

Mémoire présenté le : 25/06/2024

**Pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA  
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : **Guy Roger KOUACOU**

Titre **Projection d'un portefeuille de rente en cours (Incapacité/invalidité) en prévoyance collective. Quels sont les impacts de l'inflation ?**

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*  
*Membres présents du jury de l'Institut*  
*des Actuaires*

*Membres présents du jury de l'ISFA*

*Entreprise : Exiom Partners*

*Signature :* 

*Directeur de mémoire en entreprise :*

*Nom : Josh RENDEKEU*

*Signature :* 

*Invité : Encadrant 2*

*Nom : Antoine de La Morsangliere*

*Signature :* 

*Autorisation de publication et de mise  
en ligne sur un site de diffusion de  
documents actuariels (après expiration  
de l'éventuel délai de confidentialité)*

*Signature du responsable entreprise*



*Signature du candidat*



# Résumé

Le secteur de la prévoyance collective constitue un pilier essentiel de la protection sociale, offrant une couverture financière aux individus ou à leurs familles en cas de sinistres. Au cœur de cette protection se trouvent les garanties d'incapacité/invalidité, qui garantissent un revenu régulier aux bénéficiaires confrontés à des situations de perte de revenus, on parle de rentes incapacité ou de rente invalidité.

Cependant, pour maintenir la valeur réelle de ces rentes au fil du temps, il est crucial de les revaloriser périodiquement. Cette question de revalorisation revêt une importance capitale dans un contexte marqué par l'incertitude économique et les fluctuations de l'inflation. En effet, une période d'inflation peut avoir des répercussions significatives sur le pouvoir d'achat des rentiers et sur les besoins en provisions des organismes assureurs, conformément aux exigences de la norme Solvabilité II.

Ainsi, l'étude de l'évolution des contrats de rentes en cours, des mécanismes de revalorisation et des impacts de l'inflation revêt une importance stratégique pour les acteurs du secteur de la prévoyance collective, appelés à garantir la pérennité et la solidité financière de leurs engagements à long terme.

Ce mémoire s'attache à modéliser l'évolution d'un portefeuille de rentes en cours, en mettant particulièrement l'accent sur l'impact des mécanismes de revalorisation et de l'inflation sur les provisions à constituer sous la norme Solvabilité II.

Dans une première partie, une présentation détaillée de la prévoyance collective en France est effectuée, mettant en lumière l'état actuel du secteur et les défis auxquels il est confronté. La deuxième partie du mémoire se concentre sur le cadre réglementaire, en mettant en exergue les implications de Solvabilité II sur la gestion des risques dans le domaine de la prévoyance collective, ainsi que sur les mécanismes de revalorisation des rentes, cruciaux pour assurer le maintien du pouvoir d'achat des bénéficiaires.

La modélisation des indices externes, notamment de l'inflation et la valeur de service du point Agirc-Arrco, est ensuite abordée. Cette section examine en détail les méthodes utilisées pour modéliser l'évolution de l'inflation, ainsi que son impact sur l'actualisation des flux de trésorerie.

Enfin, la dernière partie du mémoire se penche sur la projection du portefeuille, en détaillant les hypothèses et la modélisation théorique des contrats. Une analyse approfondie des résultats obtenus est présentée, mettant en lumière les projections des rentes en cours, les indicateurs et métriques utilisés dans l'étude, ainsi que les impacts observés sur le portefeuille.

En conclusion, ce mémoire offre une perspective approfondie sur la gestion des portefeuilles de rentes en prévoyance collective, en mettant en évidence l'importance cruciale des mécanismes de revalorisation et de l'inflation dans le contexte réglementaire de Solvabilité II. Les résultats présentés fournissent des perspectives pour les acteurs du secteur dans la gestion et la projection de leurs portefeuilles.

# Abstract

The group benefits sector is an essential pillar of social protection, offering financial cover to individuals or their families in the event of a claim. At the heart of this protection are incapacity/disability benefits, which guarantee a regular income to beneficiaries faced with a loss of income, known as incapacity or disability annuities.

