire libératoire (PFL) au taux de 35
- Pour un rachat effectué entre 4 et 8 ans : vous pouvez soit déclarer les produits (intérêts et plus-values) du contrat à l'impôt sur le revenu, soit choisir le prélèvement forfaitaire libératoire (PFL) au taux de 15%.

Si vous retirez tout ou partie de votre épargne sur un contrat de plus de 8 ans, plusieurs cas peuvent se présenter. La figure (1.5) explicite la fiscalité en cas de vie pour un contrat d'assurance vie de plus de 8 ans.



(Source : /www.haussmann-patrimoine.fr)

**FIGURE 1.5** Fiscalité en cas de vie pour un contrat d'assurance vie de plus de 8 ans

### 1.1.3 La gestion actif-passif en assurance vie

#### 1.1.3.1 Contexte historique

La gestion actif-passif ou l'ALM (Asset Liability Management) est une pratique née au sein des institutions financières anglo-saxonnes dans les années 1970. Située à la jonction de la gestion des risques et de la direction stratégique, elle vise à évaluer la situation du bilan et à prévoir son évolution sur un horizon de planification donné. L'ALM est né donc en réponse aux défis posés par la volatilité des taux d'intérêt et des marchés financiers. Les entreprises qui n'avaient pas de modélisation ALM ont souvent fait faillite en raison d'un déséquilibre entre leurs actifs et leurs passifs. Aujourd'hui, les équipes ALM jouent un rôle essentiel dans la gestion des risques financiers des assureurs.

En résumé, la gestion actif-passif (ALM) émerge comme une pierre angulaire de la stratégie opérationnelle des compagnies d'assurance, permettant l'équilibre entre les engagements envers les assurés et les rendements financiers, elle se positionne au cœur de l'organisation fonctionnelle, en particulier au sein des départements financier et de gestion des risques. La synergie entre les départements financier et de gestion des risques reflète son impact déterminant dans la quête d'une stabilité équilibrée et d'une croissance pérenne pour les assureurs.

#### 1.1.3.2 ALM en assurance vie

L'Asset-Liability Management (ALM) joue un rôle crucial dans la gestion des compagnies d'assurance vie, en particulier pour celles opérant sur le périmètre de l'épargne en euros. Cette approche vise à maintenir un équilibre optimal entre les actifs et les passifs, garantissant ainsi la solvabilité de l'assureur tout en respectant ses engagements envers les assurés.

Dans le contexte de l'épargne en euros, où les assureurs garantissent souvent un capital et un rendement minimum, l'ALM permet une gestion efficace des risques de taux d'intérêt et de marché. En ajustant les portefeuilles d'actifs pour correspondre aux engagements à long terme, cette approche cherche à maximiser les rendements tout en minimisant les risques de déséquilibre.

La modélisation ALM implique une projection complexe de l'évolution du bilan, du compte de résultat, des provisions techniques et des primes. Elle prend en compte les interactions entre actifs et passifs, reflétant les options et garanties spécifiques des contrats d'épargne. Cette modélisation permet d'anticiper les variations des taux d'intérêt et de recalibrer les portefeuilles en conséquence.

Un aspect crucial de l'ALM est la synchronisation entre la direction financière et celle des risques, notamment en ce qui concerne la stratégie de partage des bénéfices avec les assurés. Cela nécessite une définition précise de la stratégie de distribution de la participation aux bénéfices, alignée sur les conditions du marché financier et la concurrence. La gestion des ressources du portefeuille, incluant la gestion des plus-ou-moins values (PVL) et des limites d'utilisation de la Provision pour Participation aux Excédents (PPE), est également essentielle.

Par ailleurs, l'ALM doit intégrer les contraintes réglementaires, notamment les normes de solvabilité et de liquidité imposées par Solvabilité II. Dans ce cadre, l'ALM agit comme un bouclier régulateur, assurant la conformité et la stabilité financière à long terme des compagnies d'assurance.

En conclusion, l'ALM en assurance vie constitue une approche stratégique et dynamique, tissant des relations complexes entre les actifs et les passifs. Elle permet d'optimiser la gestion des contrats tout en respectant scrupuleusement les contraintes réglementaires, assurant ainsi la durabilité des compagnies d'assurance vie et offrant des solutions robustes et fiables à une clientèle exigeante.

Après avoir exploré le contexte spécifique de l'assurance vie ainsi que les fondements de l'ALM dans ce secteur, il est essentiel d'examiner les nouvelles opportunités et défis qui se présentent dans un paysage financier en constante évolution. L'émergence des cryptoactifs, en particulier, suscite un intérêt croissant dans le monde de la finance et de l'assurance. Cette nouvelle classe d'actifs, avec le bitcoin en tête, offre des perspectives intrigantes en termes de diversification et de rendement potentiel. Cependant, elle soulève également des questions complexes en matière de gestion des risques et de conformité réglementaire. Dans la section suivante, nous allons nous pencher sur les concepts fondamentaux des cryptoactifs, en accordant une attention particulière au bitcoin, et explorer les opportunités ainsi que les défis qu'ils représentent pour les assureurs vie dans le cadre de leur stratégie ALM.

## 1.2 Généralités sur les cryptoactifs

### 1.2.1 Présentation des cryptoactifs

Les cryptoactifs sont des actifs numériques qui reposent sur la technologie de la blockchain, une base de données décentralisée et transparente qui enregistre toutes les transactions effectuées avec ces actifs. Le terme *cryptoactif* englobe une large gamme d'actifs numériques, notamment les cryptomonnaies (comme le bitcoin et l'Ethereum), les jetons de protocole, les jetons de sécurité, et d'autres types de jetons numériques. Les cryptoactifs ont plusieurs caractéristiques uniques qui les distinguent des actifs traditionnels. Premièrement, ils sont décentralisés, ce qui signifie qu'ils ne sont pas contrôlés par une seule entité, comme une banque centrale ou un gouvernement.

Deuxièmement, ils sont transparents : toutes les transactions sont enregistrées publiquement sur la blockchain, ce qui rend difficile la fraude ou la manipulation des données.

Enfin, ils sont sécurisés grâce à la technologie de cryptographie qui protège les données et les transactions contre les attaques malveillantes.

La figure ci-dessous présente les symboles des crypto-actifs qui sont observés sur le marché. Ces crypto-actifs ont été classés en catégories en fonction de leurs caractéristiques distinctives.

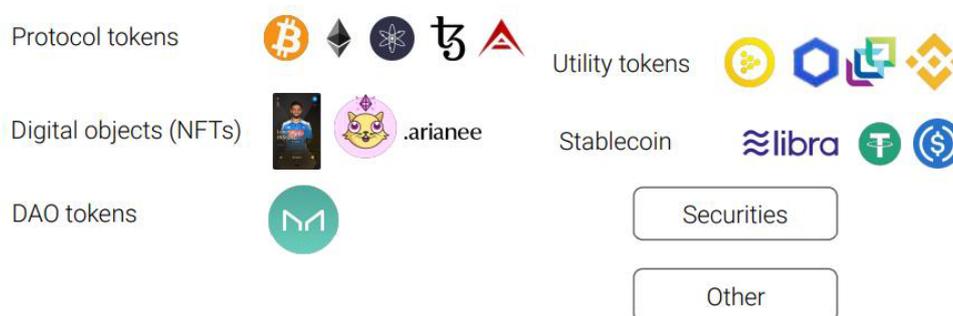


FIGURE 1.6 Les principaux crypto-actifs

Parmi les *Protocol tokens*, le bitcoin est la plus célèbre des cryptomonnaies et la plus importante en termes de capitalisation. Les *Protocol tokens* peuvent être utilisés comme monnaies de paiement selon la réglementation locale, mais si nous revenons à la naissance des cryptomonnaies, la plupart des projets étaient des systèmes de transfert de valeur.

Un *stablecoin* essaie de reproduire un actif sous-jacent, tel qu'une devise fiat ou un métal précieux. BUSD<sup>8</sup>, par exemple, suit la valeur du dollar américain grâce à des réserves dont le rapport est de 1 :1 par rapport aux BUSD en circulation.

Un token utilitaire (*Utility tokens*) est un jeton qui donne accès à un service ou à un produit. Par exemple, les tokens BNB et ETH sont des tokens utilitaires qui peuvent être utilisés pour payer les frais de transaction lors de l'interaction avec des applications décentralisées (DApps). De nombreux projets émettent leurs propres tokens utilitaires pour lever des fonds lors d'une offre de tokens. La valeur d'un token utilitaire est censée être directement liée à la valeur de son utilité.

En possédant un token de gouvernance (*DAO tokens*), vous avez la possibilité de participer aux votes sur les décisions d'un projet et de recevoir une part des revenus. Ces tokens sont souvent disponibles sur des plateformes de finance décentralisée (DeFi) telles que PancakeSwap, Uniswap ou SushiSwap. Comme pour les tokens utilitaires, la valeur d'un token de gouvernance est directement liée à la réussite du projet sous-jacent.

### 1.2.1.1 Acteurs du marché des cryptoactifs

Les acteurs du marché des crypto actifs sont divers et variés. On peut distinguer quatre grandes catégories : les mineurs, les intermédiaires, les investisseurs et les régulateurs.

**Mineurs** : Les mineurs sont des acteurs clés du marché des cryptoactifs, car ils valident les transactions et sécurisent le réseau. En effet, les mineurs utilisent des ordinateurs puissants pour résoudre des problèmes mathématiques complexes qui sécurisent la transaction et la blockchain elle-même. Une fois qu'un problème est résolu, le bloc est ajouté à la blockchain et le mineur est récompensé avec des bitcoins nouvellement créés. Ce système permet de garantir la sécurité et l'intégrité des transactions sans avoir besoin d'une autorité centrale de confiance.

**Intermédiaires** : Les intermédiaires sont ceux qui facilitent l'accès et la circulation des crypto actifs, comme les plateformes d'échange, les courtiers, les fournisseurs de services de paiement ou de garde. Ils sont soumis à des obligations réglementaires spécifiques, selon leur activité et leur localisation. Ils doivent notamment respecter les règles relatives à la lutte contre le blanchiment d'argent, la protection des consommateurs ou la sécurité informatique.

**Investisseurs** : Les investisseurs peuvent acheter, détenir et vendre des cryptoactifs dans le but de réaliser des profits. Ils peuvent être des particuliers, des entreprises ou des institutions financières. Les entreprises privées traditionnelles manifestent un intérêt croissant, notamment : Paypal, Microstrategy, Square, Visa, MasterCard, Chicago Mercantile Exchange, etc.

**Régulateurs** : Leur intervention dans le marché des crypto-actif devient de plus en plus importante. Le rôle des régulateurs est important dans le marché des cryptoactifs, car ils établissent les règles et les réglementations qui régissent ce marché. Ils cherchent à protéger les investisseurs et à prévenir les activités illégales pour assainir ce marché.

---

8. Le Binance USD (BUSD) est un stablecoin né d'un partenariat de la très populaire entreprise Binance avec Paxos Trust Company.

## 1.2.2 État des lieux des cryptoactifs et événements récents favorisant son adoption

### 1.2.2.1 Évènements récents favorisant son adoption

Le marché des cryptoactifs continue d'évoluer sous l'influence de facteurs tels que l'intérêt institutionnel, les avancées réglementaires et les innovations technologiques. La période actuelle est marquée par des changements significatifs susceptibles de façonner l'adoption future du bitcoin et d'autres cryptomonnaies.

#### 1. Régulation et cadre légal

Le paysage réglementaire joue un rôle déterminant. L'adoption du règlement MICA par le Parlement européen marque une étape importante, établissant un cadre pour les services liés aux crypto-actifs dans l'UE, exigeant des agréments pour les prestataires de services et introduisant des mesures de protection des investisseurs. Une description complète du règlement est disponible via cette documentation de l'AMF (Autorité des marchés financiers) (*Dispositions applicables aux entreprises d'assurance. (Articles R332-1 à R332-10) - Légifrance 2024*).

Des procédures judiciaires ciblant des projets illégaux ou non-conformes, comme l'affaire opposant la SEC à Ripple/XRP, ont contribué à épurer et à réguler davantage le secteur. Ces cadres réglementaires pourraient renforcer la confiance des investisseurs et faciliter l'adoption généralisée du bitcoin.

Récemment, le 10 janvier 2024, la Securities and Exchange Commission (SEC), l'autorité des marchés américains, a donné son feu vert à 11 ETF Bitcoins. Cette décision marque un tournant historique pour la cryptomonnaie qui, après seulement quinze ans d'existence, est reconnue par Washington et les institutionnels comme un actif à part entière. La SEC s'était jusqu'à présent opposée à tous les ETF Bitcoin, mais une cour fédérale a statué que l'autorité des marchés n'avait pas de raison valable pour rejeter le dossier qui lui avait été soumis par la société Grayscale<sup>9</sup>. Cette décision va permettre à des millions de particuliers américains et aux fonds de pension d'accéder plus facilement aux cryptomonnaies via lesdits ETF.

En France, par exemple, la loi Pacte, adoptée le 11 avril 2019, a ouvert la possibilité pour les assureurs d'investir indirectement aux cryptoactifs, en proposant des contrats d'assurance-vie en unité de compte (UC) exposés aux crypto-monnaies, comme le bitcoin, par le biais de fonds professionnels spécialisés.

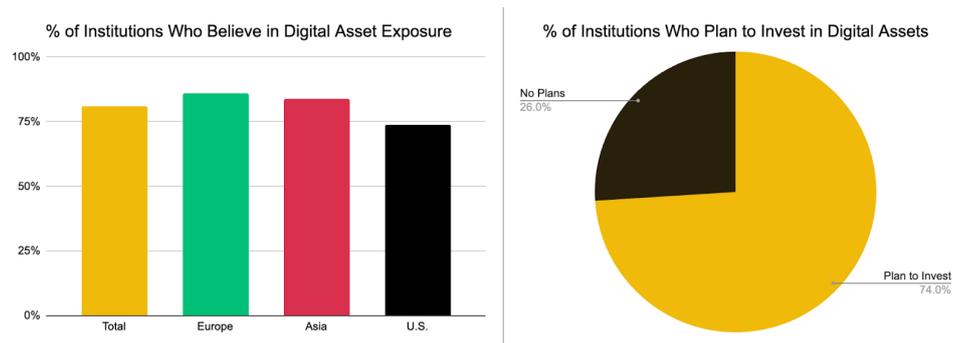
L'approbation des ETF Bitcoin aux États-Unis pourrait avoir des implications significatives pour le marché de l'assurance-vie en Europe. L'arrivée des ETF Bitcoin aux États-Unis pourrait inciter davantage d'assureurs européens à explorer cette possibilité d'investir directement dans les cryptomonnaies. Toutes ces avancées réglementaires autour des actifs numériques ouvrent de nouvelles perspectives et préfigure une évolution du cadre réglementaire en Europe en faveur de l'ouverture de ces actifs à tous les investisseurs institutionnels.

#### 2. Adoption institutionnelle

L'institutionnalisation des crypto-actifs continue de progresser, illustrées notamment par l'introduction en bourse de Coinbase, une des plateformes majeures mondiales de crypto-actifs. De plus, la capitalisation totale du marché des crypto-actifs a franchi le cap des 1 500 milliards de dollars américains en 2023.

---

9. Grayscale Investments est une société américaine de gestion d'actifs de monnaie numérique et filiale de Digital Currency Group fondée en 2013 et basée à Stamford, dans le Connecticut.



Source : Fidelity, Binance Research

**FIGURE 1.7** L'investissement institutionnel en cryptomonnaies

Comme l'illustre la figure (1.7), les institutions financières à travers le monde ont manifesté un intérêt croissant pour l'investissement dans les cryptomonnaies, considérées comme une nouvelle catégorie d'actifs prometteuse. Selon une étude internationale réalisée par Fidelity fin 2022, qui a sondé plus de 1 000 investisseurs institutionnels en Europe, Asie et aux États-Unis, une majorité écrasante de 81 % considère que les cryptomonnaies devraient être incluses dans les portefeuilles institutionnels. De plus, 74 % des participants à l'étude ont exprimé leur intention d'investir dans des actifs numériques, ce qui témoigne d'une tendance positive et d'une reconnaissance croissante de la valeur des cryptomonnaies dans le domaine institutionnel.

Des initiatives telles que l'ETF Bitcoin spot de BlackRock (IBTC) illustrent également l'intérêt croissant des institutions financières pour le bitcoin.

### 3. Adoption par le public français

Selon un sondage de l'institut IPSOS<sup>10</sup>, la connaissance et l'adoption des cryptomonnaies en France sont en hausse. En 2023, près d'un Français sur dix possédait des crypto-actifs, une augmentation de 18% par rapport à 2021. L'intérêt pour les cryptomonnaies est également en hausse, avec 26% des répondants intéressés par une acquisition future. De manière significative, plus de 17% des Français âgés de 18 à 35 ans possèdent des crypto-actifs, contre 12% en 2021. Ces données témoignent d'une adoption croissante des cryptomonnaies, en particulier parmi les jeunes adultes.

#### 1.2.2.2 Les cryptomonnaies comme actifs essentiels au cœur du Web 3.0

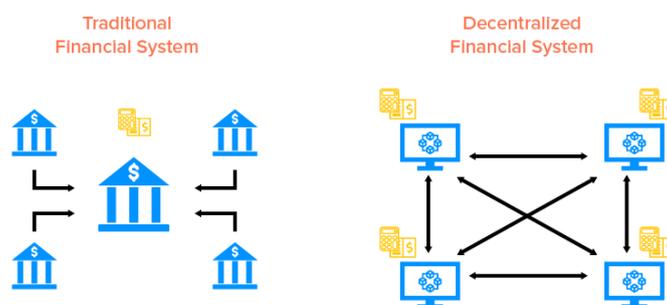
Le Web 3.0, aussi appelé Web décentralisé, marque une progression majeure de l'Internet actuel vers un environnement plus ouvert, transparent et décentralisé. Contrairement au Web 2.0, où les plateformes centralisées dominent et exercent souvent un contrôle sur les données des utilisateurs, le Web 3.0 vise à atténuer cette centralisation en recourant à des technologies décentralisées telles que la blockchain, le Web sémantique et les contrats. En favorisant une décentralisation accrue, le Web 3.0 ouvre la voie à de nouveaux modèles d'affaires axés sur la confiance, la transparence et l'efficacité.

Il faut noter que dans le secteur de l'assurance, le Web 3.0 peut aider à automatiser les processus de souscription et de règlement des sinistres grâce à l'utilisation de smart contracts. Cela peut réduire les délais de traitement et améliorer l'expérience client. De plus, la blockchain peut fournir une preuve transparente et immuable des polices d'assurance et des paiements de sinistres, ce qui peut réduire la fraude et

10. L'Institut Ipsos est l'une des plus importantes entreprises de sondages au monde

augmenter la confiance des clients dans les assureurs. En utilisant l'intelligence artificielle pour analyser les données, les assureurs peuvent également mieux comprendre les besoins et les comportements de leurs clients, ce qui peut conduire à des produits d'assurance plus adaptés et à des tarifications plus précises. Le Web 3.0 a le potentiel de transformer les marchés de l'assurance en offrant des processus plus transparents, sécurisés et efficaces, ainsi qu'une expérience client plus personnalisée. Les crypto actifs seront les principales monnaies d'échange qui alimenteront ce nouveau univers. Un assureur qui intègre déjà une stratégie de gestion des marchés de cryptomonnaies aura un avantage concurrentiel et sera en position de tirer parti des opportunités du marché émergent, le plaçant parmi les précurseurs de cette nouvelle dynamique.

Les développements technologiques, y compris la Finance Décentralisée (DeFi) et les NFT, bien que majoritairement exclus du MICA, soulignent l'importance d'adapter la réglementation à l'évolution technologique des cryptomonnaies. Ces innovations offrent de nouvelles opportunités pour l'utilisation et l'adoption du bitcoin.



Source : Affde, [www.affde.com](http://www.affde.com), 25-02-2020

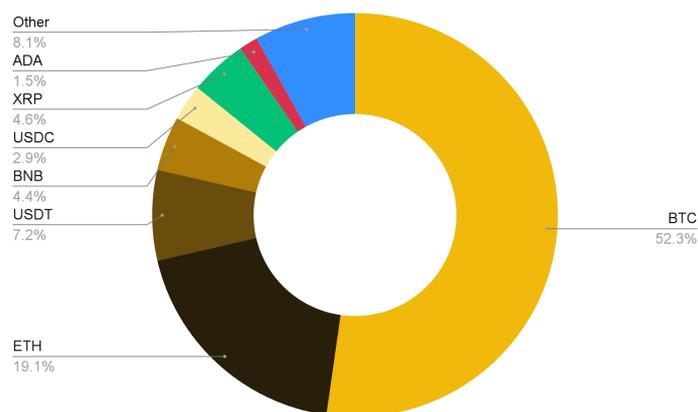
**FIGURE 1.8** Différence entre la DeFi et les autres produits bancaires

La DeFi est un écosystème financier basé sur la blockchain qui vise à créer des services financiers décentralisés, tels que les prêts, les échanges et les produits d'épargne. Bien que la DeFi offre des avantages en termes d'accessibilité et de transparence, elle pose également des défis en matière de sécurité et de réglementation. Les autorités doivent trouver un équilibre entre l'innovation et la protection des investisseurs. Les NFT (jetons non fongibles) sont des actifs numériques uniques qui sont enregistrés sur la blockchain. Ils sont utilisés pour représenter la propriété d'œuvres d'art numériques, de vidéos, de musique et d'autres contenus. Bien que les NFT offrent de nouvelles opportunités pour les créateurs et les collectionneurs, ils soulèvent également des questions sur la propriété intellectuelle, la fraude et la spéculation.

En résumé, le marché actuel du bitcoin est caractérisé par une combinaison d'adoption institutionnelle, d'évolutions réglementaires, d'innovations technologiques et d'un intérêt croissant du grand public. Ces facteurs convergents pourraient considérablement augmenter l'adoption du bitcoin, marquant un tournant dans la perception et l'utilisation des cryptomonnaies au sein du système financier mondial.

### 1.2.3 Sélection du bitcoin comme actif représentatif des cryptoactifs

Alors que les plateformes de smart contracts comme Ethereum et BNB Chain continuent de captiver l'attention, le bitcoin reste clairement le leader en termes de capitalisation boursière. Sa capitalisation a même surpassé en 2021 celle de Meta Platforms (ex-Facebook). C'est la cryptomonnaie la plus populaire et la plus prédominante, environ 52 % de la capitalisation totale des cryptomonnaies.



Source : CoinMarketCap, Binance Research (30 mars 2023)

**FIGURE 1.9 Répartition de la capitalisation des cryptomonnaies**

La monnaie numérique est de plus en plus acceptée comme moyen de paiement par une variété croissante de commerçants, à la fois en ligne et dans des points de vente physiques. Il est également considéré par certains investisseurs comme une réserve de valeur, semblable à l'or, et est même surnommé "or numérique". La blockchain liée au bitcoin est le Bitcoin<sup>11</sup>. Par ailleurs, la rareté est un élément essentiel de la valeur de bitcoin. Il y a un nombre maximum de 21 millions de bitcoins qui seront créés, ce qui crée une rareté artificielle et peut contribuer à une augmentation de sa valeur au fil du temps.

L'approbation des ETF bitcoins a augmenté d'avantage la liquidité de l'actif. Les plateformes de trading des crypto-monnaies deviennent nombreuses et facilitent l'adoption du bitcoin en permettant aux investisseurs d'acheter, de vendre et de conserver facilement des bitcoins avec des spreads relativement faibles sur la plupart des plateformes. Ces plateformes ont joué un rôle crucial dans l'accès au marché des crypto-monnaies pour un public plus large.

En raison de sa forte capitalisation boursière et de sa volatilité relativement inférieure à celle d'autres crypto-monnaies, le bitcoin est envisagé comme le premier crypto-actif susceptible d'être intégré dans la réglementation prudentielle. C'est pourquoi il a été sélectionné comme représentant de la classe des crypto-actifs dans ce mémoire.

### 1.2.4 Le potentiel du bitcoin comme actif d'investissement pour un assureur

#### 1.2.4.1 Un actif à haut potentiel de rendement

Les crypto-actifs sont susceptibles de générer des rendements importants, mais ils comportent aussi

11. 'Bitcoin' avec B majuscule pour la blockchain

des risques plus grands. L'analyse de l'évolution du cours du Bitcoin sur les dix dernières années révèle une tendance générale à la hausse, qui serait représentée par une ligne ascendante si elle était tracée sur un graphique.

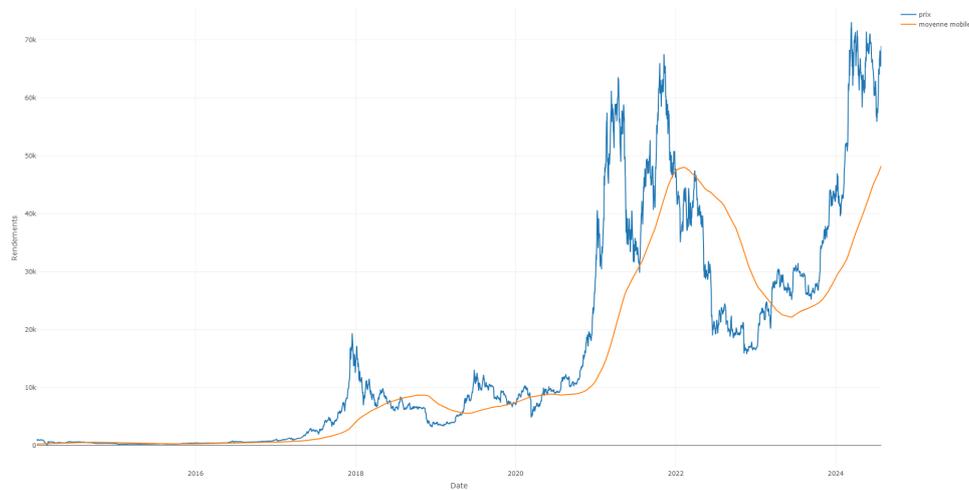
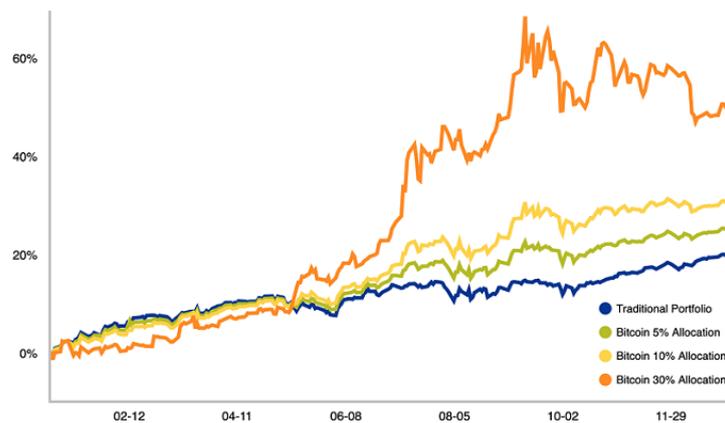


FIGURE 1.10 Dynamique du cours du bitcoin sur 10 ans

Il est observé qu'en dix ans, la rentabilité dépasse les 120%, ce qui représente une performance très intéressante sur le long terme.

Timo Oinonen, un analyste spécialisé en Fintech et crypto, qui porte un intérêt particulier aux technologies disruptives et aux investissements alternatifs, examine dans son article sur la plateforme *coimotion* TIMO 2020 les performances du bitcoin au sein d'un portefeuille 60/40, composé de 60 % d'actions et de 40 % d'obligations. Pour ce faire, il adopte une stratégie d'allocation selon laquelle, par exemple, lorsque 5 % du portefeuille sont alloués au bitcoin, la répartition 60/40 est appliquée aux 95 % restants du portefeuille.



Source : Coimotion by Timo Oinonen, 2020

FIGURE 1.11 Portefeuille 60/40 avec 5/10/30% d'allocation bitcoin

Dans ses conclusions, telles qu'illustrées dans le passage précédent, l'intégration du bitcoin dans un portefeuille d'actifs d'un assureur vie semble avoir un impact significatif sur les rendements et les ratios de Sharpe. En effet, une allocation de seulement 5% en bitcoin a conduit à un rendement total annuel de 24,58%, surpassant celui du portefeuille traditionnel. Les ratios de Sharpe<sup>12</sup> ont également montré

12. Le ratio de Sharpe est un indicateur financier qui mesure la performance ajustée au risque d'un investissement ou d'un portefeuille. Il est calculé en soustrayant le taux de rendement sans risque (comme celui des obligations d'État) du

une amélioration notable, avec des valeurs plus élevées pour le portefeuille intégrant le bitcoin. Il est cependant crucial de souligner que ces conclusions reposent sur des données historiques et ne prennent pas en compte les mouvements d'actifs résultant de l'interaction actif-passif qui survient lors de chaque projection annuelle de l'activité d'assurance.

Néanmoins, ces résultats pourraient intéresser les assureurs, car le contexte particulier de leur activité les pousse à rechercher des options d'investissement plus rentables pour rester compétitifs. En effet, par le biais des mécanismes réglementaires de revalorisation des contrats, les assureurs redistribuent une part conséquente des profits issus du marché financier. Si le taux offert par l'assureur est inférieur à celui du marché, cela peut renforcer les mécanismes de rachat des contrats. La rentabilité à long terme du bitcoin pourrait constituer un avantage significatif, capable de générer une marge financière importante dans la gestion des actifs.

### 1.2.4.2 Un actif à haut potentiel de diversification de portefeuille

La diversification est l'allocation de capital à différents instruments financiers ou classes d'actifs. L'objectif principal est de réduire les risques pouvant découler de la détention d'une seule classe d'actifs ou catégorie similaire de classe d'actif, telle que les actions, les actifs obligataires, une matière première ou une crypto-monnaie.

Le bitcoin offre une diversification du portefeuille car il est généralement peu corrélé aux actifs traditionnels, tels que les actions et les obligations. À ce sujet, une étude de corrélation a été réalisée dans le Chapitre 4. Cet aspect peut particulièrement séduire un assureur vie pour son exposition aux risques du marché traditionnel.

De plus, le rapport de l'étude BINANCE RESEARCH 2019 présente une matrice de corrélation, calibrée par Binance Research et Bloomberg, illustrant les relations entre le bitcoin et plusieurs actifs financiers majeurs entre 2017 et 2019. Cette matrice met en évidence les corrélations du bitcoin avec des actifs tels que l'indice S&P 500 (SPX), l'indice Russell 2000, le NASDAQ Composite, l'indice Bloomberg Barclays Global Aggregate (en USD), le pétrole, l'or, l'argent, l'indice total de retour sur investissement de Bloomberg Commodity, l'indice EuroStoxx 50 (en EUR) et l'indice FTSE 100 (en GBP). Les corrélations ont été calculées sur une période de 3 ans en se basant sur les rendements des prix. Les actifs présentant une faible corrélation sont souvent considérés comme des diversificateurs efficaces dans un portefeuille, tandis que ceux ayant une corrélation négative peuvent servir de couverture.

	BTC	SPX	RTY	LEGATRUU	LBUSTRUU	CCMP	CL1	GC1	SI1	BCOMTR	TPX	HSI	UKX	SX5E
BTC	1.00													
SPX	0.00	1.00												
RTY	0.01	0.90	1.00											
LEGATRUU	0.12	-0.19	-0.14	1.00										
LBUSTRUU	-0.05	-0.31	-0.29	0.74	1.00									
CCMP	-0.02	0.96	0.92	-0.12	-0.20	1.00								
CL1	0.12	0.52	0.49	0.08	-0.03	0.56	1.00							
GC1	0.06	-0.14	-0.07	0.67	0.41	-0.09	0.17	1.00						
SI1	-0.05	-0.03	0.02	0.51	0.35	0.04	0.24	0.80	1.00					
BCOMTR	0.12	0.37	0.29	-0.06	-0.15	0.33	0.71	0.16	0.18	1.00				
TPX	0.09	0.68	0.61	-0.08	-0.29	0.65	0.41	0.02	0.12	0.47	1.00			
HSI	0.04	0.47	0.52	0.03	-0.15	0.53	0.31	0.18	0.28	0.35	0.65	1.00		
UKX	0.16	0.73	0.71	-0.02	-0.29	0.71	0.45	0.04	0.20	0.30	0.70	0.68	1.00	
SX5E	0.22	0.72	0.68	0.04	-0.28	0.69	0.51	0.08	0.16	0.37	0.64	0.63	0.89	1.00

Source : Binance Research, Bloomberg, 2019

FIGURE 1.12 Corrélations des rendements hebdomadaires sur trois ans.

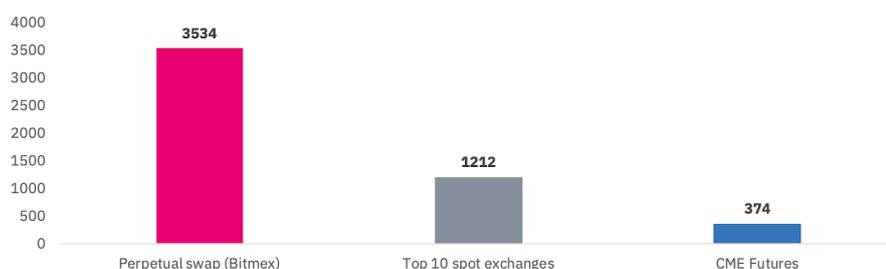
rendement moyen du portefeuille, puis en divisant le résultat par l'écart-type des rendements du portefeuille, qui représente sa volatilité ou son risque.

Pendant la période analysée, le bitcoin a maintenu une corrélation insignifiante avec les autres catégories d'actifs, affichant un coefficient médian de corrélation avec d'autres catégories d'actifs inférieur à 0,10. Au cours de cette période, le bitcoin est demeuré décorrélé de tous les autres instruments financiers non liés aux crypto-actifs. Ainsi, le bitcoin se distingue en tant que classe d'actifs ayant la corrélation la plus faible avec d'autres catégories d'actifs, ce qui renforce son potentiel de diversification au sein d'un portefeuille traditionnel.

### 1.2.4.3 Un actif de plus en plus liquide

La liquidité d'un actif est déterminée par sa capacité à être converti en espèces ou en équivalents de trésorerie sans subir de pertes significatives de valeur. Les spreads faibles quant à eux font référence à la différence entre le prix d'achat (offre) et le prix de vente (demande) d'un actif, ce qui indique un faible écart entre ces deux prix. Le risque de liquidité est un risque important dont sont exposés les assureurs. Gérer le risque de liquidité et surveiller les spreads des actifs détenus est crucial pour s'assurer qu'ils peuvent répondre efficacement à leurs engagements à court terme envers les assurés tout en optimisant les coûts de transaction liés à la conversion d'actifs en liquidités.

Les cryptoactifs peuvent offrir des avantages en termes de liquidité et de coûts de transaction. Les cryptomonnaies sont divisibles en unités plus petites que leur unité de base. Par exemple, chaque bitcoin peut être divisé jusqu'à la huitième décimale, ce qui permet de réaliser des micro-transactions et réduit le risque de liquidité. Binance Research, en collaboration avec Bitmex, Bitwise<sup>13</sup> et CME<sup>14</sup>, ont analysé le volume du bitcoin échangé pendant 24h sur différentes plateformes d'échange, avec des contrats au comptant et des contrats dérivés activement utilisés. BitMEX (bitcoin Mercantile Exchange) est une plateforme d'échange de crypto-monnaies bien connue qui offre des contrats à terme et des swaps perpétuels sur bitcoin et d'autres crypto-monnaies. Le contrat de swap perpétuel de Bitmex représente l'une des plus grandes sources de liquidité pour les échanges de bitcoins et a été utilisé comme l'indice de référence dans le graphique et l'analyse qui suivent.



Source : *Binance Research, Bitmex, Bitwise, CME, 2019*

**FIGURE 1.13** Volume des échanges de bitcoins sur 24 heures (en millions d'USD)

Le volume d'échange du taux swap Bitmex dépasse de loin la somme des volumes des 10 top des marchés au comptant et CME Futures pour le trading de BTC. Les plateformes d'échange au comptant présentent des volumes de transactions exceptionnellement élevés, avec plus de 1,2 milliard de dollars américains échangés quotidiennement sur les 10 principales plateformes d'échange au comptant, selon les données du 24 juillet 2019. Les contrats à terme sur le bitcoin du CME représentent également une

13. Bitwise Asset Management : Bitwise est une société de gestion d'actifs numériques

14. Chicago Mercantile Exchange : CME Group est l'une des plus grandes bourses de produits dérivés au monde. Elle offre une plateforme de négociation pour les contrats à terme sur une variété d'actifs

composante importante avec environ 374 millions USD, au 24 juillet 2019, du volume d'échange.

Platform: Product	24-hour estimated median spread (July 24th)	24-h daily volume (July 24th)
Bitmex: XBTUSD Perpetual Swap	inferior to 0.01%	3.54 billion
Binance: BTCUSDT Spot	inferior to 0.02%	458 million
Kraken: BTCUSD Spot	inferior to 0.05%	204 million
Coinbase Pro: BTCUSD Spot	inferior to 0.01%	202 million
Bitfinex: BTCUSDT Spot	inferior to 0.02%	133 million

Source : *Binance Research, Bitmex, Bitwise, CME, 2019*

**FIGURE 1.14 Comparaison du spread et du volume sur les principales paires de BTC**

Avec plusieurs lieux d'échange très liquides pour le bitcoin, des écarts de spread réduits et des volumes d'échanges importants, les différences de prix entre les bourses sont également rapidement arbitrées. D'après Bitwise11, plus de 50 % des différences de prix supérieures à 1 % sont arbitrées dans les 5 secondes, et 90 % de ces différences sont arbitrées dans les 35 secondes. Cette dynamique met en lumière l'activité vigoureuse du trading de cryptomonnaies et la participation significative sur ces plateformes.

Ces avantages de liquidité et de taux spread faible peuvent attirer un assureur qui souhaite couvrir son risque de liquidité et ainsi être plus efficace dans la gestion de ses engagements à court terme.

En résumé, l'analyse du bitcoin en tant qu'actif financier révèle son potentiel significatif dans les domaines de rendement élevé, de diversification de portefeuille et de liquidité. Ces caractéristiques en font un actif attrayant pour les investisseurs et en particulier ouvrent la voie à de nouvelles perspectives d'investissement pour un assureur. Cependant, son intégration au sein des stratégies des compagnies d'assurance fait naître des craintes et des défis complexes. La partie qui suit traite ces défis.

### 1.2.5 Les défis des assureurs liés l'intégration du bitcoin.

Les cryptomonnaies ont émergé comme un nouvel actif prometteur dans un paysage financier en constante évolution, présentant des opportunités et des défis uniques pour tout type d'investisseur. Bien que la réglementation relative à l'utilisation des cryptomonnaies dans le secteur de l'assurance reste en grande partie absente, plusieurs défis majeurs doivent être abordés pour une intégration réussie dans la stratégie de ces entreprises.

#### 1.2.5.1 Gestion des risques complexes

L'introduction des cryptomonnaies apporte des risques nouveaux et complexes pour les compagnies d'assurance. La volatilité significative des prix des cryptomonnaies peut entraîner des fluctuations importantes dans la valeur des actifs. Les compagnies d'assurance devront donc développer des modèles de gestion des risques adaptés, en tenant compte des caractéristiques spécifiques des cryptomonnaies. Une approche holistique de la gestion des risques, intégrant des stratégies de couverture et des analyses prévisionnelles, sera essentielle pour atténuer les risques inhérents à ces actifs.

#### 1.2.5.2 Réglementation en évolution

L'absence de lignes directrices spécifiques dans la réglementation existante, telle que Solvabilité 2 ou le

code de l'assurance, crée une incertitude quant aux implications juridiques et réglementaires de l'intégration des cryptomonnaies dans les opérations d'assurance. Les compagnies d'assurance doivent naviguer avec prudence dans un environnement qui manque de directives claires. Il sera crucial pour un assureur qui souhaite détenir cet actif de surveiller l'évolution de la réglementation et d'anticiper les changements potentiels qui pourraient avoir un impact sur l'utilisation des cryptomonnaies.

### 1.2.5.3 Gestion du risque cyber

Les cryptoactifs sont sujettes à des risques de sécurité uniques, tels que le vol de clés privées ou les piratages de plateformes d'échange. Par exemple, en 2022, la plateforme d'échange Poly Network a été victime d'une attaque de pont qui a permis à un hacker de dérober plus de 600 millions de dollars en cryptomonnaies. Les compagnies d'assurance devront mettre en place des mesures de sécurité robustes pour protéger les actifs numériques de leurs clients (contrats UC par exemple), ainsi que leurs propres réserves financières en cryptomonnaies. Une combinaison de technologies de pointe, de protocoles de sécurité et de formations pour les employés sera nécessaire pour garantir la sécurité de ces actifs sensibles.

### 1.2.5.4 Gestion de la réputation et de la confiance

L'adoption des cryptomonnaies peut potentiellement affecter la perception des clients et des parties prenantes à l'égard d'une compagnie d'assurance, surtout dans les contextes de chutes considérables du prix du bitcoin. Les entreprises devront communiquer efficacement sur leurs politiques de gestion des cryptomonnaies, leurs mesures de sécurité et leurs stratégies de gestion des risques pour renforcer la confiance des clients et maintenir leur rentabilité et leur réputation.

En conclusion, l'intégration potentielle des cryptomonnaies dans la stratégie d'une compagnie d'assurance soulève des défis complexes, tant sur le plan de la gestion opérationnelle que de la sécurité et de la réputation. L'absence d'un cadre réglementaire spécifique, le manque de technologies adaptées dans le secteur de l'assurance, ainsi que la perception mitigée du marché vis-à-vis de ces actifs numériques, constituent des obstacles majeurs. Dans ce contexte, il s'avère délicat pour un assureur vie de s'aventurer dans ce nouveau paysage financier tout en maintenant sa stabilité financière et en préservant sa réputation auprès des diverses parties prenantes. L'exploration de ce domaine émergent nécessitera donc une approche prudente et progressive, équilibrant innovation et gestion des risques, afin de capitaliser sur les opportunités potentielles tout en atténuant les risques inhérents à cette nouvelle classe d'actifs.

Dans la section qui suit, nous adoptons une analyse prospective pour évaluer l'impact du bitcoin sur l'activité d'un assureur vie. L'objectif est de réaliser une analyse qualitative aussi exhaustive que possible, afin d'identifier tous les aspects opérationnels de l'assurance vie qui pourraient être affectés par cette intégration. Cette étude vise à anticiper les implications concrètes de l'adoption du bitcoin sur l'ensemble des processus et opérations de l'assureur vie.

## 1.3 Analyse d'impacts prospective

### 1.3.1 Impacts potentiels sur la gestion actif-passif

L'évaluation de l'effet de l'intégration de bitcoin au portefeuille d'une compagnie d'assurance peut être rigoureusement conduite à l'aide de la gestion actif-passif (ALM). Cette démarche de gestion permet de mettre en lumière les dynamiques renouvelées entre les actifs et les passifs découlant de cette modification de l'allocation d'actifs.

L'introduction de bitcoin ou de toute autre classe d'actifs en crypto-monnaie dans le portefeuille d'un assureur peut engendrer des dynamiques distinctes qui requièrent une attention minutieuse dans le contexte de la gestion actif-passif (ALM). Nous avons résumé ici quelques interactions potentielle entre les actifs et les passifs :

- Variabilité du rendement :

L'incorporation de bitcoin dans le portefeuille d'un assureur amplifie la variabilité du rendement due à sa volatilité historique, influençant ainsi la performance globale du portefeuille. Cette volatilité peut directement affecter la solvabilité de l'assureur, nécessitant une réévaluation des réserves de capitalisation (RC) et des provisions pour participation aux bénéfices (PPB) pour maintenir la stabilité financière. La gestion du risque devient donc cruciale pour atténuer les impacts négatifs possibles de cette volatilité. Cette dynamique complexe exige une attention particulière dans la stratégie de gestion actif-passif de l'assureur pour garantir une solvabilité adéquate et une conformité réglementaire.

- Stratégies d'investissement :

L'intégration du bitcoin dans le portefeuille d'investissement d'un assureur-vie peut nécessiter la mise en place de nouvelles stratégies et l'utilisation d'instruments dérivés, comme préconisé dans [STACKINSAT 2023](#), afin de couvrir les risques liés à la volatilité de cette crypto-monnaie. Cette démarche pourrait entraîner une complexification de la gestion du portefeuille, nécessitant ainsi des compétences spécialisées et le recours à des outils analytiques avancés pour une gestion efficace des risques.

- Obligations contractuelles :

L'introduction de bitcoin peut également influencer les obligations contractuelles de l'assureur envers ses assurés. Par exemple, si l'assureur introduit le bitcoin pour générer un rendement plus élevé, les attentes relatives aux prestations de retraite ou aux taux de rendement pourraient évoluer.

- Liquidité :

Perçu souvent comme une classe d'actifs hautement liquide, le bitcoin peut être bénéfique pour la gestion des contrats à court terme, tout en présentant des risques dus à la volatilité du marché des crypto-monnaies. Une gestion prudente de la liquidité et particulièrement des périodes des moins values latente devient dès lors cruciale.

- Conformité réglementaire et exigences de capital :

L'intégration du bitcoin peut entraîner des implications réglementaires, y compris des exigences supplémentaires en matière de capital de solvabilité. Cela peut réduire les capacités d'investissement

de l'assureur, car une partie importante de son capital est bloquée pour couvrir cet actif très volatile.

### 1.3.2 Sélection des indicateurs d'analyse d'impact

L'évaluation de l'impact de l'intégration du bitcoin dans le portefeuille d'un assureur vie s'est focalisée sur trois indicateurs clés du pilier I de Solvabilité II : le Best Estimate (BE), la Valeur de l'In Force (VIF) et le Solvency Capital Requirement (SCR). Pour générer ces indicateurs, il a été nécessaire d'adapter le modèle ALM interne afin de prendre en compte la composante bitcoin dans le portefeuille d'actifs. Bien que ces indicateurs soient couramment utilisés dans le secteur des assurances, un rappel des principes de base sera proposé pour les lecteurs non familiers avec ces termes. Certains indicateurs, comme le Best Estimate et la Value in Force, proviennent directement du modèle ALM, tandis que d'autres, tels que le SCR, sont calculés à partir des indicateurs précédents

#### 1.3.2.1 Best Estimate Liability (BEL)

Conformément à la réglementation Solvabilité II, l'évaluation des engagements est effectuée sur la base d'une estimation optimale, ou "Best Estimate Liability (BEL)". Cette estimation est équivalente à la valeur actualisée de l'ensemble des flux de trésorerie futurs anticipés, qui incluent les primes, les prestations et les coûts associés. Le régulateur oblige les assureurs à projeter ces flux sur un horizon minimal de 50 ans.

La formule pour calculer le BEL pour une année de début de projection  $i$  est la suivante :

$$\begin{aligned} BEL_i &= \mathbb{E}^{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}} \left[ \sum_{t=i+1}^T \delta_t (CF_t^{\text{out}} - CF_t^{\text{in}}) \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}} \left[ \sum_{t=i+1}^T \delta_t (\text{Prestation}_t + \text{Frais}_t - \text{Versement}_t - \text{Chargements}_t + \text{Commissions}_t) \right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}} \left[ \sum_{t=i+1}^T F_t (Y_t^F, Y_t^{NF}) \right] \end{aligned}$$

Où :

- $\mathbb{P}$  : Probabilité historique mesurant les risques non-financiers
- $\mathbb{Q}$  : Probabilité risque neutre mesurant les risques financiers
- $CF_t^{\text{out}}$  : Flux sortants au cours de l'année  $t$
- $CF_t^{\text{in}}$  : Flux entrants au cours de l'année  $t$
- $\delta_t$  : Déflateur stochastique en date  $t$
- $F_t (Y_t^F, Y_t^{NF})$  : Expression des flux actualisés en fonction des risques financiers  $Y_t^F$  et des risques non-financiers  $Y_t^{NF}$

En utilisant l'approche Monte Carlo via des simulations, on peut réécrire la formule comme suit :

$$\begin{aligned} BEL_t &\simeq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{s>t} \delta_{s,n} CF_{s,n} \\ &\simeq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{s>t} F_s (Y_{s,n}^F, \overline{Y_s^{NF}}) \end{aligned}$$

avec :

- $N$  : le nombre de simulations risques neutres à réaliser
- $\overline{Y_s^{NF}}$  : le scénario déterministe des risques non financiers.

### 1.3.2.2 Value In Force (VIF)

La Value In Force (VIF) est un indicateur crucial dans le domaine de l'assurance vie, représentant la valeur actuelle des profits futurs générés par les contrats d'assurance en cours. Deux approches principales de calcul de la VIF sont utilisées, selon que les projections sont effectuées en mode déterministe ou stochastique :

**Mode déterministe :** Dans le cadre déterministe, la Value In Force (VIF) peut être obtenue de deux manières.

Tout d'abord, la formule de calcul de la Value In Force (VIF) pour un assureur vie est définie comme suit :

$$VIF = \sum_{t=0}^n \frac{P_t}{(1+r)^t}$$

où :

- $P_t$  représente les profits prévus à la période  $t$ .
- $r$  est le taux d'actualisation, qui traduit le rendement anticipé ou le coût du capital de l'assureur.
- $n$  est le nombre de périodes pendant lesquelles les profits sont projetés.

Cette formule permet de calculer la valeur actuelle des profits futurs générés par le portefeuille d'assurance vie. Elle actualise les profits prévus à chaque période  $t$  au taux d'actualisation  $r$ , puis les additionne sur l'ensemble des périodes projetées.

Ensuite, contrairement aux projections en mode stochastique où les sorties du modèle sont des moyennes calculées, en mode déterministe, l'interaction entre l'actif et le passif est censée être continue tout au long de la projection, sans fuite. En d'autres termes, les mouvements du passif sont entièrement compensés par les mouvements de l'actif. Ainsi, l'égalité ci-dessous est supposée être toujours vérifiée :

$$VM_{initial} = VIF + BEL$$

Ainsi, la VIF peut être définie comme l'écart entre la valeur de marché initiale des actifs et la meilleure estimation (BE) des flux de trésorerie futurs :

$$VIF_{deterministe} = VM_{initial} - BEL$$

où :

- $VM_{initial}$  représente la valeur de marché du portefeuille d'actifs à l'année de début de la projection.
- Le terme BEL correspond à une estimation réaliste des flux de trésorerie futurs, basée sur des hypothèses déterministes relatives aux taux d'intérêt, aux rendements des actifs et à d'autres paramètres actuariels.

Dans un modèle Asset Liability Management (ALM) qui réalise des projections de bilans comptables équilibrés sur tous les horizons, l'égalité des deux approches est observée.

**Mode stochastique :** Dans le cas d'une projection en mode stochastique alimentée par un GSE (Générateur de Scénarios Économiques) risque neutre, la formule de calcul de la Valeur In Force (VIF) est ajustée pour prendre en compte la nature probabiliste des scénarios économiques. Au lieu d'utiliser une simple somme des profits prévus actualisés, on utilise l'espérance mathématique des flux de profits futurs actualisés.

La formule modifiée de la VIF en mode stochastique est la suivante :

$$VIF = E \left[ \sum_{t=0}^n \frac{P_t}{(1+r)^t} \right]$$

où  $E[\cdot]$  représente l'opérateur d'espérance mathématique, calculé sur l'ensemble des scénarios économiques possibles. Pour chaque période  $t$ , les profits prévus  $P_t$  sont actualisés au taux d'actualisation  $r$  et leur espérance est calculée en prenant en compte la distribution probabiliste des scénarios économiques.

Cette approche stochastique permet de tenir compte de l'incertitude et de la variabilité inhérentes aux variables économiques et financières, offrant ainsi une évaluation plus réaliste de la valeur actuelle des profits futurs du portefeuille d'assurance vie dans un environnement de marché dynamique et complexe.

L'utilisation de ces deux approches pour calculer la VIF permet aux assureurs d'obtenir une vision exhaustive de la valeur de leurs portefeuilles d'assurance vie, en tenant compte à la fois des scénarios déterministes et stochastiques. Cela leur permet de mieux évaluer les risques et les opportunités associés à leurs portefeuilles et de prendre des décisions éclairées en matière de gestion des actifs et des passifs.