However, to maintain the real value of these annuities over time, it is crucial to periodically upgrade them. In a context of economic uncertainty and fluctuating inflation, the question of revaluation is of paramount importance. Indeed, a period of inflation can have a significant impact on annuitants' purchasing power and on insurers' reserve requirements, in line with Solvency II requirements.

Studying the evolution of current annuity contracts, their revaluation mechanisms and the impact of inflation is therefore of strategic importance for players in the group benefits sector, who are called upon to guarantee the sustainability and financial soundness of their long-term commitments.

This report sets out to model the evolution of a portfolio of ongoing annuities, with particular emphasis on the impact of revaluation mechanisms and inflation on the provisions to be set aside under Solvency II.

The first part of the report provides a detailed overview of the group provident scheme sector in France, highlighting the current state of the industry and the challenges it faces.

The second part of the dissertation focuses on the regulatory framework, highlighting the implications of Solvency II on risk management in the group provident scheme sector, as well as on annuity revaluation mechanisms, which are crucial to maintaining beneficiaries' purchasing power.

The modeling of external indices, notably inflation and the service value of the Agirc-Arrco point, is then discussed. This section examines in detail the methods used to model inflation trends, as well as their impact on discounted cash flows.

Finally, the last part of the dissertation looks at the portfolio projection, detailing the assumptions and theoretical modeling of the contracts. An in-depth analysis of the results obtained is presented, highlighting the current annuity projections, the indicators and metrics used in the study, and the impacts observed on the portfolio.

In conclusion, this dissertation offers an in-depth perspective on the management of annuity portfolios in group benefits, highlighting the crucial importance of revaluation mechanisms and inflation in the Solvency II regulatory context. The results presented provide insights for industry players in managing and projecting their portfolios.

# Table des matières

<b>INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
<b>I A propos de la prévoyance collective</b>	<b>2</b>
<b>1 Présentation</b>	<b>3</b>
1.1 Généralité . . . . .	3
1.2 Etat des lieux de la prévoyance collective en France . . . . .	12
<b>II CADRE DU MÉMOIRE</b>	<b>17</b>
<b>2 Les points clés de l'étude</b>	<b>18</b>
2.1 Cadre réglementaire : SOLVABILITÉ II . . . . .	18
2.2 Revalorisation des rentes . . . . .	31
<b>3 Modélisations des indices externes</b>	<b>36</b>
3.1 Modélisation de l'inflation . . . . .	36
3.2 Modélisation de l'actualisation avec prise en compte de l'inflation . . . . .	54
3.3 Modélisation de la valeur de service du point Agirc-Arrco . . . . .	61
<b>III Projection du portefeuille</b>	<b>65</b>
<b>4 Hypothèses et modélisation théorique des contrats</b>	<b>66</b>
4.1 Présentation du Portefeuille . . . . .	66
4.2 Entrées, sorties et sinistralité du portefeuille . . . . .	68
4.3 Les flux techniques . . . . .	71
4.4 Modélisation de l'actif . . . . .	72
4.5 Projection théorique des postes étudiés . . . . .	75
<b>5 Analyse des résultats</b>	<b>77</b>
5.1 Projection des rentiers . . . . .	77
5.2 Les indicateurs à étudier . . . . .	78
5.3 Présentation des impacts . . . . .	79
<b>CONCLUSION</b>	<b>84</b>
<b>ANNEXES</b>	<b>87</b>
<b>A Tables</b>	<b>87</b>
<b>B Code de la sécurité sociale</b>	<b>89</b>
<b>C Article 7 Loi Evin</b>	<b>91</b>
<b>D Les OAT</b>	<b>92</b>

<b>E Les OATi</b>	<b>93</b>
<b>F Les techniques de simulations</b>	<b>95</b>
<b>G Critères de sélection de modèles et métriques utilisées dans nos modélisation</b>	<b>97</b>
<b>H Les séries temporelles</b>	<b>105</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>108</b>

## INTRODUCTION

Pour assurer que les salariés puissent faire face financièrement aux arrêts d'activité professionnelle ou aux dépenses liées au décès, la sécurité sociale verse des prestations plafonnées en fonction du revenu ou sous forme de capital en cas de décès. En raison de l'insuffisance de ces revenus de substitution, des garanties d'incapacité, d'invalidité et de décès ont été développées dans le cadre de la prévoyance complémentaire collective. L'assureur pour faire face aux prestations futures, a l'obligation de constituer des réserves suffisantes. De plus, il est impératif que les rentes versées aux bénéficiaires préservent leur pouvoir d'achat au fil du temps, ce qui implique d'une part de revaloriser les prestations, et d'autre part de prendre en compte les facteurs pouvant influencer les provisions constituées lors de leurs évaluations.

Les mécanismes de revalorisation des rentes permettent d'ajuster les montants des prestations périodiques en fonction de l'évolution de l'indice des prix à la consommation ou d'autres mesures d'inflation. Ces ajustements visent à garantir que les rentes continuent de fournir un niveau de revenu adéquat aux bénéficiaires, en prenant en compte l'impact de l'inflation sur le coût de la vie.

Plusieurs méthodes de revalorisation des rentes en prévoyance collective existent. Certaines prévoient des ajustements automatiques basés sur des indices d'inflation publiés, tandis que d'autres sont liées à des mécanismes de négociation collective ou à des dispositions contractuelles spécifiques. L'étude de ces mécanismes implique l'analyse de leurs répercussions sur les prestations et de leur efficacité pour maintenir le pouvoir d'achat des bénéficiaires. Cela nécessite également de prendre en compte les facteurs économiques et financiers, les rendements des investissements et les contraintes réglementaires liées à la solvabilité.

De manière générale, l'équilibre financier et économique d'un assureur est exprimé par l'équation suivante :

$$\text{PRIMES} + \text{REVENUS FINANCIERS} \geq \text{PRESTATIONS} + \text{FRAIS}$$

Dans un contexte inflationniste, chaque élément de cette équation peut être influencé par l'inflation, en particulier lorsque le décalage entre le paiement des primes et celui des prestations est significatif.

Après plusieurs années d'absence, l'inflation a considérablement augmenté entre 2021 et 2022. Cette hausse de l'inflation soulève diverses problématiques qui seront abordées dans ce mémoire. Les responsables des compagnies d'assurance doivent réfléchir à la manière de définir les prestations promises et les paramètres comptables dans un environnement inflationniste.

En l'absence de perspectives favorables quant aux rendements futurs des actifs de l'assureur, l'obligation de garantir les prestations de prévoyance se fait plus pressante. Le taux d'intérêt technique, accompagné d'une marge raisonnable, devrait donc être inférieur au rendement net attendu de la stratégie de placement afin de garantir le versement des rentes à long terme. Bien qu'une remontée des taux puisse alléger les engagements liés aux risques importants et ne pas aggraver les bilans des organismes assureurs, la pression inflationniste aura inévitablement des conséquences sur les activités de rente.

Dans ce mémoire il s'agira de modéliser l'évolution d'un portefeuille de rentes en cours en prévoyance collective, tout étudiant l'impact des mécanismes de revalorisation et de l'inflation sur les provisions à constituer sous la norme solvabilité 2.

## **Première partie**

# **A propos de la prévoyance collective**

# Chapitre 1

## Présentation

### 1.1 Généralité

#### 1.1.1 Historique

##### **Les Fondements de la Protection Sociale**

La Charte de la Mutualité promulguée le 1er avril 1898, inaugure la constitution d'un ensemble d'acteurs socio-économiques œuvrant dans les domaines de la protection sociale. Mutuelles, institutions de prévoyance, groupes de protection sociale, et dans une moindre mesure les assureurs, interviennent, depuis 1945, en complément de la sécurité sociale.