### 1.3.2.3 Solvency Capital Requirement (SCR)

Ce mémoire se concentre exclusivement sur l'analyse du SCR de marché. Cette méthode restreint le champ des analyses pour cibler spécifiquement l'impact du bitcoin sur l'exposition de l'assureur aux risques de marché. Toutefois, nous rappelons ci-après la définition et le calcul général du Capital de Solvabilité Requis (SCR) selon Solvabilité II.

Le SCR est une exigence réglementaire du pilier I de la norme Solvabilité 2. C'est le montant de capital que les assureurs doivent détenir pour couvrir les risques auxquels ils sont exposés. On retrouve 3 approches dans le calcul du SCR.

- La formule standard est la méthode par défaut utilisée pour le calcul du SCR. Elle est destinée aux compagnies d'assurance dont le profil de risque est considéré comme standard ou typique
- Ensuite, un modèle interne peut être utilisé par un organisme, à la place de la formule standard, pour calculer son capital de solvabilité requis. Cette utilisation est soumise à l'approbation de l'Autorité de contrôle prudentiel et de résolution. Cette approche permet une évaluation plus précise et adaptée du profil de risque spécifique de la compagnie.
- Enfin, l'approche par Modèles Internes partiels (Partial Internal Models) est une combinaison de l'approche standard et des modèles internes. Les compagnies d'assurance utilisent des modèles internes pour certaines parties du calcul du SCR, tout en utilisant la formule standard pour d'autres parties.

Dans le cadre de ce mémoire, l'approche qui a été retenue est celle de la formule standard. Le SCR en formule standard se calcule comme une somme de tous les risques pris par les sociétés d'assurance en

prenant en compte les effets de diversification via les matrices de corrélation. En effet,

$$SCR = BSCR + SCR_{\text{opérationnel}} - Ajustements$$

avec,

- *BSCR* : le capital de solvabilité requis de base.
- *SCR<sub>opérationnel</sub>* : chargement en capital au titre du risque opérationnel.
- *Ajustements* :
- *Ajustements* : Ils reflètent les arbitrages effectués par l'assureur pour atténuer ses pertes futures. Cela peut se traduire par une réduction des impôts différés ou une diminution de la participation aux bénéfices futurs à distribuer aux assurés.

La méthode prend en compte différents types de risques, comme les risques de marché, de contrepartie, de souscription en assurance vie, etc. Il faut noter que ces six modules sont constitués eux-mêmes de sous modules de risques. Chaque type de risque est pondéré en fonction de sa probabilité et de son impact potentiel sur les fonds propres de l'assureur. Les sous-modules et modules de risques sont agrégées via des matrices de corrélation communiquée par l'EIOPA. Le SCR de marché, qui fera l'objet d'une analyse exclusive dans ce mémoire, est calculé selon la formule suivante :

$$SCR_{\text{mkt}} = \sqrt{\sum_{i,j} \text{CorrMkt}_{i,j} \bullet Mkt_i \bullet Mkt_j}$$

où,

- $\text{CorrMkt}_{i,j}$  est le coefficient de corrélation entre le sous-module de risque marché *i* et le sous-module de risque marché *j*.
- $Mkt_j$  est le SCR associé au sous-module de risque marché *j*.

Le schéma (1.15) résume la structure exhaustive du SCR.

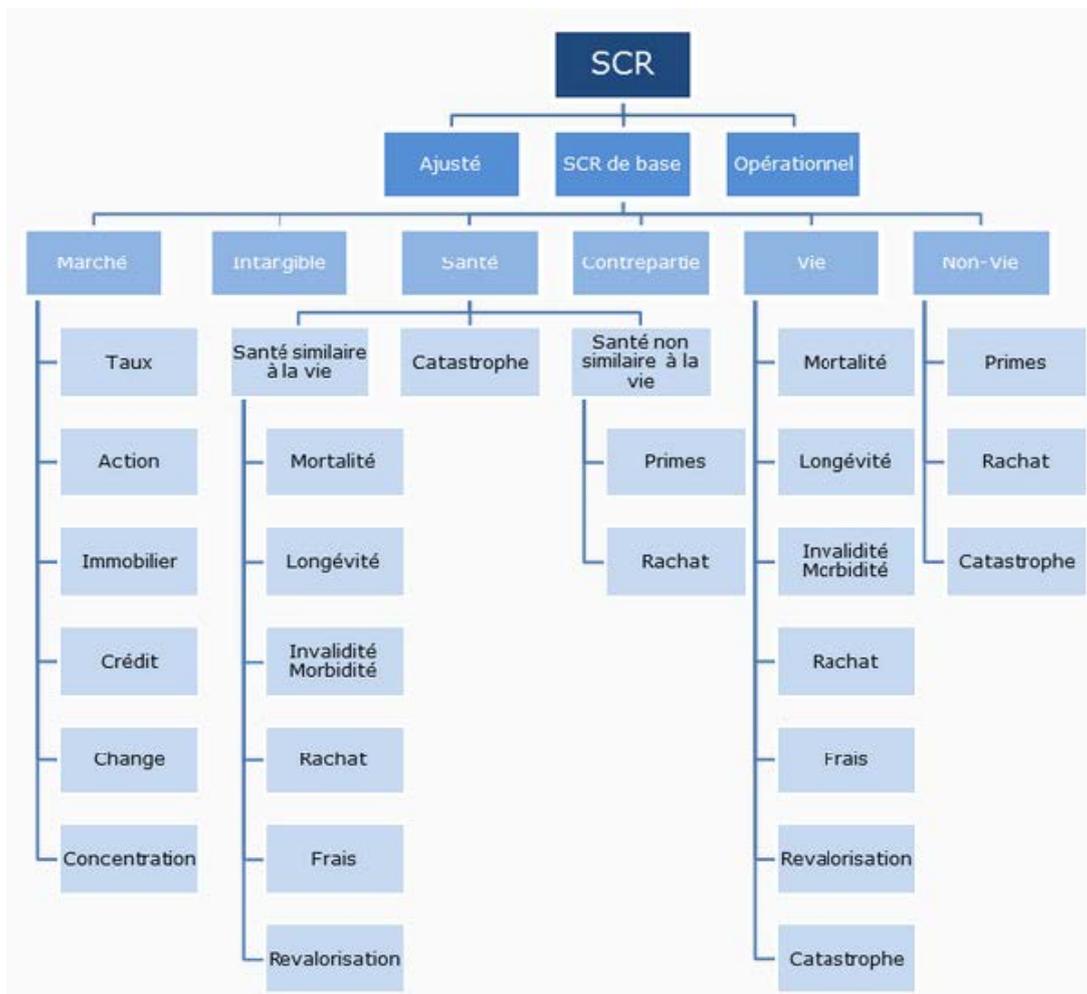


FIGURE 1.15 Structure du SCR formule standard

L'étude qui est entreprise dans ce mémoire vise à intégrer une nouvelle composante de risque, le risque crypto-actif, dans les sous-modules du risque de marché.

### 1.4 Nécessité de mettre à jour les outils de projection actuels

L'incorporation du bitcoin dans le portefeuille d'actifs d'un assureur pose un défi significatif en termes d'ajustement des paramètres dans la modélisation ALM. Cette intégration ne se limite pas à l'ajout d'un nouvel actif; elle nécessite une révision approfondie des méthodes et des outils de modélisation actuellement en place. Un schéma présentant la démarche adoptée pour cette intégration dans le modèle ALM dans son ensemble est présenté ci-dessous. Les cases en vert indiquent les parties du modèle qui ont été modifiées ou adaptées.

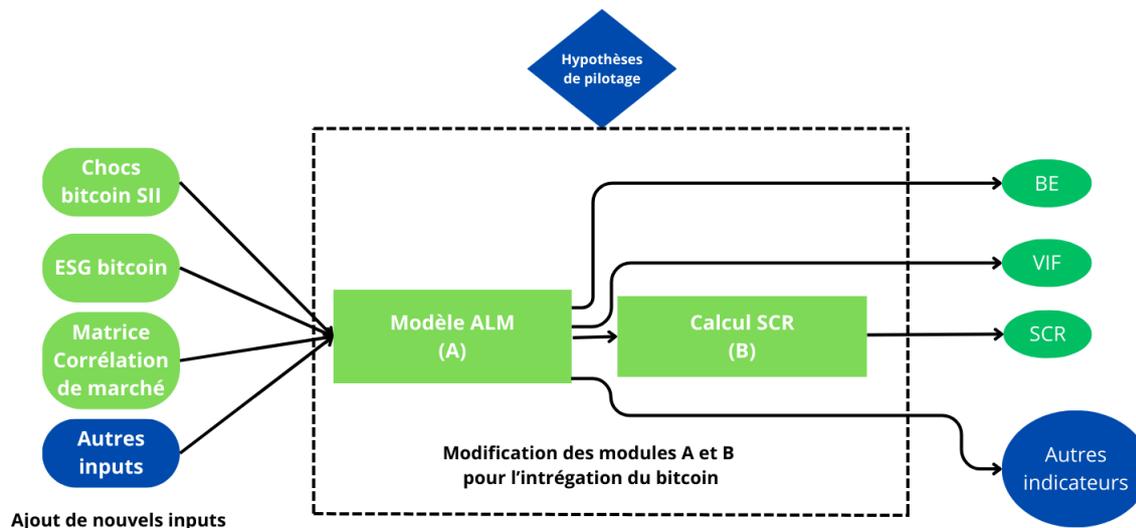


FIGURE 1.16 Évolution du modèle pour l'intégration du bitcoin

### 1.4.1 Nécessité de calibrer de nouvelles métriques spécifiques au bitcoin

Dans le contexte actuel, il est important de rappeler l'absence de cadre réglementaire spécifique pour les investissements en cryptomonnaies au sein des compagnies d'assurance. Ainsi, les paramètres standardisés tels que la valeur de choc S2, appliquée habituellement aux marchés actions de type I (39%), ou les matrices de corrélation de marché, ne sont pas directement transposables au bitcoin.

#### Calibrage d'un choc SII bitcoin et d'une matrice de corrélation bitcoin :

Le choc actif bitcoin jouera un rôle crucial dans l'évaluation des risques liés à l'intégration du bitcoin dans le portefeuille d'un assureur vie. Ce choc, une fois calibré, simulera un scénario défavorable où la valeur du bitcoin subit une baisse significative, permettant ainsi de mesurer l'impact potentiel sur le portefeuille de l'assureur. Par ailleurs, une nouvelle matrice de corrélation du marché, incluant le bitcoin, devra être élaborée pour la détermination du SCR. Cette nouvelle matrice permettra de prendre en compte les corrélations entre le bitcoin et les autres actifs, assurant une évaluation plus précise et holistique du capital nécessaire pour couvrir les risques de marché.

#### Calibrage d'un GSE pour le bitcoin :

Un aspect crucial de cette intégration sera la calibration d'un Générateur de Scénarios Économiques (GSE) spécifique au bitcoin. À l'instar des modèles utilisés pour les actions et les taux, ce GSE en mode risque-neutre pour le bitcoin est fondamental pour simuler des scénarios de marché plausibles pour la valorisation du bitcoin, la projection du bilan et l'évaluation de l'impact potentiel du bitcoin sur le portefeuille global. Les travaux de calibrage dédiés à ces actifs sont abordés dans le chapitre 2 et 3.

### 1.4.2 Adaptation du modèle ALM et du calcul du SCR marché

Après le calibrage des paramètres d'entrées nécessaires pour intégrer le bitcoin dans le modèle ALM, il sera nécessaire de modifier le modèle ALM lui-même afin qu'il puisse réaliser une projection équilibrée du bilan de l'assureur avec le bitcoin dans son portefeuille. Cela impliquera l'ajustement des stratégies d'achat et de vente, la gestion des actifs et les mécanismes de revalorisation dans le cadre de Solvabilité II. Ces travaux sont abordés dans la section (5.1.2.2).

L'approche retenue pour le calcul du SCR dans ce mémoire repose sur la méthode de la formule standard, comme détaillé dans la section 1.3.2.3. Dans cette optique, une hypothèse simplificatrice a été formulée en se concentrant uniquement sur le SCR de marché. Par conséquent, l'intégration du risque bitcoin dans le calcul du SCR de marché impliquera l'ajout d'une nouvelle composante dédiée au calcul du SCR stand-alone pour le bitcoin.

## 1.5 Conclusion du chapitre

Ce premier chapitre a posé les bases essentielles pour comprendre la problématique d'étude d'impact, en mettant un accent particulier sur le bitcoin, dans le contexte de l'industrie de l'assurance-vie. Nous avons exploré la nature, les acteurs clés et l'évolution institutionnelle des cryptoactifs, soulignant leur potentiel en tant qu'actifs d'investissement pour les assureurs vie. Ce potentiel est soutenu par des perspectives de rendements élevés à long terme, de diversification de portefeuille, et de liquidité. Toutefois, ces avantages s'accompagnent de défis considérables tels que les questions réglementaires en mutation, la sécurité des actifs numériques, la gestion des risques complexes, ainsi que les enjeux de réputation et de confiance.

Ce chapitre a également servi à mettre en lumière les spécificités de l'assurance vie, la démarche de gestion et la place qu'y occupent différents types de supports d'investissement. Dans ce contexte, nous avons abordé l'environnement réglementaire actuel, incluant le cadre de Solvabilité II et le code des assurances. En conclusion, ce chapitre initial établit une fondation pour comprendre les enjeux et les opportunités que représentent les cryptoactifs pour les assureurs vie. Les chapitres suivants examineront plus en détails les aspects pratiques et techniques de l'intégration du bitcoin dans le cadre de ce mémoire, dans la gestion actif-passif.

## CHAPITRE 2 : Calibrage du choc bitcoin en norme S2

Dans ce chapitre, nous exposons les différentes études quantitatives réalisées pour calibrer le choc bitcoin conformément à la réglementation Solvabilité II. Cette calibration revêt une importance cruciale pour évaluer l'impact potentiel d'une variation adverse du prix du bitcoin sur le bilan de l'assureur. Le travail présenté dans ce rapport repose initialement sur un examen approfondi des techniques de calibrage du choc action, avant de proposer des approches novatrices pour calibrer le choc bitcoin, malgré un historique exploitable limité à seulement 12 années.

### 2.1 Cadre de l'étude

#### 2.1.1 Méthode de calibrage de l'EIOPA pour le choc action

##### 2.1.1.1 Démarche méthodologique détaillée

La norme Solvabilité 2 (S2) établit des règles pour les entreprises d'assurance afin de garantir leur solvabilité et de protéger les intérêts des assurés. Dans le pilier 1 de Solvabilité 2, on trouve différentes méthodes pour évaluer le capital de solvabilité requis(SCR), en fonction de l'utilisation d'un modèle interne ou de la formule standard.

En utilisant la formule standard, les tests de résistance consistent principalement à appliquer des chocs (valeurs déjà calibrées et publiées par l'EIOPA) à la valeur de marché des actifs et à l'évolution du passif. Ces chocs permettent de déterminer le capital de solvabilité nécessaire pour faire face aux risques financiers. Les tests de résistance sont une étape importante pour évaluer la solidité financière des assureurs et s'assurer qu'ils disposent des fonds nécessaires pour couvrir les risques liés à leurs investissements et à leurs engagements envers les assurés.

L'EIOPA décrit dans le document de calibration CEIOPS 2010, la méthodologie pour le calibrage de différents chocs. Cette méthodologie repose sur une approche de calibration de lois paramétriques pour déterminer l'impact des chocs. Avec l'exemple du marché des actions :

1. L'EIOPA suppose, de manière simplifiée, que les rendements du MSCI World Developed Price Equity Index suivent une loi normale à long terme. Pour estimer les deux paramètres (moyenne et variance), elle utilise une maximisation de la vraisemblance.
2. Le choc est ensuite obtenu en calculant le quantile à 0,5 % avec la loi ajustée, correspondant à un événement bicentenaire.

Comme indiqué dans le document de calibration, la réglementation S2 exige un historique de données d'au moins 30 ans pour le processus de calibrage du choc impactant les actions. Cette exigence est basée sur des considérations statistiques, car un échantillon jugé représentatif pour l'ajustement d'un modèle statistique doit comporter un minimum de 30 observations.

L'importance de cette exigence devient palpable dans le contexte de notre étude, où notre objectif consiste à estimer un phénomène extrême se produisant à une fréquence de 200 ans (quantile bicentenaire). Pour appréhender cette rareté, il est logique de concevoir qu'un échantillon réaliste devrait couvrir une période temporelle équivalente à la fréquence du phénomène. Ainsi, pour évaluer des événements survenant tous les 200 ans, un historique de 200 ans, correspondant à 200 observations de rendements annuels pour l'actif

considéré, devrait être requis.

Par conséquent, afin de pouvoir effectuer des ajustements précis et significatifs, il devient nécessaire d'appliquer une méthodologie d'ajustement basée sur une loi statistique. Cela permettra de générer des échantillons de taille suffisante pour caractériser les comportements extrêmes des actions dans le cadre du modèle étudié.

### 2.1.1.2 Critiques de la méthodologie

L'article SCHERER et STAHL 2021, disponible sur SpringerLink<sup>15</sup>, recense et examine quelques réserves exprimées par les acteurs du marché concernant la méthodologie de calibrage du choc de l'EIOPA. Ces réserves portent sur la pertinence des données utilisées pour le calibrage, les hypothèses sous-jacentes à la méthode, et enfin l'impact financier de cette approche méthodologique, notamment en termes de rentabilité et de capacités de réinvestissement sur le marché. En effet, les exigences en capital, jugées excessives, peuvent entraîner une immobilisation accrue du capital et des rendements potentiellement moins attrayants pour les actionnaires.

Concernant les hypothèses qui sous-tendent la méthode, des études, notamment celle de CHEVALLIER 2021, ont démontré que le choc calibré est fortement influencé par les données utilisées. Par exemple, le choc calibré avec la méthode de l'EIOPA sur l'indice EuroStoxx 50 donne un choc de -47%, tandis que pour le MSCI World, il est de -39%. De plus, il a été observé que la distribution des rendements des actifs financiers ne suit pas toujours une distribution normale. Les événements extrêmes, tels que les krachs boursiers, les bulles spéculatives ou les crises financières, peuvent avoir des impacts majeurs mais sont mal représentés par une distribution normale. Ces études ont mis en évidence la non-normalité des rendements de l'indice MSCI à long terme et a justifié la bonne qualité d'ajustement d'une loi à queue lourde - la loi de Weibull. Cela signifie que les événements extrêmes sont plus probables que ce que prédit une distribution normale, ce qui peut entraîner une sous-estimation des exigences en capital.

### 2.1.1.3 Réponses de l'EIOPA

L'EIOPA reprend dans le document de calibration CEIOPS 2010 quelques limites liées concernant sa méthodologie de calibrage du choc avant d'apporter quelques éléments de réponses.

L'EIOPA souligne que la question de la distribution exacte des rendements des actions reste non résolue. Malgré cela, elle justifie l'utilisation d'une hypothèse simplificatrice selon laquelle les rendements à long terme des actions suivent une distribution normale, principalement pour des raisons d'harmonisation de l'approche. De plus, la période historique des données utilisées pour le calibrage inclut la crise financière de 2008, ce qui permet d'intégrer la réaction du marché aux événements extrêmes dans la valeur du choc retenue par l'EIOPA.

Par ailleurs, dans sa publication *Opinion on the 2020 review of Solvency II - European Union 2020*, l'EIOPA considère que, d'un point de vue prudentiel, le cadre de Solvabilité II fonctionne bien et ne nécessite pas de changements fondamentaux à ce stade. Cependant, plusieurs amendements sont requis pour garantir que le cadre réglementaire continue de fonctionner comme un régime basé sur les risques. Cette publication fait partie du processus de révision de la directive Solvabilité II. Elle vise à maintenir le régime adapté à son objectif en introduisant une mise à jour équilibrée du cadre réglementaire, reflétant mieux la situation économique et complétant les éléments manquants de la boîte à outils .

15. SpringerLink est une plateforme de recherche scientifique qui offre un accès à des revues, des livres électroniques et des protocoles dans diverses disciplines

## 2.1.2 Méthodes développées pour le calibrage du choc bitcoin S2.

### 2.1.2.1 Veille méthodologique

Dans les récentes critiques de l'approche de l'EIOPA, il a été souligné que l'utilisation de la distribution normale n'est pas toujours appropriée pour représenter les rendements des actifs financiers. En effet, ces rendements présentent généralement des queues de distribution épaisses. Cette observation revêt une importance particulière dans le cadre prudentiel de Solvabilité 2, où l'objectif est de quantifier de manière précise le risque auquel l'assureur est réellement confronté.

De nombreux travaux en finance ont exploré la modélisation des actifs de marché en utilisant des lois statistiques plus élaborées que la loi normale. Par exemple, dans son étude, [LEBLANC 2003](#) a examiné l'ajustement de lois leptokurtiques au comportement du log-rendement quotidien de certains actifs financiers présentant des queues épaisses. Les distributions leptokurtiques se caractérisent par des queues plus épaisses que celles d'une distribution normale, ce qui indique une probabilité plus élevée d'événements extrêmes. De plus, le sommet de la distribution est plus élevé, suggérant qu'une plus grande proportion des valeurs générées par cette distribution se situe près de la moyenne par rapport à une distribution normale. La famille des distributions hyperboliques généralisées est connue pour présenter des distributions leptokurtiques, et l'auteur a préconisé leur utilisation pour modéliser les log-rendements quotidiens des actifs à queue épaisse.

Dans une autre étude récente, [MBA, MWAMBI et PINDZA 2022](#) ont comparé plusieurs types de lois leptokurtiques pour modéliser les log-rendements quotidiens d'un actif très volatile : le bitcoin.

Cette étude se distingue par sa tentative de transférer l'application de ces modèles du secteur financier au domaine de l'assurance, qui est réglementé par un cadre prudentiel spécifique. Pour ce faire, nous avons ajusté nos modèles en utilisant des données annuelles au lieu de données quotidiennes, afin de correspondre à la méthodologie de l'EIOPA qui calibre les chocs sur une base annuelle. De plus, nous avons décidé de privilégier les rendements relatifs plutôt que les log-rendements, car l'approximation des log-rendements peut être biaisée pour les actifs très volatils (voir la section [2.1.4](#)). En effet, l'estimation du quantile bicentenaire, qui représente le choc, doit être basée sur une distribution de densité qui reflète le plus fidèlement possible les rendements historiques du marché.

Par ailleurs, le bitcoin étant un actif très récent (création en 2008 et disponibilité des données à partir de 2010) sur le marché, nous sommes donc confrontés à un défi lié à la profondeur de l'historique pour une calibration robuste des modèles statistiques. Ainsi, en raison de cette limitation des données annuelles sur le cours du bitcoin, nous avons exploré de nouvelles approches pour relever les défis posés pour le calibrage du choc bitcoin. Ces approches, qui seront présentées dans la section suivante, complètent l'approche paramétrique de l'EIOPA utilisée pour calibrer le choc action, élargissant ainsi notre répertoire méthodologique pour une analyse plus approfondie.

### 2.1.2.2 Méthodes de calibrage développées dans ce mémoire

Notre approche de calibrage a évolué en plusieurs étapes pour répondre aux défis rencontrés : Initialement, nous avons tenté des calibrages de modèles basés sur un historique annuel de 12 ans. Cependant, cette approche s'est révélée insuffisante, car un échantillon d'au moins 30 observations est généralement recommandé pour ajuster un modèle statistique de manière robuste.

Pour pallier ce manque de données annuelles, nous avons exploré diverses alternatives. Notre première tentative a consisté à utiliser la méthode des rendements annuels glissants pour le calibrage des modèles statistiques. Néanmoins, il s'est avéré difficile de quantifier précisément la différence d'information entre cette méthode et l'approche de l'EIOPA basée sur les années civiles.

Face à cette difficulté, nous avons opté pour une méthode alternative : le calibrage d'un choc mensuel, ensuite annualisé à l'aide d'un facteur d'annualisation. Cette approche visait à obtenir un choc annuel plus précis tout en exploitant la richesse des données mensuelles disponibles.

Enfin, pour affiner davantage notre calibrage, nous avons choisi d'utiliser des modèles de séries temporelles de type ARMA(p,q) à changement de régime markovien. Ces modèles, dont la dynamique est pilotée par une variable inobservable modélisée par une chaîne de Markov, nous ont permis de générer des trajectoires de prix en monde réel. Cette approche vise à compléter la base historique existante, offrant ainsi une solution au manque de données annuelles pour le calibrage du choc.

Chacune de ces approches est détaillée dans les sections suivantes, permettant une compréhension approfondie de notre méthodologie et de son évolution au cours de l'étude.

### **Calibrage de chocs sur les 12 années d'historique :**

Comme nous le mentionnons plus tôt, le bitcoin est très récent pour disposer de 30 ans d'historique. Néanmoins, nous avons souhaité avoir un premier résultat de choc calibré sur seulement un historique de rendements annuels de 12 ans. La section 2.2.3 sera consacré à ce but.

### **Calibrage sur les rendements annuels glissants :**

Les rendements glissants représentent une méthode alternative pour calculer les rendements annuels en tenant compte de plusieurs périodes qui se chevauchent, contrairement à une période annuelle classique. Par exemple, au lieu de calculer le rendement annuel du 1er janvier au 31 décembre, nous considérons plusieurs périodes journalières, mensuelles, trimestrielles ou semestrielles qui se chevauchent.

En particulier, le concept du rendement annuel glissant implique le calcul des rendements d'un actif sur une période de 12 mois, mais cette fenêtre de 12 mois se déplace chaque jour. En d'autres termes, chaque jour, le rendement de l'investissement est recalculé sur les 12 derniers mois. Par exemple, le 1er janvier de l'année N+1, on calcule le rendement de l'investissement du 1er janvier de l'année N au 1er janvier de l'année N+1. Le 2 janvier de l'année N+1, on calcule le rendement de l'investissement du 2 janvier de l'année N au 2 janvier de l'année N+1, et ainsi de suite jusqu'au 31 décembre de l'année N+1.

Selon [FASTERCAPITAL 2024](#)<sup>16</sup>, l'approche des rendements glissants offre une perspective plus précise et à jour du rendement des investissements, car elle prend en compte les fluctuations du marché tout au long de l'année.

Dans le contexte de notre étude, cette méthode nous a permis de pallier le manque d'observations historiques annuelles du bitcoin. En utilisant deux années d'historique journalier du bitcoin, nous avons pu générer 365 rendements annuels glissants. Par conséquent, douze années d'observations historiques nous ont permis de produire

$$11 * 365 = 4015$$

rendements annuels glissants. Cela a fourni un échantillon suffisamment large pour calibrer de manière robuste des modèles statistiques et estimer un choc annuel. Cette approche est expliquée en détail dans la section 2.2.4.

Cependant, la méthode des rendements annuels glissants, bien que facile à mettre en œuvre, présente des limites significatives. D'une part, comme on le mentionnait plus tôt, la mesure précise de l'ampleur du gain ou de la perte d'information liée à l'utilisation des rendements annuels glissants par rapport à ceux calculés sur une année civile s'est avérée complexe. Nous rappelons que

---

16. FasterCapital est un incubateur/accélérateur en ligne qui opère à l'échelle mondiale, il aide les startups à lever des capitaux et offre des services de développement technique et commercial.

l'approche de l'EIOPA se base sur les rendements annuels classiques. D'autre part, bien que la méthode des rendements annuels glissants offre une vision dynamique de la performance d'un actif sur une période de temps donnée, elle peut négliger l'impact cumulatif des rendements au fil du temps, se concentrant principalement sur les périodes qui se chevauchent. Par conséquent, elle risque de ne pas refléter de manière précise le potentiel de croissance ou de décroissance à long terme d'un investissement. Prenons l'exemple d'un investissement qui génère des rendements constants et modestes sur une longue période. Une analyse basée sur les rendements annuels glissants pourrait manquer de saisir pleinement l'effet cumulatif, ce qui pourrait entraîner une sous-estimation du véritable potentiel de l'investissement. Ainsi les limites de cette approche ont incité l'exploration d'autres méthodes.

#### **Calibrage d'un choc mensuel et ajustement par un facteur d'annualisation :**

Dans cette approche, nous avons pris en compte les cours mensuels du bitcoin sur les 12 dernières années, ce qui nous donne  $12 * 12 = 144$  observations (section 2.2.5). Ce nombre d'observations est statistiquement suffisant pour effectuer des ajustements de lois courantes afin de calibrer un choc mensuel. Une fois ce choc mensuel déterminé, nous avons calibré un facteur d'annualisation que nous avons ensuite appliqué au choc mensuel pour obtenir le choc annuel.

Cependant, cette approche a certaines limites. Premièrement, la méthode classique et couramment utilisée qui consiste à définir le facteur d'annualisation comme étant égal à  $\sqrt{12}$  est assez simpliste car elle suppose que les rendements mensuels sont indépendants, donc non corrélés. Dans son mémoire, HOUNKONNOU 2020 souligne sa réserve face à cette hypothèse simplificatrice avant de proposer la méthode d'annualisation dite "racine carrée du temps". Cette méthode nécessite de connaître la volatilité empirique mensuelle et annuelle du bitcoin, et nous n'avons que 12 observations annuelles, ce qui rend le calcul de la volatilité annuelle peu robuste.

Malgré ces limites, nous avons poursuivi cette méthode jusqu'à son terme et le choc obtenu nous a permis d'élargir notre base de comparaison de résultats. La méthode de calcul détaillée, ainsi que les hypothèses sur lesquelles elle repose, sont présentées dans la section 2.2.5.

#### **Calibrage du choc avec les series temporelles (Modèle MS-AR) :**

Dans son étude, CHEVALLIER 2021 présente une méthode innovante pour calibrer le choc sur les actions. Cette méthode s'appuie sur un modèle de séries temporelles à chaîne de Markov cachée (MSAR). L'objectif est de modéliser la dynamique journalière de l'indice MSCI World Developed Index en utilisant un modèle qui est capable de détecter les changements de régime de cette dynamique.

Dans notre étude, lors de l'analyse de la volatilité des rendements annuels du bitcoin, nous avons observé l'existence de plusieurs régimes de volatilité. Ces changements de régime ne sont pas considérés dans le calibrage effectué par les modèles statistiques traditionnels. Nous avons donc choisi d'appliquer un modèle à changement de régime markovien, en utilisant l'historique quotidien du cours logarithmique et du log-rendement du bitcoin. Cette stratégie vise à capturer de manière optimale les effets réels des changements de régime de volatilité du prix, ce qui offre une représentation plus réaliste de la dynamique du bitcoin par rapport aux lois statistiques conventionnelles. Les rendements issus des prix simulés dans cette approche seront utilisés pour le calcul d'un choc empirique. Cette approche est abordée dans la section 2.3.

### 2.1.3 Sélection du type de rendement dans le cadre du calibrage d'un choc S2

Ici, nous prenons des décisions relatives au type de rendements approprié pour le calibrage du choc associé au bitcoin. Il convient de rappeler que l'approche courante consiste à calibrer les modèles financiers sur les log-rendements d'un actif. Cette méthode est justifiée par le fait que la transformation logarithmique permet de convertir certains processus aléatoires en processus de Lévy. Les processus de Lévy sont des processus stochastiques en temps continu, continus à droite et limités à gauche (càdlàg), dont les accroissements sont stationnaires et indépendants. Ces propriétés sont particulièrement utiles pour ajuster certains modèles couramment utilisés sur le marché.

Cependant, bien que les log-rendements présentent des propriétés favorables pour les ajustements de modèle, ils pourraient ne pas constituer une base de données appropriée pour le calibrage du choc S2. En effet, comme illustré dans la figure 2.1, pour des actifs très volatils, l'utilisation des log-rendements peut altérer une partie du comportement réel de l'actif. Néanmoins, les log-rendements constituent une bonne approximation des rendements relatifs uniquement lorsque ces derniers ont une faible plage de variation centrée autour de 0. Cette condition est mathématiquement démontrée par le développement limité de la fonction  $\log(x)$  à l'ordre 1 au voisinage de 1.

Soit  $S_t$  est le prix de l'actif à l'instant  $t$ . Le rendement est définie par  $r_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$  et le log-rendement se définit par  $\tilde{r}_t = \log\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$ .

On pose  $x_t = \frac{S_t}{S_{t-1}}$ , si  $x_t$  est au voisinage de 1 alors  $r_t = x_t - 1$  est au voisinage de 0. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned}\tilde{r}_t &= \log(x_t) = \log(1 + (x_t - 1)) \\ &= (x_t - 1) + o(x_t - 1) \\ &\simeq (x_t - 1) = r_t\end{aligned}\tag{2.3}$$

En d'autres termes, le log-rendement ne capture que la composante d'ordre 1 du développement limité des rendements relatifs. Cela conduit à une sous-estimation du comportement des actifs très volatils, tels que le bitcoin. En effet, les informations contenues dans les autres ordres du développement limité, qui sont négligées, peuvent avoir une influence significative sur les rendements relatifs qui n'ont pas une distribution centrée autour de 0, autrement des distributions de rendements qui présentent une queue lourde. La figure 2.1 fournisse une illustration visuelle de ce phénomène.

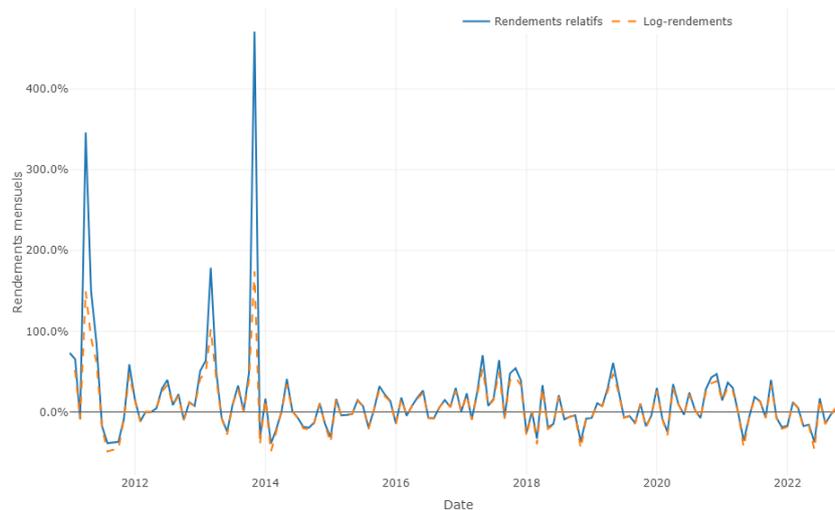


FIGURE 2.1 Comparaison rendements relatifs et rendements log

Nous observons que l'utilisation de log-rendements atténue certains pics de variation. Dans la méthodologie de calibrage des chocs d'actions décrite en Solvabilité 2, le régulateur prend en compte les rendements relatifs de l'indice MSCI. Par conséquent, dans un souci de préserver le comportement réel des variations du bitcoin, **nous optons pour le rendement relatif comme base d'échantillonnage pour le calibrage du choc bitcoin S2**. Néanmoins, pour l'approche utilisant le modèle MSAR, qui nécessite une modélisation financière préliminaire, nous utiliserons d'abord le log-rendement pour projeter le prix du bitcoin, puis nous reviendrons aux rendements relatifs des prix projetés pour le calibrage du choc.

#### 2.1.4 Critères de sélection des modèles

Dans l'approche paramétrique, différentes familles de modèles statistiques seront ajustés et comparés sur nos jeux de données qui présentons par la suite. La log-vraisemblance ne pouvant être utilisée comme critère de sélection en raison de son accroissement mécanique avec le nombre de paramètres, les critères AIC et BIC seront employés. Ces critères évaluent l'équilibre optimal du modèle ajusté en pénalisant la complexité, avec la différence que le BIC prend en compte la taille de l'échantillon dans la pénalisation. Ainsi nous utiliserons l'AIC pour comparer les modèles paramétriques ajustés sur un même échantillon et le critère BIC pour des ajustements de modèles sur des échantillons de tailles différentes. Les critères AIC et BIC sont définis par :

$$AIC = 2k - 2 \ln(L)$$

$$BIC = \ln(n) \times k - 2 \ln(L)$$

Où,

- $k$  est le nombre de paramètres à estimer du modèle.
- $L$  est le maximum de la fonction de vraisemblance du modèle.
- $n$  représente le nombre d'observations dans l'échantillon étudié.

Le calcul d'un quantile à 0.5% pour le calibrage du choc nous amène à nous concentrer sur les queues de distribution de nos échantillons de rendement. Par conséquent, se fier uniquement à l'AIC ou au BIC ne suffira pas pour choisir le modèle le plus approprié, car ces deux critères mesurent l'ajustement global du

modèle sur la distribution. Un modèle avec un meilleur AIC peut bien s'ajuster à la partie centrale de la distribution, mais peut mal s'ajuster aux queues. C'est pourquoi une comparaison des quantiles extrêmes des modèles calibrés avec les quantiles empiriques extrêmes sera donc ajoutée si possible pour compléter l'évaluation.

## 2.1.5 Présentation des données

Nous avons récolté les données d'évolution journalières et mensuelles du bitcoin sur le site [investing.com](https://investing.com). La période d'observation s'étale du 1<sup>er</sup> janvier 2011 au 31 décembre 2022, soit 12 années d'historique. Dans ces 2 bases de données journalières et mensuelles, nous avons retenu uniquement les variables dates, prix et rendements relatifs.

### 2.1.5.1 Observations journalières du bitcoin

Nous présentons ci-dessous les résumés statistiques et les figures d'évolution journalière des prix et des rendements du bitcoin.

Statistique	prix	rendement
Min.	0.3	-0.572100
1st Qu.	228.9	-0.013300
Median	944.2	0.000000
Mean	8929.0	0.004341
3rd Qu.	9673.6	0.019650
Max.	67527.9	3.368400

TABLE 2.1 Résumé des prix et rendements journaliers

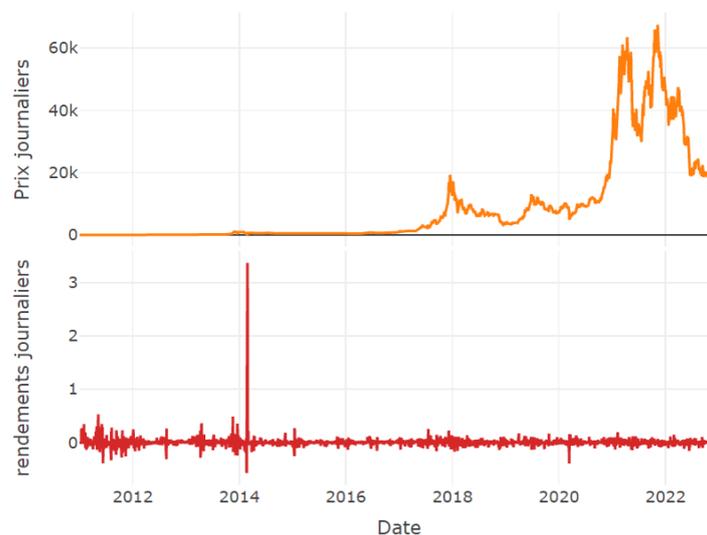
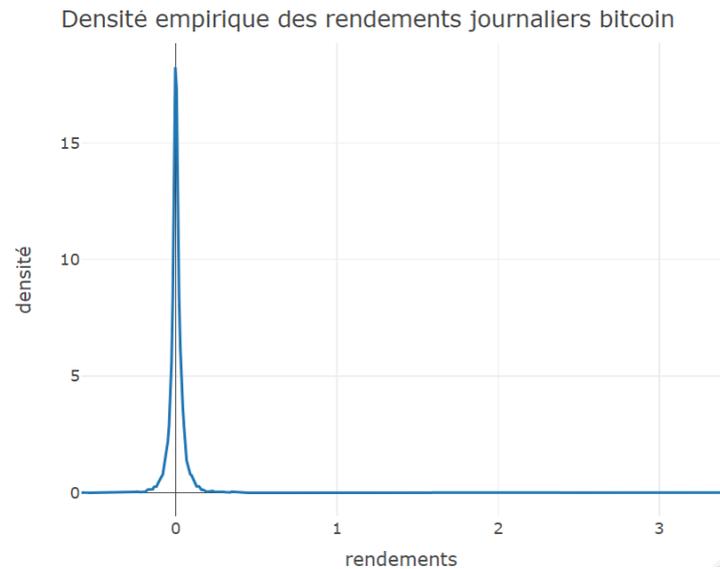


FIGURE 2.2 Évolution journalière du prix et du rendement

Les variations quotidiennes des rendements oscillent généralement entre -50% et 50%, à l'exception de l'année 2014 où l'on observe un pic unique atteignant 350%. Cet événement exceptionnel se produit entre le 25/02/2014 et le 26/02/2014, faisant passer le prix de 136€ à 591€. Cependant, notre étude se concentre sur l'analyse des rendements annuels et mensuels, nous ne nous attarderons donc pas sur l'analyse de ce pic. Ci-dessous la densité empirique de ces rendements journaliers.



**FIGURE 2.3** Densité de rendements journaliers

Le pic de densité remarqué près de l'abscisse 0 indique généralement des variations quotidiennes modérées du prix du bitcoin en moyenne. Cependant, la présence d'une queue épaisse à droite de la distribution signale des fluctuations quotidiennes imprévues du bitcoin, avec des rendements journaliers qui peuvent grimper jusqu'à 300% ou baisser de 60%.

### 2.1.5.2 Observations mensuelles du bitcoin

Toujours sur le site [investing.com](https://www.investing.com), nous importons les observations mensuelles du bitcoin. La période d'observation s'étale également du 1<sup>er</sup> janvier 2011 au 31 décembre 2022, soit 12 années d'historique. On obtient donc 144 observations mensuelles de prix, une taille d'échantillon suffisant pour calibrer des modèles paramétriques. Ci-dessous les résumés statistiques ainsi que les figures d'évolution journalière des prix et des rendements du bitcoin.

Statistique	prix	rendement
Min.	0.5	-0.38870
1er Qu.	229.7	-0.08657
Mediane	1022.3	0.05030
Moyenne	8964.0	0.14969
3eme Qu.	9682.5	0.25562
Max.	61309.6	4.70940

**TABLE 2.2** Résumé des prix et rendements mensuels

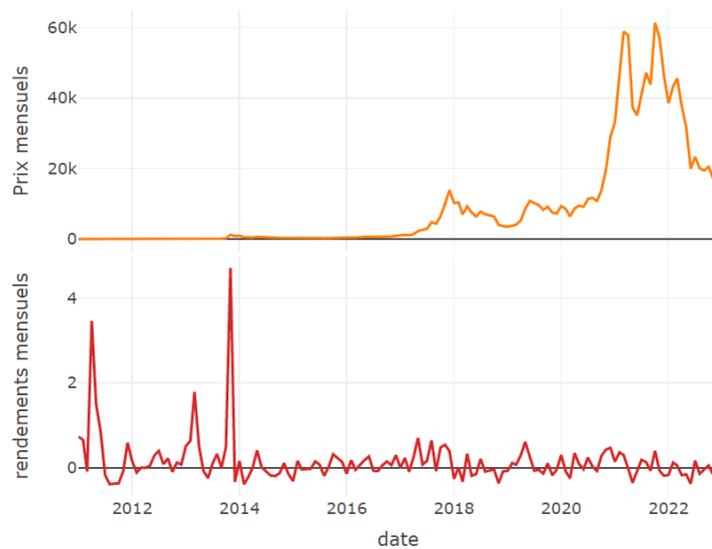


FIGURE 2.4 Évolution mensuelle du prix et du rendement

La non-stationnarité est observée plus fréquemment dans les rendements mensuels que dans la série chronologique des rendements journaliers.

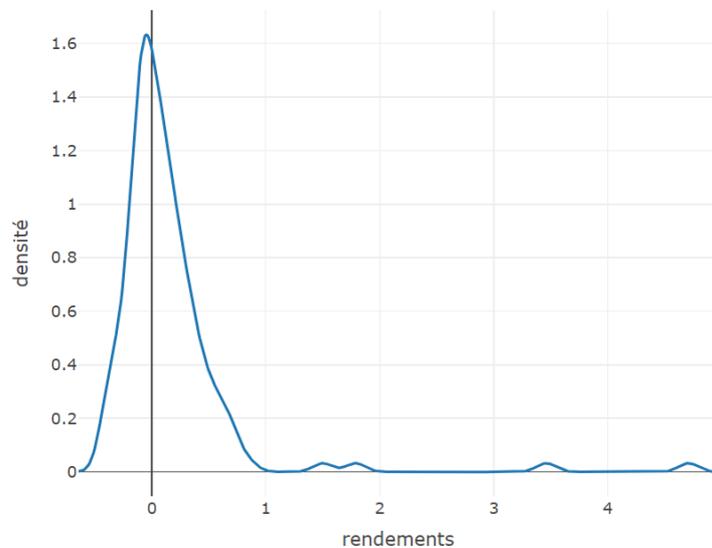


FIGURE 2.5 Densité empirique de rendements mensuels

On peut remarquer que La densité de la loi tronquée  $[R|R \leq 100\%]$  se rapproche de celle d'une loi normale. La pointe de concentration qu'on observait autour de 0 dans la densité de la distribution journalière est aplatie. On comprend alors que l'amplitude des rendements augmentent en fonction du pas temporel, allant de -40% à 471%.

### 2.1.5.3 Observations annuelles du bitcoin

À partir des bases de données précédentes, nous avons dérivé les prix et les rendements annuels du 1<sup>er</sup> janvier 2011 au 31 décembre 2022, soit 12 observations. La plage de variation des rendement est inédite, allant de -73% à 5870%

Statistique	prix	rendement
Min.	0.3	-0.7322
1er Qu.	318.2	0.0000
Mediane	963.4	0.9400
Moyenne	9153.7	7.1372
3eme Qu.	13850.4	3.0228
Max.	46219.5	58.6963

TABLE 2.3 Résumé des prix et rendements annuels du bitcoin

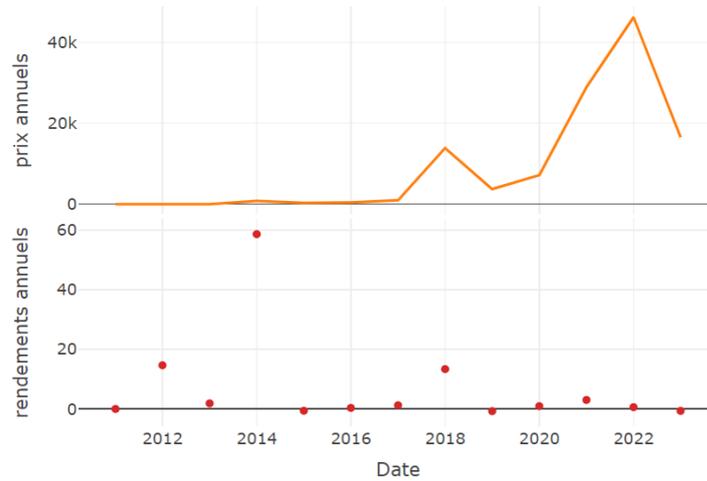


FIGURE 2.6 Évolution annuelle des prix et rendements

Au premier abord, l'évolution des rendements ne semble pas être en adéquation avec celle des prix, en particulier lorsqu'on observe les fortes fluctuations de rendements entre 2012 et 2014, alors que la courbe des prix semble relativement stable. Il est important de noter que le rendement est plus élevé lorsqu'on passe, par exemple, de 1 à 5 que lorsqu'on passe de 20 000 à 60 000. C'est donc simplement une question d'échelle.

A partir des 12 points de rendement, on peut estimer une densité empirique même si cela reste statistiquement peu robuste.

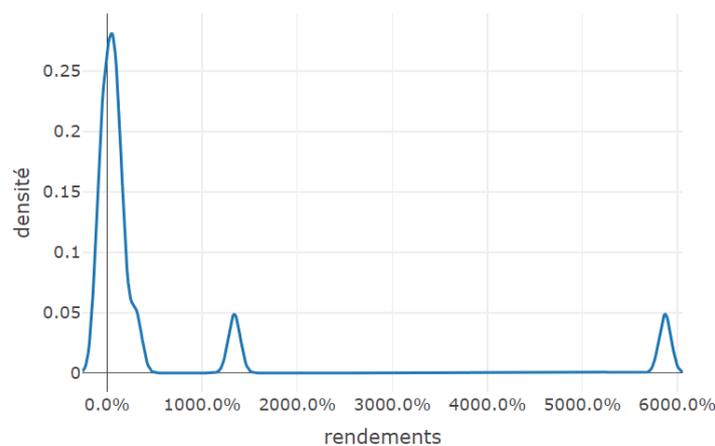


FIGURE 2.7 Densité empirique rendements annuels

Nous constatons une densité de distribution présentant une forme similaire à celle des observations quotidiennes et mensuelles, avec une concentration de rendements autour de zéro et une queue épaisse sur la droite. Cette observation est encourageante dans le cadre de l'exploration de nos diverses approches de calibrage du choc, lesquelles se basent chacune sur ces trois ensembles de données pour aboutir à une valeur de choc robuste.

En somme, ces caractéristiques suggèrent que le bitcoin est un actif à haut rendement mais également à haut risque, avec des mouvements de prix importants et une volatilité significative. Les investisseurs doivent être prêts à supporter cette volatilité et à diversifier leur portefeuille en conséquence.

## 2.2 Approches paramétriques du calibrage du choc

### 2.2.1 Sélection des modèles paramétriques

Nous nous sommes aidés de l'analyse de la forme des densités empiriques des distributions de rendements annuels, mensuels et journaliers du bitcoin présentées précédemment pour choisir les lois de distributions adaptées pour la modélisation des rendements bitcoin.

Les graphiques des densités de distributions précédentes (figures 2.3, 2.5 et ??) mettent en évidence une asymétrie dans la densité de distribution, avec une longue traîne à droite dans les queues, que ce soit pour les échantillons de rendements historiques sur 12 ans ou pour les rendements glissants. Cette observation nous conduit à envisager les lois à queue de distribution épaisse pour modéliser les rendements du bitcoin.

En outre, Nous avons calculé les grandeurs statistiques qui mesurent de l'asymétrie et l'aplatissement (skewness et kurtosis), liés aux troisièmes et quatrièmes moments. Une asymétrie non nulle révèle un manque de symétrie de la distribution empirique, tandis que la valeur d'aplatissement quantifie le poids de la queue par rapport à la distribution normale pour laquelle l'aplatissement est égal à 0.

Distributions	mean	sd	skewness	kurtosis
historique 12 ans	4.17	9.89	4.87	31.47
historique glissant	7.14	16.31	3.06	12.88

TABLE 2.4 Quelques statistiques

On constate à travers ce tableau, les deux échantillons affichent des valeurs d'asymétrie, d'aplatissement élevées, ce qui nous conduit à opter pour les familles de lois de Student, GEV (Generalized Extremum Values) et GPD (Generalized Pareto Distribution).

La littérature souligne l'intérêt d'une famille de lois spécifique pour la modélisation des actifs à queue lourde, connue sous le nom de lois hyperboliques généralisées. Ces lois sont également qualifiées de leptokurtiques, c'est-à-dire qu'elles présentent un pic autour de leur moyenne et une longue traîne. Jean-Philippe LEBLANC, dans son ouvrage, LEBLANC 2003, justifie l'importance de ces lois et donne plusieurs exemples d'applications financières.

Parmi les lois de cette famille, deux ont retenu notre attention dans le contexte des applications financières décrites dans LEBLANC 2003 : la loi Hyperbolique et la loi Normale Inverse Gaussienne (NIG). Enfin, pour avoir une base de comparaison des résultats par rapport à la méthodologie décrite dans Solvabilité 2 CEIOPS 2010, nous avons également pris en compte la loi normale.

En somme, la liste des lois retenues sont :

- loi normale
- loi Student
- loi GEV
- loi GPD
- loi hyperbolique généralisée (GHD)

## 2.2.2 Principes de base des modèles paramétriques sélectionnés

### 2.2.2.1 Loi de Student

La fonction de densité de probabilité (PDF) d'une variable aléatoire  $T$  suivant une loi de Student avec  $\nu$  degrés de liberté est donnée par :

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma.

La fonction de répartition (CDF) n'a pas de forme simple et est généralement donnée en termes de la fonction bêta ou de la fonction hypergéométrique.

L'espérance mathématique  $E(T)$  et la variance  $Var(T)$  d'une variable aléatoire  $T$  suivant une loi de Student sont données par :

$$E(T) = 0, \quad \text{pour } \nu > 1$$

$$Var(T) = \frac{\nu}{\nu - 2}, \quad \text{pour } \nu > 2$$

Notez que la variance tend vers l'infini lorsque  $\nu \rightarrow 2$  et que la loi de Student n'a pas d'espérance lorsque  $\nu \leq 1$ . Cela illustre le comportement à queue lourde de la loi de Student pour les petits degrés de liberté.

La particularité de la loi de Student est qu'elle est à queue lourde lorsque le degré de liberté est faible. Cela signifie qu'elle a une probabilité plus élevée d'avoir des valeurs extrêmes par rapport à une distribution normale. C'est pourquoi elle est souvent utilisée lorsqu'on travaille avec des petits échantillons, car elle prend en compte la possibilité d'une plus grande variabilité.

Cependant, à mesure que le degré de liberté augmente, la loi de Student tend vers une loi normale. En d'autres termes, plus l'échantillon est grand, plus la distribution de Student ressemble à une distribution normale. Cela est dû au fait que, avec un grand échantillon, nous avons plus d'informations et donc moins d'incertitude, ce qui se traduit par une distribution plus étroite et moins de valeurs extrêmes.

En résumé, la loi de Student est un outil précieux en statistique qui nous permet de faire des inférences sur une population à partir d'un petit échantillon, tout en tenant compte de l'incertitude inhérente à l'utilisation d'un échantillon limité.

### 2.2.2.2 Loi GEV

La loi d'extremum généralisée est une famille de lois de probabilité continue qui sert à représenter des

phénomènes de valeurs extrêmes (minimum ou maximum). Elle comprend la loi de Gumbel, la loi de Fréchet et la loi de Weibull, respectivement des lois d'extremum de type I, II et III.

La fonction de répartition (distribution cumulée) est

$$F(x; \mu, \sigma, \xi) = \exp \left\{ - \left[ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]_+^{-1/\xi} \right\}$$

avec

$$(1 + \xi(x - \mu)/\sigma)_+ = \max(0, 1 + \xi(x - \mu)/\sigma),$$

où  $\mu \in \mathbb{R}$  est un paramètre de position,  $\sigma > 0$  un paramètre de dispersion et  $\xi \in \mathbb{R}$  un paramètre de forme appelé indice des valeurs extrêmes.

Le paramètre  $\xi$  spécifie le comportement de la distribution dans ses queues. Les valeurs  $\xi = 0$ ,  $\xi > 0$  et  $\xi < 0$  correspondent, respectivement, aux lois de Gumbel, de Fréchet et de Weibull.

Si  $\xi = 0$ , alors la fonction de répartition se définit comme suit :

$$F(x; \mu, \sigma, 0) = \exp \left[ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right].$$

La fonction de densité est

$$f(x; \mu, \sigma, 0) = \frac{1}{\sigma} \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \exp \left[ - \exp \left( - \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]$$

### 2.2.2.3 Loi GPD

La famille des lois GPD, tout comme les distributions GEV, se focalise sur les valeurs extrêmes ou rares des distributions de probabilité. Elle vise à estimer de manière précise des paramètres tels que les quantiles élevés, les périodes de retour, l'indice extrême, et de nombreux autres paramètres ou fonctions associés aux "catastrophes" naturelles.

Comme  $\min(X_1, \dots, X_n) = -\max(-X_1, \dots, -X_n)$ , la famille de loi GPD peut modéliser aussi bien les queues extrêmes gauches que les queues extrêmes droites. En d'autres termes, les résultats pour les petites valeurs peuvent être facilement déduits des résultats analogues pour les grands événements.

La fonction de répartition est définie pour  $\sigma > 0$  par :

$$G_{\xi, \mu\sigma}(x) = \begin{cases} 1 - \left( 1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma} \right)^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-(x - \mu)/\sigma) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

En réalité, trois autres distributions sont sous-jacentes à cette paramétrisation de la GPD.

- Quand  $\xi > 0$ , nous avons une version reparamétrée de la distribution de Pareto classique.
- Quand  $\xi < 0$ , nous avons une distribution de Pareto de type II.
- Quand  $\xi = 0$ , nous avons une distribution exponentielle.

Deux méthodes principales existent pour construire une loi de cette famille :

- La première méthode implique la division de la période de collecte des données en blocs, la valeur la plus extrême de chaque bloc étant retenue pour une analyse ultérieure (par exemple, les maxima quotidiens ou mensuels). Le choix de la construction des blocs nécessite une expertise et peut avoir une influence significative sur les résultats de la modélisation.
- La deuxième méthode repose sur les dépassements d'un seuil spécifié. En effet, à partir de ce seuil, la théorie des valeurs extrêmes (TVE) garantit l'existence d'une loi GPD qui modélise le comportement

des dépassements.

Dans ce mémoire, notre attention se porte sur la méthode de dépassement d'un seuil. L'objectif principal est alors l'estimation efficace de ce seuil. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur les travaux de CAEIRO et GOMES 2016 ; DEY et YAN 2016 ; RESNICK et STARICA 1997.

Le choix du seuil approprié est un exercice délicat. Plus le seuil est élevé, plus la vitesse de convergence de la loi des excès (loi de  $[X - u | X > u]$  avec  $u$  le seuil) vers la GPD est rapide, mais la précision est affectée car nous avons moins d'observations. C'est pourquoi nous n'avons pas pu ajuster une GPD à notre échantillon de 12 ans, car l'ajustement nécessite beaucoup de données pour ne retenir que les excès. Et lorsque le seuil est plus bas, nous avons plus d'observations, mais la convergence vers la GPD est plus complexe. En pratique, il s'agit de trouver un équilibre entre vitesse de convergence et précision, c'est-à-dire trouver le seuil optimal en minimisant la volatilité et le biais sur ces estimateurs.

Nous présenterons quelques principes fondamentaux sur les méthodes d'estimation de seuils dans la section 2.2.4.6, page 57. Nous renvoyons également le lecteur vers les travaux suivants RESNICK et STARICA 1997 ; KIM s. d. pour une exploration plus approfondie de ces thématiques.

#### 2.2.2.4 Loi GHD

L'emploi des lois hyperboliques généralisées n'est pas courant dans les secteurs de l'actuariat et de la finance. C'est pourquoi nous allons présenter un contexte plus large.

Les lois hyperboliques généralisées appartiennent à la catégorie des lois leptokurtiques, c'est-à-dire qu'elles présentent un pic autour de leur moyenne et une queue longue. Cette loi a été initialement définie par Barndorff-Nielsen (BARNDORFF-NIELSEN 1978) dans le cadre du projet de recherche "The Sand Project", qui visait à étudier le transport des grains de sable par le vent le long des plages. Aujourd'hui, cette loi est utilisée dans plusieurs domaines, notamment en physique quantique et récemment en finance. Barndorff-Nielsen a élaboré cette loi en utilisant une approche de "mélange moyenne-variance", qui stipule que si  $X$  provient d'un mélange moyenne-variance, alors sa loi de distribution peut être décrite par

$$x = \mu + \beta\sigma^2 + \sigma\epsilon$$

où  $\epsilon$  et  $\sigma$  sont des variables aléatoires indépendantes. Ici, nous avons un mélange moyenne-variance entre une loi normale et une loi gaussienne inverse généralisée (GIG).

La mesure de densité qui définit l'hyperbolique généralisée est donnée par :

$$GH(x, \lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) \cdot (\delta^2 + (x - \mu)^2)^{\frac{(\lambda - \frac{1}{2})}{2}} \cdot K_{(\lambda - \frac{1}{2})} \left( \alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} \right) \cdot e^{(\beta(x - \mu))}$$

où  $a(\lambda, \alpha, \beta, \delta)$  est définie comme suit :

$$a(\lambda, \alpha, \beta, \delta) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2}}{\sqrt{2\pi} \left( \alpha^{\lambda - \frac{1}{2}} \right) \delta^\lambda K_\lambda \left( \delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right)}$$

$a(\lambda, \alpha, \beta, \delta)$  est le terme "normalisant" car la variable aléatoire  $x$  n'apparaît pas dans ce terme contrairement au reste de la fonction de densité.

La fonction de densité est définie par cinq paramètres, soit  $\lambda, \alpha, \beta, \delta$  et  $\mu$ . Le paramètre  $\lambda$  détermine

l'ordre de la fonction de Bessel et est utilisé pour obtenir des sous-classes de distributions comme la distribution hyperbolique (HYP) ou encore la distribution normale inverse gaussienne (NIG). Nous évaluerons la qualité d'ajustement de ces deux sous-classes de lois sur la distribution de rendements annuels glissants.

Pour une description complète de cette loi, de ses sous-classes et lois limites, nous renvoyons le lecteur vers le mémoire de [LEBLANC 2003](#).

### 2.2.3 Calibrage du chocs sur les 12 années d'historique

Dans cette section, nous ajustons les modèles statistiques précédemment sélectionnés aux rendements provenant de 12 années d'historique. Nous utiliserons le critère AIC pour sélectionner le modèle, pour des raisons mentionnées dans la partie 2.1.4. Cependant, la taille de notre échantillon ne nous permet pas d'ajuster une des lois de la famille GPD. Ci-dessous un tableau présentant les grandeurs statistiques du jeu de données.

Min.	1er Qu.	Mediane	Moyenne	3ème Qu.	Max.
-0.73	0.00	0.94	7.18	3.03	58.70

TABLE 2.5 Statistiques des 12 ans de rendements historiques

Dans le contexte des rendements, nous constatons une moyenne exceptionnellement élevée de 7,18. Cependant, la dispersion est également notable, même si la moitié de l'échantillon de rendements se situe en dessous de 100%. Cette situation est atypique par rapport aux grandeurs habituellement observées sur le marché des actions.

Nous avons calculé le quantile empirique à 0.5% en utilisant la densité empirique basée sur l'historique des 12 ans. Ce quantile représentant la valeur du choc est de **72.68%**. Cette valeur nous donne une idée de l'ampleur du choc qui sera calibré par les modèles paramétriques.

#### 2.2.3.1 Calibrage choc - loi normale

Dans cette section, nous suivons la méthodologie de l'EIOPA pour calibrer le choc du bitcoin. Nous ajustons une loi normale à la distribution des rendements annuels. Les paramètres estimés par maximum de vraisemblance sont répertoriés dans le tableau ci-dessous.

Nous fournirons également, lorsque le calcul du hessien<sup>17</sup> est possible, les erreurs associées à l'estimation des paramètres. Ces erreurs, appelées « Standard deviation (std) » en anglais, sont calculées à partir du hessien au point de solution trouvé par notre fonction d'optimisation.

	AIC	$\mu$	$\sigma$
Estimé	112.45	15.67	7.18
Std		(4.34)	(3.07)

TABLE 2.6 Calibration des paramètres de la loi normale.

Les paramètres estimés sont très élevés, d'autant plus que les erreurs sur les paramètres estimés sont très grandes. De plus les diagrammes (figure 2.8) montrent un mauvais ajustement de la loi sur la distribution. On observe une densité aplatie, s'ajustant mal ainsi au pic de la moyenne. Les quantiles

17. Le hessien d'une fonction à valeurs réelles est la matrice carrée des dérivées partielles secondes de cette fonction.

ne sont pas alignés sur la droite des quantiles gaussiens, traduisant ainsi une mauvaise modélisation des queues.

De plus, les tests de Shapiro-Wilk et de Anderson-Darling viennent confirmer ce résultat en rejetant l'hypothèse de normalité. Ces résultats ne sont pas surprenants vu la forme de la densité empirique de notre distribution de rendements du bitcoin. **Le quantile à 0.5% avec la loi calibrée est de 3323,1%**

Il est important de préciser ici que cette valeur de quantile ne peut représenter une valeur de choc au sens de Solvabilité 2. En effet, le choc S2 est compris entre 0% et 100%. Le choc appliqué aux valeurs marché des actifs est défini par

$$VM * (1 - choc_{calibr})$$

avec VM la valeur marché de l'actif. Ainsi, pour un choc supérieur à 100%, on se retrouverait avec une VM choquée négative, ce qui ne serait donc pas cohérent.

En effet, on définit désormais le choc selon la formule suivante :

$$Choc_{S2} = \min(|quantile_{0,5\%}|, 1) \times 100\%$$

En tenant compte de ces éléments, si nous devons nous baser uniquement sur la loi normale pour calibrer le choc, comme le prévoit la réglementation S2, le choc retenu serait de 100%. Toutefois, l'inadéquation de l'ajustement de la loi normale et la faible taille de notre échantillon pourraient expliquer en grande partie pourquoi nous obtenons un quantile très élevé et un choc significatif de 100%, comparativement au choc empirique de 72.68%. Par la suite, nous avons comparé ce résultat avec ceux obtenus à partir des autres modèles.

Le graphique 2.8 est issu de l'ajustement de la loi normale sur notre échantillon de données.

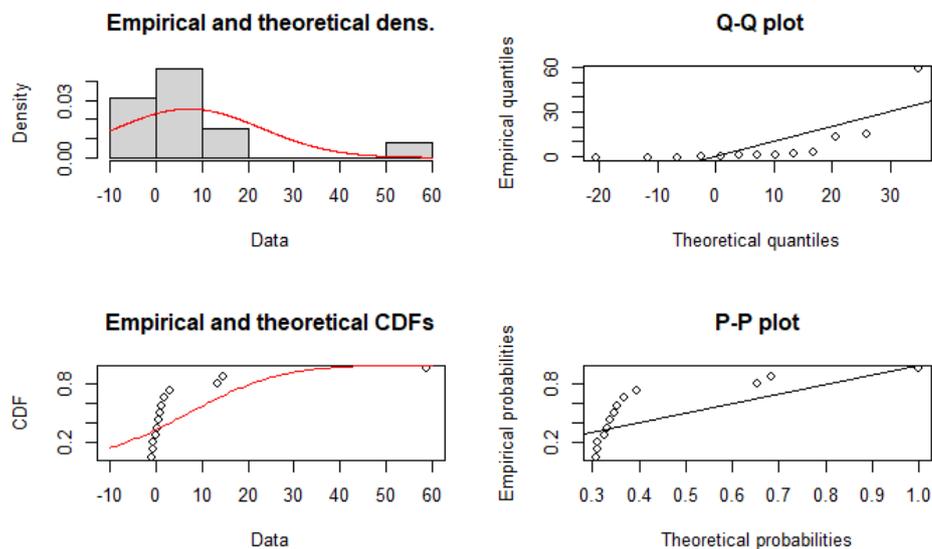


FIGURE 2.8 Diagrammes pour l'ajustement de la loi normale sur la distribution

### 2.2.3.2 Calibrage du choc - Loi de Student

Nous avons ajusté cette loi sur notre échantillon de rendements d'historique 12 ans et les résultats du calibrage du modèle sont donnés dans la table suivante :

AIC	$\sigma$	df
84.71	0.45	0.95
std	(0.43)	(0.45)

TABLE 2.7 Calibration des paramètres de la loi de Student.

Le degré de liberté (df) étant inférieur à 1, cela confirme que la distribution des rendements annuels glissants sur le bitcoin est bien à queue lourde. A juger par l'AIC, cette loi de Student calibrée s'ajuste mieux aux rendements que la loi normale calibrée précédemment. Les erreurs sur les paramètres estimés sont également faibles par rapport à la loi normale.

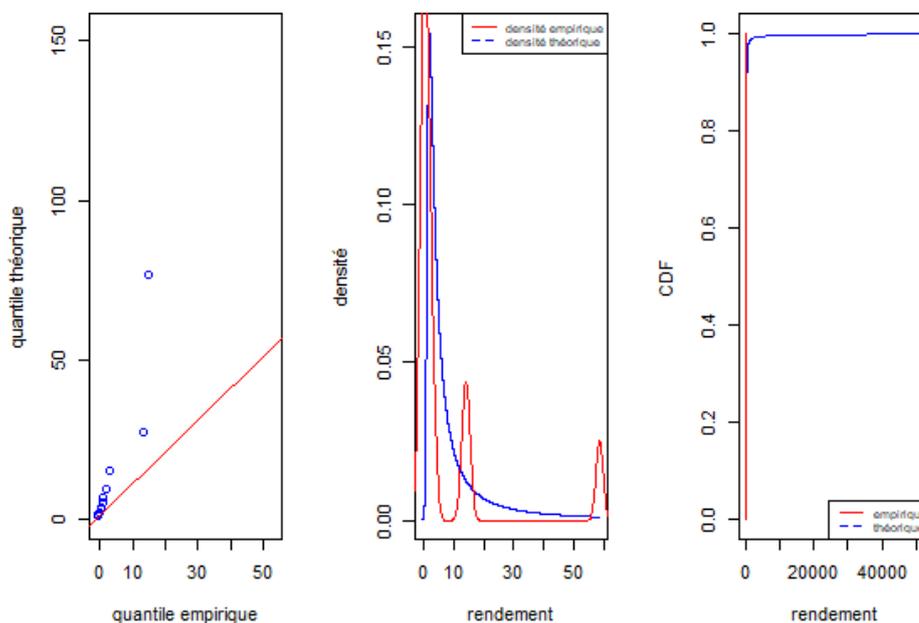


FIGURE 2.9 Ajustement des rendements annuels par une loi de Student

Les courbes en bleu représente les graphiques théoriques. Même si la qualité d'ajustement est meilleure que celle de la loi normale, on est toujours loin d'un bon ajustement sur la distribution de notre échantillon. **Le quantile à 0.5% avec la loi de Student calibrée est 505.1% > 100%**. Cette valeur de quantile est plus petite que celle trouvée avec la loi normale.

Encore une fois, en nous appuyant exclusivement sur le modèle de Student, **le choc sélectionné est de 100%**, ce qui est supérieur au choc empirique.

Cependant, il est possible de postuler dès maintenant que le quantile à 0.5% diminue à mesure que la qualité de l'ajustement s'améliore et tend progressivement vers le choc déterminé par la densité empirique.

### 2.2.3.3 Calibrage du choc - Loi GEV

En utilisant de nouveau la fonction `fit.gev` de la bibliothèque "ismev" de R, nous ajustons la famille de lois GEV à notre distribution de rendements, et les résultats du calibrage du modèle sont présentés dans le tableau ci-dessous :

AIC	$\mu$	$\sigma$	$\xi$
74.24	-0.08	1.22	1.64
sd	(0.44)	(0.75)	(0.68)

TABLE 2.8 Calibration des paramètres de la loi GEV.

Ici, le paramètre de forme  $\xi$  est positive, ce qui signifie qu'on est en présence d'une **loi de Fréchet**

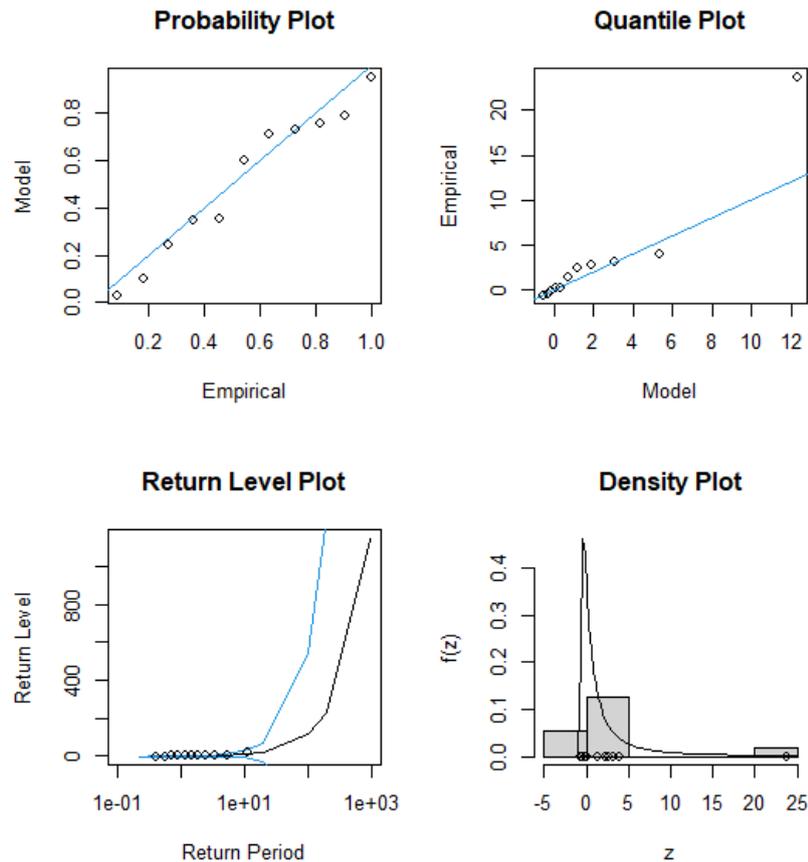


FIGURE 2.10 Diagrammes ajustement loi

Nous constatons une amélioration significative de l'AIC par rapport aux deux modèles précédents, avec une diminution continue des erreurs d'estimation des paramètres. La qualité de l'ajustement peut être appréciée à travers les graphiques de la figure 2.10. La densité estimée semble bien capturer le pic de la moyenne ainsi que la queue de distribution. Les quantiles théoriques et empiriques semblent pour la plupart alignés. La qualité d'ajustement de la loi GEV est nettement supérieure à celle de toutes les lois précédentes.

**Le quantile à 0.5% calibré avec ce modèle donne un choc de 76.95%**, une valeur qui se rapproche finalement du quantile empirique.

#### 2.2.3.4 Calibrage du choc - lois hyperboliques généralisées

La bibliothèque 'GeneralizedHyperbolic' de R a été utilisée pour ajuster les deux sous-familles de lois hyperboliques généralisées sur notre historique de 12 ans. Une présentation de la bibliothèque et de ses commandes est disponible en suivant le lien fourni [site](#).

### A) Calibrage du choc - loi hyperbolique

La loi hyperbolique est une sous classe de l'hyperbolique généralisée. La distribution est obtenue en posant le paramètre  $\lambda = 1$ . Son nom vient du fait que sa fonction log-densité a la forme d'une hyperbole et non d'une parabole au contraire de la loi normale.

Nous ajustons la sous classe de l'hyperbolique généralisée sur la distribution de rendements grâce à la commande "hyperbFit" de la librairie 'GeneralizedHyperbolic'. Les résultats du calibrage des 4 paramètres du modèle sont donnés par :

AIC	$\mu$	$\delta$	$\alpha$	$\beta$
87.64	-0.73	$1.08e^{-12}$	$6.47e^2$	$6.46^{-12}$

TABLE 2.9 Calibration des paramètres de la loi hyperbolique.

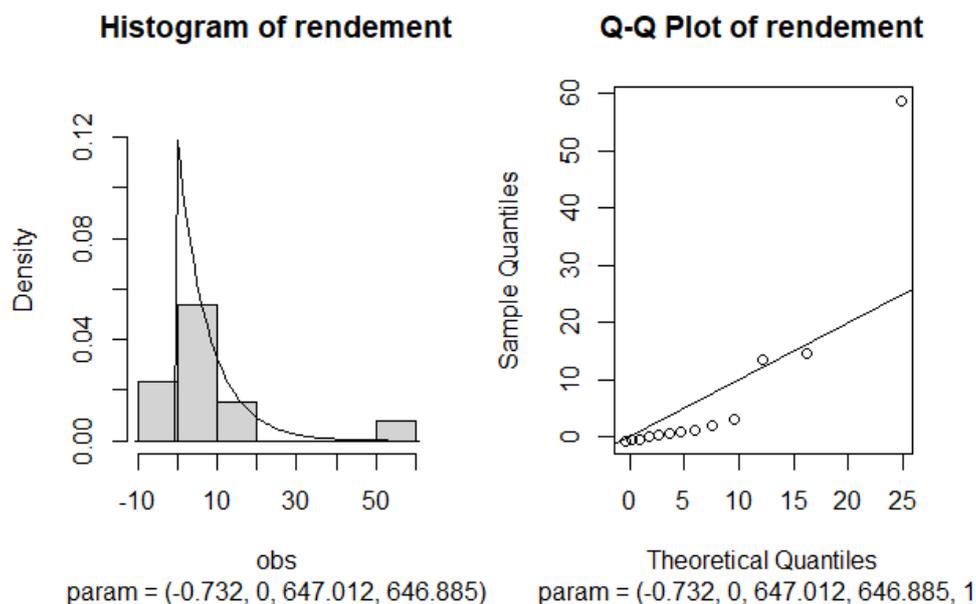


FIGURE 2.11 Ajustement des rendements annuels par une loi hyperbolique

Il est observé que la qualité d'ajustement est moins bonne que celle des modèles de Fréchet et de Student, selon le critère de l'AIC. En d'autres termes, la complexité accrue du modèle n'apporte pas une amélioration suffisante de l'ajustement aux données pour justifier son utilisation par rapport à des modèles plus simples.

Par l'analyse des graphiques de la densité et du Q-Q Plot, la loi semble sous-estimer la queue à gauche, contrairement à la loi de Fréchet. **Le quantile de 0.5 % calculé donne un choc de 69.72%**, ce qui est inférieur au quantile empirique.

### B) Calibrage du choc - loi Normal Inverse Gaussienne (NIG)

La loi Normale Inverse Gaussienne (NIG) est une sous famille des lois hyperboliques généralisées. Elle est obtenue en posant le paramètre  $\lambda = 1/2$ . Elle peut aussi être obtenue par une approche moyenne-variance semblable à celle utilisée pour l'hyperbolique généralisée, mais en remplaçant la Gaussienne Inverse Généralisée (GIG) par une distribution Inverse Gaussienne. Le principal intérêt

de la NIG, en plus d'être une loi leptokurtique, est d'être fermé sous convolution<sup>18</sup>. Ses moments peuvent être écrits sans la fonction de Bessel, cette particularité permet de facilement calculer un estimateur basé sur les moments.

Nous avons calibré ce modèle sur notre ensemble de données en utilisant la fonction `nigFit` de la bibliothèque 'GeneralizedHyperbolic'. Ci-dessous, les paramètres optimaux que nous avons obtenus.

AIC	$\mu$	$\delta$	$\alpha$	$\beta$
76.63	-0.89	0.27	11.84	11.83

TABLE 2.10 paramètres optimaux de la loi NIG.

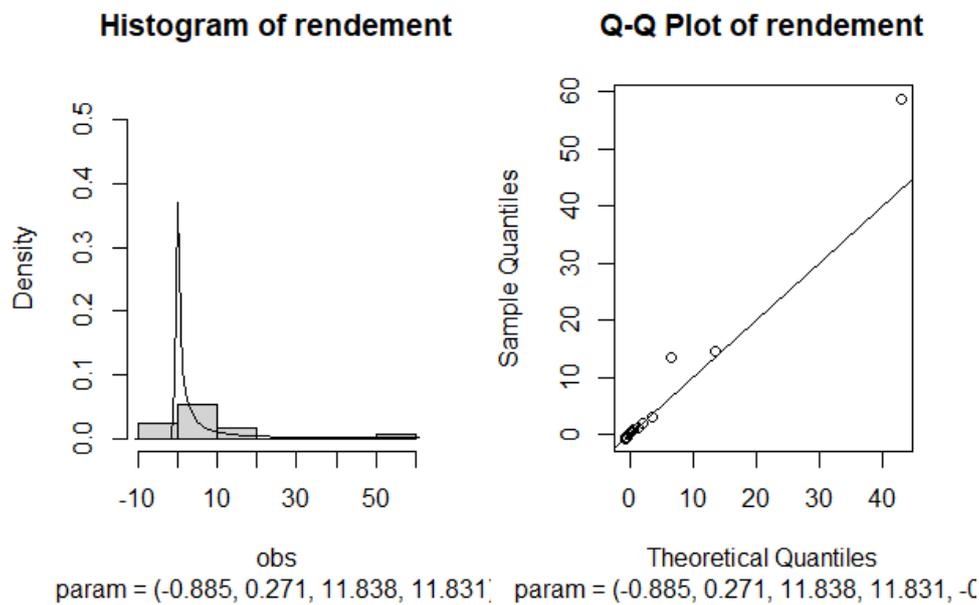


FIGURE 2.12 Ajustement des rendements annuels par une loi NIG

Avec le critère de l'AIC, le modèle NIG vient en deuxième position en terme de qualité d'ajustement après le modèle de Fréchet. Le modèle est meilleur que le modèle hyperbolique.

Dans la figure ??, il apparaît que la densité calibrée surestime le pic moyen. Cependant, la queue gauche de la distribution semble être correctement modélisée, comme le suggère le graphique QQ-plot. Ceci est particulièrement pertinent pour notre objectif de calcul du quantile à 0.5%, axé donc sur la queue gauche de notre distribution. **Le choc calibré selon le modèle est de 86.72%.**

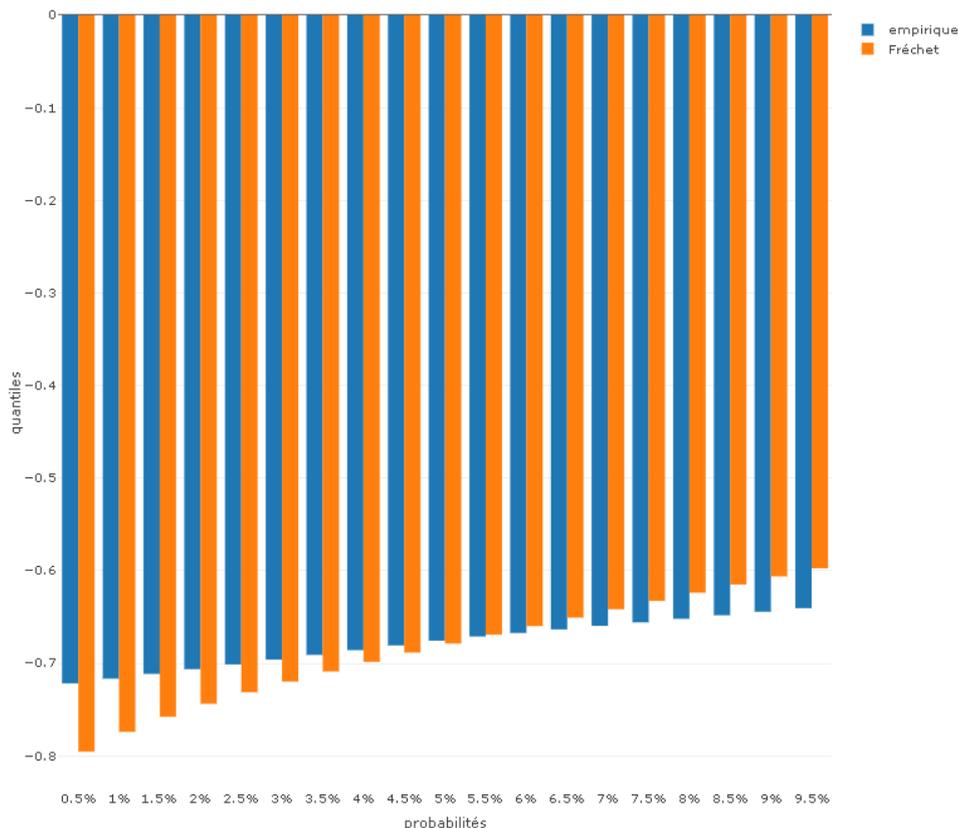
### 2.2.3.5 Récapitulatif - choix du meilleur modèle

Modèles	Empirique	Normal	Student	Fréchet	Hyperbolique	NIG
$AIC_{hist11ans}$	NA	112.45	84.70	74.24	87.64	76.64
$Choc_{hist12ans}$	72.68%	100%	100%	76.95%	69.72%	86.72%

TABLE 2.11 Synthèse des résultats

18. Une distribution est fermée sous convolution lorsqu'une somme de  $n$  variables suivant sa loi est directement calculable par une formule.

Les modèles qui s'ajustent mal produisent des valeurs de chocs totale (en rouge) et ont un écart important avec le choc empirique. On peut déjà éliminer ces modèles. Le modèle hyperbolique, dont l'AIC est plus élevé (performance moindre) que celui du modèle de Student, produit un choc inférieur au choc empirique. Ce dernier sous estime donc le choc. Par le principe de prudence, nous éliminons également ce modèle. Des deux modèles restants, le modèle de Fréchet est celui qui s'ajustent le mieux à notre distribution et qui produit le choc le plus proche du choc empirique. Le zoom sur les quantiles extrêmes gauches entre la distribution empirique et la loi de Fréchet ajustée est affiché ci-dessous.



**FIGURE 2.13** Zoom sur le comportement des quantiles empiriques et paramétriques des queues à gauche

Il est constaté que les quantiles empiriques et ceux prédits par la loi de Fréchet sont assez similaires pour l'intervalle de quantiles sélectionné. Par conséquent, sur cet échantillon de rendements historiques annuels, le modèle de Fréchet est le modèle paramétrique retenu pour le calibrage du choc S2 du bitcoin, et la valeur du choc retenue dans le cadre de notre étude est de 77%.

Cependant, comme nous l'avons remarqué plus haut, notre échantillon n'est pas assez représentatif pour juger réellement de la pertinence des résultats obtenus précédemment. La partie suivante analysera la robustesse de ces résultats sur un échantillon plus étendu.

#### 2.2.4 Calibrage du choc sur la base de données de rendements annuels glissants

Comme mentionné dans la section 2.1.2.2, page 33, la disponibilité limitée d'observations annuelles sur le cours du bitcoin compromet la robustesse des estimations des modèles statistiques, et par extension, la

fiabilité du calibrage du choc bitcoin. Les rendements annuels glissants offrent une solution pour pallier cette lacune de données. Les avantages et les limites de cette approche ont été discutés dans la section mentionnée précédemment. Nous l'appliquons à nos observations journalières du prix bitcoin.

### 2.2.4.1 Augmentation de la base de rendements annuels - rendements annuels glissant

Comme expliqué dans la partie 2.1.2.2, la méthode de rendements annuels glissants est une pratique courante pour ajouter de la profondeur à l'historique de données.

Nous l'appliquons à nos observations journalières du prix bitcoin. Ci-dessous la table statistique résumant les caractéristiques de l'échantillon de rendements annuels glissants calculés.

Taille échantillon	Min.	1er Qu.	Médiane	Moyenne	3ème Qu.	Max.
4018	-0.83	-0.05	1.28	4.17	3.89	96.3

TABLE 2.12 Résumé statistique de l'échantillon de rendements annuels glissants

La grande amplitude des variations observées dans les rendements annuels glissants du bitcoin est illustrée par le fait que la perte maximale sur 12 mois s'élève à 83.21%, tandis que le gain maximal atteint 9633%. Cette volatilité élevée souligne le caractère risqué des investissements dans le bitcoin, même s'ils peuvent potentiellement générer des rendements élevés.

Les quartiles, qui offrent une vue sur la dispersion des rendements, montrent que le premier quartile se situe à -0.05302% et le troisième quartile à 3.88667%. Bien qu'une proportion importante des rendements soit regroupée dans une plage relativement étroite, il existe un phénomène de queue significative dans les rendements du bitcoin.

La moyenne, établie à 417%, dépasse largement ce que l'on observe généralement sur d'autres actifs traditionnels. Cependant, cette moyenne est impactée par quelques observations de rendements exceptionnellement élevés. Cette influence est perceptible grâce à la médiane, qui se situe autour de 127%. Ces données statistiques témoignent de la singularité du bitcoin.

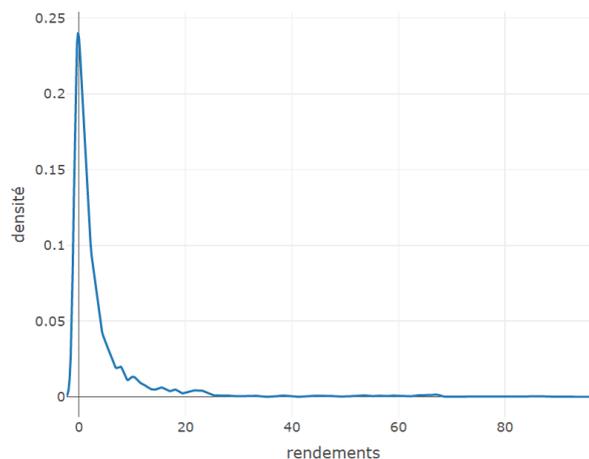


FIGURE 2.14 Densité empirique rendements annuels glissants

Le choc empirique, calculé à partir de cette distribution, est de **77.02%**. Cette valeur est similaire au choc déterminé par la méthode empirique et le modèle de Fréchet. Cela renforce notre confiance dans l'approche de calibrage des chocs basée sur l'historique de 12 ans et nous donne de meilleures perspectives pour l'ajustement des modèles sélectionnés sur la base des rendements glissants.

Les sections à venir sont essentiellement des répétitions des analyses effectuées sur l'échantillon de rendements historiques de 12 ans. Cependant, cette fois, la taille de l'échantillon de données est suffisante pour ajuster une distribution de type GPD. Étant donné que les modèles ont déjà été présentés dans la section précédente, nous allons nous focaliser directement sur les résultats dans ces sections.

#### 2.2.4.2 Calibrage du choc - loi normale

Comme indiqué dans la partie 2.2.3.1, nous suivons la méthodologie de l'EIOPA pour le calibrage du choc bitcoin. Nous procédons en ajustant une distribution normale à la série des rendements annuels glissants. Les paramètres estimés par maximum de log-vraisemblance sont les suivants :

AIC	$\mu$	$\sigma$
29819.38	4.17	9.89
Std	0.16	0.11

TABLE 2.13 Calibration des paramètres de la loi normale

L'évaluation des résultats de ce calibrage est analogue à celle réalisée sur l'historique des rendements annuels sur 12 ans. Les paramètres de moyenne et de variance se révèlent extrêmement élevés. Toutefois, on observe une diminution des erreurs liés aux paramètres estimés, contrairement aux erreurs sur l'historique de 12 ans. Cela pourrait s'expliquer en partie par le fait qu'on dispose de plus de données.

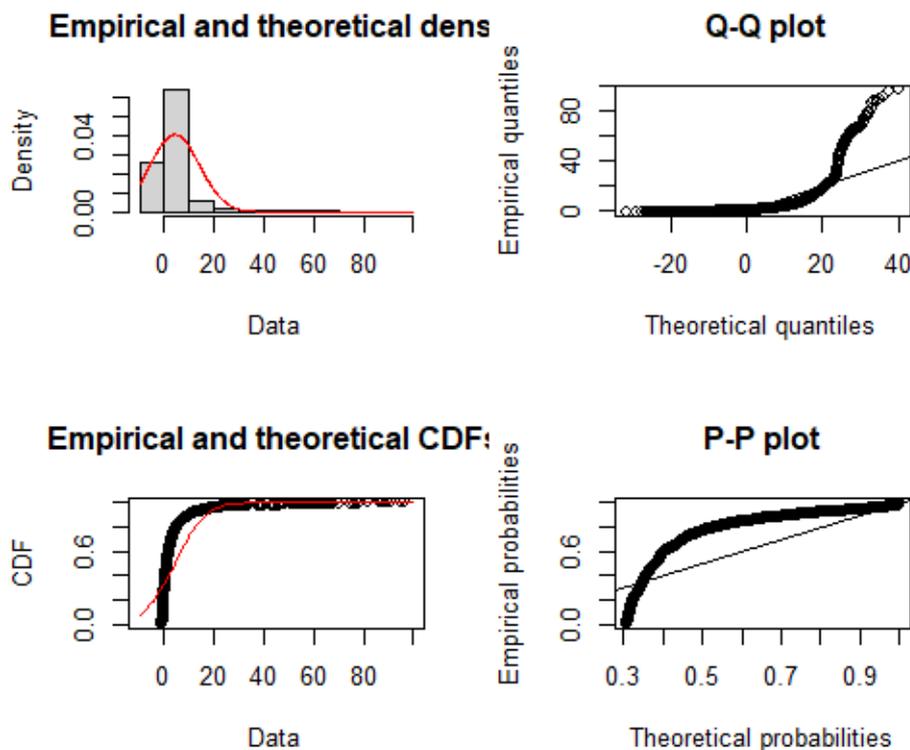


FIGURE 2.15 Paramètres optimaux obtenus

Encore une fois, en comparant avec les résultats de calibrage de la section précédente, référencée 2.2.3, page 45, le graphique Q-Q montre que les rendements ne correspondent pas à une distribution normale. La densité théorique paraît plus plate que les histogrammes de la densité empirique, une observation qui

est aussi justifiée par l'écart-type significatif (9.9). En outre, les tests de Shapiro-Wilk et d'Anderson-Darling confirment cette observation en rejetant l'hypothèse de normalité de la distribution. De façon notable, le quantile à 0,5% calculé selon la loi normale calibrée atteint 2129,1%. Ce résultat est cohérent avec les résultats de calibrage du choc sur l'historique de 12 ans utilisant la loi normale. Par conséquent, une valeur de choc de 100% est adoptée dans cette méthode.

### 2.2.4.3 Calibrage du choc - loi de Student

Les paramètres optimaux obtenus de l'ajustement de la loi de Student sont donnés par :

AIC	$\sigma$	df
22410	1.37	1.05

TABLE 2.14 Paramètres optimaux de la loi de Student

Le degré de liberté est sensiblement égal à 1, cela est en adéquation avec les résultats obtenus dans la section 2.2.3. L'AIC du modèle est inférieur à celui du modèle de la loi normale, donc de nouveau le modèle s'ajuste mieux aux rendements glissants que la loi normale.

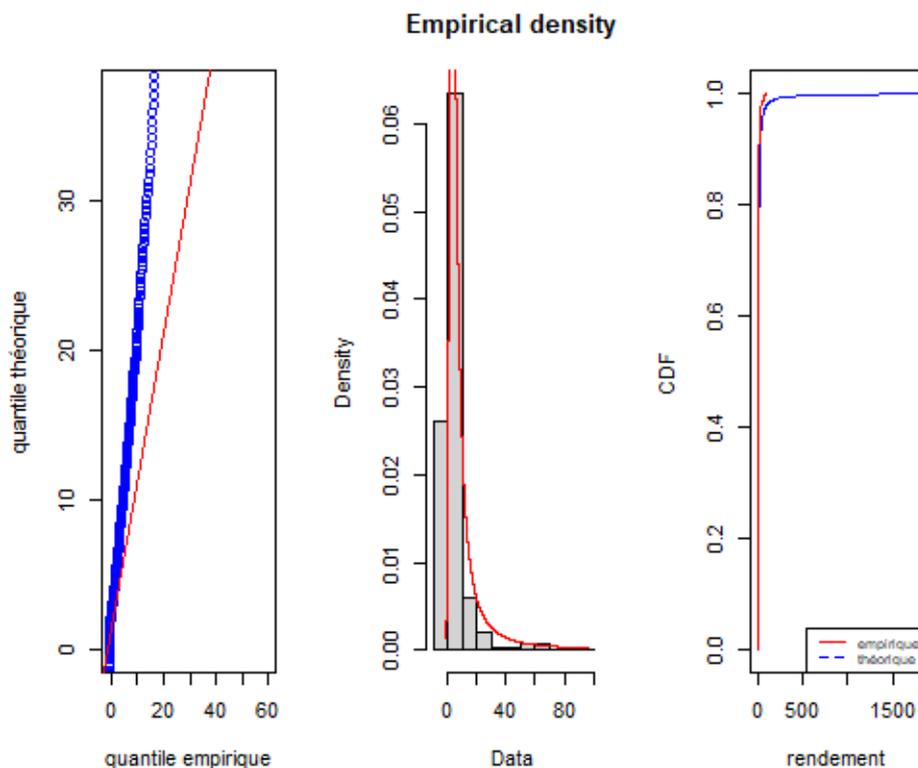


FIGURE 2.16 Ajustement d'une loi de Student aux rendements annuels glissants

Selon le graphique Q-Q (figure 2.16), la queue extrême gauche paraît correctement ajustée par le modèle. Un meilleur ajustement entre la densité théorique et la densité empirique est également visible. L'AIC est aussi meilleur à celui de la loi normale. La loi de Student semble bien s'adapter aux rendements annuels glissants, à l'inverse des rendements annuels.

**Le quantile à 0.5% avec la loi calibrée indique un choc de 85,33%.** Ce résultat est différent de celui obtenu avec le modèle de Student basé sur l'historique des rendements annuels, où le choc était de

100%.

D'après les figures, les valeurs d'asymétrie et d'aplatissement estimées, l'ajustement par d'une loi asymétriques à droite et à queue épaisse semblerait plus adaptée à cette distribution de rendements annuels glissants.

#### 2.2.4.4 Calibrage du choc - loi GEV

Les résultats des paramètres optimaux obtenus par l'ajustement du modèle GEV aux rendements glissants sont récapitulés dans le tableau suivant.

AIC	$\mu$	$\sigma$	$\xi$
19617.44	0.33	1.41	0.96

TABLE 2.15 Calibration des paramètres de la loi GEV

Le paramètre de forme  $\xi$  étant positif, on est en présence d'une **loi de Fréchet** comme dans le cas avec l'historique de 12 ans.

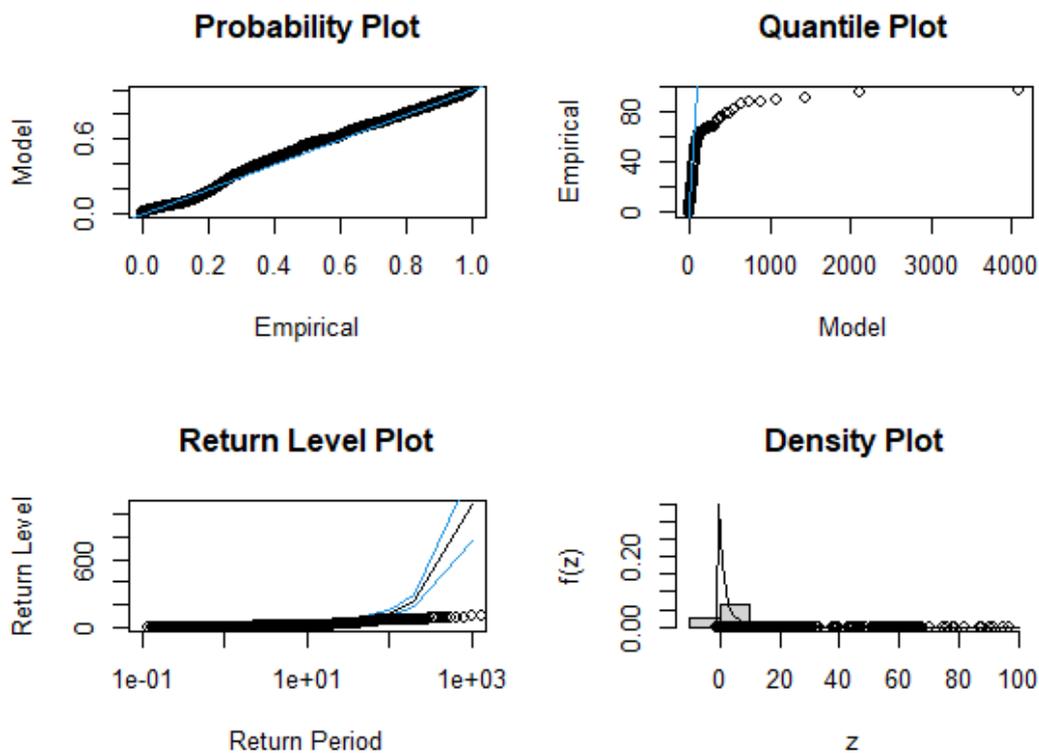


FIGURE 2.17 Densité estimée

On observe, par le graphique QQ-Plot, que la partie gauche de la densité empirique est bien modélisée par le modèle. L'AIC est inférieur à celui des lois normale et Student calibrées précédemment. On retrouve de nouveau les mêmes conclusions avec le modèle calibré sur l'historique des 12 années. **Le quantile à 0.5 % calculé avec ce modèle donne un choc de 84,04%**. Une valeur qui se rapproche de celle obtenue avec le modèle de Student.

### 2.2.4.5 Calibrage du choc - lois hyperboliques généralisées (GHD)

#### A) Loi hyperbolique

Nous avons ajusté la sous classe loi hyperbolique des GHD avec notre échantillon de rendements glissants. Les résultats du calibrage du modèle sont donnés par :

AIC	$\mu$	$\delta$	$\alpha$	$\beta$
20972	-0.8135	0.0054	96.84	96.64

TABLE 2.16 Calibration des paramètres de la loi Hyperbolique

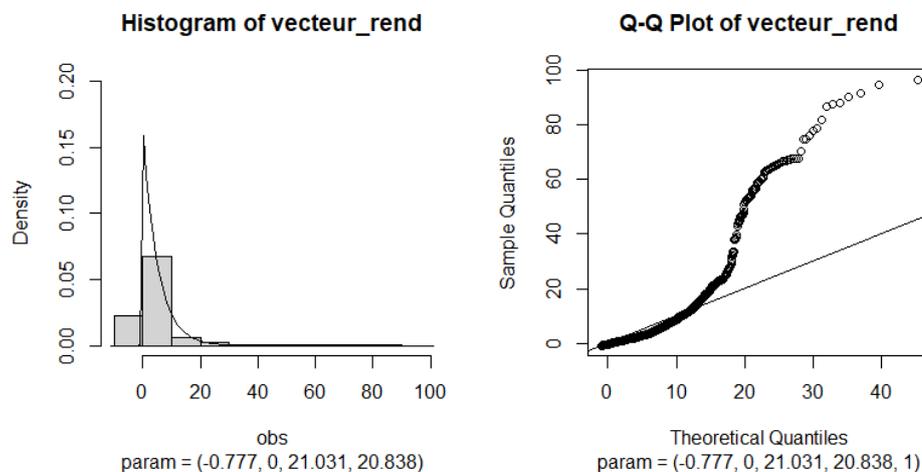


FIGURE 2.18 Ajustement des rendements annuels glissants par une loi hyperbolique

Le modèle s'ajuste moins bien que le modèle de Fréchet d'après le critère AIC. Cependant, sa qualité d'ajustement reste meilleure par rapport aux lois normale et de Student. D'après le diagramme Q-Q Plot, la queue gauche de notre échantillon gauche semble être bien estimée comparé à la queue droite. C'était le cas également avec la loi de Fréchet. **Le quantile de 0.5% calculé donne un choc de 79.62%.**

#### B) Calibrage du choc - loi Normal Inverse Gaussienne (NIG)

Nous avons ajusté la loi NIG avec la distribution de rendements annuels glissants. Les résultats du calibrage du modèle sont donnés dans le tableau suivant :

AIC	$\mu$	$\delta$	$\alpha$	$\beta$
19615	-0.85	0.46	7.26	7.23

TABLE 2.17 Calibration des paramètres de la loi NIG

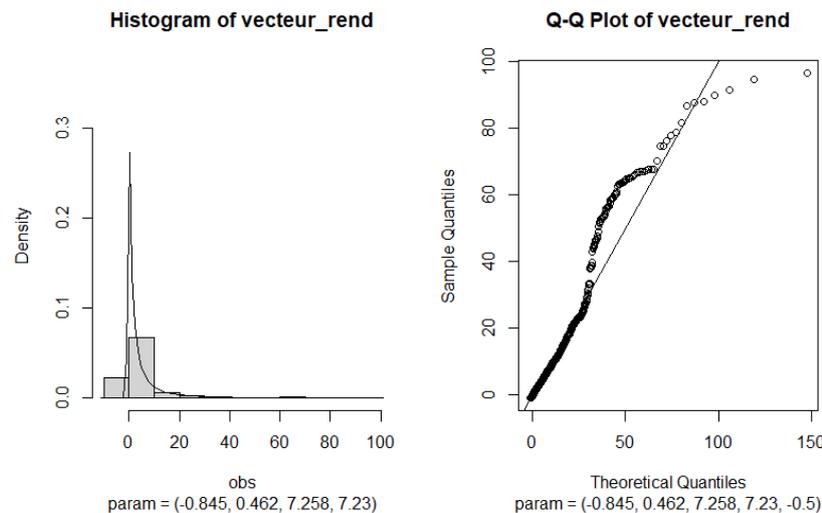


FIGURE 2.19 Ajustement des rendements annuels glissants par une loi NIG

Le modèle semble mieux s'ajuster à la distribution que le modèle hyperbolique selon le critère de l'AIC. D'après le graphique Q-Q Plot, le modèle ajusté modélise bien les petites valeurs (queue extrême gauche) et semble être meilleur dans la modélisation des grandes valeurs que les modèles précédents. **Le quantile de 0.5% calculé donne un choc de 93.16%.**

#### 2.2.4.6 Calibrage du choc - loi GPD

Pour calibrer un choc S2, notre attention se concentre principalement sur les petites valeurs de notre échantillon de rendements, c'est-à-dire la queue extrême gauche. L'objectif principal de l'exploration des GPD dans ce mémoire est de réaliser un ajustement de la loi centré sur ces petites valeurs, plutôt que de considérer toute la distribution. Ainsi, comme mentionné précédemment dans la partie 2.2.4.6, page 57, pour adapter la GPD à notre objectif, nous avons reformulé le problème en étudiant les valeurs minimales (queue gauche) grâce à la transformation affine suivante :

$$y = -x + b,$$

où  $x$  représente notre distribution d'échantillon et  $b$  la valeur maximale de cet échantillon.