##### **Mutualité française**

Ensuite l'ordonnance du 2 octobre 1945, prise par le gouvernement provisoire de la République crée l'institution de référence en protection sociale.

##### **Montée en puissance et institutionnalisation du mouvement de " secours mutuel "**

Les lois libérales de la Révolution, comme le décret Allarde et la loi Le Chapelier, freinent le développement des collectifs professionnels. Cependant, durant la première moitié du XIXe siècle, le phénomène persiste clandestinement à travers des syndicats patronaux et ouvriers, touchant une minorité. Sous le Second Empire, la création illégale de collectifs se transforme en mutualité impériale grâce au décret du 28 mars 1852. Celle-ci vise à étendre la protection sociale tout en contrant les initiatives privées, particulièrement celles des socialistes.

##### **La IIIe République reconnaît l'œuvre nationale des sociétés de secours mutuel**

Cependant, il faut patienter jusqu'à l'avènement de la IIIe République. Cette période voit la réintroduction des lois permettant la formation de regroupements professionnels collectifs (1864, 1884) et l'établissement de mesures de protection sociale comprenant des soins médicaux gratuits et la couverture des accidents du travail. Ce n'est que grâce à ces développements que l'institutionnalisation effective prend place, matérialisée par l'adoption en 1898 de la loi sur les sociétés de secours mutuels.

##### **Les institutions de prévoyance, auxiliaires de la sécurité sociale**

Nées des structures de prévoyance en entreprise et des compagnies d'assurance, les institutions de prévoyance ont été instaurées par décret le 8 juin 1946 pendant la IVe République. Elles sont autorisées à fournir des avantages définis par des conventions collectives nationales ou sectorielles et reposent sur l'adhésion obligatoire pour la retraite et la prévoyance, se distinguant ainsi des mutuelles. Enracinées dans le système

de sécurité sociale et régulées par son Code, les IP symbolisent la gestion de l'assurance sociale par le biais de liens obligatoires avec la création de l'Agirc, en 1946. À partir des années 1950, elles s'engagent également dans la santé complémentaire.

### 1.1.2 Caractéristiques

La prévoyance collective en entreprise permet de garantir collectivement les salariés contre certains risques insuffisamment pris en charge par les régimes obligatoires de protection sociale. La loi du 31 décembre 1989 complétée par la loi du 8 août 1994, dans le but officiel de maîtriser au mieux la concurrence exercée par les compagnies d'assurance, a prévu des règles de protection minimales pour les bénéficiaires de garanties. Depuis 2016, la prévoyance d'entreprise doit obligatoirement comprendre un socle minimal de prestations " frais de santé " pour les salariés. Ce dispositif législatif peut toujours être amélioré par la négociation collective entre employeur et représentants des salariés mais aussi par le contrat de prévoyance conclu entre l'employeur et l'organisme assureur.

#### 1.1.2.1 Les garanties et les rentes dans le cadre de la prévoyance collective

Au regard du baromètre des institutions de prévoyance du CTIP dédié au taux d'équipement des salariés français en termes de couverture collective, plus de 60 % d'entre eux bénéficient de garanties en cas de décès ou d'arrêt de travail.

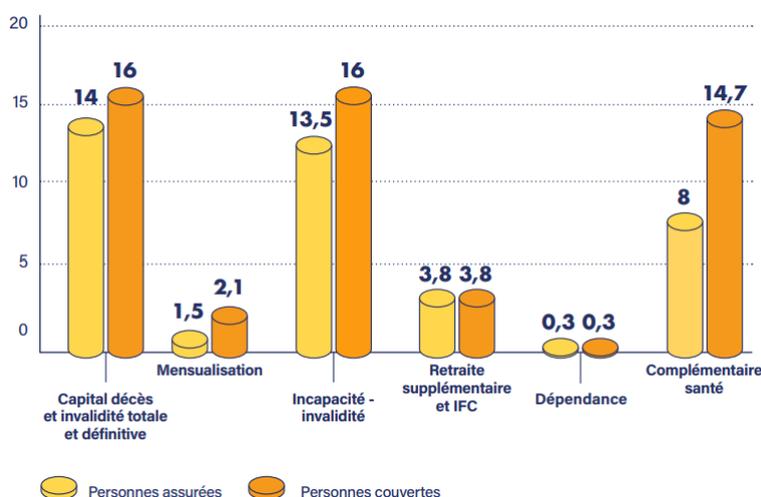


FIGURE 1.1 – Estimation en million, des personnes assurées et couvertes par garanties

Dans le cadre des régimes de prévoyance collective en entreprise, les salariés ou leurs ayants droits bénéficient en cas de sinistres de diverses prestations libellées sous forme de rentes éducation, de rentes de conjoint, d'indemnités journalières en incapacité et de rentes d'invalidité.

#### a) L'incapacité temporaire de travail

Un employé qui cesse de travailler en raison d'une maladie, d'un accident personnel ou professionnel, est en état d'incapacité et peut bénéficier d'indemnités journalières (IJ) versées par la sécurité sociale. Cette prestation vise à compléter les paiements journaliers de la sécurité sociale équivalents à 50 % du salaire de base après 3 jours de délai en cas d'arrêt de travail causé par une maladie ou un accident non lié au travail, ainsi qu'en cas d'arrêt de travail dû à une grossesse.

Les employés avec une expérience d'au moins trois mois au sein de l'entreprise reçoivent leur salaire complet en cas d'arrêt de travail, 90 % du salaire brut à partir du 11e jour pour 30 jours, puis 66 % du même salaire brut pour les 30 jours suivants. Cependant, les salariés récemment embauchés n'ont pas droit à cette mesure.

Le contrat de prévoyance collective peut offrir un complément allant jusqu'à 100 % du salaire brut.

La durée maximale de l'état d'incapacité est de trois ans. Les assurés dont l'état de santé ne s'améliore pas seront déclarés invalides par la sécurité sociale.

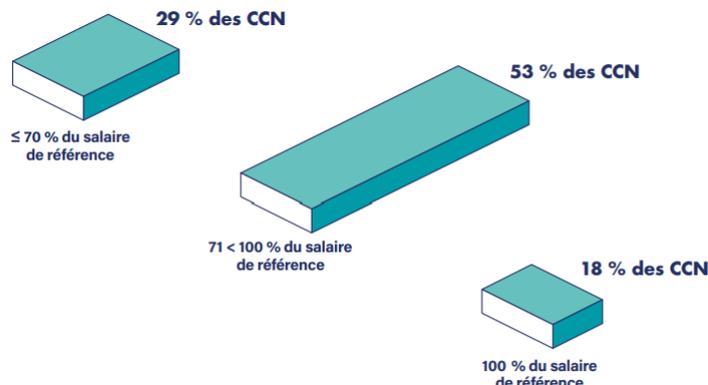


FIGURE 1.2 – Les indemnités pour arrêt de travail

En moyenne, l'indemnité d'arrêt de travail représente 75 % du salaire de référence.

### b) L'invalidité

Bien que la sécurité sociale propose une couverture de l'invalidité à partir d'un certain seuil d'incapacité de travail, au moins 33 % pour la première catégorie, les allocations octroyées sont restreintes et la rente allouée ne parviendra pas à correspondre à la diminution de revenu subie par le salarié.

#### **Rente invalidité :**

Un travailleur inapte à exercer son activité professionnelle a droit à une rente d'invalidité, se substituant aux paiements d'incapacité temporaire. Selon les termes des contrats, cette rente peut partiellement ou entièrement compenser la diminution de salaire constatée. Son montant dépend du salaire du bénéficiaire et de son degré d'incapacité. Cependant, la couverture peut être exclue en cas de faute délibérée de l'individu ou s'il a été impliqué dans une altercation ou a pratiqué un sport à risque.