L'ajout de la valeur maximale vise à obtenir une distribution à support positif. Cette transformation remplace le quantile à 0.5% par le quantile à 99.5%. La preuve mathématique de ce changement se démontre facilement car la transformation que nous appliquons à nos rendements est affine.

Une fois le quantile à 99.5% obtenu, nous avons utilisé la transformation affine inverse pour revenir au quantile 0.5%, représentant ainsi notre choc.

La transformation affine appliquée à notre échantillon de rendements glissants permet d'avoir une densité à la forme suivante :

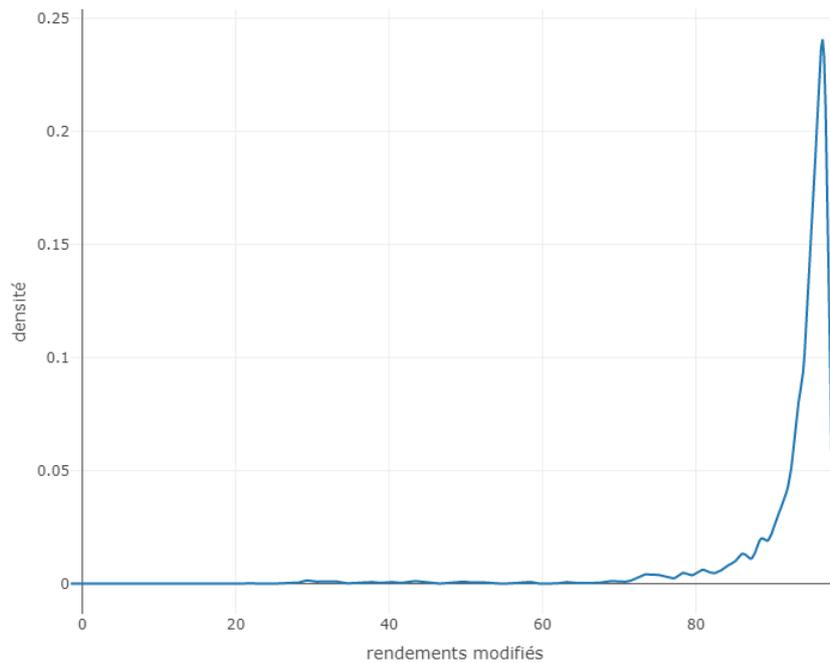


FIGURE 2.20 Densité estimée de l'échantillon modifié

#### A) Estimation de seuil de la GPD :

La littérature offre différentes approches pour déterminer un seuil pertinent pour le calibrage d'une Loi GPD, parmi lesquelles sont citées THOMPSON et al. 2009 ; FATEH, DJABRANE et SONIA 2019 ; CAEIRO et GOMES 2016. Ce mémoire explore plusieurs méthodes, notamment la **MEF (Mean Excess Function)**, le diagramme **Hill Plot** et ses alternatives, ainsi que la procédure de JON DANIELSSON 2016.

Une description détaillée suivie d'applications pratiques de chaque méthode est ensuite présentée.

- Mean Excess Function (MEF)

Le graphique de la MEF est un outil qui nous permet de visualiser l'allure de la queue de distribution. La MEF est définie par :

$$e(u) = E(X - u | X > u); \text{ où le seuil } u \geq 0$$

- Lorsque le graphe de  $e(u)$  est une constante, on a une distribution de type exponentielle.
- Lorsque le graphe de  $e(u)$  est entre une droite croissante et une constante, on a une distribution à queue épaisse. Ce qui signifie qu'on est en présence d'une loi de Pareto simple.
- Lorsque le graphe de  $e(u)$  présente une pente négative, on a une distribution à queue légère, ou encore une loi de Pareto de type II.

La MEF appliquée à notre échantillon produit le graphique suivant :

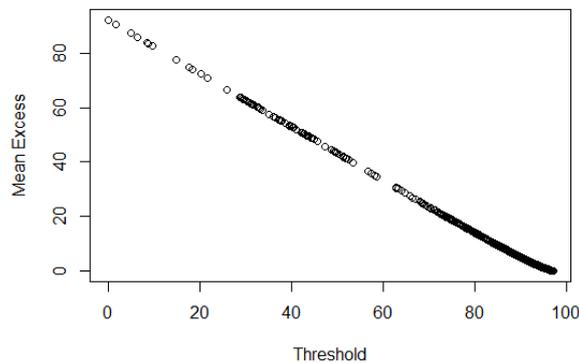


FIGURE 2.21 Mean Excess Function Plot

Étant donné que le graphe de  $e(u)$  est décroissant, cela suggère une distribution à queue légère, caractéristique de la distribution de Pareto de type II. Cette observation concorde avec notre densité de distribution transformée, où la queue à droite est légère en raison de la transformation affine.

Cependant, il est difficile de choisir un seuil à travers ce graphique, car nous ne discernons pas de rupture à partir de laquelle le graphique deviendrait affine. Bien que nous puissions zoomer davantage sur le graphique, le choix de la partie à zoomer demeure arbitraire. C'est pourquoi nous compléterons la MEF avec les approches suivantes.

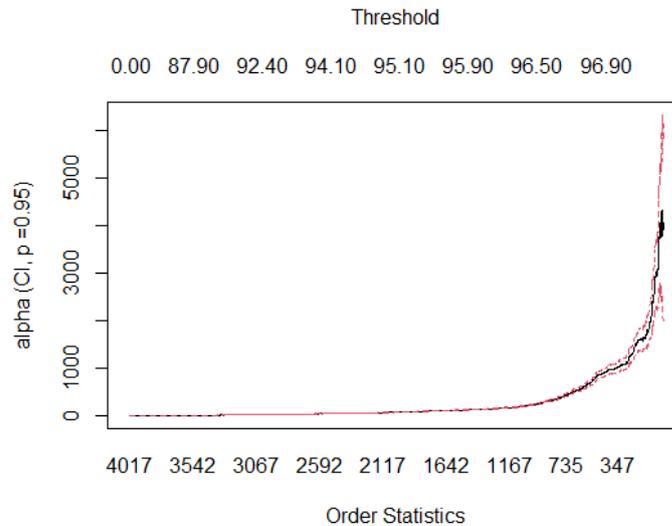
- Estimateur de Hill Plot

L'estimateur de Hill est un estimateur de l'indice de queue de la distribution d'une loi de Pareto classique. Cette méthode graphique pour déterminer un seuil repose sur la propriété de stabilité de la loi GPD. En effet, si la variable

$$(X - u | X > u) \sim GPD(\xi, \sigma) \text{ alors } \forall (u' \geq u), (X - u' | X > u') \sim GPD(\xi, \sigma')$$

Le paramètre de queue  $\xi$  est donc le même pour tout  $u' > u$ . Nous cherchons par conséquent ce premier seuil  $u$ . Dans la pratique, cela revient à observer le seuil à partir duquel le paramètre de forme  $\xi$  devient constant.

Cet estimateur est spécifique à la loi de Pareto classique, ou encore aux distributions de Fréchet, lorsque  $\xi \geq 0$ . En d'autres termes, l'estimation de  $\xi$  par l'estimateur de Hill est bornée inférieurement par 0. En deçà de 0, il ne peut fournir aucune information sur le choix du seuil. En considération de la décroissance du graphe MEF, nous tiendrons compte de cette particularité dans la détermination du seuil. Ainsi, son application ici dans la recherche de notre seuil sous-entend l'hypothèse que notre échantillon suit une loi de Pareto classique, dont nous cherchons à estimer un seuil de Pareto.



**FIGURE 2.22 Hill Plot**

Les seuils sont représentés sur l'axe supérieur de l'abscisse. On observe une évolution quasi-stable du paramètre de forme jusqu'au seuil de 96, ou statistiquement d'ordre autour de 740. Cependant, il est important de noter que l'échelle des ordonnées est très élevée, ce qui peut rendre difficile l'affirmation d'une stabilité. En effet, une variation de 10 peut sembler constante à travers cette analyse graphique. Les méthodes à venir nous permettront de gagner en précision dans l'analyse de la stabilité du paramètre de forme.

- Hill Plot dérivés :

L'Alternative Hill Plot, qui n'est rien d'autre qu'un Hill Plot normal mis sous une échelle logarithmique, est utile car la partie correspondant à un nombre relativement faible de statistiques d'ordre est montrée plus clairement, couvrant une plus grande partie de l'espace affiché.

En effet, dans cette méthode, les statistiques d'ordre sont représentées sur une échelle logarithmique en utilisant les points  $(\theta, H_{\lceil n^\theta \rceil, n})$ , où  $\theta = \frac{\ln(k)}{\ln(n)}$  et  $1 \leq k \leq n - 1$ . Ainsi,  $0 \leq \theta \leq 1$  pour tout  $k$ , et  $n$  correspond à la taille de notre échantillon. Nous utilisons la notation  $\lceil y \rceil$  pour désigner la partie entière supérieure, qui représente le plus petit nombre entier supérieur ou égal à  $y \geq 0$ .

Nous combinons l'alternative Hill Plot avec le Smooth Hill Plot, une méthode de lissage permettant de surpasser la volatilité de l'estimateur en faisant une moyenne mobile des valeurs des estimateurs de Hill correspondant à différents nombre de statistiques d'ordre. La formule explicite est donnée par :

$$avH_{k,n} = \frac{1}{(r-1)k} \sum_{p=k+1}^{rk} H_{p,n} \text{ avec } r > 1$$

Il est théoriquement démontrable qu'en effectuant une moyenne, la variance de l'estimateur de Hill peut être considérablement réduite, permettant ainsi de stabiliser la volatilité.

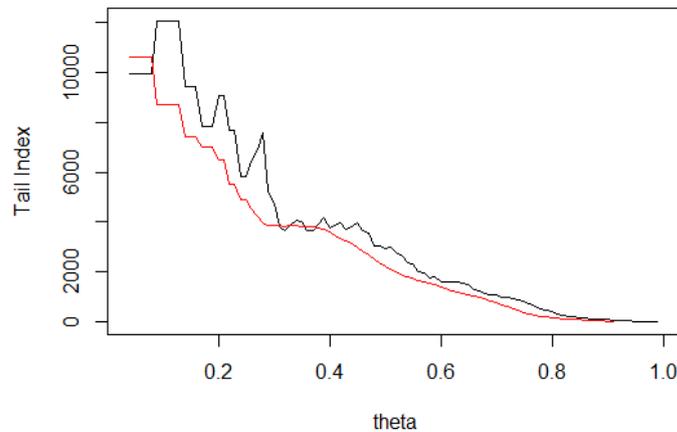


FIGURE 2.23 Alternative & Smooth Hill Plots

Nous observons que la moyenne mobile (représentée par la courbe rouge) est plus lissée que l'Hill Plot classique, et elle se rapproche davantage de la courbe classique à droite qu'à gauche en raison de la convergence rapide lorsque le seuil augmente. Cependant, dans l'ensemble, l'Alternative & Smooth Hill Plot se rapproche du Hill Plot, et à partir d'un  $\theta = \frac{\ln(k)}{\ln(n)} = 0.8$ , nous remarquons une stabilité du paramètre de forme  $\xi$ . Cette stabilité correspond à une statistique d'ordre d'environ 735, une grandeur similaire à celle observée avec l'Alternative Hill Plot. **Cette valeur de  $k$  correspond à un seuil d'environ 96.60** .

- D'autres méthodes basées sur l'estimateur de Hill effectuent une sélection automatique du seuil. Ces estimateurs peuvent, par exemple, minimiser le critère AMSE ou MSE en fonction de la statistique d'ordre  $k$ , après un re-échantillonnage bootstrap préalable. Ces méthodes sont largement détaillées dans l'article CAEIRO et GOMES 2016, et la librairie "tea" de R offre des commandes pour l'application de ces méthodes. **La méthode utilisant le critère AMSE appliqué à notre échantillon aboutit à un seuil de 96.9%**.
- Procédure de Jon Danielsson (2016) : DANIELSSON et al. 2016 proposent une méthode basée sur la minimisation de la distance maximale entre la queue de loi de type Pareto généralisée ajustée et le quantile observé. Ils utilisent comme métrique la statistique de test de Kolmogorov-Smirnov (KS) pour ajuster la queue de distribution. Cette statistique KS se définit comme le supremum de la différence absolue entre la fonction de répartition empirique  $F_n$  et une fonction de répartition paramétrique  $F$ . Voici la formule associée :

$$KS = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

Cela signifie que KS représente le plus grand écart absolu entre la fonction de répartition empirique des données et la fonction de répartition théorique paramétrique.

En réalité, Danielsson et son équipe ne utilisent pas directement la statistique KS de manière classique. Ils lui apportent une modification intéressante. Au lieu de minimiser la distance entre

la distribution empirique et la distribution paramétrique dans une dimension probabiliste avec les fonctions de répartition, ils minimisent une distance du point de vue des quantiles. Ils adaptent ainsi la métrique de la distance de Kolmogorov-Smirnov aux cas des quantiles en ré-écrivant différemment les fonctions de répartition. Cette approche est pertinente car les études d'estimation de seuil se concentrent principalement sur la queue de la distribution et non sur les observations centrales. Pour des observations situées dans la queue, de petits changements dans les probabilités entraînent de grands changements en termes de quantiles. Par conséquent, de petites erreurs dans l'estimation des probabilités se traduisent par de grandes erreurs dans les quantiles. C'est pourquoi Danielsson préfère minimiser les erreurs commises du point de vue des quantiles plutôt que celles de la distribution de probabilité. Un paramètre de la méthode permet de spécifier où la comparaison doit être opérée entre quantiles empiriques et quantiles théoriques.

Cette approche, appliquée à 30% et à 50% de notre échantillon rangée par ordre croissant, **donne respectivement 97.16% et 96.50% comme valeurs de seuil.**

#### **Synthèse et choix du seuil de la GPD :**

En résumé, ces différentes approches d'estimations de seuil convergent et nous assurent que le seuil optimal se trouve entre 96.50% et 97.16%. Toutefois s'agissant de trouver un équilibre entre volatilité et biais de l'estimateur, nous avons légitimement choisir le seuil **96.80% pour l'ajustement de notre loi GPD.**

#### **B) Ajustement de la loi GPD et calcul du choc :**

Il s'agit dans cette partie de faire un ajustement Nous avons ajusté à notre échantillon la loi Pareto de type II avec le seuil estimé précédemment. Les paramètres optimaux obtenus sont résumés dans le tableau ci-dessous.

AIC	seuil Pareto	$\sigma$	$\xi$
1283.3	96.8	0.224	-0.615

**TABLE 2.18 Paramètres optimaux calibrés - loi GPD**

Le paramètre de forme étant négatif, cela confirme l'allure du graphe MEF à la page 59. Nous sommes donc en présence d'une loi Pareto de type II avec les caractéristiques de notre échantillon de rendements transformés. Une documentation sur cette sous-classe de la famille de lois GPD se trouve dans FATEH, DJABRANE et SONIA 2019. Il est important de rappeler au lecteur que ce résultat de  $\xi$  négatif ne signifie pas que les rendements annuels glissants peuvent être modélisés par une loi de Pareto de type II. En revanche, cela suggère que l'échantillon, issu de notre transformation affine, est modélisable via une loi de Pareto de type II.

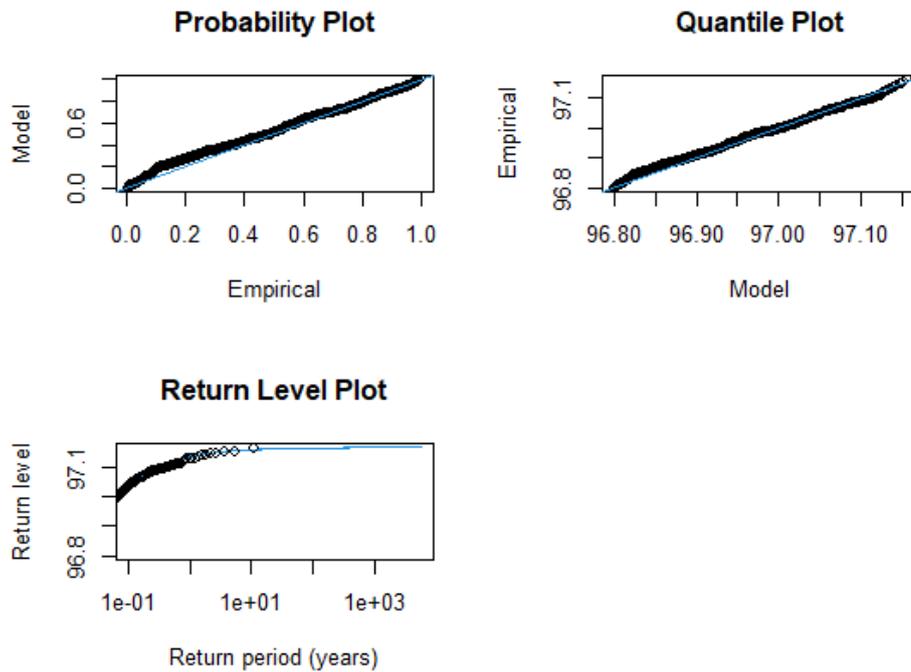


FIGURE 2.24 Diagrammes de l'ajustement de la loi Pareto II

Ces graphiques, notamment le QQ-plot, mettent en évidence un meilleur ajustement de la loi Pareto type II sur la queue droite de notre distribution transformée. Cette observation est très encourageante dans le cadre de cette approche de transformation des données, où l'objectif est d'améliorer la modélisation de la partie de la distribution contenant notre quantile recherché.

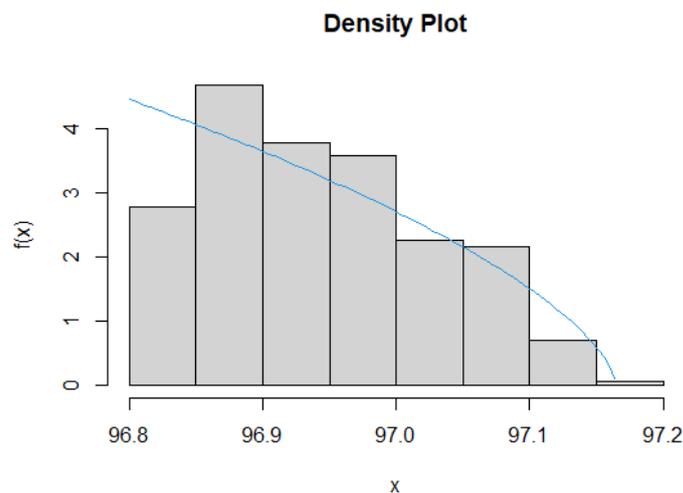


FIGURE 2.25 Densité de la loi estimée

### Calcul du choc :

Le calcul du quantile n'est pas direct dans ce contexte, contrairement aux modèles précédents. La

loi Pareto Type II ajustée ne modélise que le comportement de la queue droite de notre échantillon transformé, correspondant à la queue gauche de notre distribution réelle de rendements glissants une fois la transformation affine inversée. Cependant, le calcul du choc S2 implique de déterminer la  $VaR_{0.5\%}$  sur l'ensemble des rendements de l'actif. Ainsi, estimer un quantile paramétrique à 0.5% ou 99.5% à partir des paramètres optimaux calibrés de la loi de Pareto type II conduirait à surestimer le choc et ne serait pas conforme à l'approche EIOPA.

En effet, présentons dans un premier temps, la formule fermée du calcul de la VaR implémentée dans les bibliothèques R modélisant les familles GPD. Si l'on considère  $F$  comme la fonction de notre distribution avec un point final  $x_F$  et  $u$  le seuil à partir duquel notre distribution  $X > u$  suit une loi GPD  $F_u(x) = G_{\xi, \sigma}(x)$  avec  $0 \leq x < x_F - u$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$ .

Pour tout  $x \geq u$ , en considérant les paramètres de la loi GPD ajustée, l'équation permettant le calcul de la  $VaR_\alpha$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\bar{F}_u(x) &= P(X > x \mid X > u) = 1 - \alpha \\ &= \bar{F}_u(x - u) = 1 - \alpha \\ &= \left(1 + \xi \frac{x - u}{\sigma}\right)^{-1/\xi} = 1 - \alpha\end{aligned}$$

L'inverse de cette fonction donne le quantile supérieur de la distribution ou VaR :

$$VaR_\alpha = q_\alpha(F) = u + \frac{\sigma}{\xi} \left( (1 - \alpha)^{-\xi} - 1 \right) \quad (2.4)$$

L'équation 2.4 est couramment utilisée dans les bibliothèques R pour calculer la VaR à partir d'une loi GPD. Toutefois, cette formule ne considère pas les observations tronquées inférieures au seuil dans le calcul de la VaR.

Une méthode pour intégrer la partie de l'échantillon souvent négligée dans l'ajustement d'une Distribution de Pareto Généralisée (GPD) a été suggérée par SINGH, ALLEN et POWELL 2011 dans leur étude sur l'estimation du risque de valeur.

En effet, si on note  $\bar{F}$  la fonction de survie de l'ensemble de nos observations, alors

$$\begin{aligned}\bar{F}(x) &= P(X > x) \\ &= P(X > u)P(X > x \mid X > u) \\ &= \bar{F}(u)P(X - u > x - u \mid X > u) \\ &= \underbrace{\bar{F}(u)}_{\text{A priori inconnu}} \underbrace{\bar{F}_u(x - u)}_{\text{Partie modélisée par GPD}} \\ &= \bar{F}(u) \left(1 + \xi \frac{x - u}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\end{aligned}$$

avec  $\bar{F}(u)$ , la fonction de survie évaluée au seuil  $u$ . En inversant cette expression de la fonction survie, la formule fermée de la VaR pour tout  $\alpha \geq F(u)$  est donnée par :

$$VaR_\alpha = q_\alpha(F) = u + \frac{\sigma}{\xi} \left( \left( \frac{1 - \alpha}{\bar{F}(u)} \right)^{-\xi} - 1 \right) \quad (2.5)$$

Cependant, le calcul de la VaR présuppose la connaissance de la fonction de survie de l'ensemble de la distribution, ce qui n'est pas le cas ici puisque la loi de Pareto II a été ajustée seulement sur

une extrémité de la distribution. On pourrait envisager d'utiliser les fonctions de survie des modèles antérieurs ajustés sur l'intégralité de la distribution, mais afin de minimiser les erreurs d'ajustement et de maintenir une indépendance entre les méthodes pour pouvoir les comparer, nous avons préféré recourir à la fonction de survie empirique.

En posant  $n$  comme étant le nombre total d'observations et  $N_u$  le nombre d'observations au-dessus du seuil  $u$ , nous avons remplacé  $\bar{F}_u$  au dénominateur de l'équation 2.5 par l'estimateur empirique  $N_u/n$ .

La formule 2.5 devient alors :

$$\widehat{\text{VaR}}_\alpha = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left( \left( \frac{n}{N_u} (1 - \alpha) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \quad (2.6)$$

avec  $(\hat{\sigma}, \hat{\xi})$  les paramètres estimés de la GPD.

La formule 2.6 implémentée sous R donne une  $\text{VaR}_{99.5\%} = 97.15\%$ . **La transformée affine de cette VaR à 0.5% donne une valeur de choc de 82%.**

#### 2.2.4.7 Synthèse des modèles paramétriques sur les rendements glissants

Dans cette partie, nous comparons les résultats trouvés avec les modèles statistiques calibrés précédemment afin de choisir le meilleur modèle sur cet échantillon de rendements glissants.

Nous avons classé dans la table ci-dessous nos résultats de calibrage des différents modèles par valeurs décroissantes d'AIC.

Modèle	Valeurs	
	AIC	Chocs en %
Empirique		78
Pareto II	1283	81.9
NIG	19616	93.2
Fréchet	19617	84.0
Hyperbolique	20972	79.6
Student	22410	85.3
Normal	29819	100

TABLE 2.19 Comparaison des modèles

Le modèle Pareto II se distingue par des valeurs d'AIC relativement meilleures par rapport aux autres modèles. Toutefois, il est crucial de noter que son ajustement a été réalisé uniquement sur une partie spécifique des données, celles supérieures à un seuil défini. Cette limitation doit être prise en considération lors de la sélection finale du choc.

Les modèles Hyperbolique et Fréchet, ainsi que le choc empirique, présentent des valeurs relativement proches. Par conséquent, une évaluation plus approfondie de leurs performances serait nécessaire pour déterminer celui qui convient le mieux aux besoins spécifiques de l'application, en prenant en compte la proximité du choc empirique.

En revanche, le modèle "Normal" affiche des valeurs d'AIC nettement plus élevées, suggérant un ajustement potentiellement moins approprié aux données.

A ce niveau de l'étude, le choc issu du modèle Pareto II est retenu pour une éventuelle utilisation. Néanmoins, il est nécessaire de poursuivre l'évaluation des modèles et de considérer d'autres critères pertinents, y compris la proximité du choc empirique, avant de finaliser le choix du choc pour les besoins spécifiques du projet.

Dans la continuité de cette analyse, nous avons exploré un autre critère pertinent pour la sélection du modèle de choc. Nous nous sommes penchés sur la comparaison entre les chocs empiriques et les chocs estimés par les différents modèles pour divers seuils de quantiles, notamment '1/200', '1/100', '1/50', '1/25', et '1/10'. Cette comparaison a fourni un aperçu plus approfondi de la capacité des modèles à capturer les comportements extrêmes des données, et nous aidera à affiner notre choix final de modèle de choc. La figure suivante présentera cette comparaison de manière détaillée.

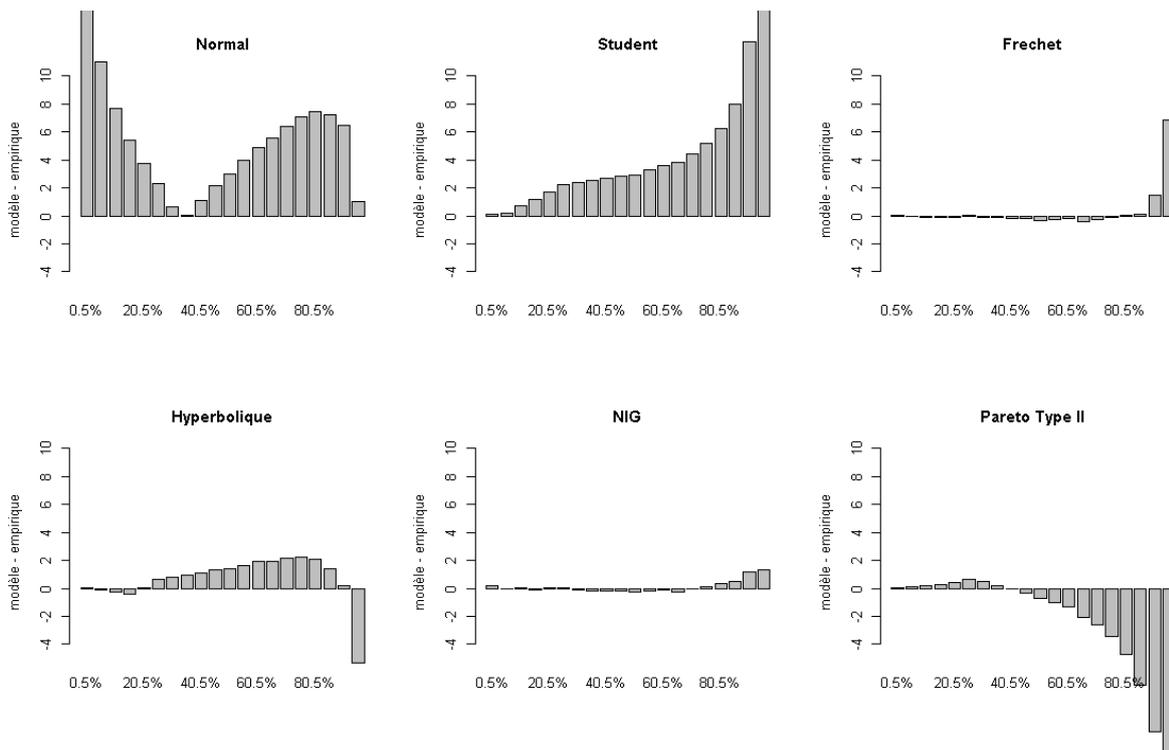


FIGURE 2.26 Comparaison quantiles calibrés vs quantiles empiriques

En ce qui concerne la comparaison des chocs paramétriques avec le choc empirique, contrairement aux résultats sur l'historique de 12 ans, le meilleur modèle selon le critère AIC n'a pas nécessairement généré le choc le plus similaire au choc empirique. Les modèles NIG et Fréchet, qui figurent parmi ceux avec les meilleurs AIC, ont produit des chocs plus proches des chocs empiriques. Nous avons trouvé pertinent d'accorder plus de crédibilité à un modèle qui génère des chocs similaires aux chocs empiriques pour une large gamme de seuils de quantiles. Par rapport aux résultats sur l'historique de 12 ans et les rendements annuels glissants, le modèle de Fréchet a généré des quantiles plus proches des quantiles empiriques. Nous avons donc accordé notre confiance à la valeur de choc généré par ce modèle, qui est de 84%.

## 2.2.5 Calibrage du choc annuel à partir du choc mensuel

### 2.2.5.1 Définition du facteur d'annualisation

Dans cette méthode, après avoir calibré les chocs mensuels sur les douze mois de l'année, l'objectif est de trouver une méthode adéquate pour les consolider en un seul choc annuel. Les travaux de HOUNKONNOU 2020 ont été une référence utile dans ce processus. La technique d'annualisation des

paramètres, connue sous le nom de "racine carrée du temps", est expliquée en détail dans son mémoire.

#### A) Base théorique de cette technique

Soit  $r_{annuel}$  le rendement annuel associé aux rendements mensuels  $r_i$  des 12 mois composant l'année,  $i \in [1, 12]$ .

Alors avec la méthode des taux simples,

$$r_{annuel} = \sum_{i=1}^{i=12} r_i$$

De même, en définissant  $\sigma_{annuel}$  comme la volatilité associée à ces rendements annuels, nous obtenons :

$$\sigma_{annuel}^2 = \text{VAR} \left( \sum_{i=1}^{12} r_i \right) = \text{COV} \left( \sum_{i=1}^{12} r_i, \sum_{j=1}^{12} r_j \right) \quad (2.7)$$

En introduisant les volatilités mensuelles  $\sigma_i, i \in [1, 12]$  :

$$\sigma_{annuel}^2 = \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} \frac{\text{COV}(r_i, r_j)}{\sigma_i \times \sigma_j} \cdot \sigma_i \times \sigma_j = \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} \text{CORR}(r_i, r_j) \cdot \sigma_i \times \sigma_j \quad (2.8)$$

Nous faisons l'hypothèse simplificatrice suivante :

$$\sigma_{mensuel}^2 = \sigma_i \times \sigma_j, \quad \forall i, j \in [1, 12]$$

Ainsi, la variance annuelle est exprimée comme suit :

$$\sigma_{annuel}^2 = \sigma_{mensuel}^2 \times \sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} \text{CORR}(r_i, r_j) \quad (2.9)$$

Nous définissons alors le facteur d'annualisation  $f_a$  comme :

$$f_a = \sqrt{\sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^{12} \text{CORR}(r_i, r_j)} = \sqrt{\sum_{i \neq j}^{12} \text{CORR}(r_i, r_j) + \sum_{i=j}^{12} \text{CORR}(r_k, r_k)} \quad (2.10)$$

$$f_a = \sqrt{\sum_{i \neq j}^{12} \text{CORR}(r_i, r_j) + 12} = \sqrt{12} \quad \text{si } \text{CORR}(r_i, r_j) = 0 \quad \forall i \neq j \quad (2.11)$$

Ainsi, la méthode de la racine carrée du temps remet en question l'hypothèse simpliste selon laquelle il n'y a pas de corrélation entre les rendements mensuels, c'est-à-dire que  $\text{CORR}(r_i, r_j) = 0$  pour tous  $i \neq j$ .

Un autre moyen de calculer le facteur d'annualisation est de diviser la volatilité annuelle par la

volatilité mensuelle si ces deux valeurs sont déjà connues, car

$$\sigma_{annuel} = f_a \times \sigma_{mensuel} \Leftrightarrow f_a = \frac{\sigma_{annuel}}{\sigma_{mensuel}} \quad (2.12)$$

#### B) Application

Avec les valeurs de variances annuelle mensuelle calculées, on obtient un facteur d'annualisation de **3.28** dans notre cas, ce qui est différent de  $\sqrt{12} \simeq 3.46$ . Nous sommes donc en présence d'autocorrélations entre les mois. Une absence d'autocorrélation se traduirait par  $\sigma_{annuel} = \sqrt{12} * \sigma_{mensuel}$

#### 2.2.5.2 Calibrage du facteur d'échelle

On calibre ce facteur pour prendre en compte l'effet du modèle calibré sur le facteur d'annualisation. C'est le facteur d'annualisation ajusté de la volatilité du modèle.

$$facteur_{\text{échelle}} = facteur_{\text{annualisation}} * \sigma_{\text{loiajustée}} \quad (2.13)$$

Dans notre étude, nous avons préalablement déterminé les volatilités des lois de distributions sélectionnées dans la partie 2.1.2.2, page 34, sur les rendements mensuels calculés. Cette détermination a été réalisée soit par une formule fermée lorsque cela est possible, soit en calculant la volatilité d'un échantillon de rendements simulé par le modèle.

Dans le tableau suivant, nous présentons les volatilités, les AIC ainsi que les facteurs d'échelle issus des lois calibrées sur l'échantillon des rendements mensuels.

Modèles	Empirique	Normal	Student	Fréchet	Hyperbolique	NIG
AIC	NA	260.27	100.96	90.96	104.11	90.47
Facteur annualisation	3.28					
Volatilités	0.59	0.59	0.48	0.45	0.41	0.44
Facteur d'échelle	1.96	1.95	1.55	1.49	1.33	1.44

**TABLE 2.20 Facteurs d'échelle calibrés sur les lois usuelles.**

D'après le critère AIC, la loi NIG offre toujours le meilleur ajustement sur la distribution des rendements mensuels, suivie de près par la loi de Fréchet. Cependant, il est important de noter que la loi de Student semble mieux s'ajuster que la loi hyperbolique sur cet échantillon de rendements mensuels. La loi normale, quant à elle, demeure la moins performante en termes d'ajustement par rapport aux autres modèles.

Les volatilités des modèles sont généralement inférieures à la volatilité empirique, à l'exception de la loi normale. Ce phénomène pourrait s'expliquer de deux manières. D'une part, des erreurs d'ajustement peuvent conduire les modèles à sous-estimer la volatilité. D'autre part, l'augmentation de la taille de l'échantillon (échantillon simulé) peut contribuer à lisser les volatilités du modèle. Ces différences pourraient avoir un impact significatif sur le calcul du choc annuel. Si l'on suppose que les chocs mensuels calibrés sont équivalents au choc empirique, les valeurs de volatilité peuvent conduire à des chocs annuels sous-estimés par rapport au choc réel.

#### 2.2.5.3 Calcul du choc mensuel et annualisation

Avec les différents modèles ajustés sur nos rendements mensuels, nous calculons les quantiles à 0.5 % . Nous obtenons un vecteur de chocs mensuels que nous multiplions ensuite par le facteur d'échelle afin

d'obtenir les chocs annuels. Les résultats de ce calcul sont résumés dans le tableau ci-dessous.

Modèles	Empirique	Normal	Student	Fréchet	Hyperbolique	NIG
AIC	NA	260.27	100.96	90.96	104.11	90.47
Chocs mensuels	38.87%	100%	35.70%	40.05 %	58.97%	55.87 %
Facteur d'échelle	1.96	1.95	1.55	1.49	1.33	1.44
Chocs annuels	77.32%	100%	55.33 %	59.11 %	79.17%	80.63 %

**TABLE 2.21 Chocs annuels.**

De nouveau, on observe que le choc produit par la loi normale est total (100%). Nous avons de nouveau écarté ce modèle dans cette approche pour son mauvais ajustement. Les modèles de Student et de Fréchet, qui semblent bien ajustés et produisent des chocs mensuels proches du choc empirique, génèrent quant à eux des chocs annuels relativement faibles comparés à tous les chocs calibrés dans cette étude, principalement en raison du facteur d'échelle, un impact que nous avons signalé plus tôt.

Un autre résultat récurrent avec cette nouvelle approche est que les modèles hyperbolique et Normal Inverse Gaussian calibrent un choc annuel proche du choc empirique (79% contre 77% pour l'hyperbolique). De plus, la loi normale inverse gaussienne (NIG) semble s'ajuster le mieux à l'échantillon et donne un choc annuel de 80.63 %. La loi de Fréchet, en deuxième position en terme de qualité d'ajustement, donne un choc d'environ 59 %.

Néanmoins, si on se réfère à le calibrage des chocs mensuels, le rang selon le critère AIC semble cohérent avec les résultats précédents. Ainsi, le calibrage du facteur d'échelle influence fortement les chocs annuels et serait à l'origine des différences de résultats au niveau des chocs annuels avec les études qui ont été menées précédemment.

Pour finaliser le choix du choc paramétrique, nous avons comparé les quantiles de nos 3 modèles favoris selon le critère AIC. Comme dans les études précédentes, le but est d'analyser le comportement de ces modèles dans l'erreur d'estimation d'autres plages de quantiles de la distribution.

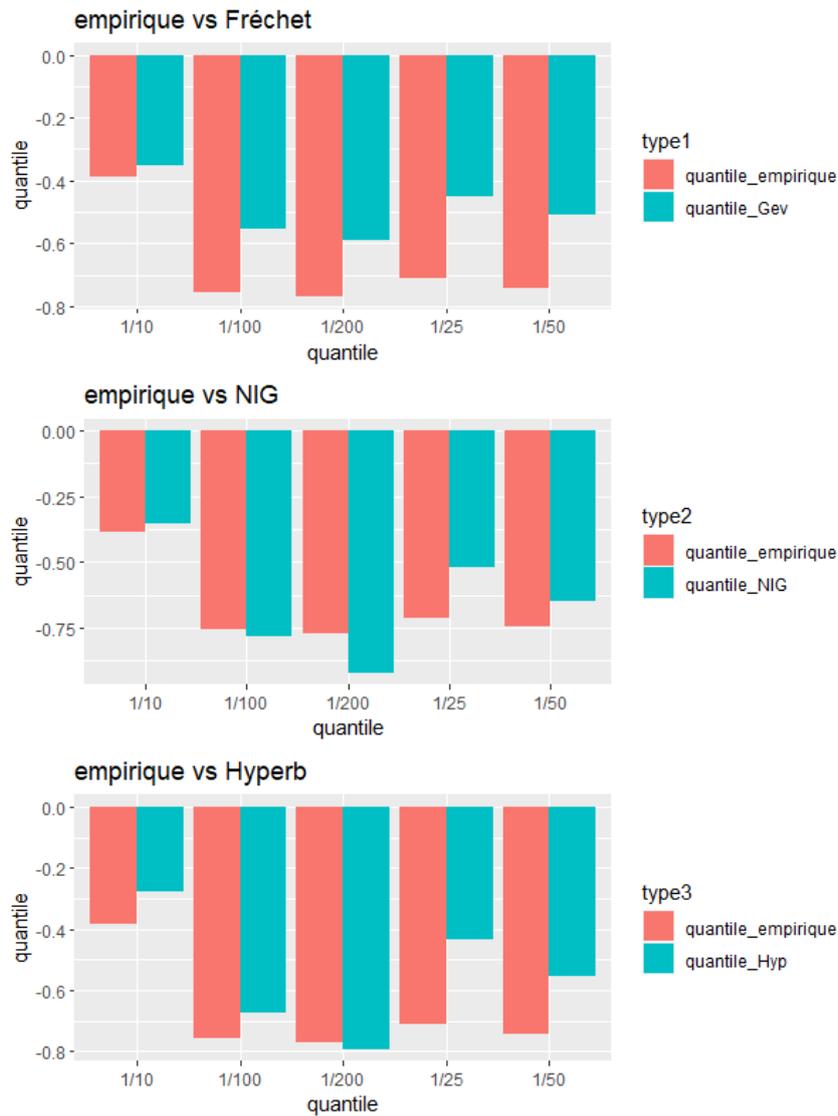


FIGURE 2.27 chocs empiriques mensuels et chocs calibrés mensuels

D'après la figure ci-dessous, le modèle NIG est le modèle qui présente les écarts les plus faibles entre choc paramétrique et choc empirique sur la gamme de quantile choisie. Si on devait choisir un modèle pour cette approche, **on retiendra le choc à 0.5% du modèle NIG qui est 80.63%**

### 2.2.6 Synthèse des résultats des modèles paramétriques

Dans le contexte actuel des travaux, il est impératif de sélectionner le choc issu de l'une des approches paramétriques explorées, en se fondant sur les évaluations fournies par chaque approche, chaque modèle. Les deux tableaux (2.22 et 2.23) présentent une analyse comparative des performances des modèles statistiques dans la modélisation des chocs bitcoin, en se basant sur leurs valeurs d'AIC et les pourcentages de choc estimés.

Les termes *hist12ans*, *histExtrapole* et *histMensuel* désignent respectivement l'historique des rendements annuels, les rendements annuels glissants et les rendements mensuels.

Modèles	Normal	Student	Fréchet	Hyperbolique	NIG
$AIC_{histExtrapole}$	29819	22410	19617	20972	19615
$AIC_{hist12ans}$	77.35	59.88	55.59	60.25	57.15
$AIC_{mensuel}$	260.27	100.96	90.96	104.11	90.47

TABLE 2.22 AIC des modèles

Modèles	Empirique	Normal	Student	Fréchet	Hyperbolique	NIG
$Choc_{histExtrapole}$	78%	100%	85,33%	84.04%	79.62%	93.16%
$Choc_{hist12ans}$	72.68%	100%	100%	76.95%	69.72%	86.72%
$Choc_{histMensuel}$	77.32%	100%	55.63 %	59.11 %	79.17%	80.63 %

TABLE 2.23 Chocs obtenus des modèles

Les résultats soulignent une tendance selon laquelle les modèles affichant de meilleures valeurs d'AIC semblent produire des chocs qui se rapprochent davantage du choc empirique, mettant en lumière cette corrélation. Les modèles basés sur la loi normale et la distribution de Student, qui présentent des chocs considérablement éloignés du choc empirique, viennent confirmer cette observation. Les chocs obtenus avec ces modèles seront écartés (cellules rouges).

Cependant, le critère AIC à lui seul n'a pas été suffisant pour assurer un choix optimal du modèle générant des chocs paramétriques réalistes. Pour rappel, le critère AIC évalue surtout l'adéquation globale du modèle, sans considérer les performances aux extrémités de la distribution. Ainsi, nous avons opté pour une méthode plus robuste en ajustant les lois de Pareto Généralisées quand la taille de l'échantillon le permettait, en particulier pour les rendements annuels glissants. Le choc de 82% obtenu avec le modèle Pareto de type II était similaire à ceux produits par des modèles avec de meilleures valeurs d'AIC, tels que le modèle de Fréchet, ce qui a renforcé notre confiance dans l'utilisation du critère AIC.

Dans notre quête constante de robustesse des résultats, nous avons aussi évalué quel modèle offrait une estimation précise des quantiles sur un intervalle de données seuil, pour juger de leur applicabilité à différentes parties de l'échantillon. Suite à ces analyses, il est apparu que les modèles de Fréchet et NIG étaient les plus fiables, confirmant ainsi leur adéquation au contexte de notre étude.

En conclusion, ces différentes approches paramétriques démontrent des comportements quasi identiques des modèles en termes d'ajustement aux distributions de rendements du bitcoin (sur l'historique de 12 ans, l'historique annuel glissant et l'historique mensuel). Nous avons aussi noté une convergence des chocs paramétriques pour les modèles les mieux calibrés, se situant dans l'intervalle de valeurs [77%, 85%].

## 2.3 Approches stochastiques pour le calibrage du choc - Modèle MSAR

Dans cette section, pour pallier le manque de données annuelles sur le bitcoin nécessaires à calibrer un choc robuste, nous adoptons une approche stochastique. Cette méthode consiste à simuler le cours du bitcoin dans des conditions réelles et à utiliser ces données simulées pour le calibrage du choc S2.

Cependant, cette approche nécessite l'exploration de modèles sophistiqués aptes à saisir et à refléter les spécificités du bitcoin. L'observation des divers régimes de volatilité des prix du bitcoin a éveillé notre curiosité, nous amenant à examiner minutieusement les modèles autorégressifs à changement de régimes markoviens, aussi appelés modèles MSAR, que nous détaillons et étudions dans ce chapitre. Même si cette méthode repose sur une démarche stochastique et est de nature simulateur, elle offre une représentation plus fidèle de la réalité que les lois conventionnelles, réussissant à saisir les régimes de volatilité dans la dynamique des prix du bitcoin.

En somme, cette approche visera à capturer de manière optimale les effets réels des changements de régime de volatilité des prix, ce qui facilitera les projections temporelles du cours du bitcoin. Cette méthode sera employée pour le calibrage du choc, renforçant ainsi la cohérence globale de notre démarche.

### 2.3.1 Généralités

Les modèles hétéroscédastiques conditionnels auto-régressifs généralisés (GARCH) d'Engle (1982) sont les modèles couramment utilisés pour la prévision de la volatilité sur les marchés boursiers. Ces modèles viennent corriger les limites du modèle ARIMA qui est basé sur les hypothèses inexactes d'une variance constante pour les séries chronologiques.

En 1989, Hamilton a développé un modèle pour détecter les régimes de volatilité sur les marchés boursiers (HAMILTON 1989). Ce modèle a la particularité de représenter les différents régimes de volatilité dans les séries temporelles non stationnaires. Il a appliqué ce modèle aux données américaines d'après-guerre, en utilisant le logarithme du PIB réel, pour identifier les périodes de croissance forte et faible du PIB.

Le modèle s'est vite répandu dans le monde de la recherche appliquée. De nombreux chercheurs comme WANG 2007 ; YAYA, AKINLANA et SHITTU 2016 ; X. ZHU et J. ZHU 2013 ; A. ADEJUMO, ALBERT et J. ASEMOTA 2021 ont documenté le caractère distinctif et les capacités de prévision des modèles à changement de régime Markovien par rapport aux modèles GARCH couramment utilisés. Par exemple, d'après la théorie de Dow, la méthode de changement de régime de Markov modélise plus efficacement les trois régimes de volatilité des marchés "bull" et "bear" des rendements boursiers que tout autre modèle. Cette supériorité serait due à une innovation où le mécanisme de changement de régime est régi par une variable de régime non observable suivant une chaîne de Markov de premier ordre.

Son application a touché également le domaine de l'actuariat car dans son mémoire, CHEVALLIER 2021 s'inspire de cette approche pour calibrer un choc action.

### 2.3.2 Principe de base du modèle MSAR

Nous présentons un modèle autorégressif à changement de régime de Markov (MS-AR) pour analyser les rendements du bitcoin.

Prenons par exemple une distribution de log-rendements  $r_t = \log\left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)$  où  $y_t$  représente le cours du bitcoin au temps  $t$ , modélisée par un modèle MSAR(p,2), c'est-à-dire avec un ordre autorégressif de  $p$  et deux régimes (par exemple, forte volatilité et faible volatilité). Dans cette modélisation, les rendements  $r_t$  sont exprimés comme une combinaison linéaire des rendements passés, ajustée par des coefficients autorégressifs qui varient selon le régime en cours, et une erreur gaussienne  $\varepsilon_t$ .

$$r_t = \begin{cases} a_1 + \beta_{11}r_{t-1} + \dots + \beta_{p1}r_{t-p} + \varepsilon_t & \text{si } S_t = 1 \\ a_2 + \beta_{12}r_{t-1} + \dots + \beta_{p2}r_{t-p} + \varepsilon_t & \text{si } S_t = 2 \end{cases} \quad (2.14)$$

où  $S_t$  représente le régime au temps  $t$ ,

Les coefficients  $a_1, a_2, \beta_{11}, \beta_{12}, \dots, \beta_{p2}$  peuvent prendre des valeurs différentes selon le régime.

Ce modèle, initié par Hamilton (1989), adapte les paramètres, tels que l'interception et les coefficients autorégressifs, en fonction du régime  $S_t$ .

Le régime  $S_t$  est modélisé par une chaîne de Markov à deux états, indépendamment de l'erreur  $e_t$  pour tous les instants  $t$ . Ainsi, le modèle MS-AR à deux régimes permet de capturer les fluctuations des rendements en fonction des conditions économiques, offrant ainsi une meilleure compréhension des périodes de volatilité et de stabilité du cours du bitcoin.

Ainsi, dans notre exemple de 2 régimes,  $S_1$  (régime 1) est identifié comme la phase d'accumulation ou de distribution des rendements de l'ensemble du marché ( $r_t$ ), tandis que  $S_2$  (régime 2) incarne la phase d'excès ou de panique des rendements de l'ensemble du marché ( $r_t$ ).

Les transitions entre les régimes  $S_t$  sont supposées être ergodiques et complexes, suivant un processus de Markov du 1<sup>er</sup> ordre. Cela implique que les impacts des observations antérieures sur les rendements  $r_t$  et les régimes sont entièrement reflétés dans les observations récentes des régimes  $r_t$ , comme décrit dans l'équation (2.15) :

$$P_{ij} = \text{Prob}(S_t = j | S_{t-1} = i) \quad \forall i, j = 1, 2 \text{ et } \sum_{i=1}^2 \rho_{ij} = 1 \quad (2.15)$$

La matrice  $P$ , également appelée matrice de transition, encapsule les probabilités de changement :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

où  $P_{11} + P_{12} = 1$  et  $P_{21} + P_{22} = 1$ .

Plus la probabilité  $\rho_{ij}$  est proche de 1, plus de temps est nécessaire pour passer au régime suivant. Les éléments diagonaux de la matrice des probabilités de transition dans l'équation (2.16) renferment des informations cruciales sur la durée attendue de l'état du régime.

Maintenant que le modèle a été présenté, son application pratique dans notre étude sera abordée. Comme décrit dans la section 2.1.2.2 à la page 34, le modèle MSAR a été utilisé pour deux applications : l'historique quotidien des log-prix du bitcoin (application 1) et les log-rendements du bitcoin (application 2). Ces deux applications visent à exploiter pleinement les capacités du modèle, qui est adapté aussi bien aux données stationnaires qu'aux données non stationnaires, telles que les log-prix du bitcoin.

### 2.3.3 Calibration du modèle MSAR sur les log-prix

Nous calibrons notre modèle sur le logarithme du cours journalier du bitcoin avec un historique de 12 ans. Ce qui fait 4383 observations journalières.



FIGURE 2.28 Log-prix journalier du bitcoin

#### 2.3.3.1 Vérification des hypothèses d'applicabilité du modèle MSAR :

La trajectoire du log-prix montre une tendance croissante, indiquant que la série log-prix n'est pas stationnaire. Les tests de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) et de l'Augmented Dickey-Fuller (ADF) ont également confirmé le rejet de l'hypothèse de stationnarité. Cependant, le modèle reste applicable même aux échantillons de données non stationnaires.

Par ailleurs, avant d'ajuster un modèle autorégressif à changement de régime, il est crucial d'identifier un effet ARCH dans l'échantillon considéré. En effet, l'effet ARCH désigne une dépendance conditionnelle de la variance d'une série temporelle aux valeurs antérieures. Autrement dit, il illustre la volatilité conditionnelle, ce qui signifie que la variance d'une observation à un instant précis est liée aux valeurs passées de la série. Le test d'hétéroscédasticité a permis d'identifier la présence de cet effet ARCH dans notre échantillon de log-prix. Ce test a révélé des indices suffisants pour écarter l'hypothèse nulle  $H_0$  (homoscédasticité) au profit de l'hypothèse alternative  $H_1$  (hétéroscédasticité), avec une p-value de moins de 1%.

Ainsi, toutes les conditions sont réunies pour appliquer le modèle MSAR à notre série de log-prix. Dans le logiciel R, la librairie NHMSAR a été employée pour calibrer le modèle MS-AR. Cette librairie est recommandée par VALERIE 2022.