Il existe trois catégories de personnes invalides selon la sécurité sociale. A chaque catégorie correspond un montant de la pension d'invalidité, calculé sur le salaire annuel moyen des dix dernières années :

- La première catégorie comprend les invalides capables d'exercer une activité rémunérée, pension s'élevant à 30% du salaire dans la limite du plafond de sécurité sociale;
- La deuxième catégorie regroupe les invalides incapables d'exercer une profession, pension s'élevant à 50% du salaire limité au plafond de la sécurité sociale;
- La troisième catégorie est composée des incapables nécessitant l'assistance d'une tierce personne pour effectuer des actes de la vie quotidienne, même pension que la seconde catégorie, majorée de 40% pour assistance d'une tierce personne.

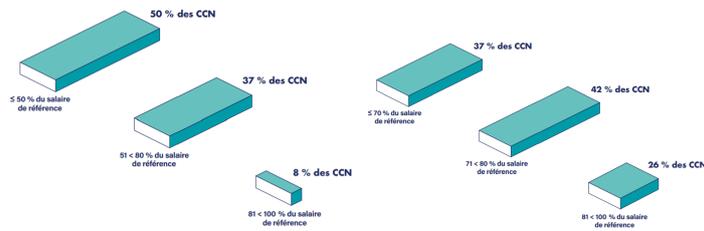


FIGURE 1.3 – Montant des prestations invalidité 1ère catégorie et 2-3e catégorie

Cette allocation d’invalidité est octroyée jusqu’à ce que l’individu recouvre la capacité de travailler. Elle peut s’étendre jusqu’à l’âge auquel l’assuré peut accéder à une pension de retraite en cas d’incapacité professionnelle. Étant donné que les avantages du régime de base de la sécurité sociale sont limités, des complémentaires deviennent essentiels en cas d’arrêt de travail ou d’invalidité. Il est possible de cumuler les rentes d’invalidité complémentaires avec les garanties du régime de base. En général, elles sont soumises à la même limite de salaire net lors du début de l’arrêt de travail, sans inclure l’indexation.

### c) La garantie décès

Les assurances décès en entreprise assurent la sécurité financière de la famille en cas de décès d’un employé, en comblant la perte de revenus. Elles peuvent se présenter sous la forme d’un capital ou de paiements réguliers pour le conjoint et les enfants. La protection en cas de décès doit comporter une clause garantissant le maintien de la couverture en cas d’incapacité de travail ou d’invalidité. La résiliation ou la non-reconduction du contrat de prévoyance n’affecte pas les avantages à venir liés au maintien de la garantie décès avant l’expiration de la période d’incapacité de travail ou d’invalidité telle qu’énoncée dans le contrat.



FIGURE 1.4 – Statistiques moyennes sur le capital décès

#### ■ Le capital décès

En pratique, le risque de décès est assuré par le versement d’un capital décès aux bénéficiaires nommés par le salarié. Selon les dispositions contractuelles, ce montant peut être augmenté en cas de décès accidentel ou en fonction du nombre d’enfants à charge. Le montant du capital est calculé en fonction du salaire de l’employé ou selon un montant de référence. Cependant, il est exclu en cas de suicide ou de meurtre de l’employé par le bénéficiaire.

#### ■ Rente éducation

La rente d’éducation vise à fournir une rente aux enfants à la charge d’un employé en cas de décès. Le montant est généralement basé sur le dernier salaire de l’assuré et peut être fixe ou varier selon l’âge des enfants. Cette protection peut être obtenue séparément ou en complément d’autres couvertures décès, comme le capital décès et la rente de conjoint. En cas d’invalidité totale et permanente de l’assuré, la rente peut également être versée à l’avance.