Pour le calibrage du modèle, nous procédons au découpage suivant : les 365 derniers points (la dernière année d'observation) serviront au backtesting du modèle et le reste de l'échantillon servira de base d'entraînement.

Pour l'estimation des hyper-paramètres du modèle des composantes AR et MS, nous procédons de manière séquentielle. Nous estimons dans un premier temps le paramètre pour la composante auto-régressive (AR) du modèle avant d'estimer le nombre d'états optimal pour la composante chaîne de Markov (MS).

### 2.3.3.2 Hyper-paramètres des composante AR et MS

Pour estimer le paramètre de la composante AR, il est courant d'analyser les autocorrélogrammes. Il existe deux types d'autocorrélogrammes : simple et partiel. L'autocorrélogramme sert à analyser les séries temporelles dans le cadre d'une approche autoregressive. L'autocorrélation simple (ou autocovariance) d'une série indique que la mesure d'un phénomène à un instant  $t$  peut être corrélée avec ses mesures antérieures (aux temps  $t-1$ ,  $t-2$ ,  $t-3$ , etc.). L'autocorrélation partielle, quant à elle, mesure l'autocorrélation d'un signal pour un décalage  $k$ , 'indépendamment' des autocorrélations pour les décalages inférieurs.

On a tracé l'autocorrélogramme simple et partiel de notre échantillon de log-prix.

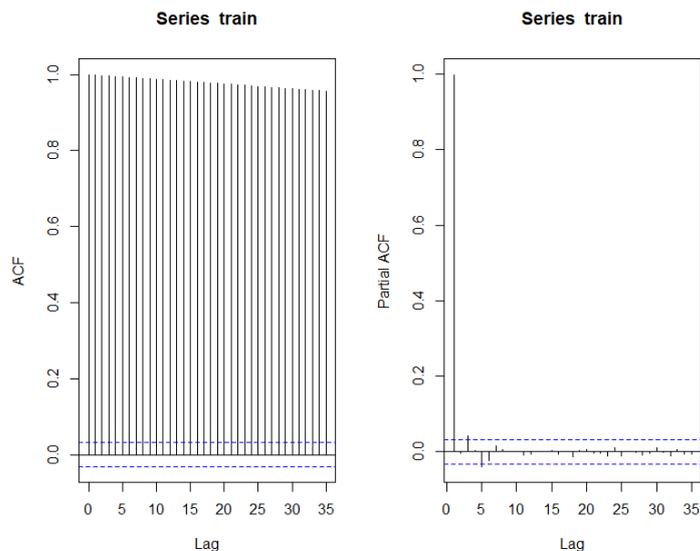


FIGURE 2.29 Autocorrélogrammes simple et partiel

Les pics dans le corrélogramme indiquent les décalages (lags) auxquels la corrélation est significative. Un pic significatif à 0 indique un degré élevé de corrélation entre le signal original et le signal auto-corrélé à un décalage temporel nul. Si le pic est faible, alors la corrélation est moindre. Les pics positifs indiquent une corrélation positive (par exemple, une tendance à augmenter ou diminuer ensemble). Les pics négatifs indiquent une corrélation négative (par exemple, une tendance à s'inverser). Les droites horizontales pointillées sur le graphique d'autocorrélation nous indique le seuil critique au-delà duquel l'autocorrélation est considérée significative.

Dans notre cas, les autocorrélations simples (graphique à gauche) sont décroissantes en fonction du retard, c'est à dire, il y'a moins en moins de dépendance du log-prix de l'instant d'observation aux phénomènes des instants précédents.

Les autocorrélations partielles sont quasi-nulles à partir de l'ordre 3. On observe un pic positif très significatif en 1, puis un autre pic significatif en 3. Ce qui est suffisant pour mettre en avant trois modèles AR candidats : AR(1), AR(2) et AR(3).

L'hyper-paramètre de la composante chaîne de Markov définit le nombre d'états de la chaîne de Markov. Dans son mémoire CHEVALLIER 2021, fait le choix arbitraire de deux régimes : forte et faible volatilité. Dans notre cas, nous avons voulu tester les modèles à plus de deux régimes, en l'occurrence un modèle à trois régimes : un MS(3) pour des volatilités forte, moyenne et faible afin de constater quelle configuration s'adapte au mieux à la volatilité du prix du bitcoin.

En combinant les modèles sélectionnés pour les deux composantes, nous obtenons six modèles candidats à évaluer et à comparer : MS(2)-AR(1), MS(2)-AR(2), MS(2)-AR(3), MS(3)-AR(1), MS(3)-AR(2) et

MS(3)-AR(3). La bibliothèque NHMSAR fournit des commandes pour calculer le BIC de chaque modèle ajusté. Nous sélectionnerons donc le modèle qui présente le BIC le plus faible. Le critère de sélection du modèle BIC a été introduit précédemment dans la section 2.1.4 à la page 36.

Le tableau ci-dessous présente les 6 modèles calibrés avec leur BIC correspondants.

Modèles	MS(2)-AR(1)	MS(2)-AR(2)	MS(2)-AR(3)	MS(3)-AR(1)	MS(3)-AR(2)	MS(3)-AR(3)
BIC	-13768.80	-13765.89	-13811.88	-14358.94	-14366.65	-14392.10

TABLE 2.24 BIC des cinq modèles.

Dans ce tableau, le modèle MS(3)-AR(3) affiche le BIC le plus faible parmi les cinq modèles, avec une valeur de -14392.10, suggérant qu'il offre un meilleur équilibre entre l'ajustement du modèle et sa complexité. En revanche, les modèles MS(3)-AR(2) et MS(3)-AR(1) présentent des valeurs de BIC plus élevées, indiquant une complexité supérieure sans amélioration significative de l'ajustement. Ainsi, le modèle MS(3)-AR(3) est préférable selon le critère BIC.

La figure 2.30 représente deux modèles MSAR ajustés sur le cours logarithmique du bitcoin.

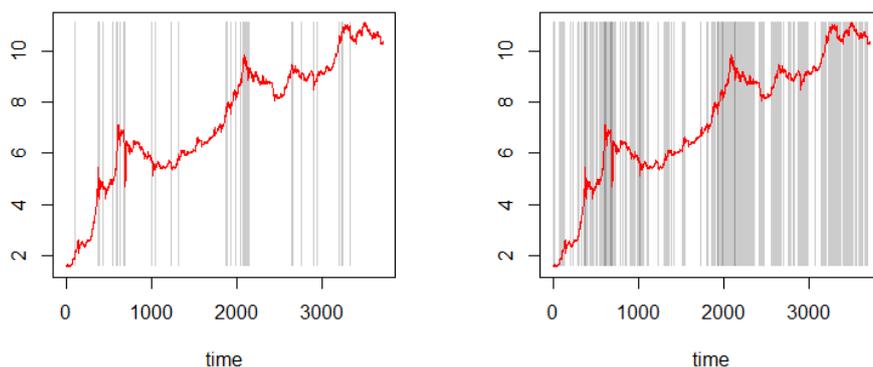


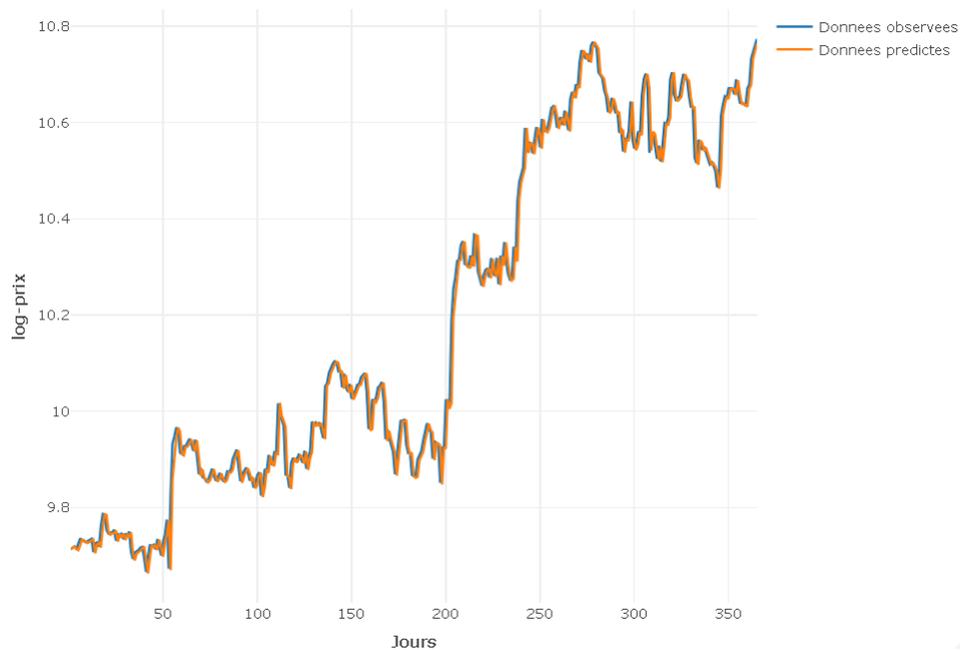
FIGURE 2.30 A droite modèle MS(2)-AR(3), A gauche modèle MS(3)-AR(3)

En rouge est représentée la trajectoire réelle du prix logarithmique du bitcoin. Les alternances de gris foncé contre blanc représente le modèle à 2 régimes. Les alternances de gris foncé contre gris clair puis blanc illustrent le modèle à trois régimes. Les zones de forte volatilité sur la courbe correspondent aux bandes grises, indiquant que le modèle saisit effectivement les périodes de forte volatilité.

Le modèle à deux régimes pourrait être considéré si l'on désire binariser le régime de volatilité de l'actif, en utilisant d'autres critères de sélection que l'AIC, tels que la facilité d'interprétation ou l'augmentation de la probabilité de changement de régime via la matrice de transition. Cependant, dans notre situation, nous nous limiterons au critère du BIC pour choisir le modèle, et par conséquent, le modèle MS(3)-AR(3) sera adopté pour la modélisation future.

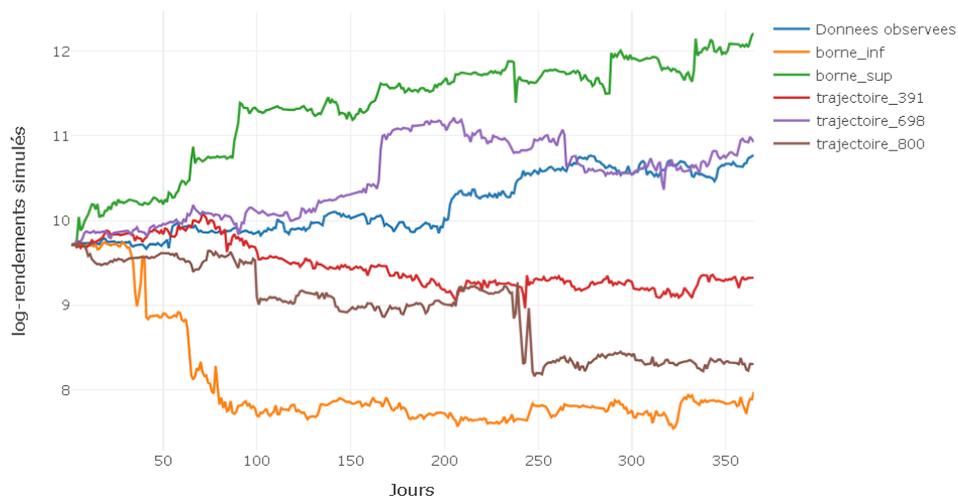
### 2.3.3.3 Backtesting du modèle

Nous procédons maintenant au backtesting du modèle MS(3)-AR(3). Nous avons initialement prédit 365 valeurs de log-prix avec notre modèle, et le **RMSE calculé sur notre échantillon observé est de 0.035**, ce qui signifie que l'erreur moyenne du modèle est de  $\exp(0.035) = 1.035$  EUR. C'est un résultat très prometteur, comme l'illustre le graphique ci-dessous.



**FIGURE 2.31** Validation du modèle MSAR sur les log-prix

Ensuite, nous avons simulé 1000 trajectoires du cours logarithmique du bitcoin avec le modèle calibré sur la dernière année de l'échantillon. Afin d'éviter de surcharger le graphique, nous présentons uniquement cinq trajectoires sélectionnées au hasard parmi les mille projections, ainsi que les deux trajectoires qui délimitent le cône et la trajectoire observée. Cette visualisation graphique a pour objectif d'analyser la position de la trajectoire observée par rapport au cône de simulation. Les trajectoires définissant les limites (minimales et maximales) du cône de simulation ont été sélectionnées en conservant celle qui possède le plus grand nombre de points supérieurs (ou inférieurs) par rapport aux autres trajectoires simulées. Cependant, il est possible que certaines trajectoires se situent au-dessus ou en dessous des trajectoires limites à certains points d'observation.



**FIGURE 2.32** Cône de validation du modèle

Nous constatons que la trajectoire observée est dans le cône de simulations. Le modèle peut donc être utilisé pour diffuser des prix bitcoin en monde réel.

### 2.3.3.4 Calibration du choc

Ayant démontré sa capacité à simuler la trajectoire logarithmique du bitcoin, nous avons calibré un modèle MS(3)-AR(3) sur l'ensemble de l'échantillon, soit 4383 observations correspondant à 12 années d'observations journalières. Les paramètres optimaux du modèle ainsi calibré sont présentés dans le tableau 2.25 :

	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\sigma$
Régime1	1.63e - 03	0.91	0.05	0.04	1.67e - 04
Régime2	9.33e - 03	1.00	-5.72e - 04	-5.64e - 04	2.27e - 03
Régime3	3.01e - 02	1.07	-0.50	0.42	3.43e - 02

TABLE 2.25 Coefficient de la composante auto-régressive

La matrice de transition entre les 3 régimes du log-prix est donnée par :

$$P = \begin{pmatrix} 80.97\% & 19.03\% & 0.00\% \\ 15.09\% & 83.04\% & 1.87\% \\ 0.00\% & 16.92\% & 83.08\% \end{pmatrix}$$

*Matrice des probabilités de transition*

Cette matrice de transition illustre les probabilités de transition d'un état à un autre sur une base quotidienne. Chaque élément de cette matrice montre la probabilité de passer de l'état de la ligne à celui de la colonne correspondante.

La probabilité de rester dans le même état sur une base quotidienne est relativement élevée : 80.97%, 83.04% et 83.08% pour les trois régimes respectivement. Cela suggère une certaine stabilité ou inertie du système.

Néanmoins, les probabilités de transition vers d'autres états ne sont pas négligeable. Par exemple, la probabilité de passer de l'état 1 à l'état 2 est de 19.03%. De même, les transitions de l'état 2 vers l'état 1 et de l'état 3 vers l'état 1 sont faibles, avec des valeurs de 15.09% et 16.92% respectivement. Les transitions entre l'état 2 et l'état 3 sont légèrement plus élevées que les autres transitions, avec des valeurs de 1.87% et 16.92%. Cela suggère une certaine interconnexion entre ces deux états.

En résumé, cette matrice de transition indique une certaine stabilité dans chaque état, avec des transitions relativement peu fréquentes entre les états mais des transitions légèrement plus fréquentes entre les états 2 et 3.

Pour calculer le quantile à 0.5% représentant notre choc, nous avons adopté deux approches :

#### A) 1<sup>ère</sup> Application

La première étape consiste à générer 10 000 trajectoires du cours journalier logarithmique du bitcoin sur une période de 365 jours. Pour chaque trajectoire, nous revenons au prix initial non transformé avant de calculer un rendement relatif annuel en utilisant la formule suivante au temps  $t$  :

$$r_t^{(j)} = \frac{P_t^{(j)}}{P_0^{(j)}} - 1 = \exp(X_t^{(j)} - X_0^{(j)}) - 1, j \in [1, 10000] \text{ et } X_0^{(j)} = \log(P_0^{(j)}) \quad (2.17)$$

Le vecteur de 10000 rendements annuels nous a permis de calculer une densité empirique comme le montre l'histogramme de la figure 2.33 :

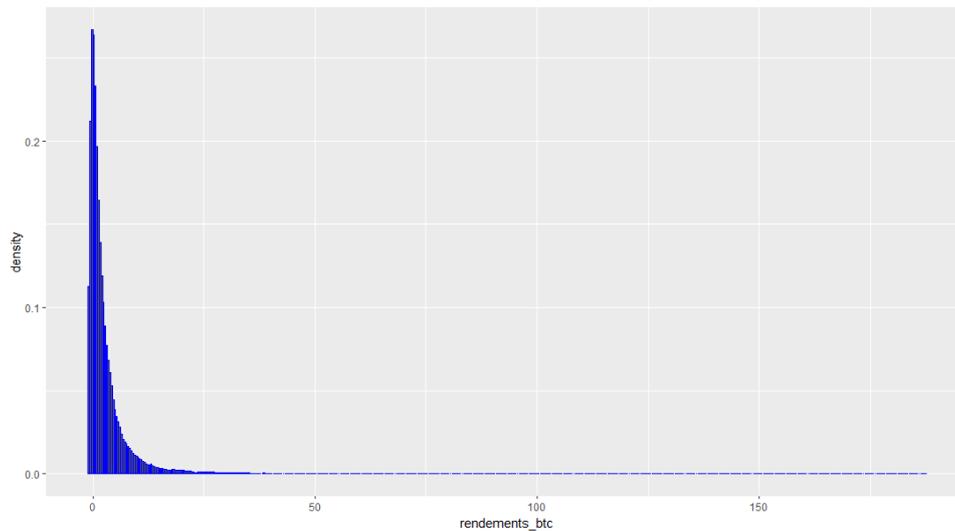


FIGURE 2.33 Densité des rendements annuels simulés

Le quantile empirique à 0.5% calculé sur cette distribution de rendements annuels bitcoin nous donne un choc de 89.98 %.

#### B) 2<sup>ème</sup> application

Le calcul du choc précédent est uniquement basé sur les trajectoires simulées. La deuxième approche qui va être présentée par la suite tente d'utiliser à la fois les observations réelles et les observations simulées. Cette approche, plus longue en temps machine, s'est décomposée en ces étapes :

- Nous avons généré 10000 trajectoires du cours logarithmique journalier du bitcoin sur 18 ans, soit 6570 jours.
- A chaque trajectoire de prix simulés, nous avons rajouté les 12 années d'historiques du bitcoin afin de constituer un historique de 30 ans.
- Pour chaque historique de 30 ans, nous avons calculé les rendements annuels (30 rendements annuels) avec la formule (2.17).
- Avec les 10000 historiques de rendements sur 30 ans, nous avons calculé pour chaque historique, le quantile empirique à 0.5%. Nous avons obtenu ainsi une distribution de 10 000 quantiles.
- Avec cette distribution de quantile, nous avons analysé la répartition de ces quantiles (la médiane, les quartiles, etc)

Ci-dessous, nous présentons les résultats des étapes décrites précédemment,

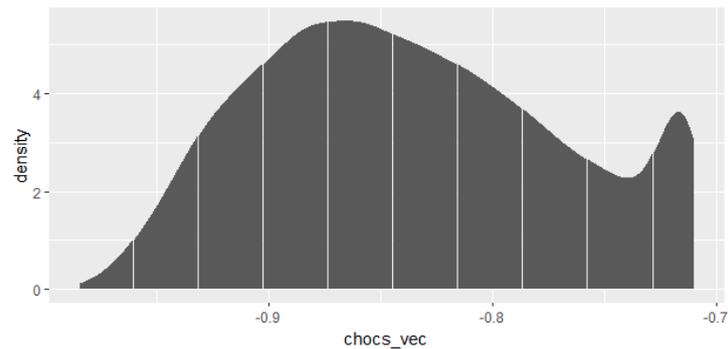


FIGURE 2.34 Densité empirique associée au 10000 quantiles à 0.5% calculés

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
98.4%	88.8%	84.2%	83.6%	78.7%	71.0%

TABLE 2.26 Quelques statistiques sur la distribution de chocs calibrés

Sur 10000 scénarios possibles, nous avons un choc moyen de 83.62%. La médiane est très proche de la moyenne. L'écart entre les quartiles est de 10%. **Nous avons retenu le choc médian de 84.24% dans cette 2ème approche.**

### 2.3.4 Calibration du modèle MSAR sur les log-rendements et calibration du choc

Dans cette partie, nous appliquons le modèle MS-AR à la série temporelle stationnaire des log-rendements pour tester la stabilité des résultats obtenus sur les log-prix. On modélise les log-rendements plutôt que les rendements relatifs pour des raisons expliquées à la partie (2.1.4).

Comme dans l'étude précédente sur les log-prix, nous avons également réalisé les tests de stationnarité et d'hétéroscédasticité sur l'échantillon de log-rendement. Ces tests ont statué sur le caractère stationnaire et hétéroscédastique et révélé l'applicabilité du modèle MSAR sur notre échantillon.

#### 2.3.4.1 Hyper-paramètres des composantes AR et MS

On trace les autocorrélogrammes simple et partiel de notre distribution log-rendement.

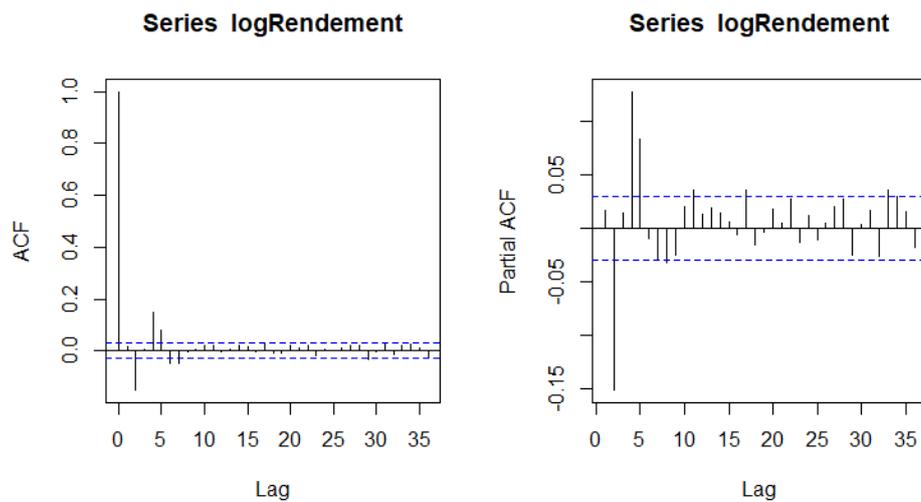


FIGURE 2.35 Autocorrélogrammes simple et partiel

Les autocorrélations simples sont en fonction du retard et tendent rapidement vers 0. Le coefficient d'autocorrélation partiel de retard cinq est le dernier coefficient qui dépasse de loin le seuil d'acceptation (plage délimité par les traits bleus). Nous retiendrons donc l'ordre maximal cinq pour la composante AR du modèle.

Pour la composante MS, comme dans le cas des log-prix, nous avons comparé la valeur du BIC des dix modèles candidats ajustés à notre échantillon. De MS(2)-AR(1) jusqu'à MS(2)-AR(5), et MS(3)-AR(1) jusqu'à MS(3)-AR(5). Le modèle qui présente la plus petite valeur du BIC est le modèle MS(3)-AR(5) (BIC = -15293.41). On rappelle ici que le BIC pénalise le nombre de paramètre à estimer (plus que l'AIC), mais malgré cela le modèle MS(3)-AR(5) est celui qui minimise le BIC, donc nous retiendrons ce modèle.

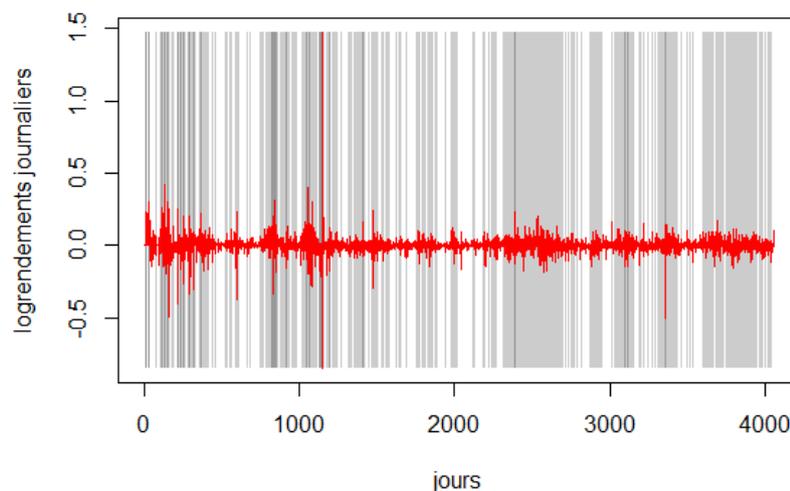


FIGURE 2.36 Régimes détectés par le modèle MSAR(3,5)

### 2.3.4.2 Backtesting du modèle

Le RMSE calculé avec les 365 points tests est de 0.094. Donc l'erreur quadratique moyenne de rendement est d'environ 10%. Cela n'est pas négligeable comparé au RMSE qu'on a pu observer avec les log-prix. La figure ci-dessous met en exergue la qualité de prédiction du modèle.

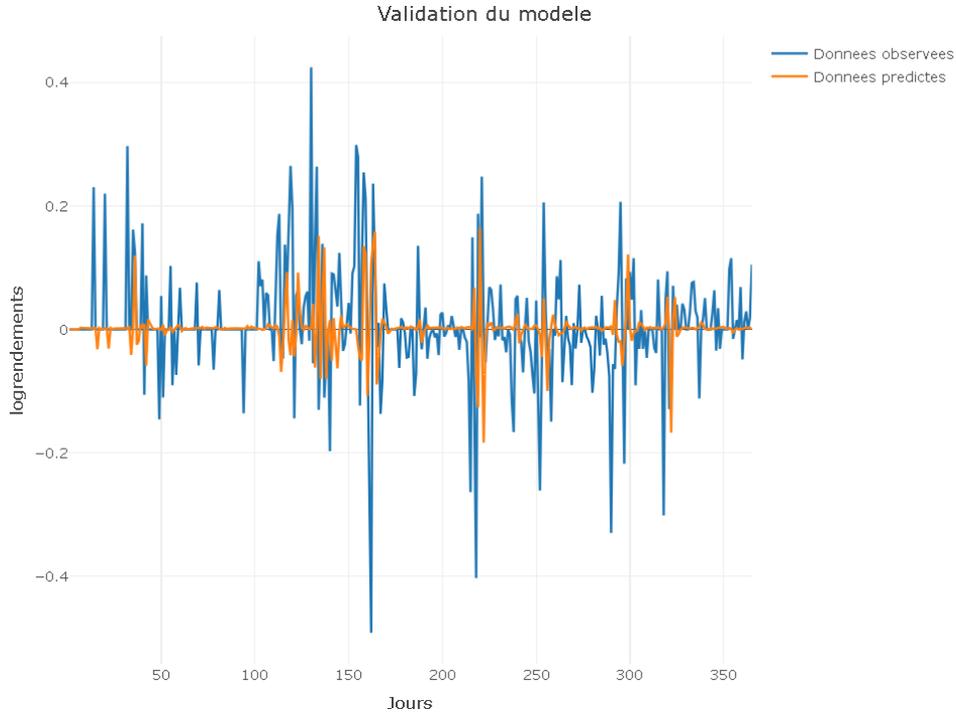


FIGURE 2.37 Validation du modèle MSAR sur les log-rendements

Comme dans le modèle du log-prix, nous simulons 1000 trajectoires de rendements logarithmiques.

Pour dessiner un cône de simulation de prix, on se ramène aux prix non transformés du bitcoin avec les trajectoires log-rendements simulés selon la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 Prix_j &= Prix_{initial} \times (1 + r^{(j)}) = Prix_{initial} \times \prod_{i=1}^j (1 + r_i) \\
 Prix_j &= Prix_{initial} \times \prod_{i=1}^j \left( 1 + \overbrace{\left( \exp\left(\log\left(\frac{Prix_{jour+1}}{Prix_{jour}}\right)\right)}\right)}^{\hat{r}_i} - 1 \right) \\
 Prix_j &= Prix_{initial} \times \prod_{i=1}^j (\exp(\hat{r}_i))
 \end{aligned}$$

avec,

- $r_i$  = rendement relatif journalier,
- $\hat{r}_i$  = log-rendement journalier,
- $r^{(j)}$  = le rendement observé sur la période  $[1, j]$ .

Afin d'améliorer la lisibilité du graphique, nous présentons deux échelles (normale et logarithmique) pour l'axe des ordonnées. Sur ce graphique, nous affichons cinq trajectoires sélectionnées aléatoirement

parmi les 1000 simulations, ainsi que les deux trajectoires délimitant le cône. De plus, la trajectoire observée des prix est également représentée.

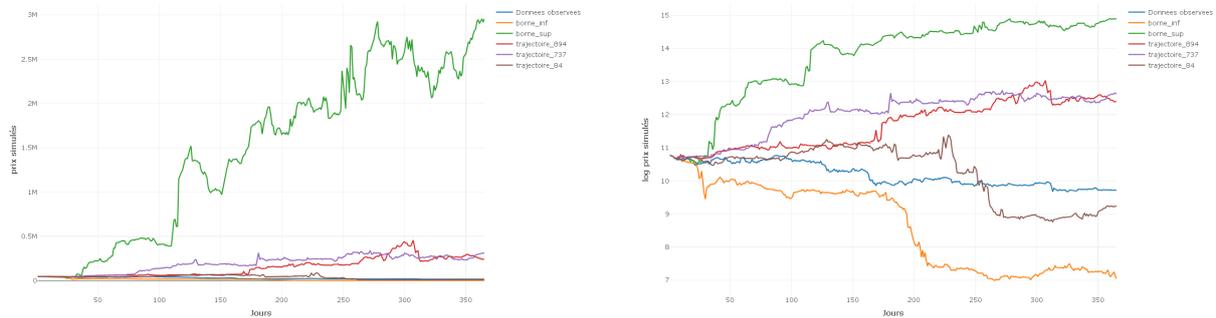


FIGURE 2.38 Cône de validation : Échelle normale Vs Échelle logarithmique

À partir du graphique à l'échelle logarithmique, nous observons que la trajectoire observée (en bleu) se situe à l'intérieur du cône de simulations. Ainsi, même si le RMSE est élevé, notre modèle ne produit pas de trajectoires incohérentes.

### 2.3.4.3 Calibration du choc

Suite à la validation des hyperparamètres modèle MS(3)-AR(5), nous ajustons le modèle sur la totalité de l'échantillon (4383 observations). Les paramètres optimaux du modèle calibré sont les suivants :

	$\beta_0$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\sigma$
Régime1	0.001	-0.094	-0.032	0.010	-0.022	-0.018	1.12e - 04
Régime2	0.003	-0.005	-0.003	-0.002	0.014	0.053	1.83e - 03
Régime3	5.39e - 04	0.072	-0.32	0.067	0.339	0.157	2.76e - 02

TABLE 2.27 Paramètres optimaux du modèle MSAR(3,5)

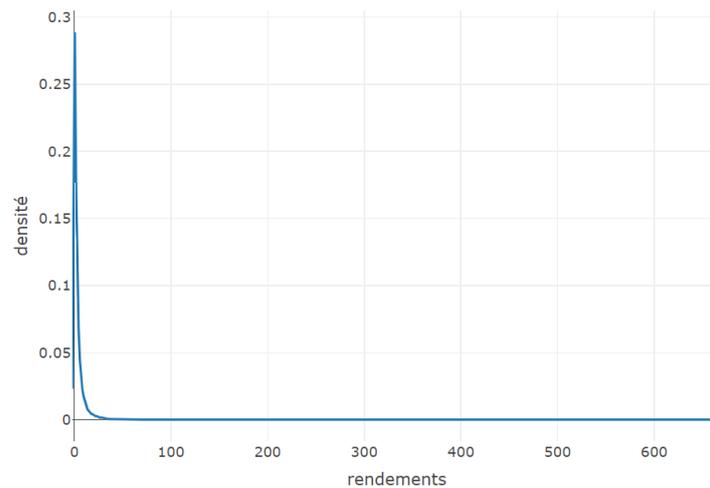
$$P = \begin{pmatrix} 77.45\% & 21.68\% & 0.8\% \\ 14.77\% & 83.22\% & 2.0\% \\ 0.06\% & 20.22\% & 79.20\% \end{pmatrix}$$

Matrice des probabilités de transition

Avec ce modèle, nous simulons 10 000 trajectoires de 364 log-rendements journaliers. Avec cette matrice de projection, nous calculons les rendements relatifs annuels avec la formule suivante :

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{365} \hat{r}_i\right) - 1, \text{ où } \hat{r}_i \text{ le log-rendement entre le jour } i+1 \text{ et le jour } i$$

. Nous obtenons alors un échantillon de 10 000 rendements annuels simulés. La densité empirique de cette échantillon est présentée ci-dessous.



**FIGURE 2.39** Densité des rendements simulés

**Le quantile à 0.5% de cette distribution donne un choc à 89.64%.**

### 2.3.5 Synthèse des 2 approches

Les chocs obtenus par simulation lors du calibrage du MSAR avec la distribution des log-prix - approche 1 - et la distribution des log-rendements présentent des similarités marquées (89.98% contre 89.64%). Cette convergence des méthodes est notable. Cependant, il est préférable d'accorder davantage de crédibilité au modèle ajusté sur la série temporelle non stationnaire des log-prix, car il offre un meilleur ajustement selon le critère du RMSE.

L'élargissement de l'échantillon simulé du log-prix avec l'historique des 12 dernières années observées - approche 2 - afin de disposer de 10 000 échantillons sur 30 années d'observations nous a permis d'obtenir une distribution des quantiles à 0.5%. Cette distribution révèle une plage d'observation du choc entre 98.41% et 71.03%. Il est important de souligner que tous les chocs obtenus avec les "meilleurs modèles" des différentes approches paramétriques de calibrage du choc mentionnées dans ce document se situent dans cette intervalle de valeurs.

De plus, l'écart de 10 points de pourcentage entre les quartiles suggère une dispersion modérée des valeurs autour de la médiane, ce qui peut indiquer une certaine stabilité ou cohérence dans les données de choc. **Ces analyses nous conduisent à retenir la valeur du choc bitcoin à 84% pour l'approche stochastique.**

## 2.4 Conclusion de le calibrage du choc bitcoin

Au cours du chapitre précédent, nous avons exploré en profondeur le calibrage du choc bitcoin et comment elle peut être réalisée en utilisant diverses méthodes statistiques et modèles de calibrage. Cette calibration est cruciale pour évaluer les risques associés au bitcoin dans le cadre d'un modèle ALM pour un assureur vie.

Toutes les méthodes de calibrage du choc bitcoin développées dans ce document convergent non pas vers une valeur de choc en particulier mais plutôt un intervalle de valeurs de choc éligible pour le bitcoin.

Méthode	Synthèse des résultats			
	Approche	Meilleur modèle	Choc	Intervalle éligible
Paramétrique	Historique 12 ans	Fréchet	77%	[77%, 84%]
	Historique glissant	Fréchet	84%	
	Historique mensuel	Normal Inverse Gaussien	81%	
Stochastique	Log-prix Application 1	MS(3)-AR(3)	90%	[84%, 90%]
	Log-prix Application 2	MS(3)-AR(3)	84%	
	Log-rendement	MS(3)-AR(5)	90%	

**TABLE 2.28** Table récapitulative des chocs

En se fondant sur les approches empiriques, paramétriques et stochastiques, ainsi que sur les résultats des meilleurs modèles retenus, toute valeur de choc se situant dans l'un des deux intervalles de choc éligibles pourrait être considérée comme une mesure robuste pour la poursuite de notre étude. Cependant, par principe de précaution et pour garantir un choc réaliste, nous avons opté pour une approche de sélection du choc final reposant sur l'intersection des intervalles de choc éligible. En conséquence, nous avons arrêté notre choix sur un choc bitcoin final de 84%, lequel a été retenu comme stress bitcoin dans le cadre du pilier I de Solvabilité 2.

Cependant, l'analyse des risques associés au bitcoin ne s'arrête pas là. Pour analyser l'impact de ce choc sur les résultats d'un assureur vie, il est également crucial réer un modèle représentatif de la réalité économique. Dans le chapitre suivant, nous allons nous pencher sur le calibrage d'un générateur de scénarios économiques (GSE) risque neutre adapté au bitcoin. Ce GSE permettra de simuler une variété de scénarios économiques futurs du bitcoin et de mesurer l'impact de ces scénarios sur le bilan de l'assureur. Une telle analyse est essentielle pour évaluer les risques et les opportunités que représente le bitcoin dans un portefeuille d'investissement diversifié et pour prendre des décisions de gestion des actifs et des passifs éclairées et stratégiques.

## CHAPITRE 3 : Construction d'un GSE risque-neutre bitcoin en norme S2

### 3.1 Cadre de l'étude

L'intégration du bitcoin dans le portefeuille d'un assureur vie nécessite le développement d'un générateur de scénarios économiques (GSE) neutre au risque spécifique au bitcoin. Cet outil est crucial pour projeter de manière stochastique l'évolution future des rendements du bitcoin sur l'horizon réglementaire de 50 ans. Son utilisation permet d'évaluer la performance et les risques du portefeuille global de l'assureur en intégrant le comportement unique du bitcoin dans divers scénarios économiques plausibles.

La construction d'un GSE neutre au risque pour le bitcoin suit généralement ces étapes :

1. Choix du modèle : sélection d'un modèle stochastique adapté, tel que le modèle de Heston pour sa capacité à capturer la volatilité stochastique.
2. Collecte des données : Recueil des prix d'options sur le bitcoin pour différentes maturités et prix d'exercice, en particulier les options à la monnaie qui reflètent les anticipations du marché.
3. Calibrage : Ajustement des paramètres du modèle pour reproduire au mieux les prix de marché observés, en minimisant l'écart entre les prix théoriques et les prix observés.
4. Génération de scénarios : Utilisation du modèle calibré pour générer de nombreux scénarios d'évolution future du bitcoin.
5. Validation : Vérification du caractère risque-neutre des scénarios générés et réalisation de tests de martingale.

Cette approche permet d'obtenir des scénarios économiques cohérents avec les anticipations du marché, essentiels pour une évaluation juste des risques liés au bitcoin dans le portefeuille.

La littérature offre un large éventail de modèles d'évaluation de produits dérivés. Une revue exhaustive, proposée par D. B. MADAN, REYNERNS et SCHOUTENS 2019, présente un panorama des modèles disponibles, allant des plus classiques comme le modèle de Black-Scholes aux plus sophistiqués tels que le VG-CIR (Variance Gamma - Cox-Ingersoll-Ross). Le VG-CIR se distingue particulièrement par sa capacité à reproduire fidèlement les prix observés, surpassant ainsi les autres modèles. Il intègre une volatilité stochastique et une composante de saut, offrant une représentation plus nuancée et réaliste du marché.

Néanmoins, le modèle VG-CIR présente un inconvénient majeur : il nécessite le calibrage de huit paramètres, ce qui peut s'avérer complexe à interpréter, comparativement aux cinq paramètres du modèle d'Heston. De plus, notre comparaison des performances des modèles d'Heston et VG-CIR via le RMSE (Root Mean Square Error) a révélé que l'amélioration offerte par le VG-CIR n'est pas proportionnelle à la complexité additionnelle qu'il introduit.

Au vu de ces considérations, nous avons opté pour le modèle d'Heston dans l'évaluation de nos options d'achat européennes sur le bitcoin (Call bitcoin). Ce choix est motivé par un souci d'équilibre entre la précision des prédictions et la simplicité d'interprétation et de mise en œuvre. Ce modèle offre un bon

compromis entre la capture des caractéristiques essentielles du marché du bitcoin et la facilité de calibrage et d'interprétation.

La base de données employée dans cette étude contient une série de prix pour des options Call bitcoin avec différentes maturités et prix d'exercice (Strikes) observés sur le marché. Les données ont été filtrées pour conserver uniquement les options d'achat à la monnaie<sup>19</sup>. En général, les options à la monnaie sont plus sensibles aux fluctuations de prix de l'actif sous-jacent que les options en dehors de la monnaie. Ainsi, elles offrent des indications précieuses sur la volatilité implicite du marché, utiles pour ajuster les modèles de volatilité stochastique pour une diffusion en univers risque neutre. Ci-dessous un aperçu des données Call bitcoin sélectionnée pour le calibrage de nos modèles de projection.

n°	strike	type	Maturity_day	Maturity_year	Spot	Price
1	26000	Call	4	0,0109589	28 479	2 612
2	26500	Call	4	0,0109589	28 479	2 162
3	27000	Call	4	0,0109589	28 479	1 746
4	27500	Call	4	0,0109589	28 479	1 361
5	28000	Call	4	0,0109589	28 479	1 022
6	28500	Call	4	0,0109589	28 479	752
7	29000	Call	4	0,0109589	28 479	544
.	.	.	.	.	.	.
63	31000	Call	270	0,73972603	28 479	4 978
64	26000	Call	361	0,9890411	28 479	7 946
65	27000	Call	361	0,9890411	28 479	7 504
66	28000	Call	361	0,9890411	28 479	7 088
67	29000	Call	361	0,9890411	28 479	6 713
68	30000	Call	361	0,9890411	28 479	6 351
69	31000	Call	361	0,9890411	28 479	5 981

FIGURE 3.1 Données Call spot bitcoin cotées à la date du 14 avril 2023

Les maturités sont inférieures à un an et varient en jours. La plus grande maturité est de 361 jours et s'explique par le fait que le marché des crypto-actifs est un marché très volatile, très spéculatif. La liquidité sur des maturités plus élevées. La base de données finale retraitée contient 69 observations de *Call* sur le bitcoin.

## 3.2 Modèle d'Heston

### 3.2.1 Structure du Modèle

Le modèle d'Heston est un modèle à deux facteurs qui décrit l'évolution du prix d'un actif sous-jacent et de sa volatilité. Le prix de l'actif suit un mouvement brownien géométrique, tandis que la volatilité suit un processus stochastique de réversion à la moyenne, le processus CIR (Cox–Ingersoll–Ross). Le modèle permet une volatilité variable dans le temps, en contraste avec les modèles qui supposent une volatilité constante, tels que le modèle de Black-Scholes.

Sous la mesure risque neutre, l'évolution du prix et de sa volatilité sont décrits par le système d'EDS

<sup>19</sup>. On dit qu'une option d'achat (Call) est "à la monnaie" quand le prix d'exercice est égal ou très proche du prix courant de l'actif sous-jacent

suivant :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^S \quad (3.18)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_t^V \quad (3.19)$$

où

- $\mu$  est le taux de rendement attendu du sous-jacent,
- $\kappa$  est la vitesse de retour à la moyenne de la volatilité,
- $\theta$  est la volatilité à long terme,
- $\sigma$  est la volatilité de la volatilité,
- $W_t^S$  et  $W_t^V$  sont des mouvements browniens de corrélation instantanée  $\rho$ , ie,  $Cov(dW_t^S, dW_t^V) = \rho dt$ .
- Les conditions initiales pour le prix et la volatilité :  $S_0 \geq 0$  et  $V_0 \geq 0$

### 3.2.2 Évaluation des options avec la méthode FFT

L'évaluation des options européennes dans le modèle d'Heston peut être réalisée par la transformée rapide de Fourier (FFT). De manière courante, quand un modèle est assez complexe pour obtenir une formule fermée de tarification pour les produits dérivés, les prix du modèle sont calculés avec la méthode de tarification de la Transformée Rapide de Fourier (FFT) développée par CARR et D. MADAN 1999.

En effet, si la fonction caractéristique  $\phi(u)$  du modèle d'évaluation du produit dérivé est connue analytiquement, le prix d'une *Call* d'achat européenne en date 0 avec un prix d'exercice  $K$  et un temps jusqu'à maturité  $T$  est donné par :

$$C(K, T) = \frac{\exp(-\alpha \log(K))}{\pi} \int_0^\infty \exp(-iv \log(K)) \rho(v) dv \quad (3.20)$$

où

- 

$$\rho(v) = \frac{\phi_T(v - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - v^2 + i(2\alpha + 1)v} \quad (3.21)$$

- $C$  est le prix du *Call*,
- $r$  est le taux d'intérêt sans risque,
- $K$  est le prix d'exercice,
- $T$  est le temps jusqu'à l'expiration.
- $i$  est le nombre imaginaire
- $\alpha = 1.5$

Nous rappelons aussi que, pour une maturité et un prix d'exercice identiques, il est possible de déterminer le prix d'une option de vente à partir du prix d'une option d'achat en utilisant la formule de parité *Call-Put*. Cette formule s'énonce comme suit :

$$\text{Put} + S = C + K \times e^{-rT}$$

La méthode de la transformée de Fourier rapide (FFT) exploite la forme analytique de la fonction caractéristique pour permettre un calcul à la fois rapide et efficace.

La fonction caractéristique  $\phi_t(u)$  de  $\log(S_t)$  pour le modèle d'Heston est donnée par :

$$\begin{aligned}\phi_t(u) &= \exp(iu \log(S_0)) \\ &\times \exp(\theta \kappa \sigma^{-2} ((\kappa - \rho \sigma u i - \eta)t - 2 \log((1 - g \exp(-dt))(1 - g)^{-1}))) \\ &\times \exp(V_0 \sigma^{-2} (\kappa - \rho \sigma u i - \eta)(1 - \exp(-dt))(1 - g \exp(-dt))^{-1})\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}d &= ((\rho \sigma u i - \kappa)^2 - \sigma^2 (-iu - u^2))^{1/2}, \\ g &= (\kappa - \rho \sigma u i - d)(\kappa - \rho \sigma u i + d)^{-1}.\end{aligned}$$

et  $\kappa, \theta, \sigma, \rho, V_0$  les paramètres d'Heston définies dans la section 3.2.1.

### 3.2.3 Calibration des paramètres du modèle Heston

Le calibrage des paramètres du modèle d'Heston est une étape cruciale pour assurer que les paramètres calibrés rendent le modèle d'Heston aussi proche que possible des observations du marché. Cette étape est fondamentale pour garantir que les simulations et les évaluations basées sur le modèle d'Heston sont pertinentes et représentatives de la réalité économique. Dans cette étude, l'ajustement des paramètres est réalisé en minimisant la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) entre les prix observés des Call sur le marché et les prix calculés par le modèle. La fonction d'erreur quadratique moyenne à minimiser est donnée par :

$$\text{RMSE} = \sqrt{\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (C(K_i, T_i) - P_{\text{observé},i})^2 \right)}$$

où

- $N$  est le nombre total d'options observées,
- $P_{\text{observé},i}$  est le prix observé de l'option  $i$  sur le marché.

Il s'agit donc de déterminer les paramètres optimaux  $\hat{\theta}, \hat{\kappa}, \hat{\sigma}, \hat{\rho}, \hat{v}_0$  de telle sorte que :

$$\left( \hat{\theta}, \hat{\kappa}, \hat{\sigma}, \hat{\rho}, \hat{v}_0 \right) = \min_{(\theta, \kappa, \sigma, \rho, v_0)} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (C(K_i, T_i) - P_{\text{observé},i})^2 \right), \quad (3.22)$$

avec  $\text{Call}_i$  le prix théorique.

Durant l'optimisation de ces paramètres, nous nous sommes assurés que les paramètres ajustés respectent la condition de Kepper pour garantir la non-négativité du processus de volatilité. La condition de Kepper, également connue sous le nom de condition de Feller, énonce que si les paramètres satisfont à la condition suivante, alors le processus  $V_t$  demeure strictement positif presque sûrement :

$$2\hat{\kappa}\hat{\theta} > \hat{\sigma}^2$$

Les paramètres optimaux, obtenus suite à l'ajustement du modèle et vérifiant la condition de Feller, sont

présentés dans le tableau 3.1 :

algorithme	RMSE	$\kappa$	$\theta$	$\sigma$	$\rho$	$V_0$
Nelder-Mead	38.507	1.302	0.546	1.192	-0.097	0.355

**TABLE 3.1 Paramètres optimaux du modèle d'Heston**

L'analyse des paramètres calibrés du modèle d'Heston pour le bitcoin révèle plusieurs caractéristiques notables :

- La vitesse de réversion ( $\kappa$ ) est relativement faible, environ 1.3, indiquant une tendance lente du processus de volatilité à revenir à sa moyenne.
- La volatilité du processus de volatilité ( $\sigma$ ) est très élevée, atteignant 1.192, reflétant l'instabilité prononcée de la volatilité du bitcoin.
- La volatilité à long terme ( $\theta$ ) est également élevée, à 0.546, confirmant la nature volatile du bitcoin sur le long terme.

Ces paramètres sont cohérents avec la volatilité élevée et le comportement imprévisible du bitcoin. Cependant, ils soulèvent des inquiétudes quant à la stabilité des simulations de trajectoires de prix, qui pourraient produire des scénarios extrêmes et potentiellement compromettre les tests de validation réglementaires.

Une corrélation négative modérée (environ -10%) a été observée entre le processus de prix du bitcoin et celui de la volatilité. Cette relation inverse, bien que modeste, correspond au phénomène fréquemment observé où une augmentation de la volatilité tend à être associée à une baisse des prix.

Malgré la cohérence apparente des paramètres estimés, le modèle présente un RMSE (Root Mean Square Error) d'environ 39€. Cette erreur moyenne de prédiction de 39€ souligne les défis persistants dans la modélisation du bitcoin. Néanmoins, il est crucial de contextualiser cette erreur par rapport aux prix des options Call sur le bitcoin. En effet, cette marge d'erreur ne représente qu'une fraction minime des prix observés des options Call, ce qui rend le RMSE acceptable dans le cadre de notre étude utilisant le modèle d'Heston pour l'évaluation des options Call sur le bitcoin.

La figure 3.2 montre la correspondance entre les prix théoriques, calculés via la formule d'évaluation (équation 5.31) d'un Call européen à partir des paramètres optimaux d'Heston, et les prix réels du marché. Elle permet une évaluation visuelle de la précision des paramètres optimaux. L'adéquation du modèle à refléter les prix du marché est notablement illustrée sur le graphique.

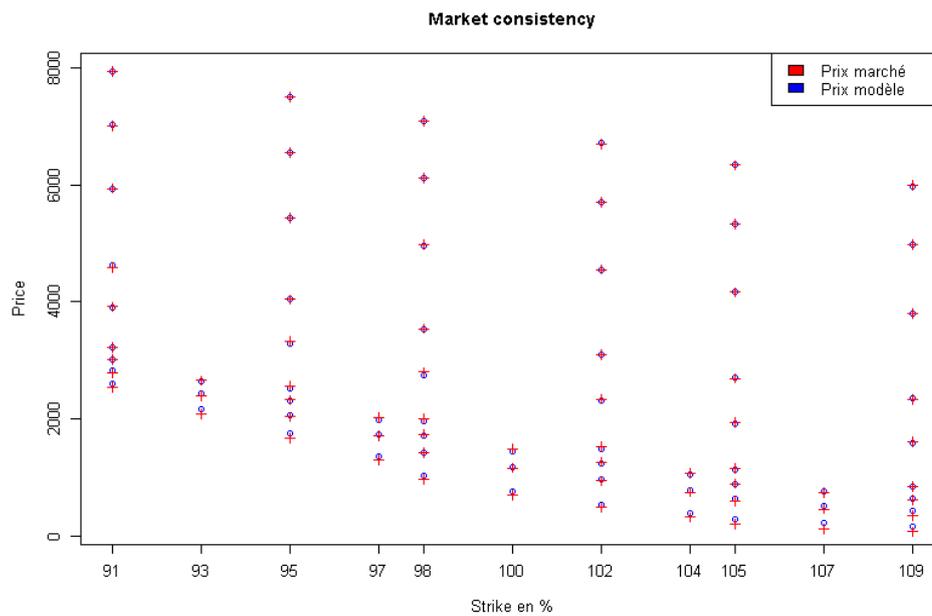


FIGURE 3.2 Adéquation entre prix de marché et prix théoriques

### 3.3 Modèles de discrétisation de processus

Pour générer des trajectoires de prix fiables, il est essentiel de choisir un schéma de discrétisation adapté afin de minimiser les erreurs associées à ce processus. La littérature propose plusieurs méthodes de discrétisation destinées à réduire les erreurs tout en traitant les valeurs négatives courantes dans les modèles de volatilité stochastique. Par exemple, bien que la discrétisation du processus CIR avec le schéma d'Euler puisse respecter la condition de Keller, elle ne garantit pas toujours l'élimination des valeurs négatives. Pour corriger cela, il est habituel d'utiliser la valeur absolue ou le maximum entre la volatilité et zéro. L'étude de LORD, KOEKOEK et DIJK 2010 a montré que, pour le modèle d'Heston, la méthode  $Max(v_t, 0)$  est plus efficace pour réduire le biais que l'utilisation de la valeur absolue.

Par ailleurs, l'étude de MILAN et JAN 2023 a comparé plusieurs modèles de diffusion, tels que les schémas d'Euler et de Milstein, et a conclu que le schéma de discrétisation Quadratique Exponentiel (QE), introduit par Andersen ANDERSEN 2008, est actuellement la méthode de diffusion la plus précise.

Dans notre étude, les paramètres calibrés sur les données bitcoin, caractérisés par une volatilité élevée et une faible tendance à la réversion, ont généré des trajectoires explosives dès les premières années avec le schéma d'Euler classique. Nous avons donc opté pour le schéma de Milstein, une version améliorée du schéma d'Euler (voir section 3.3.1), pour générer nos scénarios de prix et réaliser nos tests de cohérence de marché (Market Consistency MC). Le schéma de Milstein s'est montré plus performant dans nos tests de MC.

Toutefois, pour le test de martingalité nécessitant une diffusion des processus sur 50 ans, le schéma de Milstein n'a pas pu empêcher les trajectoires explosives au-delà de la dixième année de projection. Un défi majeur dans le calibrage de ce GSE bitcoin a été de contrôler l'explosion des trajectoires sur de longues périodes, un problème récurrent dans les modèles de volatilité stochastique. C'est ici que le modèle QE a prouvé son efficacité pour nos tests de martingalité sur 50 ans. Le schéma de discrétisation

QE, par sa conception, permet de limiter le phénomène d'explosion en contraignant la plage de variation du processus de volatilité (section 3.3.2). Cependant, ce modèle s'est révélé moins performant que le schéma de Milstein pour le test de MC.

Le modèle de discrétisation final retenu, qui satisfait à la fois les tests de cohérence de marché et de martingale sur 50 ans, combine ces deux approches de diffusion. Nous analyserons en détail cette solution hybride dans la suite de notre étude.

### 3.3.1 Schéma de discrétisation de Milstein

Le schéma de Milstein est une amélioration du schéma d'Euler, incluant un terme supplémentaire grâce au lemme d'Itô et à l'expansion en série de Taylor du second ordre. Comme l'indique JIM 2006, son application au processus de variance réduit la fréquence des valeurs négatives et l'erreur de discrétisation comparativement au schéma d'Euler. Cependant, des valeurs négatives peuvent encore apparaître, nécessitant des ajustements similaires à ceux suggérés par LORD, KOEKKOEK et DIJK 2010, soit  $v_n^+ = \max(v_n, 0)$ .

Voici le schéma de Milstein tel qu'il a été adopté dans notre étude :

$$v_{n+1} = \underbrace{v_n + \kappa (\theta - v_n^+) \Delta_n + \sigma \sqrt{v_n^+} Z_v \sqrt{\Delta_n}}_{\text{Discrétisation d'Euler}} + \frac{1}{4} \sigma^2 (Z_v^2 - 1) \Delta_n,$$

où  $Z_v$  représente une variable aléatoire normale standard. De manière similaire, nous pouvons appliquer le schéma de Milstein au processus  $S_n$ , ce qui donne :

$$S_{n+1} = \underbrace{S_n + r S_n \Delta_n + S_n \sqrt{v_n^+} Z_S \sqrt{\Delta_n}}_{\text{Discrétisation d'Euler}} + \frac{1}{2} S_n v_n^+ (Z_S^2 - 1) \Delta_n,$$

où  $Z_S$  est une variable aléatoire de loi normale standard avec une corrélation  $\rho$  à  $Z_v$ .

Le schéma de Milstein est largement utilisé dans le domaine de la finance pour la simulation de divers processus stochastiques, y compris mais sans s'y limiter, les modèles de volatilité stochastique. L'ajout du terme supplémentaire dans le schéma de Milstein, par rapport au schéma d'Euler, permet une meilleure approximation du mouvement brownien géométrique, ce qui est particulièrement utile dans le contexte de la modélisation des marchés financiers. De plus, bien que le schéma de Milstein puisse encore produire des valeurs négatives pour le processus de volatilité, la fréquence de ces occurrences est réduite, ce qui améliore la stabilité et l'exactitude des simulations. Enfin, il convient de mentionner que le schéma de Milstein, comme tout autre schéma numérique, est soumis à des erreurs d'approximation et de discrétisation et doit donc être calibré avec prudence.

### 3.3.2 Modèle Quadratique Exponentielle (QE) pour la volatilité

Ce modèle exploite le fait que la valeur  $v_{n+1}$ , conditionnée par  $v_n$ , suit une loi du  $\chi^2$  (chi-carré ou chi-deux) non centrée (loi de transition d'un processus CIR). Il emploie deux approximations distinctes de cette loi, selon les valeurs de la variance. Cette méthode est particulièrement utile pour la gestion de la volatilité. Le paramètre de non-centralité pour  $v_{n+1}$  est proportionnel à  $v_n$ , et pour des valeurs élevées de  $v_n$ , le modèle utilise une fonction de puissance sur une variable normale standard  $Z_v$  pour estimer

$v_{n+1}$ . Par conséquent, un seuil critique  $\psi_C \in [1, 2]$  est défini et comparé à  $\psi$ , calculé comme  $\psi = s^2/m^2$ , où  $m^2$  et  $s^2$  sont des fonctions de  $v_n$  :

$$m = \theta + (v_n - \theta)e^{-\kappa\Delta t} \quad (3.23)$$

et,

$$s^2 = \frac{v_n \sigma^2 e^{-\kappa\Delta t}}{\kappa} (1 - e^{-\kappa\Delta t}) + \frac{\sigma^2 \theta}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa\Delta t})^2 \quad (3.24)$$

Si  $U_v$  est définie comme une variable aléatoire uniforme et que  $Z_v = \phi^{-1}(U_v)$ , où  $\phi$  représente la fonction de répartition d'une loi normale, alors les deux approximations distinctes de la loi  $\chi^2$  non centrée, basées sur les valeurs de la volatilité  $v_n$ , sont spécifiées de la manière suivante :

1. Si  $\psi \leq \psi_C$ , on pose  $v_{n+1} = a(b + Z_V)^2$ , où

$$a = \frac{m}{1 + b^2}, \quad b^2 = 2\psi^{-1} - 1 + \sqrt{2\psi^{-1} - 1} \sqrt{2\psi^{-1} - 1} \geq 0 \quad \text{et} \quad (3.25)$$

2. Si  $\psi > \psi_C$  on pose  $V_{n+1} = \Psi^{-1}(U_V; p, \beta)$ , où

$$\Psi^{-1}(u) = \Psi^{-1}(u; p, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq u \leq p \\ \beta^{-1} \ln\left(\frac{1-p}{1-u}\right) & \text{pour } p < u \leq 1 \end{cases}, \quad (3.26)$$

où,

$$p = \frac{\psi - 1}{\psi + 1} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1 - p}{m}.$$

Comme mentionné précédemment, la valeur de  $\psi_C$  détermine quelle approximation utiliser. La première approximation n'est valide que pour  $\psi \leq 2$ . Si  $\psi$  excède cette valeur, ce qui correspond à des valeurs basses de  $v_n$ , le schéma échouera. Lorsque  $\psi \geq 1$ , la seconde approximation peut être appliquée. Par conséquent,  $\psi_C$  doit se situer dans l'intervalle  $[1, 2]$  pour assurer le fonctionnement du schéma de discrétisation. Dans l'article de MILAN et JAN 2023, les auteurs recommandent la valeur 1.5 pour le seuil  $\psi_C$ .

En somme, le schéma QE permet de contrôler les trajectoires explosives en ajustant dynamiquement la volatilité via une approximation basée sur la loi du  $\chi^2$  non centrée, garantissant que les valeurs extrêmes de la variance sont traitées différemment, ce qui empêche la volatilité de croître indéfiniment tout en conservant une stabilité dans les projections futures.

Dans le cadre de notre recherche, nous avons choisi la valeur suggérée de 1.5 comme seuil  $\psi_C$  pour la méthode QE, conformément à la recommandation pour le seuil critique  $\psi_C$ . En utilisant les paramètres optimaux du modèle d'Heston, nous avons simulé des trajectoires de prix du bitcoin pour générer nos scénarios économiques. La norme Solvabilité II impose des tests réglementaires pour la validation des modèles stochastiques. Ces tests aident à la prise de décision pour le choix des modèles pour la projection du prix du bitcoin. Dans la section suivante, nous présenterons les scénarios générés par ces deux schémas aux tests réglementaires.

## 3.4 Tests réglementaires pour la validation du modèle

Les tests réglementaires imposés par Solvabilité II (S2), à savoir le test de Market Consistency et le test de martingalité, nécessitent d'actualiser les différentes trajectoires de prix à l'aide d'une courbe de taux sans risque. Pour le calibrage de notre GSE bitcoin, nous avons utilisé la courbe de taux sans risque zéro-coupon de l'EIOPA, publiée le 31 octobre 2023.

### 3.4.1 Test de Market Consistency

Conformément à la norme Solvabilité II, il est crucial de procéder à un test de cohérence du GSE provenant du modèle avec les données du marché observées. Le test de cohérence de marché, réalisé par la méthode de Monte Carlo, sert à confirmer que les prix produits par le modèle se rapprochent des prix de marché des options dérivées liées à l'actif sous-jacent. Ce test de cohérence de marché se distingue de celui présenté dans la figure 3.2 de la section 3.4.1. En effet, le test de cohérence de marché via Monte Carlo se base sur les prix des Call issus des scénarios du modèle plutôt que sur la formule d'évaluation fermée du prix Call d'Heston. Ce test est essentiel pour déterminer si le modèle de diffusion choisi peut créer des scénarios qui représentent avec une précision acceptable la réalité du marché et ses prévisions futures.

Pour mener à bien ce test, nous avons généré 10 000 trajectoires de prix avec un intervalle temporel de  $\frac{1}{1000}$  sur une durée d'un an, en employant les méthodes de Milstein et QE. Par la méthode de Monte Carlo (MC), nous avons évalué et comparé la capacité de nos modèles à créer des trajectoires de prix pour le bitcoin qui reflètent les prix du marché de nos produits dérivés. Le calcul des prix des options d'achat européennes par la méthode de MC est formulé comme suit :

$$C(K, T) = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (S_T^i - K)^+ \quad (3.27)$$

avec,

- $C$  est le prix de l'option d'achat européenne,
- $r$  est le taux d'intérêt sans risque,
- $N$  est le nombre de simulations Monte Carlo,
- $S_T^i$  est le prix de l'actif sous-jacent à l'expiration de l'option dans la  $i$ -ème simulation,
- $K$  est le prix d'exercice de l'option,
- $(x)^+$  est la fonction  $\max(0, x)$ , qui représente le payoff de l'option.

Cette formule calcule le prix de l'option en moyennant les payoffs des options pour un grand nombre de simulations Monte Carlo, actualisés au temps actuel.

Compte tenu de la popularité de la méthode d'Euler, nous avons aussi inclus le RMSE de ce dernier pour comparer ses performances avec celles des méthodes de Milstein et QE.

Les RMSE issus des scénarios générés pour chaque méthode sont présentés dans le tableau ci-dessous.

Méthode de discrétisation	RMSE
Euler	6221.5
QE	2779.9
Milstein	56.8

TABLE 3.2 Comparaison des modèles des diffusion

Selon les valeurs du RMSE (table 0.10), la méthode de Milstein s'est révélée être la plus efficace pour générer des prix proches de ceux du marché parmi les méthodes évaluées. Les méthodes d'Euler et de QE montrent des RMSE considérables. Cependant, le schéma d'Euler est le moins performant avec un RMSE de 6221,5.

La figure 3.3 illustre le test de Market-Consistency avec le schéma de Milstein.

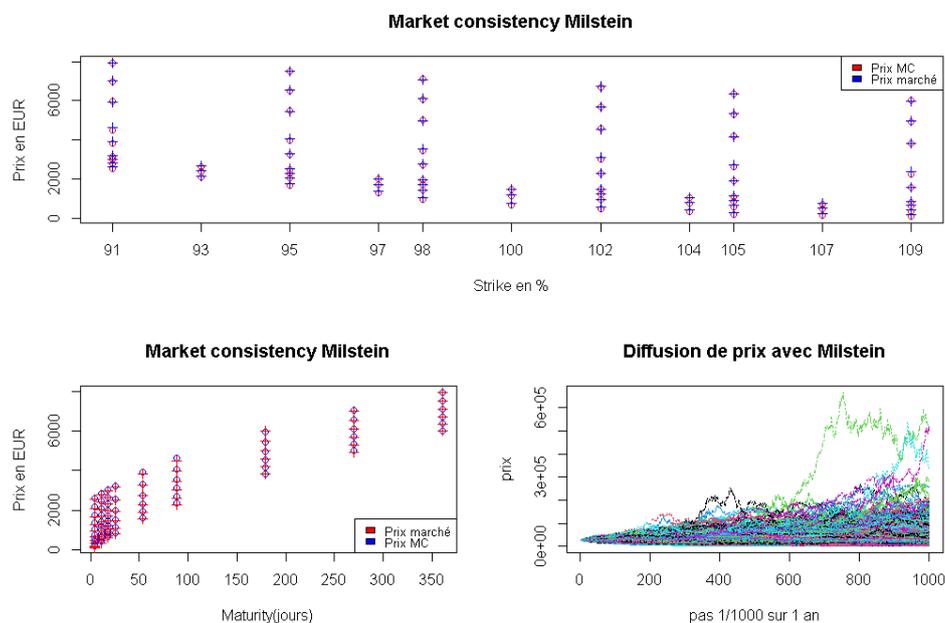


FIGURE 3.3 Test de Market Consistency avec Milstein

Le graphique référencé (3.3) illustre l'efficacité du modèle d'Heston, en combinaison avec le schéma de diffusion de Milstein, pour générer sur un horizon court (1 an), des trajectoires de prix du bitcoin qui reproduisent via Monte Carlo les prix des options d'achat (Call) dans notre base de données.

### 3.4.2 Test de martingalité

Dans ce test, l'objectif est de s'assurer que les trajectoires de prix sont des martingales, c'est-à-dire vérifier que l'espérance des valeurs futures de l'actif sous-jacent, une fois actualisées, est équivalente à la valeur initiale de l'actif. Dans le contexte du pilier I de Solvabilité II, l'emploi de trajectoires martingales dans la modélisation ALM offre plusieurs avantages spécifiques.

En résumé, l'utilisation de trajectoires martingales calibrées en monde risque neutre dans la modélisation ALM offre une approche cohérente et réaliste pour évaluer et gérer les risques associés aux actifs et aux passifs d'une institution financière. Ces modèles fournissent des projections de flux de trésorerie futurs alignées avec les anticipations du marché, ce qui permet une gestion efficace des risques, une optimisation des portefeuilles et une évaluation précise des stratégies de couverture.

Théoriquement, le test compare le prix initial avec l'espérance des sommes des prix actualisés à chaque période. Si le processus est une martingale, le rapport entre l'espérance des sommes des prix actualisés et le prix initial devrait être proche de 1.

$$R = \frac{E \left\{ \exp \left[ - \int_t^T r_u du \right] * P(t, T) \mid \mathcal{F}_t \right\}}{P(t, t)} \quad (3.28)$$

avec :

- $r_t$  le taux court instantané à l'instant  $t$
- $P(t, T)$  le prix de l'action en  $T$  vu à l'instant  $t$ .

En appliquant le modèle d'Heston, nous avons produit 1000 scénarios de prix pour chaque méthode de discrétisation (Milstein et QE) sur une durée de 50 ans avec un pas de temps de 1/1000. Les ratios de martingalité ont été calculés en utilisant la formule 3.28. Les résultats des tests de martingalité pour chaque méthode sont exposés ci-dessous, avec et sans les intervalles de confiance pour plus de clarté. Le niveau de confiance des intervalles est établi à 95%.

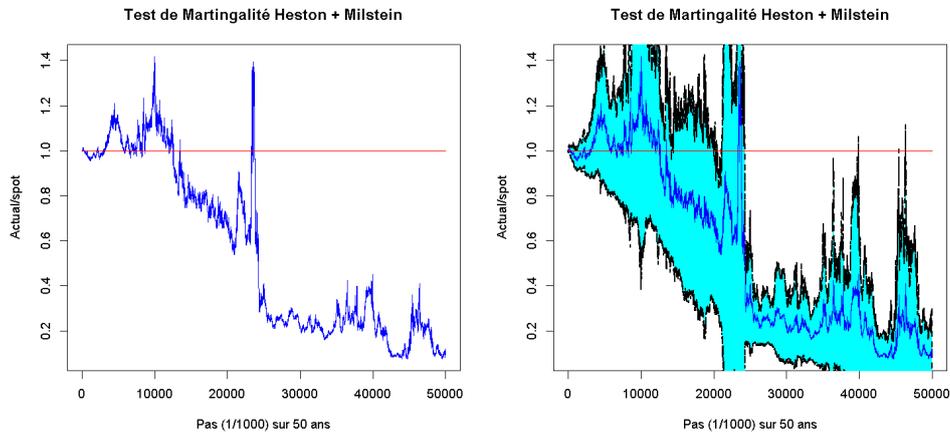


FIGURE 3.4 Test de martingalité avec Milstein

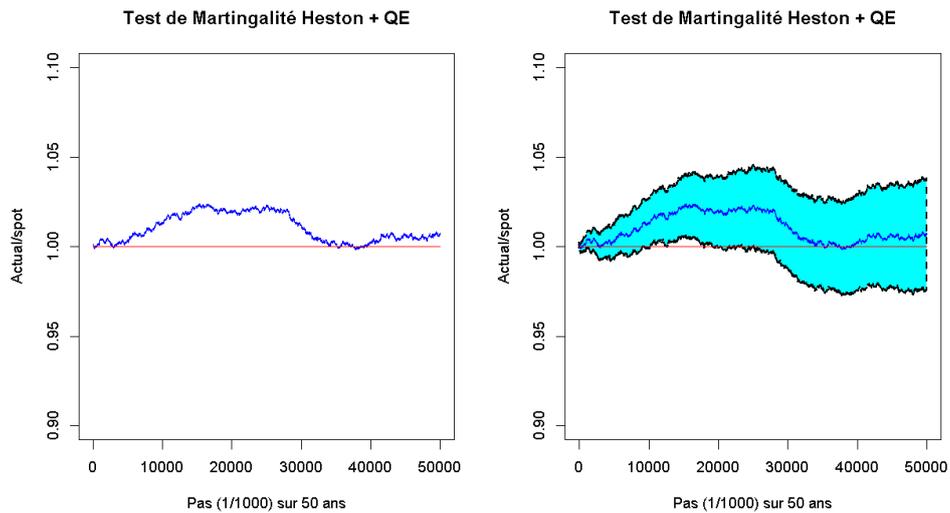


FIGURE 3.5 Test de martingalité avec QE

À partir des deux figures 3.4 et 3.5, on observe que si la discrétisation de Milstein était auparavant

celle qui reproduisait le mieux les prix d'options d'achat (Call) observés, c'est l'inverse qui se produit avec le test de martingalité. En effet, la forte volatilité des prix, combinée aux erreurs de discrétisation, entraîne une annulation progressive de trajectoires de prix au cours de la projection, d'où un ratio qui s'annule dès la 10<sup>ème</sup> année comme l'illustre la figure 3.4.

En revanche, la discrétisation QE, qui modélise la volatilité par deux approximations de la loi  $\chi^2$ , permet de contrôler le processus de volatilité, évitant ainsi les extrêmes tels que les explosions ou les effondrements de trajectoires. Cependant, comme le montre la section 3.4.1 avec le test de cohérence du marché (Market Consistent), Cette méthode présente l'inconvénient de masquer certains aspects de la réalité du marché, étant donné que les scénarios générés ne reflètent pas fidèlement les prix constatés sur le marché. Toutefois, la norme Solvabilité II (S2) exige que les GSE, en entrée du modèle ALM, passent à la fois les tests de cohérence du marché et de martingalité lors de la projection des actifs dans un univers à risque neutre. Une approche novatrice présentée dans ce mémoire a été de concevoir une méthode qui tire parti des caractéristiques des deux schémas de discrétisation. Nous avons appelé cette méthode la "martingalisation des scénarios de prix". Bien que cette méthode ait des limites que nous exposerons dans la section 3.4.4, et qu'elle ait été utilisée pour générer le GSE du bitcoin dans ce mémoire, nous sommes confiants dans son potentiel pour perfectionner la création de trajectoires martingales pour d'autres actifs financiers.

### 3.4.3 Martingalisation des scénarios de prix

Comme nous l'avons observé précédemment, le schéma de Milstein est plus performant pour reproduire les prix du marché lors du test de cohérence au marché. Ce test est d'une importance capitale car il permet d'associer un GSE à un actif en particulier. Il était donc essentiel de conserver le schéma de Milstein pour sa capacité à reproduire fidèlement le prix du marché.

Nous avons aussi constaté que la discrétisation QE était celle qui produisait des trajectoires presque martingales sur une période de 50 ans. Ainsi, l'idée derrière la martingalisation des scénarios consiste d'abord à diffuser les prix avec la discrétisation de Milstein jusqu'au moment où le test de martingalité commence à se dégrader. À ce stade, nous récupérons les prix et volatilités de Milstein que nous utilisons comme paramètres de départ pour la discrétisation QE. Ensuite, avec cette dernière, nous continuons à diffuser nos scénarios jusqu'à l'horizon souhaité. La méthode est résumée dans le schéma ci-dessous.

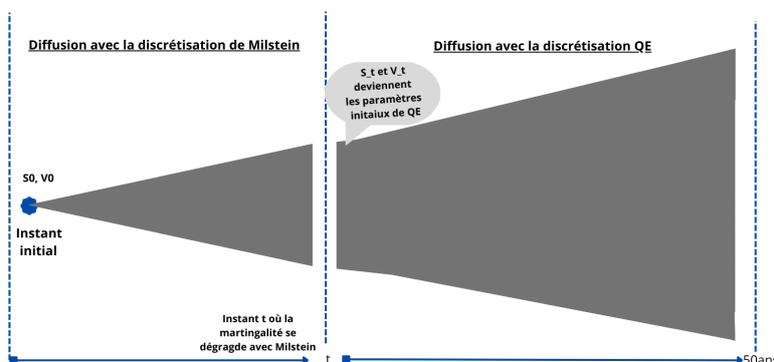


FIGURE 3.6 Martingalisation des scénarios de prix

La méthode peut être vue comme un processus de martingalisation qui se déroule en deux étapes.

### 3.4.3.1 Étape 1 : Déterminer le moment précis de la fusion des deux schémas pour une diffusion sur 50 ans.

Nous avons constaté sur la figure 3.4 que le test de martingalité utilisant le schéma de Milstein commence à se détériorer après la dixième année de projection. Afin de déterminer précisément ce seuil temporel où le test de martingalité se dégrade, nous avons produit 1000 scénarios de prix du bitcoin sur une période de 15 ans, avec un pas de temps de 1/1000, en employant la discrétisation de Milstein. La figure 3.7 illustre le test de martingalité effectué sur ces prix du bitcoin projetés sur 15 ans.

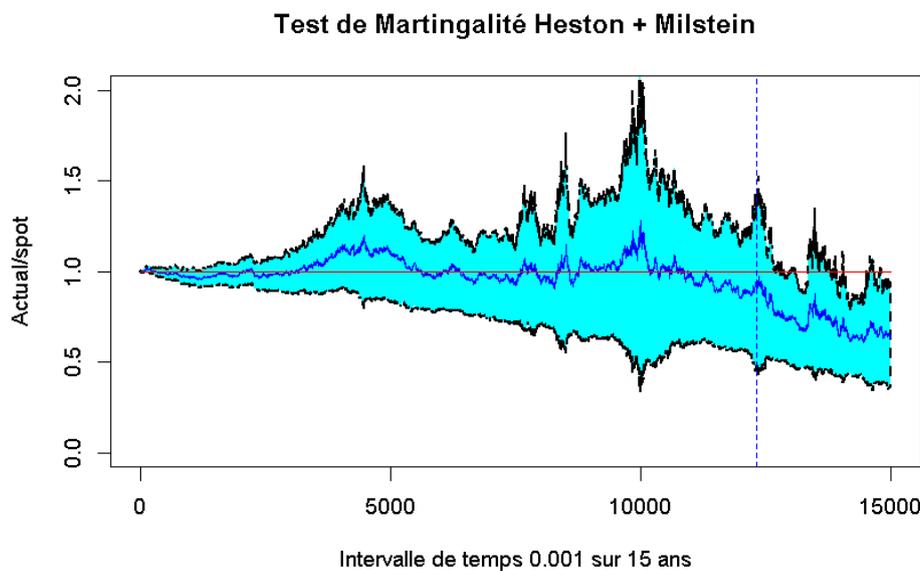
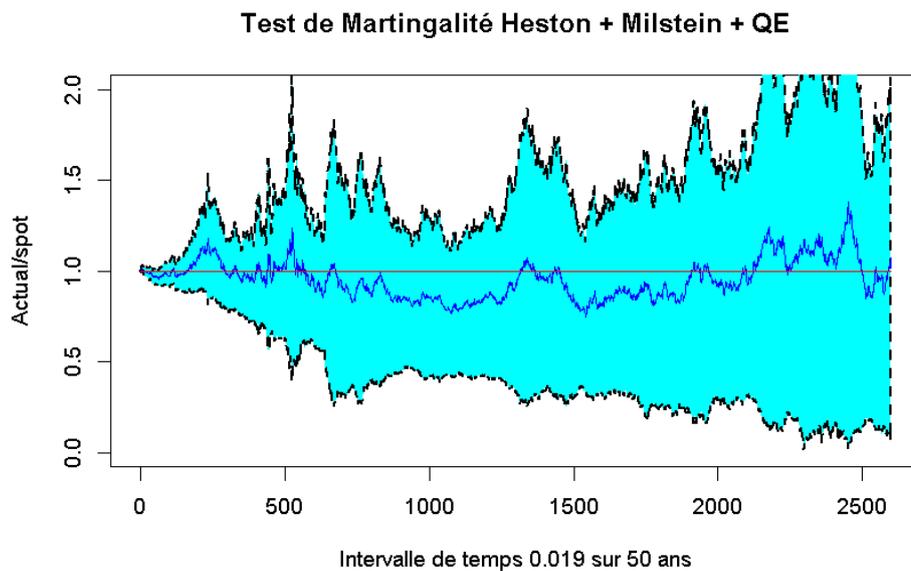


FIGURE 3.7 Étape 1 du processus de martingalisation

La ligne verticale bleue sur la figure 3.7 signale le point que nous avons identifié comme le début de la dégradation du test de martingalité, correspondant à 12,3 ans. En conséquence, les 12 premières années de projection de notre GSE final seront effectuées en utilisant la méthode de discrétisation de Milstein.

### 3.4.3.2 Étape 2 : Diffusion des scénarios sur 50 ans avec le schéma QE

Les prix  $S_{t=12.3 \text{ ans}}$  et les volatilités  $V_{t=12.3 \text{ ans}}$  issus des 1000 scénarios ont servi de paramètres initiaux dans la discrétisation QE. Ensuite, nous avons projeté les prix du bitcoin de 12.3 à 50 ans. Après cette projection, nous avons fusionné les trajectoires de prix provenant des deux méthodes de discrétisation. La figure suivante montre le test de martingalité appliqué aux scénarios obtenus après fusion. Pour améliorer la visualisation, le pas temporel a été augmenté à une base hebdomadaire.

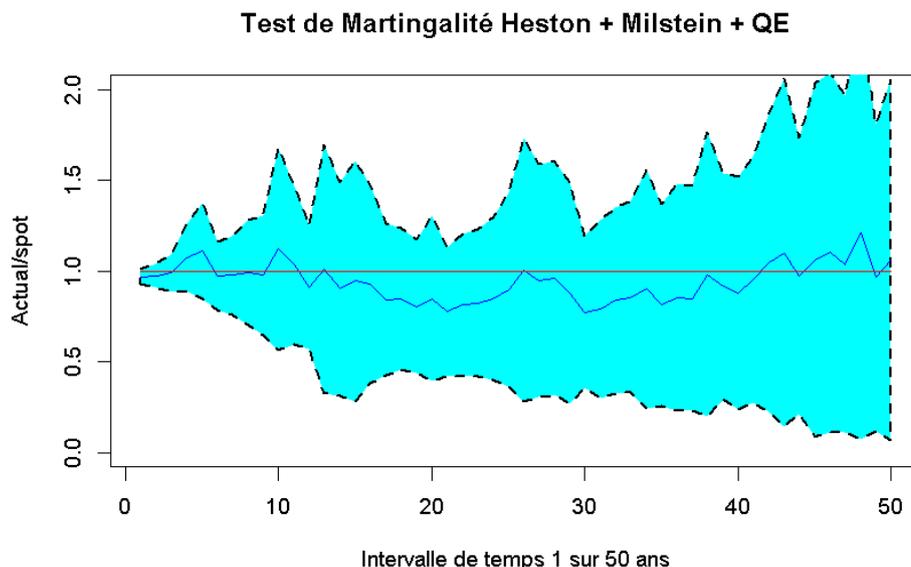


**FIGURE 3.8** Étape 2 du processus de martingalisation

Nous remarquons que le ratio de martingalité (représenté par la courbe bleue) reste remarquablement proche de 1 tout au long de la période de projection et se situe dans l'intervalle de confiance à 95%. En outre, bien que l'intervalle de confiance tende à s'élargir avec la période de projection, cet élargissement est limité, le ratio restant essentiellement confiné dans l'intervalle  $[0,2]$ . Cela est jugé satisfaisant au regard de notre objectif de maîtriser les trajectoires explosives.

### 3.4.3.3 Validation des scénarios avec les tests réglementaires

Dans cette étape finale, nous avons sélectionné les prix correspondant aux intervalles de temps annuels dans la dynamique des trajectoires de prix, et nous avons effectué à nouveau le test de martingalité. Le schéma suivant illustre le test de martingalité des scénarios générés à pas de temps annuel.

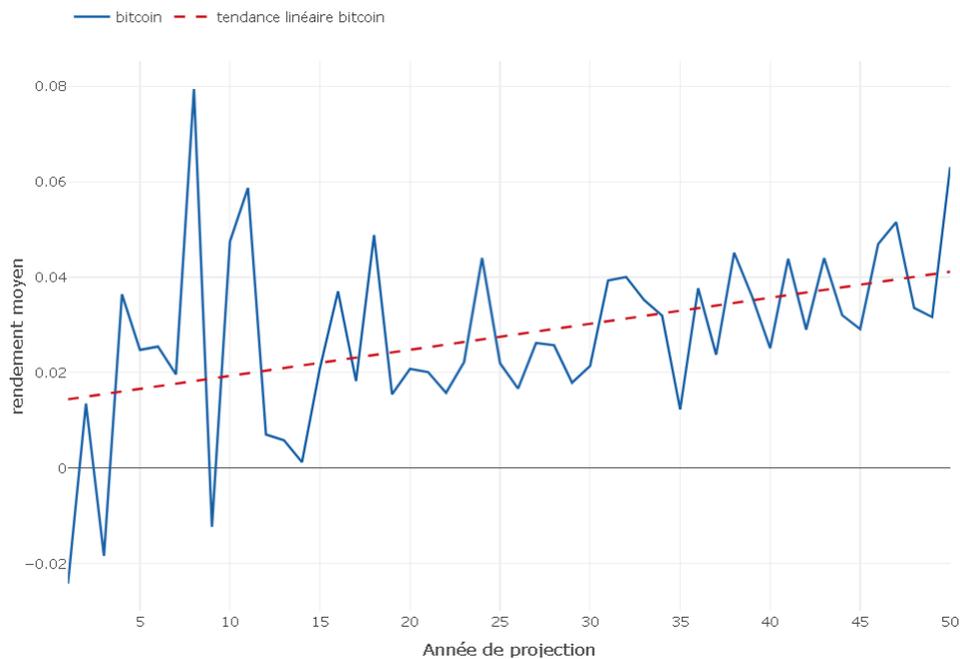


**FIGURE 3.9** Etape 3 du processus de martingalisation

En se référant à l'intervalle de confiance avec un seuil de 95%, nous constatons que la courbe bleue représentant le ratio de martingalité est toujours dans l'intervalle de confiance. Cela nous permet de valider globalement ce test. Le test de Market Consistency est également vérifié par construction car les 12 premières années des trajectoires sont issus du schéma du Milstein qui a affiché des résultats satisfaisants pour ce test (voir table 3.2). Notre approche permet donc de générer des scénarios qui vérifie à la fois les test de Market Consistency et de martingalité sur 50 ans.

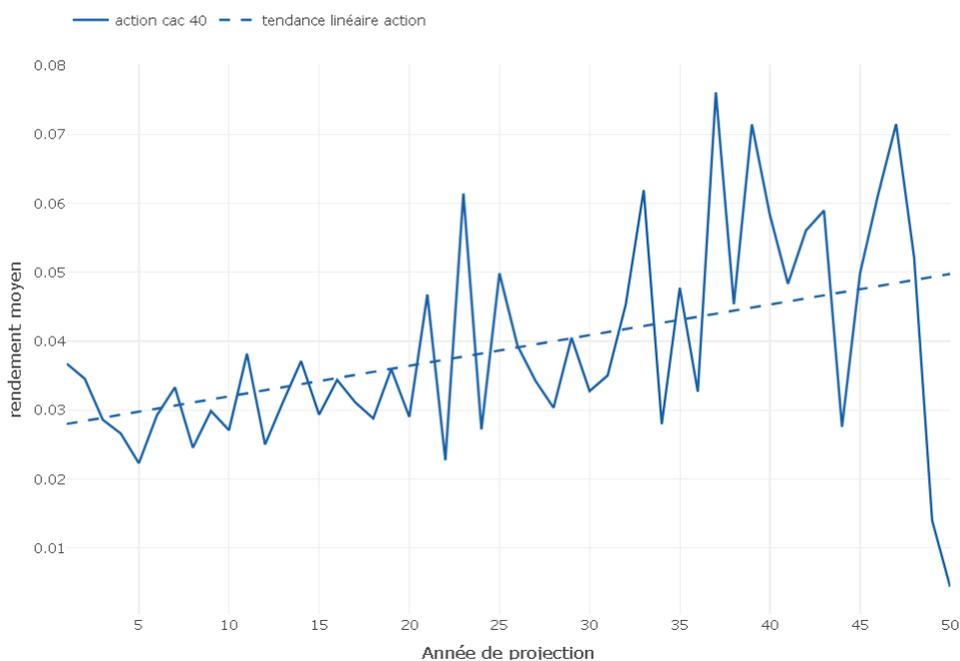
#### 3.4.4 Discussion sur la méthode de martingalisation

Les réserves exprimées vis-à-vis de ce processus de martingalisation dans le cadre de ce mémoire concernent l'incapacité à assurer la conservation des caractéristiques communes pour les scénarios concaténés issus des deux schémas de discrétisation. En effet, bien que les paramètres initiaux du schéma QE dérivent du schéma de Milstein, il n'est pas garanti que les volatilités de prix résultant des deux schémas soient identiques. Dans notre étude, la contrainte de cette méthode réside dans la limitation intrinsèque au schéma de discrétisation QE. Nous soulignons que ce schéma, combiné au modèle d'Heston, a montré une faible capacité à reproduire les prix du marché. Par conséquent, même si le schéma génère des trajectoires martingales, il est possible que ces trajectoires ne reflètent pas fidèlement la réalité de l'actif modélisé. Pour illustrer cela avec le GSE calibré par cette méthode de martingalisation, nous avons calculé le rendement moyen à partir de 1000 scénarios de rendements du bitcoin sur 50 ans. La figure 3.10 illustre l'évolution de ce rendement moyen sur la période donnée.



**FIGURE 3.10** Évolution du rendement moyen du GSE bitcoin sur 50 ans

Il est observable à travers la figure 3.10 que l'amplitude des variations de rendement est nettement plus élevée durant les 12 premières années de projection, ce qui correspond aux trajectoires du schéma de Milstein. Ensuite, on note une amplitude de variation plus faible, en accord avec les scénarios du schéma QE. Cela va à l'encontre de l'intuition qui prévoirait une amplitude croissante avec l'éloignement de l'horizon de projection, comme le montre la figure 3.11, qui présente l'évolution du rendement moyen d'un GSE action calibré par Bloomberg.



**FIGURE 3.11** Évolution du rendement moyen GSE action sur 50 ans

Cependant, il est nécessaire de contextualiser ces observations avec notre étude où la spécificité du bitcoin, mise en évidence par les paramètres optimaux calibrés du modèle d'Heston en particulier le paramètre de volatilité supérieur à 1 pourrait influencer les performances des discrétisations du schéma QE.

Il est important de préciser que, selon l'étude menée par MILAN et JAN 2023 sur l'indice boursier DAX<sup>20</sup>, le schéma QE associé au modèle Heston a fait preuve d'une grande précision lors du test MC, illustrant ainsi sa capacité à simuler les prix de marché de l'indice DAX. De plus, lorsqu'il est appliqué à l'indice DAX, le schéma de Milstein affiche une performance proche de celle du schéma QE pour reproduire les prix de marché. On peut donc en déduire que dans notre étude, l'incapacité du schéma QE à reproduire les prix Call observés serait spécifique à la particularité du bitcoin. Il se peut donc que la réserve exprimée précédemment n'est pas liée à l'application de la méthode de martingalisation avec d'autres actifs financiers. Par conséquent, l'application de la méthode de martingalisation avec des paramètres optimaux d'Heston ajustés sur des données d'un autre actif pourrait avoir l'effet escompté sur la variation de rendement moyen, c'est-à-dire une amplitude de rendement du scénario moyen croissante avec l'horizon de projection. Pour plus de détails, les lecteurs sont invités à consulter les travaux de MILAN et JAN 2023.

### 3.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons étudié le calibrage d'un GSE bitcoin dans un univers neutre au risque. L'application du modèle d'Heston à l'actif bitcoin semble adéquate pour comprendre et analyser la dynamique du marché de cette crypto-monnaie. Les résultats du calibrage et des tests confirment la pertinence de cette approche, en particulier pour la gestion des risques liés à la volatilité et l'évaluation des produits dérivés associés au bitcoin. Bien que des modèles plus sophistiqués tels que le VG-CIR - comme mentionné dans D. B. MADAN, REYNERS et SCHOUTENS 2019 - puissent constituer des alternatives intéressantes au modèle d'Heston, nous avons choisi de ne pas les utiliser en raison d'un compromis entre le gain potentiel et la complexité accrue de ces modèles.

Nous avons également discuté de l'importance des tests de cohérence du marché et de martingalité, et de la manière dont différents schémas de discrétisation, tels que Milstein et QE, peuvent influencer les résultats. Nous avons également abordé l'innovation de la "martingalisation des scénarios de prix", une méthode qui combine les forces des deux schémas de discrétisation. Malgré les réserves exprimées à l'égard de cette méthode, nous restons optimistes quant à son potentiel d'amélioration de la génération de trajectoires martingales pour d'autres actifs financiers. Le GSE, résultant de cette méthode, sera utilisé comme paramètre d'entrée de notre modèle ALM.

Dans le prochain chapitre, nous examinons le calibrage de la matrice de corrélation des risques de marché, y compris le risque lié au bitcoin. Cette matrice nous aidera à comprendre non seulement les relations de corrélation entre le bitcoin et d'autres actifs financiers, mais aussi à agréger les SCR des différents sous-modules de risque de marché. Une telle analyse est vitale pour la gestion des risques, car elle permet d'évaluer la manière dont les mouvements du bitcoin peuvent se conformer ou différer des autres actifs, influençant ainsi la diversification du portefeuille et la gestion des risques. En ajustant cette matrice de corrélation, nous pourrions fournir des informations clés pour affiner la gestion des actifs et passifs dans un portefeuille comprenant le bitcoin.

---

20. Le DAX (Deutscher Aktienindex) est un indice regroupant les 30 principales entreprises allemandes cotées à la Bourse de Francfort, qui sert de référence pour le marché boursier allemand.

## CHAPITRE 4 : Construction d'une nouvelle matrice de corrélation du marché

### 4.1 Cadres de l'étude

L'EIOPA, ou l'autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles, est une institution clé dans la mise en œuvre de la directive Solvabilité II. L'une des principales composantes de Solvabilité II est le calcul du capital de solvabilité requis (SCR) qui prend en compte divers risques, dont le risque de marché. Comme mentionné dans la section 1.3.2.3, la matrice de corrélation est cruciale dans le calcul du SCR pour le risque de marché.

L'EIOPA a élaboré une matrice de corrélation de marché pour aider les assureurs à estimer le SCR en agrégeant les SCR de différents sous modules. Notre objectif étant d'inclure le bitcoin dans le portefeuille de l'assureur, notre intérêt a donc été porté sur la matrice de corrélation de marché afin de l'adapter à notre objectif d'intégration du bitcoin dans le portefeuille d'assureur vie. Cette matrice donne des informations sur la manière dont différents risques de marché sont liés les uns aux autres. La matrice de corrélation de marché calibrée par l'EIOPA sous Solvabilité II regroupe les facteurs de risque suivant :

1. Taux d'intérêt
2. Risque d'actions (y compris type 1 et type 2)
3. Risque immobilier
4. Risque de spread
5. Risque de change
6. Risque de concentration
7. Risque de contrepartie inhérent aux dérivés

Chaque paire de risques dans cette liste a une valeur de corrélation associée dans la matrice, indiquant comment ces deux risques tendent à se déplacer ensemble. Par exemple, une corrélation de 1 signifierait qu'ils se déplacent parfaitement ensemble, tandis qu'une corrélation de -1 signifierait qu'ils se déplacent dans des directions opposées.

Le SCR marché est agrégé selon la formule suivante :

$$SCR_{market} = \sqrt{\left( \sum_{i,j} corr_{i,j} * SCR_i * SCR_j \right)}$$

où :

- $corr_{i,j}$  est le coefficient de corrélation linéaire des sous modules  $i$  et  $j$ .
- $SCR_i$  est le capital de solvabilité couvrant le risque  $i$ .

L'EIOPA suggère, sur la base des conclusions obtenues dans CEIOPS 2023, d'incorporer une corrélation à double sens entre le risque de taux d'intérêt et les risques de spread, d'action, et d'immobiliers dans la formule standard. En d'autres termes, si l'assureur est vulnérable à une diminution du risque de taux d'intérêt, une corrélation de 50 % doit être appliquée pour consolider les charges de capital associées. En revanche, une corrélation de 0 % doit être appliquée si l'assureur est sensible à une augmentation du risque de taux d'intérêt. Le paramètre de corrélation résulte ensuite du risque décisif pour l'entreprise. Ainsi, l'application de la corrélation bilatérale dépend de la baisse ou de la hausse des taux d'intérêt comme facteur crucial. La matrice de corrélation proposée est définie comme suit :

	interest rate	equity	property	spread	currency	concentration
interest rate	1					
equity	0.5/0	1				
property	0.5/0	0.75	1			
spread	0.5/0	0.75	0.5	1		
currency	0.5	0.5	0.5	0.5	1	
concentration	0.5	0.5	0.5	0.5	0.50	1

FIGURE 4.1 Matrice de corrélation EIOPA

L'importance de cette matrice réside dans le fait que, dans des conditions de marché défavorables, plusieurs sous-modules de risque pourraient être affectés simultanément. La corrélation entre les sous-modules de risque donne une indication de la probabilité et de l'intensité de cet effet conjoint. Cela permet à l'assureur non seulement de provisionner suffisamment pour couvrir les risques liés aux effets de dépendance entre les actifs mais aussi de profiter du bénéfice de diversification du portefeuille.

Dans le cadre de notre étude, le modèle ALM développé ne contient que les actifs obligataires, les actions, l'immobilier et le cash dans le portefeuille d'actif. Ainsi nos facteurs de risque marché d'intérêt sont **le risque de taux, le risque d'action, le risque de spread et le risque lié au marché de l'immobilier**. A ces facteurs de risques, sera ajouté le risque bitcoin.

## 4.2 La méthodologie de l'EIOPA pour le calibrage de la matrice de corrélation

### 4.2.1 Présentation de la méthode

Dans CEIOPS 2023, l'EIOPA expose sa stratégie de calibration de la matrice de corrélation. Cette stratégie s'appuie sur des données empiriques, principalement tirées de l'analyse historique des rendements de différentes classes d'actifs et d'autres indicateurs financiers. L'objectif est d'étudier la corrélation historique des rendements de ces actifs. Pour ce faire, l'EIOPA a utilisé des bases de données de renommée internationale comme MSCI, Barclays, Bloomberg, etc. Ces données ont ensuite été nettoyées et traitées pour garantir leur qualité et leur pertinence. La période historique prise en compte dépend de l'actif, mais elle est généralement de dix ans, bien qu'elle puisse être ajustée en fonction de la disponibilité des données et des évolutions des marchés financiers.

L'approche de calibrage est principalement empirique. L'EIOPA a utilisé des corrélogrammes pour détecter et évaluer la force et la direction des relations linéaires entre les paires de rendements. Les entrées de la matrice sont définies comme des coefficients de corrélation linéaire, c'est-à-dire que pour deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ , l'entrée est donnée par la formule :

$$\rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Les résultats sont ensuite ajustés pour intégrer des considérations pratiques et des évaluations d'experts. Par exemple, l'EIOPA a décidé de limiter certaines corrélations à un niveau maximal pour éviter une trop grande volatilité des exigences de capital.

L'EIOPA actualise régulièrement sa méthode de calibrage afin qu'elle reflète avec précision les conditions actuelles du marché. La matrice de corrélation peut donc être révisée lors des évaluations périodiques prévues par Solvabilité II.

En somme, la calibration de la matrice de corrélation par l'EIOPA est une démarche empirique qui s'appuie sur des données historiques. Cependant, cette démarche est ajustée en fonction des conseils d'experts afin de garantir la robustesse et la pertinence des résultats obtenus. Cette méthode vise à assurer que les exigences de capital reflètent de manière adéquate les risques auxquels les assureurs sont confrontés dans le cadre du module de risque de marché.

Dans la suite, nous allons énumérer certaines critiques formulées à l'encontre de la méthodologie de calibration des matrices de corrélation, en particulier celle appliquée au marché.

#### 4.2.2 Quelques limites exprimées sur l'approche de l'EIOPA

La calibration se base souvent sur des données historiques. Une critique courante est que ces périodes (avant 2010) ne sont pas assez pertinentes pour refléter l'évolution future des marchés et la matrice calibrée pourrait sous-estimer ou sur-estimer certaines corrélations nées de l'état des marchés actuels.

Les acteurs de l'assurance ont remarqué également qu'en réalité les corrélations entre actifs ne sont pas toujours stables. Elles peuvent augmenter lors de chocs financiers, comme par exemple le phénomène appelé "flight to quality". Donc en se basant sur des corrélations historiques moyennes, on pourrait sous-estimer la corrélation potentielle en temps de stress.

De plus, l'hypothèse de linéarité a fait l'objet de critique. La corrélation mesure les relations linéaires entre les variables. Cela suppose que les variables de risques sont gaussiennes. Si les relations entre certains risques sont non linéaires, une simple mesure de corrélation linéaire pourrait ne pas capturer pleinement cette relation.

Enfin, il faut noter que la matrice de corrélation ne considère pas forcément les effets de rétroaction potentiels entre divers risques ou secteurs. De surcroît, les corrélations peuvent changer significativement d'un marché à l'autre, en particulier entre les marchés développés et émergents. Ainsi, une matrice unique pour toute l'UE pourrait ne pas représenter fidèlement ces disparités.

En réponse à cette critique, l'EIOPA souligne dans CEIOPS 2023 que les données de calibration incluent la période de la crise financière de 2008. Cela permet d'intégrer les corrélations extrêmes dans l'ajustement de la matrice, dans une démarche prudente. Ces données, enrichies par les avis d'experts, offrent une compréhension plus précise des corrélations extrêmes qui pourraient survenir entre les actifs concernés. En effet, l'élément crucial pour les assureurs doit être la manifestation de ces corrélations extrêmes.

Face aux critiques concernant l'instabilité des corrélations, l'EIOPA assure avoir fait preuve de la plus

grande prudence dans la fixation des taux de corrélation afin d'assurer une stabilité durable. Une approche qualitative, appuyée par des expertises spécialisées, complète les analyses quantitatives, donnant ainsi une robustesse continue aux coefficients ajustés. De plus, l'autorité de régulation souligne que ses méthodes sont conçues pour évoluer et s'aligner au mieux avec les dynamiques changeantes du marché. En réponse aux questions sur l'utilisation de la corrélation linéaire, l'EIOPA met en avant que considérer les facteurs de risque comme des variables gaussiennes est la méthode la plus appropriée pour la majorité des entités. Cette approche permet une généralisation significative de l'application de la méthode standard pour calculer le SCR. De plus, la corrélation linéaire a prouvé son efficacité pendant les périodes de crise dans les études corrélationnelles.

Concernant les critiques sur le manque de rétroaction et la diversité des marchés, l'EIOPA met en avant la flexibilité d'approches alternatives telles que le modèle interne pour déterminer le SCR de l'entité, à condition que les hypothèses et les méthodes de calcul soient rigoureusement justifiées.

Pour notre étude, nous avons opté pour la méthodologie de l'EIOPA afin de recalibrer la matrice de corrélation de marché, en y intégrant le bitcoin. Cela implique l'hypothèse que les paires de facteurs de risque examinées sont corrélées de manière linéaire.

### 4.3 Adaptation de la méthodologie de l'EIOPA au bitcoin

Toutes les données liées aux indices présentés ci-dessous proviennent de la plateforme d'investissement [investing.com](https://www.investing.com).

La période historique considérée dans le cadre de notre étude débute le 01/01/2010 (car avant cette date, nous n'avons pas de données sur le bitcoin) et s'arrête au 31/12/2022, soit 12 ans d'historique.

Les actifs traditionnels sont cotés uniquement les jours ouvrés (soit 252 jours dans l'année), à la différence du bitcoin qui est coté tous les jours de la semaine. Ainsi, nous avons conservé les dates d'observations journalières du bitcoin qui correspondent à celles des autres actifs pour l'analyse de corrélation.

Pour mesurer la corrélation entre le bitcoin et les actifs traditionnels d'intérêt, nous avons ajusté la méthodologie de l'EIOPA. Nous avons calculé les corrélations empiriques glissantes annuellement entre les paires de facteurs de risque. Nous avons opté pour une corrélation glissante dans le but de capturer toutes les dépendances à l'horizon de 12 mois qui ont pu exister dans la période historique considérée, la matrice de corrélation servant à agréger les capitaux de couverture annuels. L'impact d'une corrélation négative entre deux facteurs de risque de marché sur le SCR est souvent avantageux. Cela implique que les conséquences défavorables d'un risque pourraient être partiellement ou entièrement neutralisées par des mouvements contraires dans l'autre risque. Par conséquent, par mesure de prudence et conformément à la norme S2, nous avons choisi la corrélation positive la plus élevée observée pour chaque paire d'actifs durant la période historique examinée.

#### 4.3.1 Vérification d'un lien de causalité entre le bitcoin et les actifs traditionnels

Avant d'examiner la corrélation entre le bitcoin et les actifs traditionnels du marché, nous sommes conscients que la corrélation ne signifie pas nécessairement causalité. Par conséquent, nous avons analysé la possibilité d'un lien causal entre l'actif numérique et les actifs traditionnels présent dans le portefeuille du modèle ALM.

Le bitcoin, en tant que monnaie numérique et actif spéculatif, est distinct dans sa nature et ses dynamiques par rapport à d'autres classes d'actifs traditionnels. Sa relation avec d'autres marchés, tels que l'immobilier, les obligations d'entreprise, les actions, et le marché des taux d'intérêt, est complexe et reste largement exploratoire. Une étude de causalité qualitative nous a semblé nécessaire à ce niveau. Ci-dessous une synthèse des relations de causalité possibles :

- Le bitcoin et le marché des actions :

Les mouvements du marché boursier et du bitcoin peuvent parfois être synchronisés, surtout lors d'annonces majeures concernant l'adoption du bitcoin par de grandes sociétés. Ces deux marchés peuvent être influencés par le sentiment des investisseurs et leur perception du risque. Des interactions entre le bitcoin et le marché boursier ont été observées, notamment lorsque des entreprises comme Tesla ont révélé leurs investissements dans le bitcoin. Cela a entraîné une hausse du prix du bitcoin et a aussi impacté l'action de Tesla, illustrant comment l'adoption du bitcoin par une entreprise majeure peut influencer à la fois le marché des cryptomonnaies et celui des actions.

- Le bitcoin et le marché Immobilier :

Malgré leurs dynamiques distinctes, une interaction entre le bitcoin et le marché immobilier est observable. Cette interaction se manifeste par l'adoption croissante du bitcoin dans les transactions immobilières. En effet, un nombre croissant d'entreprises immobilières acceptent le bitcoin comme moyen de paiement, offrant ainsi aux acheteurs la possibilité d'acquérir des biens immobiliers avec cette crypto-monnaie. Selon un article de RAYMOND 2019 publié sur Capital, la première transaction immobilière en crypto-monnaie en France s'est élevée à 6.5 millions d'euros.

- Le bitcoin et le marché des taux d'intérêt

Les taux d'intérêt, guidés par la politique monétaire, peuvent influencer l'attrait du bitcoin, surtout quand ces taux sont faibles, poussant les investisseurs vers des actifs offrant de meilleurs rendements. L'impact des taux d'intérêt sur l'attractivité du bitcoin est notable lorsqu'ils augmentent. Selon un article de la Banque de France (CLAIRE BROUSSE 2023), cette hausse des taux a diminué l'attrait des crypto-monnaies, qui bénéficiaient auparavant de l'intérêt des investisseurs pour des rendements plus élevés. Toutefois, ce phénomène semble moins pertinent dans le contexte actuel de hausse des taux d'intérêt accompagnée d'une augmentation spectaculaire du bitcoin.

- Le bitcoin et le marché des obligations d'entreprise

La relation est moins apparente ici, mais le bitcoin et certaines obligations peuvent réagir à des changements dans le sentiment général d'aversion au risque et des anticipations en matière d'inflation.

Il convient de souligner que les marchés évoluent constamment et que les relations de causalité entre les actifs peuvent varier. Néanmoins, les relations évoquées précédemment restent plausibles dans le contexte actuel du marché, ce qui légitime la réalisation d'une étude quantitative afin de quantifier ces corrélations.

## 4.3.2 Corrélation bitcoin - Action

### 4.3.2.1 Choix de l'actif

Pour établir la matrice de corrélation, l'EIOPA a utilisé l'indice MSCI World Index pour représenter le marché des actions, l'un des indices les plus reconnus au monde pour représenter les marchés d'actions

mondiaux développés. Pour analyser la corrélation entre le marché action et le bitcoin, nous avons adopté le même choix que l'EIOPA. Quelques points clés à propos de cet indice :

- Couverture : il couvre approximativement 85% de la capitalisation boursière librement échangeable de chaque pays développé.
- Composition : l'indice est composé d'actions de 23 pays développés, notamment les États-Unis, le Canada, l'Australie, la majorité des pays européens et certains pays asiatiques comme le Japon.
- Méthodologie : MSCI utilise une méthodologie basée sur la capitalisation boursière, ce qui signifie que les entreprises avec une plus grande capitalisation boursière ont une plus grande pondération dans l'indice.
- Utilisation : de nombreux investisseurs et gestionnaires de fonds utilisent cet indice comme référence pour mesurer la performance des marchés boursiers mondiaux. De plus, de nombreux fonds indiciels (ETFs et fonds communs) cherchent à répliquer la performance de cet indice.
- Gestionnaire de l'indice : MSCI (Morgan Stanley Capital International) est une société de services financiers réputée qui offre des indices, des outils d'analyse et divers produits destinés à aider les investisseurs dans l'évaluation et la gestion de leurs portefeuilles.

Les observations recueillies de l'indice après retraitement sont réparties entre le 31-12-2012 au 30-12-2022, soit 10 ans d'historique de prix journaliers.

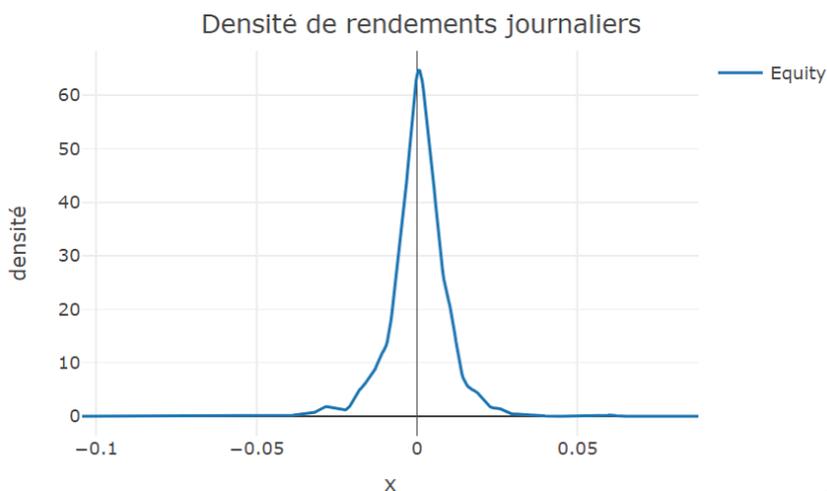


FIGURE 4.2 Densité empirique

#### 4.3.2.2 Mesure de la corrélation linéaire

Le coefficient de corrélation semble avoir une tendance croissante en moyenne. Elle varie de -0.1 à 0.5. La corrélation avec le marché des actions semble plus importante ces dernières années ou elle atteint sa valeur maximale en 2022.

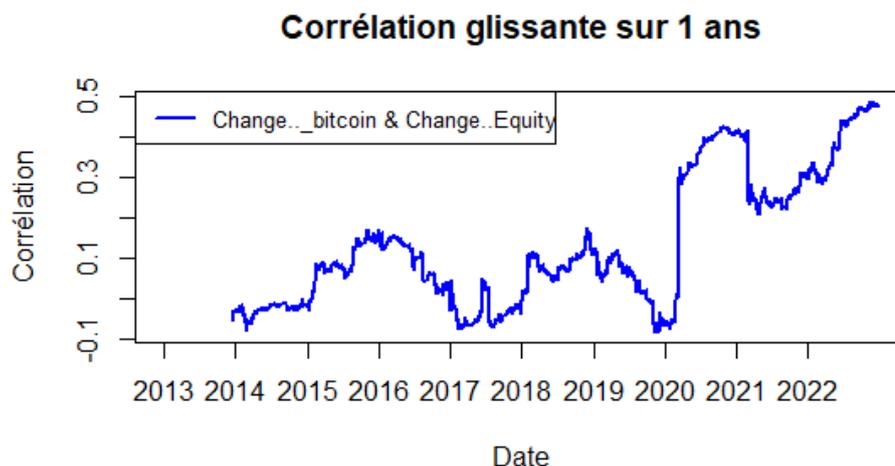


FIGURE 4.3 Corrélation empirique

Par prudence, nous a retenu la valeur 0.5, soit une corrélation de 50% entre le bitcoin et le marché des actions.

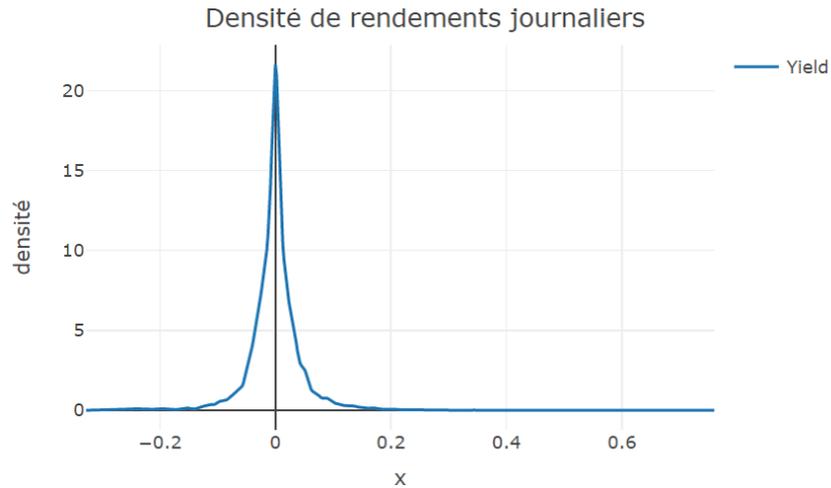
### 4.3.3 Corrélation bitcoin - Taux

#### 4.3.3.1 Choix de l'actif

L'EIOPA a utilisé "United Kingdom 10-Year Bond Yield" comme actif représentant le sous module 'Taux' dans la calibration de la matrice de corrélation. En effet, il est d'usage d'utiliser des obligations gouvernementales pour l'analyse des taux, car ces obligations sont généralement sensibles aux variations des taux d'intérêt et sont souvent utilisées comme référence pour le "marché des taux.

L'utilisation du "United Kingdom 10-Year Bond Yield" (le rendement de l'obligation gouvernementale du Royaume-Uni à 10 ans) par l'EIOPA dans le cadre de la calibration de la matrice de corrélation pour Solvabilité II peut être liée à plusieurs raisons. En terme de référence historique, le marché des obligations britanniques est l'un des plus anciens et des plus liquides au monde. Sa longue histoire fournit des données robustes pour les analyses. Aussi, en terme de représentativité, le Royaume-Uni a toujours été l'un des plus grands marchés d'assurance en Europe, et ses marchés financiers sont parmi les plus développés. Les caractéristiques du marché britannique peuvent donc fournir des indications pertinentes pour d'autres marchés. Pour toutes ces raisons et également pour la disponibilité des données, nous utiliserons cet actif pour la mesure de corrélation avec le bitcoin.

Après traitement des données, notre échantillon de prix est disponible du 04/01/2010 au 30/12/2022. Ci-dessous la figure montrant la densité de la distribution de rendement :

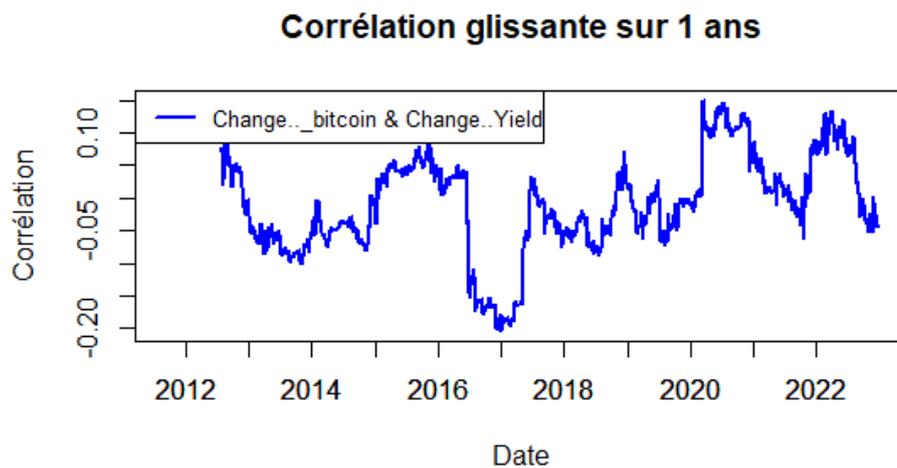


**FIGURE 4.4** Densité empirique

A noter que l'hypothèse de normalité est largement discutable au vu de la forme de densité. On remarque une asymétrie à droite dans la distribution.

#### 4.3.3.2 Mesure de la corrélation linéaire

On observe sur la figure ci-dessous que la corrélation n'est pas monotone dans le temps, avec un domaine de variation du coefficient compris entre -0.2 et 0.15. La moyenne des corrélations est autour de 0 et suggère une corrélation faible entre les deux actifs.



**FIGURE 4.5** Corrélation empirique

Par le principe de l'homme prudent selon la norme S2, nous avons retenu une corrélation de 15% pour la paire bitcoin et taux d'intérêt.

### 4.3.4 Corrélation bitcoin - Immobilier

#### 4.3.4.1 Choix de l'actif

L'EIOPA a utilisé un vaste portefeuille de biens immobiliers de qualité au Royaume-Uni (évalué mensuellement). De notre côté, notre choix d'actif représentatif de l'immobilier s'est porté sur *FTSE EPRA/NAREIT Global (FTENHG)* pour son exposition sur le marché mondial de l'immobilier et la disponibilité de données récentes. En effet, l'indice FTSE EPRA/NAREIT est le fruit d'une collaboration entre le FTSE Group, la European Public Real Estate Association (EPRA) et la National Association of Real Estate Investment Trusts (NAREIT). Ces indices sont conçus pour représenter les investissements immobiliers cotés dans le monde entier. Ils sont largement reconnus comme les principaux indices de référence pour les investissements immobiliers cotés. Ci-dessous quelques points clés à propos de cet indice :

- Couverture Mondiale : L'indice FTSE EPRA/NAREIT Global couvre les sociétés immobilières et REITs des marchés développés et émergents, offrant une véritable perspective mondiale de la performance du secteur immobilier coté.
- Constituants : L'indice est constitué de sociétés immobilières et de REITs qui répondent à certaines critères de taille, de liquidité et de revenus.
- Représentativité : Grâce à ses critères stricts et à sa large couverture, l'indice est considéré comme un bon représentant du marché immobilier coté à l'échelle mondiale.
- Utilisation : Cet indice est souvent utilisé comme un benchmark pour les fonds et les ETFs qui cherchent à investir dans l'immobilier mondial. De plus, il est utilisé par les investisseurs pour évaluer la performance du secteur immobilier par rapport à d'autres classes d'actifs.
- Mise à jour régulière : L'indice est régulièrement mis à jour pour refléter les changements dans le paysage des sociétés cotées, comme les fusions, acquisitions, ou les introductions en bourse.

Les données recueillies après retraitement de l'indice sont réparties du 14/10/2013 au 30/12/2022.

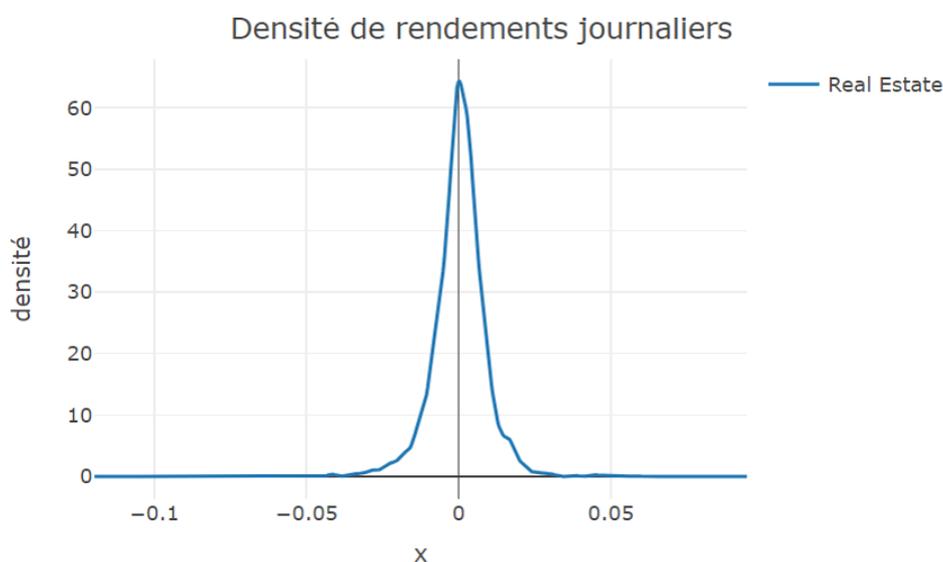


FIGURE 4.6 Densité empirique

#### 4.3.4.2 Mesure de la corrélation linéaire

On observe une dépendance relativement faible entre les deux actifs, toutefois un pic est observé entre 2020-2021. Ce pic pourrait traduire l'événement particulier de la récente crise sanitaire. On observait

également un pic à cette période pour les paires bitcoin-action et bitcoin-taux.

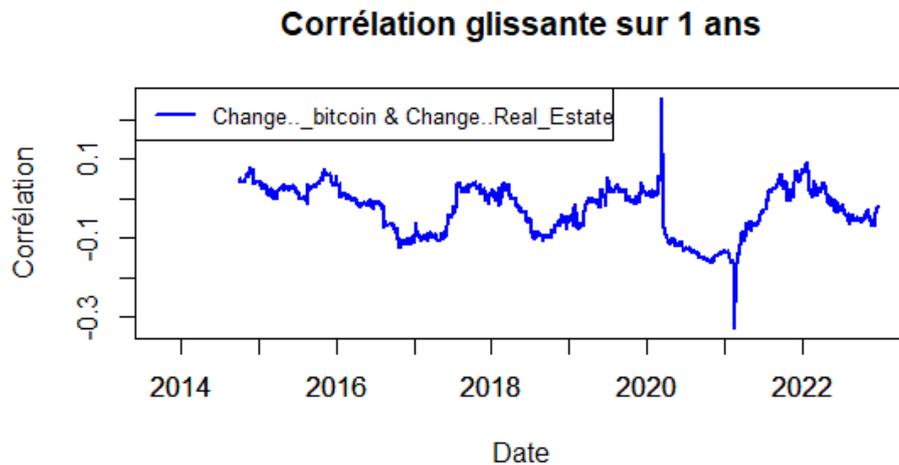


FIGURE 4.7 Corrélation empirique

Nous retenons la valeur maximale de corrélation observée durant la période considérée, c'est à dire 20%, tout comme avec la corrélation bitcoin - taux.

### 4.3.5 Corrélation bitcoin - Spread

#### 4.3.5.1 Choix de l'actif

Le risque de spread, aussi appelé risque d'écart de crédit, est principalement associé aux marchés des obligations et des titres de créance. Cela désigne la variation de l'écart entre le rendement d'une obligation ou d'un titre de créance et celui d'un autre titre considéré comme référence (souvent une obligation d'État jugée sans risque, comme les bons du Trésor américains). Pour mesurer les corrélations entre ce risque et d'autres facteurs de risque, l'EIOPA a utilisé le *spread to gilts on UK AA rated corporate bonds*.

Cependant, le régulateur souligne que le choix des indicateurs ou actifs utilisés peuvent ne pas refléter avec précision le risque de marché détenu par les différentes compagnies d'assurance européennes. Toutefois, dans sa note, il montre par exemple que la sensibilité du spread au choix de l'actif *spreads to gilts on European firms instead of UK firms* au lieu de *spread to gilts on UK AA rated corporate bonds* est de 0.1, ce qu'il a jugé non significatif. Et avec les autres tests de sensibilités réalisés, il conclut que si l'utilisation de différents indicateurs de risque a un effet sur le résultat global, cet effet n'est pas énorme et le signe ne semble pas biaisé.

Cette conclusion a motivé en partie notre choix de l'indice iShares Global Corporate Bond EUR Hedged UCITS ETF (symbole : IBCQ), qui est un fonds négocié en bourse (ETF) géré par iShares, la division ETF de BlackRock. Cet ETF vise à offrir une exposition aux obligations d'entreprise mondiales tout en couvrant (ou en "hedgeant") le risque de change par rapport à l'euro. Notre volonté était d'avoir une exposition au risque de spread sur le plan mondial. Ci-dessous quelques descriptions de l'indice.

- Composition : Le fonds investira dans des obligations d'entreprise de marchés développés du monde entier. Les composantes exactes peuvent varier, mais l'objectif est d'avoir une représentation large du marché des obligations d'entreprise mondiales.
- Stratégie de Couverture (Hedging) : La mention "EUR Hedged" signifie que le fonds cherche à

minimiser l'impact des fluctuations de change entre les devises des obligations sous-jacentes et l'euro. Cette couverture est généralement réalisée en utilisant des instruments financiers dérivés.

- Liquidité : L'ETF, étant coté en bourse, peut être acheté ou vendu pendant les heures de marché normales.

Les données recueillies et retraitées de l'indice sont réparties du 30/07/2013 au 30/12/2022.

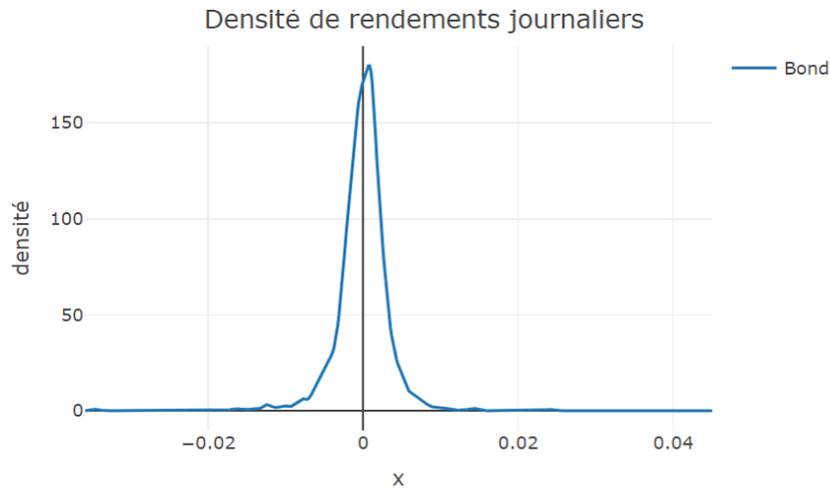


FIGURE 4.8 Densité empirique

#### 4.3.5.2 Mesure de la corrélation linéaire

On observe sur la figure 4.9 une variation du coefficient de corrélation dans l'intervalle  $[-0.1, 0.35]$ . Le pic de corrélation étant observé entre 2020 et 2021.

Comme précédemment, nous avons retenu la valeur de 0.35 (soit 35%) comme degré de corrélation linéaire entre les deux actifs.

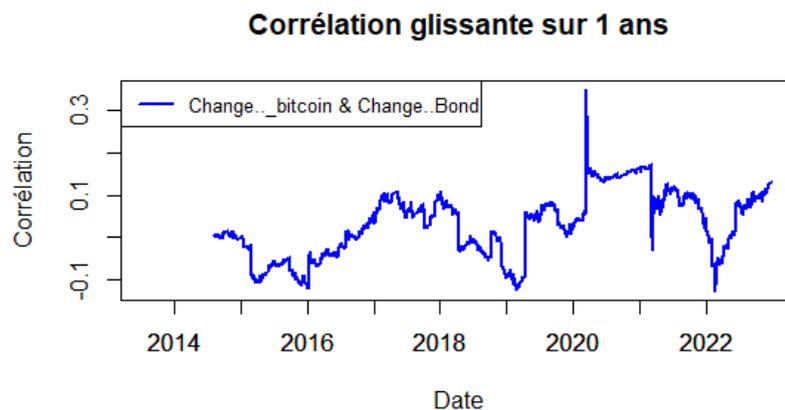


FIGURE 4.9 Corrélation empirique

## 4.4 Analyse comparative

Notre objectif dans cette étude est d'apporter une analyse qualitative sur l'étude quantitative que nous avons mené précédemment. L'idée sera de challenger nos résultats avec ceux de la place financière, en l'occurrence les plateformes d'investissement crypto-actif qui fournissent de manière assez régulière des métriques et des outils d'aide à la décision.

Cryptoslate est le site Web des médias cryptographiques, qui couvre les nouvelles de l'industrie et diffuse les prix en temps réel de 2356 crypto-actifs. Cryptoslate est connu pour ses rapports fiables et objectifs.

Sur CryptoSlate, STRATEN 2023 analyse les corrélations du bitcoin avec d'autres actifs du marché en se basant sur la matrice de corrélation 2022 (figure 4.10) publiée sur la plateforme *Fidelity INVESTMENT*.

Fidelity Investments est une société internationale de services financiers fondée en 1946 et basée à Boston, Massachusetts, aux États-Unis. Elle est l'une des plus grandes sociétés de gestion d'actifs au monde.

Les données qui ont servies pour la calibration de la matrice de corrélation sont issues des plateformes reconnues comme FRMCo, Bloomberg, Haver Analytics et FactSet. La matrice donne des informations sur les corrélations des actifs du marché incluant le bitcoin sur 12 mois, c'est à dire du 1er janvier 2022 au 31 décembre 2022. Le rouge montre des corrélations positives, et le bleu des corrélations négatives.

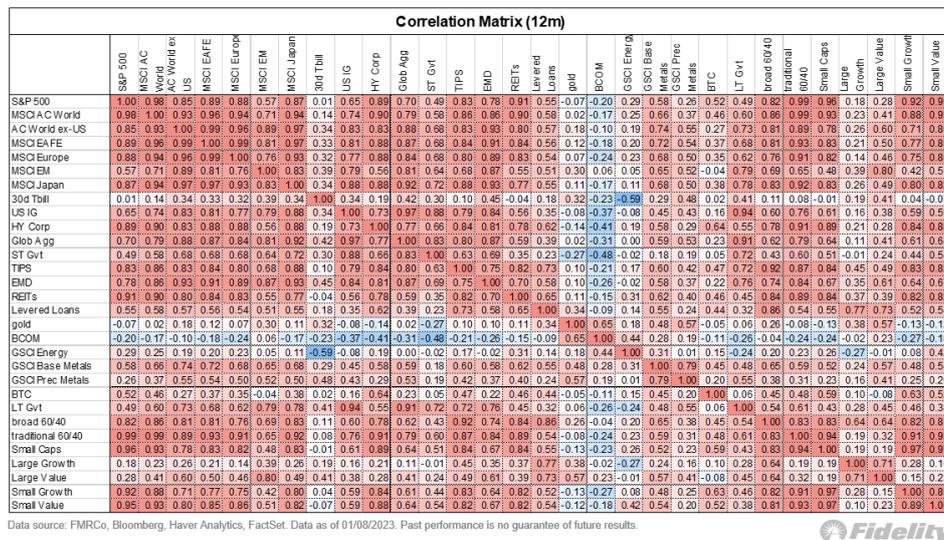


FIGURE 4.10 Matrice de corrélation sur 12 mois (source Fidelity Investment)

### bitcoin - action

D'après les analyses de la page Cryptoslate, la corrélation du bitcoin avec les grandes capitalisations boursières est de 46% (contre 50% dans notre étude), soulignant ainsi une relation significative mais légèrement plus forte dans nos résultats.

### bitcoin - spread

La corrélation avec les obligations d'entreprise à haut rendement (HY Corp) est de 64% contre 35% dans notre étude avec les obligations d'entreprise de bonne qualité. La corrélation avec les indices obligataires couvrant les marchés obligataires mondiaux est quant à lui de 23%. Le bitcoin semble donc plus être corrélé aux dettes risquées. Dans notre contexte d'étude, les assureurs vie, par contrainte réglementaire (*LOI n° 2017-1837 du 30 décembre 2017 de finances pour 2018 (1) 2017*), investissent en général dans des obligations de bonne qualité. Cela nous emmène à conserver la valeur de 35% comme niveau de corrélation entre le bitcoin et le marché des obligations car plus conservateur que 23% dans le cadre de Solvabilité 2.

### bitcoin - immobilier

La corrélation du bitcoin avec les REITs, ou Real Estate Investment Trusts (en français, "Fonds de Placement Immobilier" ou FPI) est de 46% contre 20% dans notre étude. Toutefois, il faut préciser que notre objectif est d'analyser la corrélation entre le bitcoin et le marché immobilier mondial et non sur la performance des sociétés REIT<sup>21</sup> spécifiquement, car cela fournirait une vision plus étroite par rapport au marché immobilier dans son ensemble. De ce fait, l'étude de corrélation du bitcoin avec le FTSE EPRA/NAREIT Global semble plus pertinent car il offre une vision plus large des actions immobilières cotées à l'échelle mondiale. Nous avons donc retenu 20% de corrélation entre le bitcoin et le marché de l'immobilier.

### bitcoin - taux

Le "LT Gvt" fait généralement référence à "Long-Term Government", ce qui se rapporte aux obligations ou titres d'État à long terme. Ces instruments financiers ont typiquement une maturité de plus de 10 ans, , tout comme le United Kingdom 10-Year Bond Yield". La corrélation entre le bitcoin et le LT Gvt est 0.06 selon Fidelity INVESTMENT. Cela n'est pas en contradiction avec notre analyse empirique. En effet, nous avons fait le choix de considérer la corrélation maximale sur la période historique considérée. La valeur de 15% correspondait à la corrélation observée sur l'année 2021 (réf figure 4.5), période de la crise sanitaire. En observant l'évolution de la corrélation après cette période, on observe que la corrélation décroît vers 0 sur l'année 2022. Mais encore une fois, nous avons retenu un niveau prudent de corrélation, soit 15%.

## 4.5 Test de positivité de la matrice de corrélation

Une matrice de corrélation définie positive est essentielle pour garantir l'interprétation correcte des corrélations, la validité mathématique des modèles et la stabilité et la fiabilité des analyses et des prévisions basées sur ces modèles.

En finance et en gestion des risques, une matrice de corrélation définie positive garantit que les modèles

---

21. REIT est un type de société qui détient ou finance des biens immobiliers dans une gamme de secteurs de l'immobilier. Ces sociétés sont conçues pour générer des revenus, et elles distribuent généralement la majeure partie de ce revenu à leurs actionnaires sous forme de dividendes. Un indice REIT pourrait être basé sur les actions de plusieurs REITs opérant dans un pays ou une région spécifique.

basés sur cette matrice sont stables et fiables. Par exemple, dans le cadre de la gestion de portefeuille, une matrice de corrélation définie positive permet d'obtenir des estimations de la variance du portefeuille qui sont réalistes et interprétables.

Il existe plusieurs méthodes pour vérifier la positivité (définie positive) d'une matrice de corrélation. Voici quelques-unes des méthodes les plus couramment utilisées. Nous avons vérifié la positivité de la nouvelle matrice incluant les corrélations du bitcoin avec la méthode de positivité des valeurs propres.

Les valeurs propres obtenues calculées sont toutes positives, donc notre matrice de corrélation est bien définie positive.

Valeur propre	V1	V2	V3	V4	V5
	2.67	1.04	0.71	0.50	0.08

**TABLE 4.1 Valeurs propres de la matrice de corrélation**

## 4.6 Conclusion du chapitre

En conclusion de ce chapitre, notre démarche de calibration de la matrice de corrélation conforme à la norme Solvabilité 2, incluant le bitcoin, s'est appuyée sur la méthodologie de l'EIOPA. Avant d'entreprendre les mesures de corrélation, il était légitime de vérifier l'existence d'un lien de causalité entre la dynamique du bitcoin et les autres actifs traditionnels. Une fois ce lien établi, nous avons sélectionné avec soin des actifs représentatifs à l'échelle mondiale, en nous basant sur les choix de l'EIOPA, pour mener une étude quantitative des corrélations linéaires sur une période historique de 12 ans. Cette étude a été comparée aux résultats de la plate-forme Fidelity INVESTMENT. Les conclusions tirées de ces analyses ont permis de compléter la matrice de corrélation du risque de marché S2 existante, aboutissant ainsi à la nouvelle matrice calibrée présentée ci-dessous :

	bitcoin	Taux	Action	Immobilier	Spread
bitcoin	1				
Taux	0.15	1			
Action	0.5	0.5/0	1		
Immobilier	0.2	0.5/0	0.75	1	
Spread	0.35	0.5/0	0.75	0.5	1

**TABLE 4.2 Matrice de corrélation S2 calibrée pour l'outil ALM**

Cette matrice sera introduite en input du modèle ALM pour le calcul du SCR marché incluant le bitcoin dans le portefeuille.

## CHAPTER 5 : Analyse d'impact de l'intégration du bitcoin

Ce chapitre final symbolise la synthèse de l'ensemble des travaux réalisés jusqu'ici. Les métriques calibrées auparavant serviront à alimenter le modèle ALM, qui a été préalablement ajusté pour intégrer le bitcoin parmi les actifs prévisionnels. Ce modèle ALM nous permettra de générer des indicateurs S2 (BE, VIF, SCR) utiles pour effectuer des analyses d'impact liées à l'intégration du bitcoin.

Nous allons d'abord présenter les développements réalisés pour l'intégration du bitcoin dans le modèle, puis nous examinerons les conséquences de cette intégration à travers les résultats fournis par le modèle ALM.

### 5.1 Développement du modèle ALM pour l'intégration du bitcoin

L'outil ALM existant et décrit en partie dans le mémoire de HOUNKONNOU 2020 chez Nexialog Consulting, constitue la base de notre étude. Le modèle ALM est décrit plus en détails dans le mémoire de HOUNKONNOU, exclut toutefois la classe crypto-actifs. Pour saisir pleinement le modèle ALM actuel, la lecture de son mémoire est conseillée. Notre étude se concentre sur les évolutions du modèle pour intégrer les crypto-actifs, notamment le bitcoin. Néanmoins, nous présenterons certains aspects du modèle existant pour mieux introduire les développements effectués.

#### 5.1.1 Modèle ALM sans la poche crypto

Le modèle ALM sans ajustement s'appuie sur de nombreux paramètres d'entrée (inputs), dont les GSE des actifs du portefeuille sont d'une importance cruciale (voir Chapitre 2.4). Il n'a pas été nécessaire de calibrer les GSE pour les actifs traditionnels comme les taux d'intérêt, les actions et l'immobilier, car ils figuraient déjà dans le modèle. Parmi les métriques essentielles aux exigences du Pilier I de la norme Solvabilité II figurent les valeurs de chocs actifs et la matrice de corrélation entre les divers facteurs de risque de marché (hors crypto-monnaies). Ces informations sont fournies par le régulateur dans le contexte de l'approche standard pour le calcul du Capital de Solvabilité Requis et n'ont pas été calibrées pour cette étude.

Le schéma ci-dessous (Figure 5.1), résume le processus de la gestion actif-passif (A/P) durant la projection du bilan d'un assureur-vie sur une année civile.

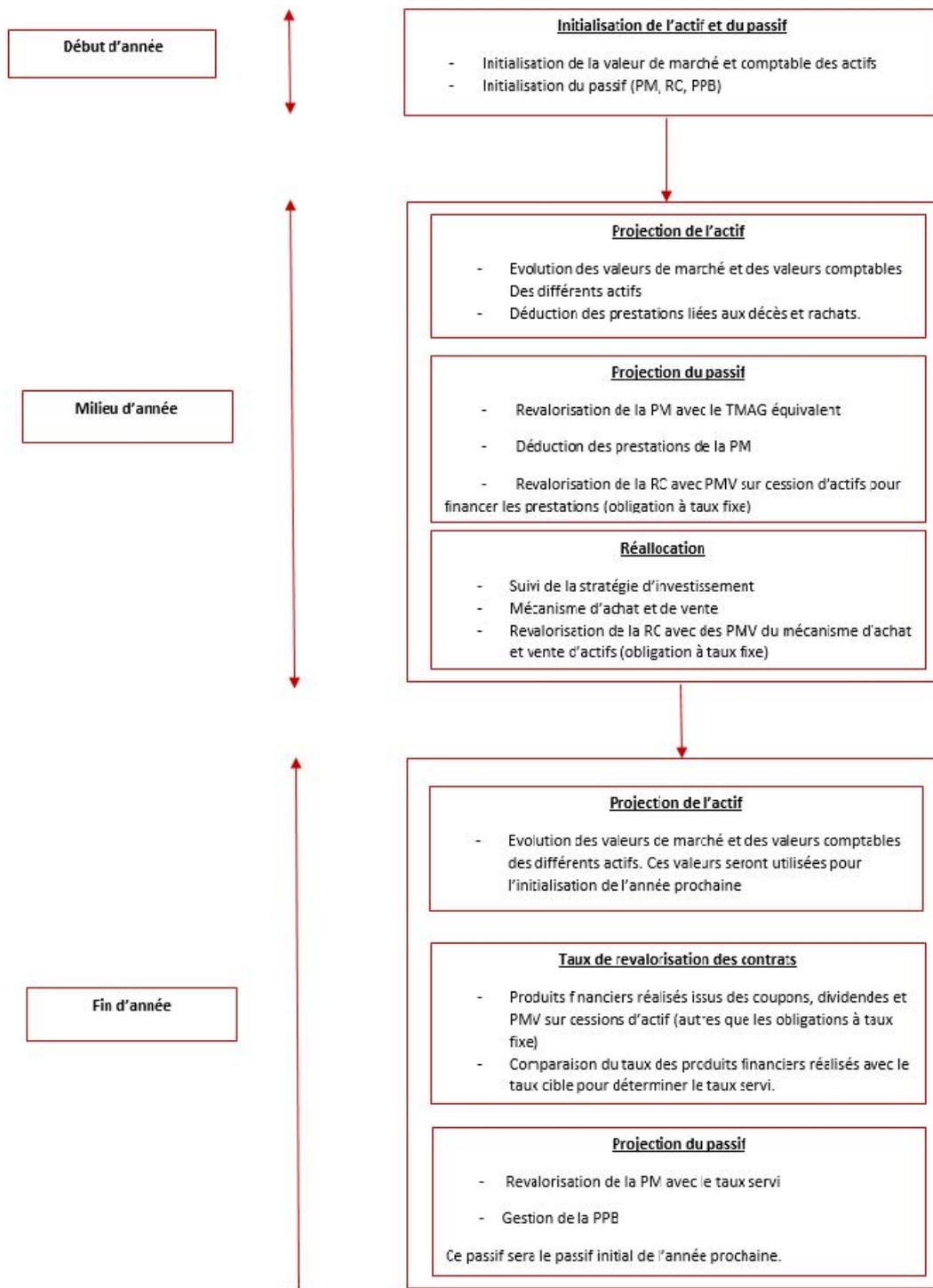


FIGURE 5.1 Étape de projection sur un an du modèle ALM implémenté

La figure (5.1) illustre un processus structuré visant à projeter le bilan annuel d'une compagnie d'assurance en tenant compte à la fois de ses actifs et de ses passifs. Ce processus permet de calculer le flux net, la différence entre les actifs et les passifs, indiquant un excédent ou un déficit de trésorerie pour chaque période. Ces informations guident l'assureur dans ses décisions d'investissement et de liquidation, contribuant ainsi à définir une stratégie de gestion appropriée pour son portefeuille. Cette approche permet à l'assureur d'ajuster ses actifs aux passifs pour garantir que les revenus générés correspondent

aux obligations liées aux passifs. Dans notre modèle ALM, chaque année est divisée en trois périodes distinctes, chacune comprenant plusieurs étapes clés :

⇒ Le début d'année est la phase d'initialisation :

- Initialisation des Actifs : les valeurs de marché et comptables des différents actifs sont initialisées, généralement équivalentes aux valeurs de fin d'année  $n - 1$ .
- Initialisation des Passifs : les passifs, qui comprennent la provision mathématique (PM), la réserve de capitalisation (RC), et la provision pour participation aux bénéfices (PPB), sont également initialisés en fonction des valeurs de fin d'année  $n - 1$ .

⇒ En milieu d'année, l'actif et le passif ont été vieilli d'un semestre. Ce processus de vieillissement se déroule de la façon suivante :

- Événements clients : calcul des prestations dues aux clients, telles que les prestations décès, les contrats échus et les , etc. Les prestations décès sont évaluées grâce aux tables de mortalité en vigueur. Le taux de rachat fait l'objet d'un calcul bien précis à l'intérieur du modèle. Ce taux se décompose en un taux de rachat structurel et un taux de rachat conjoncturel. Le taux de rachat structurel quant à lui se décompose en un rachat total et un rachat partiel.
- Projection des actifs : les valeurs de marché des actifs sont projetées en utilisant le rendement semestriel équivalent issus des GSE, ainsi que les revenus générés par ces actifs, tels que les dividendes, les coupons, les loyers, etc. Une production financière est dégagée à ce niveau et une déduction des prestations dues aux événements clients de cette production financière est réalisée juste après.
- Revalorisation des passifs : avant la déduction des prestations liés aux événements clients, La PM est revalorisée en utilisant le Taux Minimum de Revalorisation Garanti (TMAG) semestriel équivalent. La RC est également ajustée en fonction des plus-values ou moins-values (PMV) réalisées sur les cessions d'obligations à taux fixe.
- Rééquilibrage du portefeuille : si le cash issu des produits financiers disponible n'est pas suffisant pour financer les prestations sortantes du passif, des opérations d'achat et de vente d'actifs sont effectuées pour financer les sorties et ensuite atteindre l'objectif cible d'allocation cible d'actifs si une stratégie d'allocation cible est définie. L'objectif donc de cette allocation est de réajuster quantitativement (en termes de valeur de marché) chaque actif à la proportion désirée via l'allocation cible renseignée en paramétrage. Dans ce cas, un retraitement est effectué au niveau de la valeur comptable de chaque actif.
- Ajustement de la réserve de capitalisation : la RC est de nouveau revalorisée en fonction des PMV réalisées sur les obligations à taux fixe pendant le processus de rééquilibrage.

⇒ Le processus en fin d'année est similaire en milieu avec la particularité supplémentaire qu'il est le lieu des politiques de partage de bénéfices de la compagnie :

- Évaluation des actifs : les nouvelles valeurs de marché et comptables des différents actifs sont déterminées.

- Taux de revalorisation (Taux Servi) : ce taux est déterminé en comparant le rendement des produits financiers réalisés avec le taux cible.
- Ajustement des passifs : la PM est revalorisée en fonction du taux servi, et la provision pour participation aux bénéfiques est également déterminée.

Ce processus de vieillissement du bilan de l'assureur est itérée sur 50 années. Les flux issus de ces projections sont actualisés en utilisant la courbe des taux d'intérêt sans risque.

Pour plus de détails sur les étapes mentionnées ci-dessus, les hypothèses et les équation du vieillissement de l'actif et du passif, ainsi le mécanisme de distribution de richesse, nous renvoyons le lecteur vers le chapitre 3 du mémoire ci-précédemment HOUNKONNOU 2020.

## 5.1.2 Modèle ALM avec la poche crypto

### 5.1.2.1 Modifications des paramètres d'entrée du modèle

Cette section récapitule les métriques spécifiques au bitcoin, calibrées dans les sections (1.5, 2.4, 3.5), et leur intégration dans l'outil ALM. Ces nouvelles métriques viendront s'ajouter, sans remplacer, les paramètres d'entrée existants pour les actifs traditionnels dans le modèle.

**Model Point actif** : une nouvelle ligne de Model Point (MP) a été ajoutée pour le bitcoin dans les MP actifs. Le portefeuille d'actif comprend désormais 4 MP actifs, à savoir les actions, l'immobilier, l'actif obligataire et le bitcoin.

**Choc S2** : en complément du vecteur des chocs calibrés par l'EIOPA, nous incluons le choc calibré et retenu dans la section (1.5), soit la valeur de 85%.

**GSE risque neutre bitcoin** : Le modèle intègre en entrée 1000 scénarios économiques générés fournis par le GSE. Chaque scénario bitcoin fournit le rendement annuel du bitcoin pour toutes les années de projection jusqu'à un horizon de 50 ans, de manière similaire aux actions. La calibration d'un GSE bitcoin a été détaillée dans la section 2.4. Ce GSE bitcoin vient s'ajouter aux 3 GSE actions, immobiliers et taux déjà présents dans le modèle.

**Matrice de corrélation** : nous avons également examiné la matrice de corrélation entre les différents risques du marché traditionnel, initialement calibrée et publiée par l'EIOPA. Dans la section 3.5, nous avons évalué les paires de corrélation entre le bitcoin et un actif représentatif des facteurs de risque présents dans la matrice initiale. Nous avons ainsi mis à jour la matrice de corrélation de marché, en supposant que les matrices de corrélation des autres modules de risques restent inchangées. Cette hypothèse nous permet de nous concentrer sur l'analyse du SCR marché pour évaluer l'impact du bitcoin sur la solvabilité de l'assureur vie.

### 5.1.2.2 Ce qui change dans la projection du bilan

L'intégration du bitcoin dans le modèle a été fait à l'instar des actions avec quelques différences notables. De ce fait, les développements ont essentiellement porté sur la gestion des actifs. Le passif n'a pas subi de modifications majeures.

**Adaptation du bilan initial :** le bilan initial a été ajusté pour inclure un nouveau modèle de point d'actif correspondant au bitcoin. Les caractéristiques de la portion bitcoin dans le portefeuille, telles que la valeur d'achat et la valeur de marché au début de la projection, ont été intégrées.

**Projection de l'actif :** les projections des actifs traditionnels du portefeuille demeurent inchangées.

Le bitcoin est projeté selon le même mécanisme que les actions pour tout horizon  $t$ , à la seule différence que la part dividende est nulle. La valeur marché de l'actif est calculée selon la formule :

$$VM_{\text{btc}}(t) = n_{\text{btc}}(t) \times \text{Btc}(t-1) \times (1 + \text{rend}_{\text{btc}}(t-1; t))$$

avec,

- $VM_{\text{btc}}$  représente la valeur de marché du bitcoin (btc) dans le portefeuille à un moment donné  $t$ .
- $n_{\text{btc}}(t)$  le nombre de bitcoin
- $\text{Btc}(t-1)$  est le prix d'un bitcoin observé sur le marché à l'instant  $t-1$ .
- $\text{rend}_{\text{btc}}(t-1; t)$  est le rendement observé entre  $t-1$  et  $t$ , issus du GSE.

**Calcul des Plus ou Moins Valeurs Latentes (PMVL) :**

- Dans le modèle ALM, la simplification a été faite de considérer la valeur historique du bitcoin comme la valeur comptable du bitcoin à l'achat. Il n'y a pas d'actualisation de la valeur comptable selon les scénarios du marché où l'actif est en moins-value latente au cours de la projection. Cette hypothèse simplificatrice permet de ne pas considérer le mécanisme lié aux provisions pour risque d'exigibilité (PRE).
- Ainsi, à chaque horizon  $t$  de projection, la PMVL est déterminée via la formule :

$$PMVL_{\text{btc}} = VM_{\text{btc}}(t) - VC_{\text{btc}}$$

où  $VC_{\text{btc}}$  représente la valeur comptable du bitcoin.

Parallèlement, pour la valeur comptable, nous utilisons :

$$VC_{\text{btc}}(t) = \sum_{i=0}^t n(t)_{\text{btc}}^i \times S_{\text{btc}}^0$$

avec :

- $n(t)_{\text{btc}}^i$  représentant le nombre de bitcoins achetés à l'instant  $i$  et restant dans le portefeuille en  $t$ .
- $S_{\text{btc}}^0$  étant la cotation du bitcoin à l'instant d'achat.

**Modification de la stratégie de vente d'Actifs :**

La stratégie est fondée sur une vente progressive des actifs, priorisant ceux à haut risque. En d'autres termes, elle favorise la liquidation des actifs les plus volatils en premier. L'objectif est de minimiser les fluctuations du portefeuille de l'assureur en évitant de liquider en premier lieu les actifs stables qui génèrent des rendements constants. L'ordre de vente est le suivant :

1. Vente du bitcoin : le bitcoin, compte tenu de sa forte volatilité, est considéré comme l'un des actifs les plus risqués et donc est placé en première ligne dans la séquence de vente.

$$\min(VM_{btc}; Sorties)$$

Ainsi l'assureur initie le processus en cédant des bitcoins jusqu'à atteindre la limite maximale possible. Si la somme totale des sorties excède la valeur marché du bitcoin présent dans le portefeuille, cela indique que tous les bitcoins ont été cédés. Dans cette situation, pour continuer à financer les sorties, la vente se poursuit avec les actions.

2. Vente des actions : si la totalité du bitcoin est vendue, la stratégie s'oriente vers la vente des actions, en suivant la même logique limitative :

$$\min(VM_{action}; Sorties - VM_{btc})$$

.

3. Si valeur des actions est insuffisante pour financer les sorties, alors on réalise des ventes des actifs immobiliers :

$$\min(VM_{immo}; Sorties - VM_{bitcoin} - VM_{action})$$

.

4. Vente des Obligations : en dernier recours, si les besoins de liquidités ne sont pas encore comblés, la vente des obligations est envisagée :

$$\min(VM_{obligation}; Sorties - VM_{btc} - VM_{action} - VM_{immo})$$

.

#### Affectation des PMVR bitcoin :

Les PVR bitcoin suite aux financement des flux net sortants, à l'atteinte de l'allocation cible et à la satisfaction des besoins contractuelles sont affectés dans un premier temps aux produits financiers et au résultat financier à la fin d'année.

Les MVR sont affectés uniquement au résultat financier. Les mécanismes de PB reste inchangés.

#### Stratégie d'allocation cible des actifs :

L'ajustement du portefeuille d'actifs selon l'allocation cible fixée par l'assureur est crucial pour chaque année de projection. La réallocation est donc indispensable, car durant la période de projection, l'assureur cherche à maintenir une quantité cible pour chaque actif. Toutefois, ces actifs connaissent des variations dues à la dynamique du marché et aux exigences de liquidité liées aux flux de trésorerie sortants. La réallocation permet donc de rééquilibrer le portefeuille, assurant que la valeur de marché de chaque actif corresponde à la proportion souhaitée.

Le modèle a été modifié pour intégrer le bitcoin dans la définition des stratégies d'allocation cible pour les différents actifs. Examinons en détail comment s'effectue le processus de réallocation dans ce modèle. Après avoir considéré les mouvements du semestre, incluant la variation des actifs et les événements affectant les assurés, nous débutons par la détermination de la valeur marchande totale des actifs :

$$VM_{total}^i(t) = \sum_{j \in \{ crypto, action, obligation, immobilier, cash \}} VM_j^i(t, \text{après évènement assuré})$$

Cette valeur sert de base pour déterminer la valeur de marché cible de chaque actif individuellement :

$$VM_j^i(t, \text{après réalloc}) = \alpha_j \times VM_{\text{total}}^i(t)$$

où  $\alpha_j$  représente la proportion cible de l'actif  $j$ .

Dans l'atteinte de cet objectif d'allocation cible, deux scénarios se présentent :

- Si  $VM_j^i(t, \text{après réalloc}) \geq VM_j^i(t, \text{après événement assuré})$  :

Il est nécessaire d'acheter des actifs. La quantité à acheter est déterminée par :

$$Q_j^i = VM_j^i(t, \text{après réalloc}) - VM_j^i(t, \text{après événement assuré})$$

La valeur comptable est alors ajustée comme suit :

$$VC_j^i(t, \text{après réalloc}) = VC_j^i(t, \text{après événement assuré}) + Q_j^i$$

- Dans le cas contraire, où  $VM_j^i(t, \text{après réalloc}) \leq VM_j^i(t, \text{après événement assuré})$  :

Il est nécessaire de vendre une partie des actifs. La quantité à vendre est calculée comme suit :

$$Q_j^i = VM_j^i(t, \text{après événement assuré}) - VM_j^i(t, \text{après réalloc})$$

La valeur comptable est alors réajustée selon la formule suivante :

$$VC_j^i(t, \text{après réalloc}) = VC_j^i(t, \text{après événement assuré}) \times \frac{VM_j^i(t, \text{après réalloc})}{VM_j^i(t, \text{après événement assuré})}$$

#### Calcul du SCR bitcoin et du SCR Marché :

Dans le cadre du modèle ALM élaboré, le SCR de chaque sous-module de risque est évalué en mode stand-alone. Cela implique que dans ce mode, l'évaluation du SCR, par exemple celui du marché, est réalisée en évaluant le SCR de chaque actif de manière autonome, sans tenir compte des interactions avec les autres risques du marché. Plus concrètement, pour le bitcoin, cela équivaut à choquer uniquement la valeur marché du bitcoin tout en maintenant les valeurs marchés des autres actifs inchangés tout au long de la projection. Les indicateurs résultant de cette projection représenteront les indicateurs de scénario choqué associé au bitcoin. Le SCR bitcoin est ensuite calculé comme la différence entre la VIF du scénario central (sans choc) et la VIF du scénario choqué.

Le SCR marché est obtenu en agrégeant les SCR individuels via la matrice de corrélation calibrée dans le chapitre 4, page 103. Les avantages du calcul du SCR en mode Stand-Alone résident dans sa capacité à permettre une analyse approfondie des risques spécifiques au risque du marché, facilitant ainsi une couverture et une gestion précises des risques associés à la détention du bitcoin. Cette approche permet également de mieux mesurer l'effet de diversification entre les facteurs de risque dans la définition des stratégies de couverture de risques.

## 5.2 Étude d'impact

### 5.2.1 Présentation des hypothèses

#### 5.2.1.1 Hypothèses sur les actifs

- **Allocation de portefeuille :**

Pour mesurer l'effet de l'intégration du bitcoin dans le portefeuille de l'assureur, nous avons effectué une analyse comparative des indicateurs du modèle sans bitcoin et du modèle incluant cette nouvelle variable. Le portefeuille, défini sans la portion bitcoin, a servi de point de référence initial, et la répartition des actifs a été choisie en fonction des allocations de portefeuille couramment utilisées par les compagnies d'assurance-vie. Cela implique qu'une proportion significative du portefeuille est investie en obligations pour assurer sa stabilité et générer des revenus constants grâce aux coupons.

Par ailleurs, nous avons opté pour une stratégie d'allocation progressive du bitcoin dans le portefeuille de l'assureur, avec des variations allant de 0% à 5%, engendrant ainsi six schémas d'allocation distincts. Les indicateurs issus du modèle avec ces schémas d'allocations ont été utilisés pour mieux appréhender les impacts de l'ajout du bitcoin.

En augmentant graduellement la part du bitcoin de 0% à 5% dans le portefeuille de référence, cette hausse est neutralisée par une baisse correspondante du cash, qui diminue de 5% à 0%. Pour isoler l'effet du bitcoin, la part des autres actifs, à l'exception du cash, dans le portefeuille reste constante, permettant ainsi une analyse spécifique de son influence sur les mesures de solvabilité et de valeur du portefeuille de l'assureur.

Le tableau 5.1 présentent les pourcentages alloués à chaque catégorie d'actifs pour chaque stratégie d'allocation.

schéma d'allocation	Obli	Immo	Action	Cash	Crypto
Référence	84%	6%	5%	5%	0%
1	84%	6%	5%	4%	1%
2	84%	6%	5%	3%	2%
3	84%	6%	5%	2%	3%
4	84%	6%	5%	1%	4%
5	84%	6%	5%	0%	5%

**TABLE 5.1 Stratégie d'allocation avec la poche bitcoin**

Les valeurs initiales de l'actif, la valeur marché (VM) et la valeur nette comptable (VNC) reste les mêmes pour chaque schéma d'allocation :

	VM	VNC
Total actif	23 203 467	23 631 612

**TABLE 5.2 Valeur initial actif**

#### 5.2.1.2 Hypothèses sur le passif

- **Model point Passif (MP passif) :**

Le passif de notre modèle se compose de trois groupes de contrats, chacun disposant d'un TMG proportionnel à l'ancienneté. La table 5.3 présente un résumé des caractéristiques de chaque groupe.

Indice MP	Nombre de polices	Naissance	Année de début	TMG	PM	Versements périodiques
1	1 000	1980	2015	3%	10 000	50
2	500	1990	2021	0%	10 000	50
3	800	1985	2019	1%	10 000	50

TABLE 5.3 MP passif

Avec ces caractéristiques observées dans le tableau ci-dessus, nous obtenons une Provision Mathématique (PM) initiale de 23 millions d'euros. Nous partons du principe d'une projection en run-off, c'est-à-dire sans nouveau business durant la période de projection.

- **Taux cible** : le taux de revalorisation cible pour les contrats est le taux zéro-coupon sur 10 ans.
- **Mortalité** : la table réglementaire TF002 a été retenue pour la mortalité.
- **Rachats** :
  - Rachat partiel : une loi de rachat déterministe basée sur l'ancienneté des contrats a été considérée.
  - Rachat dynamique : des niveaux de rachats dynamiques sont déclenchés en fonction de la différence entre le taux de rendement servi ( $tx\_servi$ ) et le taux de rendement attendu ( $taux\_attendu$ ).

$$\text{différence} = tx\_servi - taux\_attendu$$

Cette différence est cruciale car elle détermine l'ajustement du taux de rachat dynamique en fonction des performances réelles du marché par rapport aux attentes. Différentes formules sont appliquées en fonction de la condition rencontrée pour calculer le taux de rachat dynamique. :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{RDmax} & \text{si différence} < \alpha \\ \text{RDmax} \times \frac{\text{différence} - \beta}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha \leq \text{différence} < \beta \\ 0 & \text{si } \beta \leq \text{différence} < \gamma \\ \text{RDmin} \times \frac{\text{différence} - \gamma}{\delta - \gamma} & \text{si } \gamma \leq \text{différence} < \delta \\ \text{RDmin} & \text{si différence} \geq \delta \end{array} \right. \quad (5.29)$$

- **Taux de Participation aux Bénéfices (PB)** : le taux de participation aux bénéfices correspond au taux réglementaire qui est défini comme suit :

$$Taux_{PB} = (100\% - (\text{Résultat}_{technique} > 0) \times 10\%) \times \text{Résultat}_{technique} + 85\% \times \text{Produits financiers}$$

### 5.2.2 Analyse d'impact

L'application du modèle ALM en mode stochastique, en utilisant les 1000 scénarios de nos GSE d'actifs, et en mode déterministe, avec le scénario moyen des GSE, a permis le calcul des indicateurs mentionnés dans la section 1.3.2.1 pour un scénario central. Ces deux approches de calcul ont aidé à estimer la TVOG. La TVOG, ou Time Value of Options and Guarantees, illustre la différence entre une évaluation déterministe et une évaluation stochastique dans le domaine de l'assurance. La formule de calcul est la suivante :

$$TVOG = BEL_{stochastique} - BEL_{deterministe}$$

Part bitcoin	VM_initiale	BE_Det	VIF_Det	TVOG	Portefeuille
0 %	23,2 M€	21,7 M€	1,54 M€	1,0 M€	Référence
1 %	23,2 M€	21,8 M€	1,45 M€	1,4 M€	1
2 %	23,2 M€	21,8 M€	1,37 M€	1,6 M€	2
3 %	23,2 M€	21,9 M€	1,28 M€	1,7 M€	3
4 %	23,2 M€	22,0 M€	1,19 M€	1,7 M€	4
5 %	23,2 M€	22,1 M€	1,11 M€	1,7 M€	5

**FIGURE 5.2** Analyse d'indicateurs d'impact

En examinant le tableau, on peut distinguer plusieurs tendances importantes.

Premièrement, le BEL s'accroît progressivement avec l'augmentation de la part de crypto. En parallèle, la VIF diminue graduellement avec l'augmentation de la part de crypto, passant de 0,5 M€ à -0,6 M€, ce qui indique une réduction de la valeur future des bénéfices escomptés. De la même manière, la valeur temporelle de l'option garantie (TVOG) s'accroît progressivement avec l'augmentation de la part de crypto, passant de 1,0 M€ à 1,7 M€, ce qui entraîne une hausse de la valeur temporelle des options et des garanties. Cette hausse suggère que les options intégrées dans le contrat d'assurance vie (telles que les options de rachat ou les garanties de taux minimum) deviennent plus importantes avec l'ajout du bitcoin dans le modèle ALM. Enfin, les exigences de capital réglementaire (SCR) augmentent aussi progressivement avec l'augmentation de la part de crypto, mettant en évidence une nécessité croissante de capital pour couvrir les risques liés à cette nouvelle classe d'actifs.

### 5.2.2.1 Analyse BEL-VIF

Pour comprendre l'évolution des indicateurs BEL et VIF, un zoom a été effectué entre le portefeuille de référence sans bitcoin et celui avec 1% de bitcoin.

Part bitcoin	VM	BE_Sto	VIF_Sto	TVOG	Portefeuille
0 %	23,2 M€	22,7 M€	0,5 M€	1,0 M€	Référence
1 %	23,2 M€	23,1 M€	0,1 M€	1,4 M€	1

**FIGURE 5.3** Zoom sur 2 portefeuilles

Un écart de 400 000 € a été observé pour le BEL entre ces 2 portefeuilles. On observe le même écart en signe opposé pour la VIF. La VIF et le BEL varient donc de manière inverse et cette tendance est également confirmée dans d'autres schémas d'allocation.

Cette évolution inverse entre le BE et la VIF s'explique par le fait que tous nos schémas d'allocation partagent la même valeur de marché au début de la projection (23,2 M€). Ainsi, pour que l'équation

$VM = BEL + VIF$  soit respectée pour chaque schéma, une augmentation d'un élément de la somme  $BEL + VIF$  entraînerait logiquement une baisse de l'autre.

Notre objectif est maintenant de comprendre l'évolution du BEL entre le portefeuille de référence et le portefeuille 1, en supposant que cette analyse permettra d'expliquer l'évolution inverse de la VIF. Pour cela, examinons plus en détail la variation du BEL lors du passage d'un schéma d'allocation de référence à un schéma d'allocation incluant 1% de bitcoin. L'analyse des provisions mathématiques (PM) en fin de projection montre, comme illustré par la figure 5.4, que la PM avec bitcoin décroît plus rapidement que celle du portefeuille sans bitcoin.

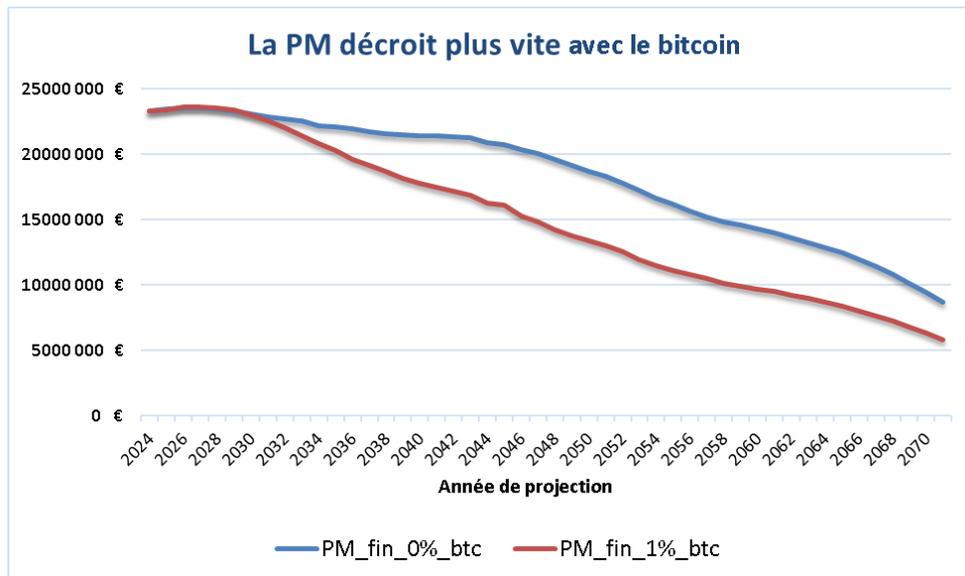


FIGURE 5.4 Comparaison PM centraux

La figure 5.4 offre une première compréhension de l'augmentation du BEL. La baisse de la PM avec le portefeuille 1 dès les premières années signale des flux de trésoriers plus importants des engagements de l'assureur pendant la projection. Ces sorties, devenant notables dès la huitième année, ont un impact significatif sur le BEL. En effet, comme l'illustre la figure 5.5, les facteurs d'actualisation utilisés dans le modèle ont un poids plus importants durant les premières années de projection.

Par contre, avec le portefeuille de référence, les sorties sont moins importantes et la PM résiduelle est plus élevée en fin de projection. Cependant, comme les facteurs d'actualisation ont un poids faible en fin de projection, cette PM en fin de projection impacte moins le BEL.

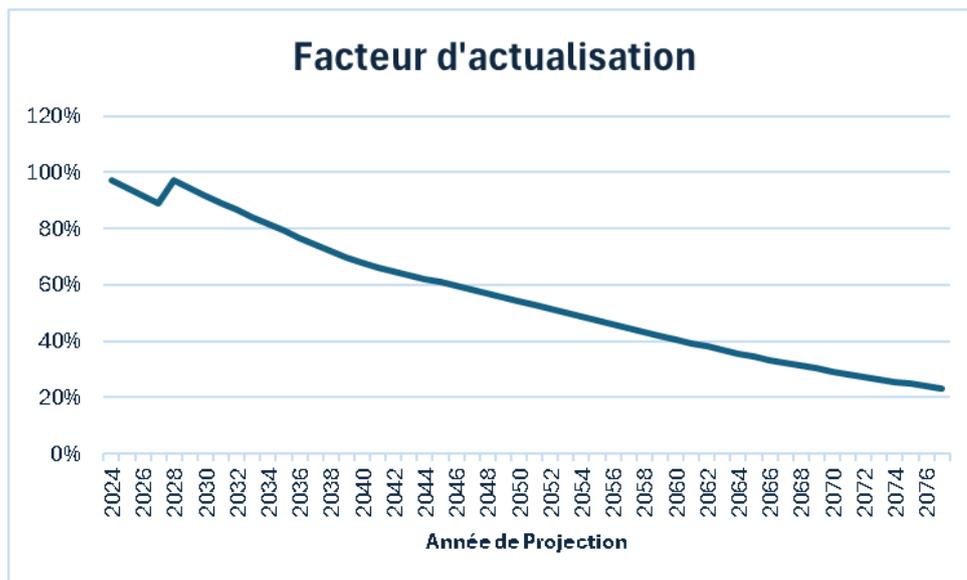


FIGURE 5.5 Évolution du facteur d'actualisation

Pour comprendre les écarts de sorties observés avec l'introduction du bitcoin, l'évolution des produits financiers générés par nos deux portefeuilles d'analyse a été examinée. La figure 5.6 illustre cette évolution pour les deux portefeuilles.

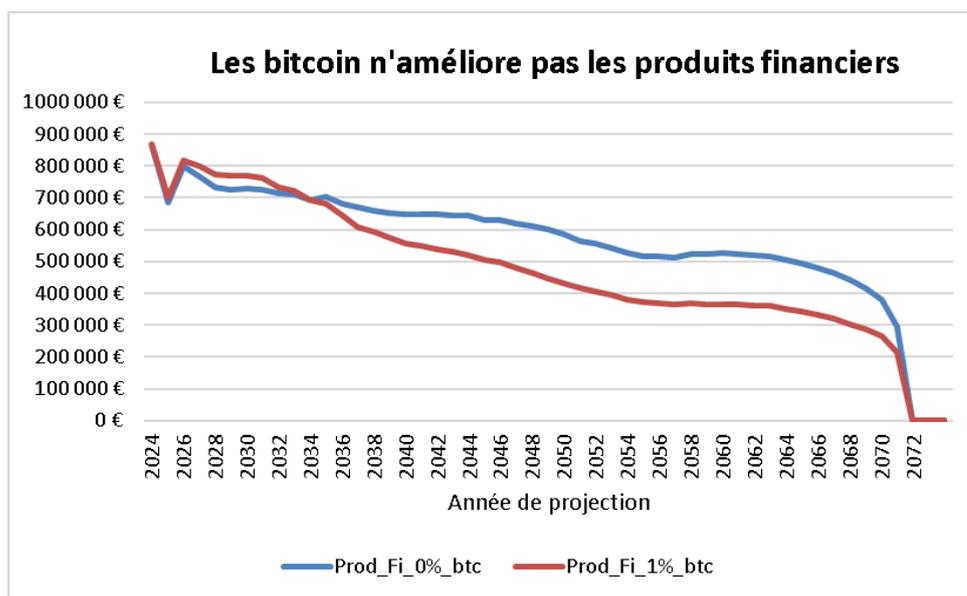


FIGURE 5.6 Évolution des produits financiers

La figure 5.6 révèle que les rendements financiers générés par le portefeuille incluant le bitcoin sont inférieurs à ceux du portefeuille de référence de la huitième année jusqu'à la fin de la période de projection. On remarque par ailleurs, dans la figure 5.4, que les différences entre les PM apparaissent également dès la huitième année. Il semble donc exister un lien entre l'évolution des écarts des rendements financiers dans ceux des PM. En effet, il a été observé que la baisse des produits financiers a entraîné une diminution de la revalorisation des contrats via les mécanismes de distribution de richesse (PB servis) et a également

activé un plus grand nombre de rachats dynamiques.

Analysons maintenant la diminution des produits financiers avec le portefeuille intégrant le bitcoin. Il est important de rappeler que les ajustements effectués concernent les allocations en cash et en bitcoin dans la composition des deux portefeuilles. Pour cette raison, une comparaison a été effectuée entre les scénarios moyens du GSE bitcoin et les taux des zéro-coupons à un an (ZC 1 an), étant donné que le cash est revalorisé annuellement par ces taux ZC 1 an. Par ailleurs, une analyse des plus-ou-moins-values réalisées sur les actifs des deux portefeuilles a été conduite pour évaluer l'impact de la volatilité introduite par le bitcoin. L'objectif de cette démarche est de mesurer l'effet du remplacement du cash par le bitcoin sur les produits financiers. Les figures ci-dessous illustrent l'évolution de ces différentes variables.

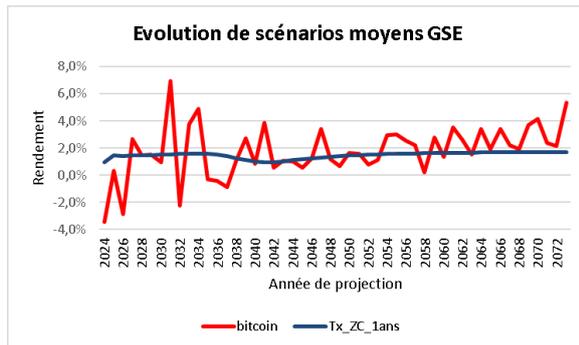


FIGURE 5.7 Scénario moyen GSE

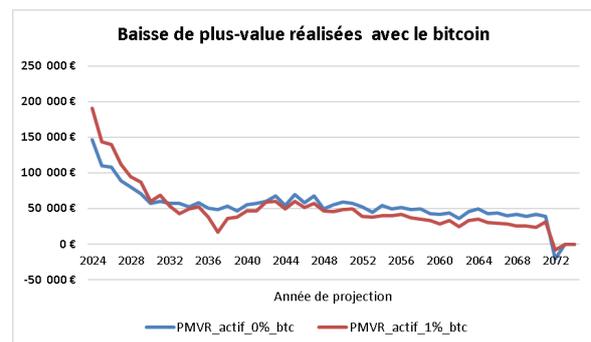


FIGURE 5.8 Évolution des PMVR

La figure 5.7 montre que l'incorporation du bitcoin dans le portefeuille, au détriment du cash, entraîne des situations défavorables pour le portefeuille, comme illustré par la figure 5.8. On observe une baisse des plus-values réalisées à partir de la huitième année de projection dans le portefeuille 1, marquant un écart croissant entre les passifs et les rendements financiers.

En résumé, les figures 5.7 et 5.8 montrent que les fluctuations du BEL et de la VIF sont principalement dues aux plus-ou-moins-values réalisées lors de la vente d'actifs pour financer les sorties du passif. Ces variations sont amplifiées dans le portefeuille contenant du bitcoin, en raison de la volatilité accrue qu'il introduit par rapport au cash. Cette situation remet en question la stratégie de vente d'actifs adoptée dans notre étude, comme mentionné dans la section 5.1.2.2, où les actifs sont vendus par ordre de risque décroissant. Ainsi, la vente prioritaire du bitcoin en 2032, une année marquée par une chute significative du rendement moyen du GSE bitcoin, entraîne une perte importante pour le portefeuille et réduit la revalorisation des contrats.

Ces analyses expliquent l'augmentation du BEL lorsque l'allocation en bitcoin passe de 0 à 1%, et cette explication reste valable pour différentes allocations en bitcoin, les GSE bitcoin et les taux ZC à un an étant identiques pour ces portefeuilles.

Par ailleurs, la baisse rapide de la VIF, atteignant des valeurs négatives, est notable, mais cette diminution est moins prononcée dans le scénario déterministe, comme le montre la TVOG. Un écart d'environ 1,7 million est observé entre la  $VIF_{Sto}$  et la  $VIF_{Det}$ , ce qui indique une forte volatilité des rendements des GSE et des scénarios extrêmes provoquant des réactions du modèle ALM non observées dans le scénario moyen. L'ajout de 1% de bitcoin augmente également la TVOG de 1 million à 1,4 million, soulignant que le coût des options et garanties devient significatif avec l'intégration du bitcoin. Ce risque doit être attentivement examiné par l'assureur pour une intégration efficace du bitcoin dans le portefeuille.

### 5.2.2.2 Analyse du SCR

Pour mesurer l'impact de la valeur calibrée du choc du bitcoin sur le capital de solvabilité et l'effet de diversification résultant de l'agrégation des risques de marché à travers la nouvelle matrice de corrélation de marché calibrée, il a été suffisant pour nous de considérer les indicateurs résultant du modèle ALM exécuté en mode déterministe.

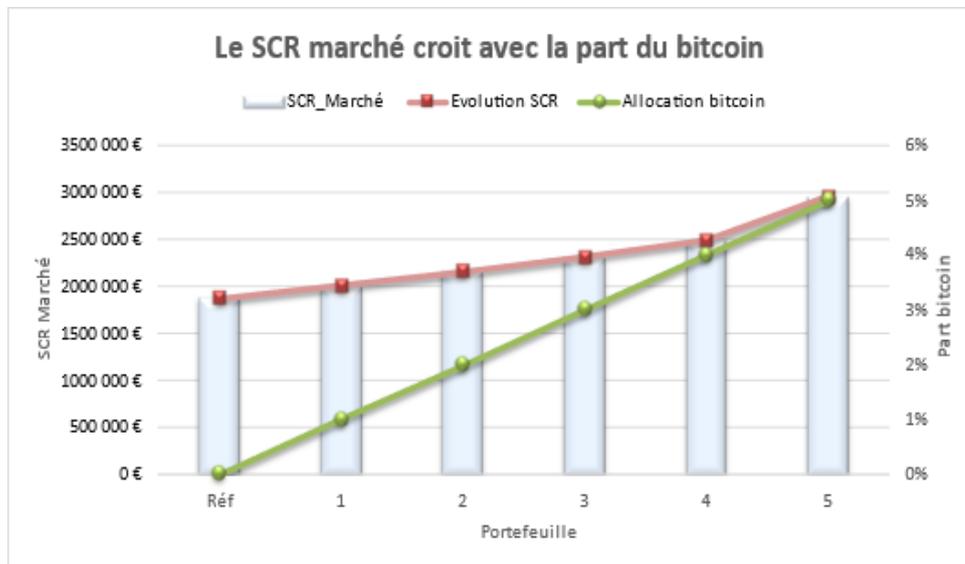
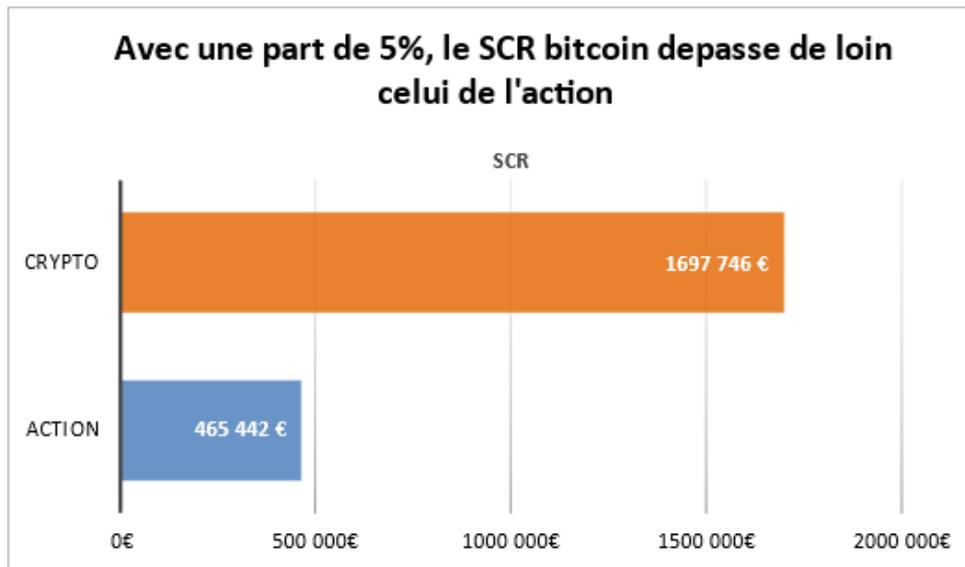


FIGURE 5.9 Évolution du SCR marché

La tendance croissante du SCR bitcoin dans la Figure 5.9 était attendue. En effet, l'augmentation de la proportion d'un actif risqué dans un portefeuille augmente son exposition au risque. Par conséquent, il est nécessaire de mettre de côté plus de capital en réserve pour couvrir les fluctuations de ce portefeuille. Par contre, à juger par les pentes d'évolution, cette augmentation n'est pas proportionnelle à l'augmentation de la part du bitcoin dans le portefeuille, elle semble avoir une tendance exponentielle ou polynomiale. Cela pourrait être un point intéressant à regarder pour une allocation optimale du bitcoin dans le portefeuille. Il était également prévu d'observer des valeurs du SCR crypto significativement élevées puisque le choc calibré et appliqué dans cette étude est de 85%, une valeur nettement supérieure aux chocs actifs publiés par l'EIOPA, 49% pour les actions de type II. Dans la figure 5.10, nous comparons les SCR relatifs aux risques associés aux actifs du portefeuille, qui comprend 5% de bitcoin, 5% d'actions, 6% d'actifs immobiliers et 84% d'actifs obligataires.



**FIGURE 5.10** Comparaison SCR des sous modules du risque du marché

On observe que le SCR du bitcoin est supérieur à celui de tous les autres facteurs de risque de marché. Cette différence est particulièrement notable en comparaison avec le SCR des actions, où les deux types d'actifs représentent la même proportion dans le portefeuille. Cela pourrait constituer un obstacle majeur pour un assureur désireux d'explorer les opportunités offertes par les crypto-actifs, dans l'éventualité où la réglementation permettrait des investissements dans le bitcoin avec un niveau de choc similaire à celui utilisé dans cette étude.

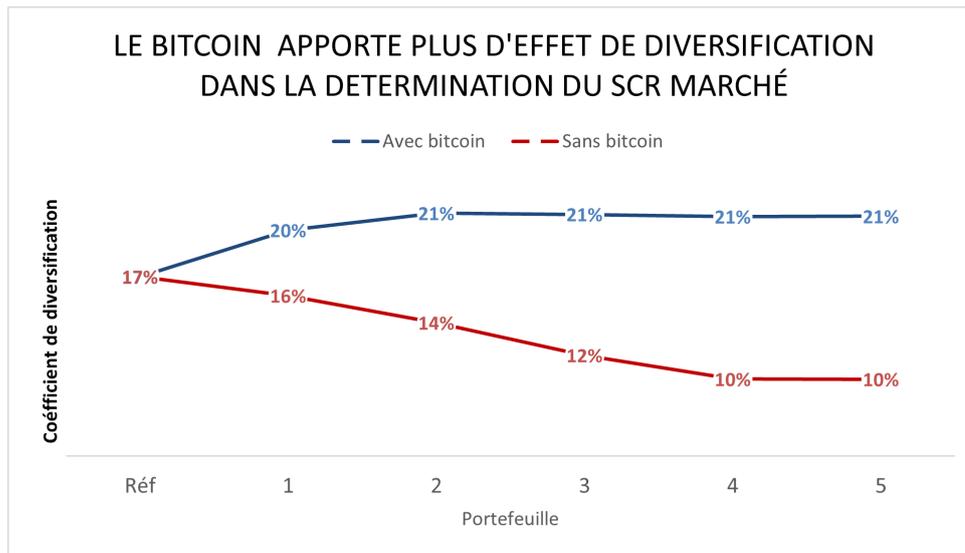
En outre, il est important d'analyser l'effet de diversification apporté par le bitcoin dans le SCR marché. En d'autres termes, nous examinerons l'impact de la matrice de corrélation calibrée dans la section 3.5 sur le SCR du marché. Le bénéfice de diversification découlant de la matrice peut être quantifié de la façon suivante :

$$1 - \frac{SCR_{mkt}}{\sum_r Mkt_r} \quad (5.30)$$

où,

- $SCR_{mkt}$  désigne la réserve en capital pour le risque de marché,
- $Mkt_r$  les réserves en capital pour les risques de marché individuels.

Pour rappel, la diversification diminue le SCR global. Plus le coefficient de diversification est élevé, plus le capital résultant de l'agrégation des sous-modules est réduit. Nous avons calculé le SCR de marché sans et avec le bitcoin pour nos six schémas d'allocation en utilisant la formule (5.30). La figure 5.11 montre les résultats obtenus.



**FIGURE 5.11** Gain de diversification avec la matrice de corrélation

Il est observé que l'intégration du bitcoin dans le portefeuille contribue à un effet de diversification accru sur le SCR marché. Cet effet est optimal lorsque le bitcoin représente 2% de l'allocation dans notre étude. Au-delà de 2%, ce coefficient demeure stable (21%). Un assureur envisageant d'ajouter le bitcoin à son portefeuille devrait donc prêter une attention particulière à ce coefficient pour optimiser l'allocation du bitcoin dans sa gestion des risques.

### 5.3 Conclusion du chapitre

En conclusion, l'analyse révèle plusieurs tendances significatives. L'augmentation progressive du BEL avec l'augmentation de la part de crypto suggère une hausse des engagements estimés. Parallèlement, la VIF diminue progressivement avec l'augmentation de la part de crypto, indiquant de potentiels pertes que va devoir assumer l'assureur dans le futur. Par ailleurs, la valeur temporelle de l'option garantie (TVOG) augmente progressivement avec l'ajout du bitcoin dans le portefeuille, suggérant une augmentation de la valeur temporelle des options et des garanties des contrats. Enfin, les exigences de capital réglementaire (SCR) augmentent également progressivement avec l'augmentation de la part de crypto, soulignant une nécessité croissante de capital pour couvrir les risques associés à cette nouvelle classe d'actifs.

L'analyse a également révélé que la VIF et le BEL varient de façon inverse, ce qui s'explique par le fait que tous nos schémas d'allocation partagent la même valeur de marché au début de la projection. De plus, l'introduction du bitcoin dans le portefeuille au détriment du cash ajoute plus de volatilité dans le portefeuille. Dans notre étude, cette volatilité crée plus de moins-value que de plus-value réalisés dans le résultat de l'assureur, diminuant ainsi sa compétitivité dans la revalorisation des contrats.

En plus de la volatilité apportée par le bitcoin dans le portefeuille, la baisse de la VIF semble lier aussi à la stratégie courante de vente d'actif qui consiste à liquider les actifs risqués pour financer les sorties du passif en cours de l'année. Il serait intéressant que pour des recherches futures d'explorer d'autres stratégies de vente tenant compte des spécificités de chaque actif. De plus, pour un assureur vie souhaitant tirer parti de la rentabilité à long terme du bitcoin, il serait intéressant d'examiner les effets de l'allocation d'une faible proportion de bitcoin dans le portefeuille afin de réduire la volatilité, tout en excluant cette allocation des mécanismes de vente d'actifs destinés à financer les passifs.

Enfin, la hausse observée du SCR s'explique aisément : augmenter la part d'un actif risqué dans un portefeuille en accroît le risque. Il devient donc essentiel de réserver davantage de capital pour pallier les fluctuations du portefeuille. Néanmoins, l'impact du SCR bitcoin dans le SCR marché est atténué par l'effet de diversification que le bitcoin apporte dans le portefeuille. Un sujet non traité dans ce mémoire, mais pertinent pour compléter cette analyse, serait d'examiner la sensibilité du SCR à la variation de la valeur du choc. Plus précisément, il s'agirait de déterminer la rapidité avec laquelle le SCR s'accroît face à un changement minime de la valeur du choc. Cette recherche pourrait contribuer à une meilleure compréhension et gestion des risques liés aux investissements en bitcoin.

## CONCLUSION

Dans cette étude, nous avons exploré la question essentielle de l'intégration des crypto-actifs, en particulier le bitcoin, dans le portefeuille d'un assureur vie, en tenant compte d'une évolution réglementaire favorable. Nous avons analysé la pertinence de cette intégration dans le contexte spécifique de l'assurance vie, en mettant en évidence les spécificités du secteur, le cadre réglementaire et les défis à relever, ainsi que les opportunités offertes par les cryptoactifs en tant qu'actifs d'investissement pour les assureurs vie. Ensuite, nous avons réalisé le calibrage des métriques clés pour la gestion du bitcoin, conformément à Solvabilité 2. Cette calibration a impliqué plusieurs étapes, notamment le calibrage du choc bitcoin, le calibrage du GSE risque neutre bitcoin avec le modèle d'Heston, et le calibrage d'une nouvelle matrice de corrélation du marché.

Notre analyse sur l'intégration des crypto-actifs, à travers le bitcoin dans le portefeuille d'un assureur vie, a révélé plusieurs défis. D'abord, du point de vue technique, la production des métriques, l'exemple d'un GSE neutre risque au bitcoin, pour évaluer correctement le risque associé aux crypto-actifs représente un défi majeur pour l'assureur. La plupart des modèles et hypothèses utilisés dans la gestion d'actifs traditionnels ne s'appliquent pas aisément aux actifs numériques. Il est donc crucial d'approfondir les recherches opérationnelles pour actualiser les outils existants et répondre précisément aux particularités des crypto-actifs.

Notre étude a mis en lumière la volatilité significative du marché des crypto-actifs et ses potentielles répercussions sur la solvabilité des assureurs. Cependant, nous avons également identifié des opportunités de diversification du portefeuille pouvant conduire à une réduction du SCR marché. Cette analyse souligne l'importance d'adopter une approche prudente et réglementée pour gérer les risques associés à cette nouvelle classe d'actifs.

L'examen de l'évolution des engagements et des profits futurs de l'assureur vie, en fonction de l'intégration progressive du bitcoin dans le portefeuille d'actifs, a révélé une forte sensibilité de ces indicateurs aux hypothèses d'interaction actif-passif et aux stratégies d'investissement. Par exemple, l'approche prudente couramment utilisée dans le secteur, consistant à vendre les actifs par ordre de risque décroissant, pourrait limiter la capacité de l'assureur à bénéficier du potentiel de rentabilité à long terme du bitcoin. Cette analyse met en évidence la nécessité d'une évaluation minutieuse et d'une gestion des risques adaptée lors de l'intégration de crypto-actifs dans les portefeuilles d'assurance vie, tout en tenant compte des opportunités potentielles qu'ils peuvent offrir. Une alternative à la stratégie de gestion actuelle pourrait être d'incorporer une petite quantité de bitcoin dans le portefeuille et de maintenir cette proportion tout au long de la période de projection. Ceci dans le but d'évaluer plus précisément l'impact du bitcoin sur les performances du portefeuille à long terme.

À la lumière de nos résultats, nous formulons plusieurs recommandations pour les recherches futures dans ce domaine. L'étude réalisée dans ce mémoire pourrait constituer une base de référence pour des investigations ultérieures. Plusieurs pistes d'approfondissement sont envisageables.

Tout d'abord, il serait intéressant d'élargir le cadre de cette étude en évaluant l'impact de l'ajout du bitcoin sur plusieurs périmètres de l'assurance vie différents du fonds Euro. Cela pourrait permettre d'identifier des passifs de durée longue qui sont en phase avec un portefeuille d'actifs incluant le bitcoin. Cette analyse pourrait révéler des opportunités de diversification et d'optimisation du rendement pour des produits d'assurance vie spécifiques, tout en tenant compte des contraintes réglementaires et des profils de risque des assurés.

Ensuite, il serait pertinent de mesurer la sensibilité du SCR marché par rapport au choc calibré, c'est-à-dire d'évaluer l'impact qu'aurait une variation de 1% de la valeur du choc sur le coût du capital pour

l'assureur. Cela pourrait aider à mieux comprendre la robustesse du modèle de calcul du SCR marché et à identifier les points de vulnérabilité potentiels face aux fluctuations des paramètres de choc.

De plus, ce mémoire a révélé une potentielle limite de la méthode de martingalisation proposée. Il serait pertinent d'approfondir les recherches sur les méthodes de discrétisation des processus à volatilité stochastique afin de remettre en question les résultats obtenus dans cette étude.

Par ailleurs, l'analyse des indicateurs BEL et VIF a souligné l'importance des hypothèses de gestion actif-passif pour optimiser les bénéfices potentiels du bitcoin. Compte tenu de la prévisibilité de certaines caractéristiques du protocole du bitcoin, il est essentiel de mener des études sur ses cycles et de développer des stratégies d'investissement différenciées en fonction de ceux-ci. Par exemple, au lieu de maintenir une allocation constante et de réinvestir annuellement, une stratégie alternative pourrait consister à exploiter les cycles de halvening, qui se produisent en moyenne tous les quatre ans, avec une phase haussière de deux ans suivie d'une phase baissière de deux ans. Dans ce cadre, des règles d'achat et de vente spécifiques seraient appliquées, plutôt qu'un réinvestissement régulier. En outre, des recherches sur la gestion du risque par l'interprétabilité des surfaces de volatilité implicite seraient intéressantes. L'objectif serait de développer une métrique de risque permettant d'anticiper les crashes imminents du marché des crypto-monnaies et d'en sortir à temps. Des études approfondies sur la gestion des risques spécifiques aux crypto-actifs sont nécessaires pour concevoir des indicateurs et des stratégies adaptés à ce domaine. L'intégration du machine learning pour optimiser les portefeuilles et les stratégies d'achat et de vente constitue une piste prometteuse, susceptible d'améliorer les rendements et de réduire les risques dans cet environnement en rapide évolution.

En conclusion, cette étude met en lumière les défis et les opportunités liés à l'intégration des crypto-actifs, tels que le bitcoin, dans le secteur de l'assurance vie. Elle propose également des pistes de recherche pour mieux appréhender et maîtriser les risques inhérents à cette classe d'actifs en constante évolution. Les résultats obtenus soulignent l'importance de poursuivre les investigations dans ce domaine, afin de maximiser les avantages potentiels offerts par les crypto-actifs tout en minimisant les risques pour les assureurs vie. Une approche plus approfondie permettra ainsi de concilier innovation financière et gestion prudente des risques dans un cadre réglementaire adapté.

## Références

- [1] O. BARNDORFF-NIELSEN. « Hyperbolic Distributions and Distributions on Hyperbolae ». In : *Scandinavian Journal of Statistics* 5.3 (1978). Publisher : [Board of the Foundation of the Scandinavian Journal of Statistics, Wiley], p. 151-157. ISSN : 0303-6898. URL : <https://www.jstor.org/stable/4615705> (visité le 19/03/2024).
- [2] James D. HAMILTON. « A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle ». In : *Econometrica* 57.2 (1989), p. 357-384. ISSN : 0012-9682. DOI : [10.2307/1912559](https://doi.org/10.2307/1912559).
- [3] Sidney RESNICK et Catalin STARICA. « Smoothing the Hill Estimator ». In : *Advances in Applied Probability* 29 (mars 1997), p. 271-293. DOI : [10.1017/S0001867800027889](https://doi.org/10.1017/S0001867800027889).
- [4] Peter CARR et Dilip MADAN. « Option Valuation Using the Fast Fourier Transform ». In : *The Journal of Computational Finance* 2.4 (1999), p. 61-73. ISSN : 14601559. DOI : [10.21314/JCF.1999.043](https://doi.org/10.21314/JCF.1999.043). (Visité le 31/07/2023).
- [5] Jean-Philippe LEBLANC. *Distribution hyperbolique généralisée et applications financières*. Université de Sherbrooke, 2003. ISBN : 978-0-612-90607-5.
- [6] GATHERAL JIM. *The Volatility Surface : A Practitioner's Guide* / Wiley. Wiley.com. 2006. URL : <https://www.wiley.com/en-us/The+Volatility+Surface%3A+A+Practitioner%27s+Guide-p-9780471792512> (visité le 24/03/2024).
- [7] Alan T. WANG. « Does Implied Volatility of Currency Futures Option Imply Volatility of Exchange Rates ? » In : *Physica A Statistical Mechanics and its Applications* 374 (fév. 2007), p. 773-782. ISSN : 0378-4371. DOI : [10.1016/j.physa.2006.08.040](https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.08.040).
- [8] L ANDERSEN. « Simple and Efficient Simulation of the Heston Stochastic Volatility Model ». In : *Journal of Computational Finance* 11 (mars 2008). DOI : [10.21314/JCF.2008.189](https://doi.org/10.21314/JCF.2008.189).
- [9] Paul THOMPSON et al. « Automated Threshold Selection Methods for Extreme Wave Analysis ». In : *Coastal Engineering* 56 (oct. 2009), p. 1013-1021. DOI : [10.1016/j.coastaleng.2009.06.003](https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2009.06.003).
- [10] CEIOPS. « Calibration Paper Solvency II ». In : *CEIOPS-SEC-40-10* 384 (avr. 2010).
- [11] Roger LORD, Remmert KOEKKOEK et Dick Van DIJK. « A Comparison of Biased Simulation Schemes for Stochastic Volatility Models ». In : *Quantitative Finance* 10.2 (fév. 2010), p. 177-194. ISSN : 1469-7688. DOI : [10.1080/14697680802392496](https://doi.org/10.1080/14697680802392496). (Visité le 04/08/2023).
- [12] Abhay K SINGH, David E ALLEN et Robert J POWELL. « Value at Risk Estimation Using Extreme Value Theory ». In : (2011).
- [13] Xiaoneng ZHU et Jie ZHU. « Predicting Stock Returns : A Regime-Switching Combination Approach and Economic Links ». In : *Journal of Banking & Finance* 37.11 (2013), p. 4120-4133. ISSN : 0378-4266.
- [14] Frederico CAEIRO et M. Ivette GOMES. « Threshold Selection in Extreme Value Analysis ». In : *Extreme Value Modeling and Risk Analysis*. Chapman and Hall/CRC 2007, jan. 2016, p. 69-86. ISBN : 978-1-4987-0129-7. DOI : [10.1201/b19721-5](https://doi.org/10.1201/b19721-5).
- [15] Jon DANIELSSON et al. *Tail Index Estimation : Quantile Driven Threshold Selection*. SSRN Scholarly Paper. Rochester, NY, jan. 2016. DOI : [10.2139/ssrn.2717478](https://doi.org/10.2139/ssrn.2717478).
- [16] Dipak K. DEY et Jun YAN, éd. *Extreme Value Modeling and Risk Analysis : Methods and Applications*. New York : Chapman and Hall/CRC, jan. 2016. ISBN : 978-0-429-16119-3. DOI : [10.1201/b19721](https://doi.org/10.1201/b19721).

- [17] Laurens JON DANIELSSON. *Jon Danielsson, Laurens de Haan, Lerby M. Ergun, Casper G. de Vries (2016), Tail Index Estimation : Quantile Driven Threshold Selection - Yahoo Search - Actualités*. 2016. URL : [https://fr.search.yahoo.com/search?fr=mcafee%5C&type=E210FR105G0%5C&p=Jon+Danielsson%5C%2C+Laurens+de+Haan%5C%2C+Lerby+M.+Ergun%5C%2C+Casper+G.+de+Vries+\(2016\)%5C%2C+Tail+Index+Estimation+%5C%3A+Quantile+Driven+Threshold+Selection](https://fr.search.yahoo.com/search?fr=mcafee%5C&type=E210FR105G0%5C&p=Jon+Danielsson%5C%2C+Laurens+de+Haan%5C%2C+Lerby+M.+Ergun%5C%2C+Casper+G.+de+Vries+(2016)%5C%2C+Tail+Index+Estimation+%5C%3A+Quantile+Driven+Threshold+Selection).
- [18] Olaoluwa YAYA, Damola AKINLANA et Olanrewaju SHITTU. « Modelling Nigerian Banks' Share Prices Using Smooth Transition GARCH Models ». In : *CBN Journal of Applied Statistics* 7.2 (déc. 2016). ISSN : 2476-8472.
- [19] *LOI n° 2017-1837 du 30 décembre 2017 de finances pour 2018 (1)*. Déc. 2017. (Visité le 17/08/2023).
- [20] *Solvabilité II*. fr. Août 2017. URL : <https://acpr.banque-france.fr/europe-et-international/assurances/reglementation-europeenne/solvabilite-ii> (visité le 19/08/2023).
- [21] BINANCE RESEARCH. *Exploring The Diversification Benefits With Bitcoin*. en. Section : Exploring The Diversification Benefits With Bitcoin. Juill. 2019. URL : <https://research.binance.com/en/analysis/bitcoin-diversification-benefits> (visité le 31/08/2023).
- [22] BENATIA FATEH, YAHIA DJABRANE et TOUBA SONIA. « Loi de Pareto et Applications ». In : (2019).
- [23] Dilip B. MADAN, Sofie REYNERS et Wim SCHOUTENS. « Advanced Model Calibration on Bitcoin Options ». In : *Digital Finance* 1.1 (nov. 2019), p. 117-137. ISSN : 2524-6186. DOI : [10.1007/s42521-019-00002-1](https://doi.org/10.1007/s42521-019-00002-1). (Visité le 31/07/2023).
- [24] Gregory RAYMOND. *Première vente immobilière via blockchain en France*. Capital.fr. Section : crypto. 24 juin 2019. URL : <https://www.capital.fr/crypto/premiere-vente-immobiliere-via-blockchain-en-france-1342764> (visité le 31/03/2024).
- [25] Prudence HOUNKONNOU. « Modélisation ALM et Estimation Efficace Du SCR d'un Assureur Vie En Modèle Interne ». Thèse de doct. Déc. 2020.
- [26] *Opinion on the 2020 review of Solvency II - European Union*. 2020. URL : [https://www.eiopa.europa.eu/publications/opinion-2020-review-solvency-ii\\_en](https://www.eiopa.europa.eu/publications/opinion-2020-review-solvency-ii_en) (visité le 17/03/2024).
- [27] Oinonen TIMO. *Portefeuille traditionnel 60/40 : comment lui redonner du rendement ?* fr-FR. Jan. 2020. URL : <https://objectif-preparer-ma-retraite.fr/bourse/portefeuille-traditionnel-60-40-comment-lui-redonner-du-rendement.html> (visité le 31/08/2023).
- [28] Oluwasegun A. ADEJUMO, Seno ALBERT et Omorogbe J. ASEMOTA. « Markov Regime-Switching Autoregressive Model of Stock Market Returns in Nigeria ». In : *Central Bank of Nigeria Journal of Applied Statistics* Vol. 11 No. 2 (avr. 2021), p. 65-83. ISSN : 2476-8472, 2141-9272. DOI : [10.33429/Cjas.11220.3/8](https://doi.org/10.33429/Cjas.11220.3/8).
- [29] Alexandre CHEVALLIER. « Le Calibrage Des Chocs Prévus Par Solvabilité II à l'épreuve de La Crise de La Covid-19 ». Thèse de doct. Société Mazars Actuariat, 2021.
- [30] Matthias SCHERER et Gerhard STAHL. « The standard formula of Solvency II : a critical discussion ». In : *European Actuarial Journal* 11.1 (1<sup>er</sup> juin 2021), p. 3-20. ISSN : 2190-9741. DOI : [10.1007/s13385-020-00252-z](https://doi.org/10.1007/s13385-020-00252-z). URL : <https://doi.org/10.1007/s13385-020-00252-z> (visité le 17/03/2024).
- [31] Jules Clément MBA, Sutene Mwambetania MWAMBI et Edson PINDZA. « A Monte Carlo Approach to Bitcoin Price Prediction with Fractional Ornstein–Uhlenbeck Lévy Process ». In : *Forecasting* 4.2 (mars 2022), p. 409-419. ISSN : 2571-9394. DOI : [10.3390/forecast4020023](https://doi.org/10.3390/forecast4020023).

- [32] Monbet VALERIE. *Package ‘NHMSAR’*. 2022, p. 1-60. URL : <https://cran.r-project.org/web/packages/NHMSAR/NHMSAR.pdf>.
- [33] Youssef Mouheb CLAIRE BROUSSE. *Crypto-actifs : l'année 2022 confirme les risques identifiés*. Banque de France. 2023. URL : <https://www.banque-france.fr/fr/publications-et-statistiques/publications/crypto-actifs-lannee-2022-confirme-les-risques-identifiees> (visité le 25/03/2024).
- [34] STACKINSAT. *Gérer la volatilité du Bitcoin : les astuces à connaître !* Le Blog StackinSat. 24 fév. 2023. URL : <https://stackinsat.com/blog/quest-ce-que-la-volatilite-du-bitcoin-et-comment-la-gerer/> (visité le 16/03/2024).
- [35] FASTERCAPITAL. *Reussir vos investissements a long terme avec des rendements glissants*. FasterCapital. 2024. URL : <https://fastercapital.com/fr/contenu/Reussir-vos-investissements-a-long-terme-avec-des-rendements-glissants.html> (visité le 17/03/2024).
- [36] CEIOPS. *CEIOPS' Advice for L2 Implementing Measures on SII : Supervision of Group Solvency for Groups with Centralised Risk Management*. en. URL : [https://www.eiopa.europa.eu/publications/ceiops-advice-l2-implementing-measures-sii-supervision-group-solvency-groups-centralised-risk\\_en](https://www.eiopa.europa.eu/publications/ceiops-advice-l2-implementing-measures-sii-supervision-group-solvency-groups-centralised-risk_en) (visité le 09/08/2023).
- [37] *Dispositions applicables aux entreprises d'assurance. (Articles R332-1 à R332-10) - Légifrance*. URL : [https://www.legifrance.gouv.fr/codes/section\\_lc/LEGITEXT000006073984/LEGISCTA000019746073/#LEGISCTA000019749771](https://www.legifrance.gouv.fr/codes/section_lc/LEGITEXT000006073984/LEGISCTA000019746073/#LEGISCTA000019749771) (visité le 15/03/2024).
- [38] POUILLY KIM. « Analyse et revue des seuils des sinistres extrêmes ». In : ().
- [39] Mrázek MILAN et Pospíšil JAN. *Calibration and Simulation of Heston Model*. URL : <https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/math-2017-0058/html> (visité le 31/07/2023).
- [40] *Sous-section 1 : Dispositions applicables aux entreprises d'assurance. (Articles R332-1 à R332-10) - Légifrance*. URL : [https://www.legifrance.gouv.fr/codes/section\\_lc/LEGITEXT000006073984/LEGISCTA000019746073/#LEGISCTA000019749771](https://www.legifrance.gouv.fr/codes/section_lc/LEGITEXT000006073984/LEGISCTA000019746073/#LEGISCTA000019749771) (visité le 24/08/2023).
- [41] James Van STRATEN. *High correlation between Bitcoin and high yield corporate debt, small caps and growth stocks in 2022*. en-US. URL : <https://cryptoslate.com/insights/high-correlation-between-bitcoin-and-high-yield-corporate-debt-small-caps-and-growth-stocks-in-2022/> (visité le 11/08/2023).

## ANNEXE

### A. Évaluation des options avec la méthode FFT

L'évaluation des options européennes dans le modèle d'Heston peut être réalisée par la transformée rapide de Fourier (FFT). De manière courante, quand un modèle est assez complexe pour obtenir une formule fermée de tarification pour les produits dérivés, les prix du modèle sont calculés avec la méthode de tarification de la Transformée Rapide de Fourier (FFT) développée par CARR et D. MADAN 1999.

En effet, si la fonction caractéristique  $\phi(u)$  du modèle d'évaluation du produit dérivé est connue analytiquement, le prix d'un *Call* d'achat européenne en date 0 avec un prix d'exercice  $K$  et un temps jusqu'à maturité  $T$  est donné par :

$$C(K, T) = e^{-rT} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left( e^{-iu \ln(K)} \Phi(u - i) \right) du \quad (5.31)$$

où

- $C$  est le prix du *Call*,
- $r$  est le taux d'intérêt sans risque,
- $K$  est le prix d'exercice,
- $T$  est le temps jusqu'à l'expiration.
- $i$  est le nombre imaginaire

La méthode de la transformée de Fourier rapide (FFT) exploite la forme analytique de la fonction caractéristique pour permettre un calcul à la fois rapide et efficace.

La fonction caractéristique  $\phi_t(u)$  de  $\log(S_t)$  pour le modèle d'Heston est donnée par :

$$\begin{aligned} \phi_t(u) &= \exp(iu \log(S_0)) \\ &\times \exp(\theta \kappa \sigma^{-2} ((\kappa - \rho \sigma u i - \eta)t - 2 \log((1 - g \exp(-dt))(1 - g)^{-1}))) \\ &\times \exp(V_0 \sigma^{-2} (\kappa - \rho \sigma u i - \eta)(1 - \exp(-dt))(1 - g \exp(-dt))^{-1}) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} d &= ((\rho \sigma u i - \kappa)^2 - \sigma^2 (-iu - u^2))^{1/2}, \\ g &= (\kappa - \rho \sigma u i - d)(\kappa - \rho \sigma u i + d)^{-1}. \end{aligned}$$

et  $\kappa, \theta, \sigma, \rho, V_0$  les paramètres d'Heston définies dans la section 3.2.1.