La rente éducation est limitée dans le temps, courant généralement jusqu’à l’âge de 27 ans ou jusqu’à la fin des études. Elle est octroyée aux enfants du défunt assuré en cas de décès. Le montant de la rente est calculé en utilisant un pourcentage du dernier salaire que l’assuré percevait en activité. Ce pourcentage tend

à augmenter progressivement en fonction de l'âge des enfants, ce qui reflète le coût croissant des études à différents niveaux éducatifs, tels que l'école primaire, le collège/lycée et l'enseignement supérieur.

### ■ Rente de conjoint

La rente de conjoint est liée aux droits à la réversion des régimes de base et complémentaires. Elle est généralement versée à partir de 60 ans et correspond à 54 % de la pension de la sécurité sociale depuis le 1er janvier 1995, et à 60 % pour les régimes complémentaires. Le conjoint peut recevoir soit une rente temporaire, soit une rente viagère, voire les deux. La rente temporaire est financée jusqu'à ce que le bénéficiaire puisse obtenir la réversion des régimes de retraite de l'assuré. En revanche, la rente viagère est versée jusqu'au décès du bénéficiaire.

Afin de simplifier les calculs dédiés à la compensation des pertes de droit à réversion, les formules de calcul les plus fréquentes sont :

- Rente viagère :  $a * (65 - x) * \text{salaire}$  ;
- Rente temporaire :  $a/2 * (x-25) * \text{salaire}$  ;

où x est l'âge au décès du salarié et a un paramètre se situant en général entre 0 et 1.

### d) Le remboursement des frais médicaux

Les protections prévoyance et santé englobent le remboursement des dépenses médicales conformément aux critères des contrats responsables. Elles englobent les employés ainsi que leurs personnes à charge, et elles peuvent partiellement ou complètement couvrir divers coûts tels que le ticket modérateur<sup>1</sup>, les frais liés aux actes médicaux, les frais d'optique, etc. L'adhésion à des contrats responsables est essentielle pour accéder aux avantages fiscaux et sociaux associés.



FIGURE 1.5 – Postes de santé

Les indemnisations pour frais de santé versées par les régimes de prévoyance d'entreprise s'ajoutent aux remboursements de l'assurance maladie de la sécurité sociale. Cependant, il est important de noter que pour bénéficier des avantages fiscaux et sociaux, l'organisme assureur doit offrir des "contrats responsables" qui ne couvrent pas certaines dépenses :

- La participation forfaitaire de 1 euro sur les actes et prestations médicales et les franchises médicales sur les frais de transport, les médicaments et les actes des auxiliaires médicaux ;
- La majoration du ticket modérateur pour non-désignation d'un médecin traitant ;
- Les dépassements d'honoraires en cas de consultation directe d'un médecin spécialiste sans prescription préalable du médecin traitant ;
- La modulation de la participation de l'assuré applicable en cas de refus d'autorisation du patient au professionnel de santé d'accéder au dossier médical personnel ou de le compléter, qui sera mise en œuvre une fois effectuée la généralisation du dossier médical personnel. Le contrat responsable doit prendre en charge :

1. \* Le ticket modérateur représente la part des dépenses qui reste à votre charge après remboursement de l'Assurance maladie et avant déduction des participations forfaitaires

- Au moins 30% du tarif opposable des consultations du médecin traitant ainsi que celles effectuées sur prescription de celui-ci;
- Au moins 30% du tarif servant de base au calcul des prestations d'assurance maladie pour les médicaments prescrits par le médecin traitant ou un médecin consulté sur prescription du médecin traitant, à l'exclusion de ceux traitant des troubles sans gravité, de ceux dont le service médical rendu n'est pas classé comme majeur ou important et des spécialités homéopathiques;
- Au moins 35% du tarif servant de base au calcul des prestations d'assurance maladie pour les frais d'analyses ou de laboratoires prescrits par le médecin traitant ou par un médecin consulté sur prescription du médecin traitant. Le contrat responsable doit aussi inclure la prise en charge totale de deux prestations de prévention à choisir dans une liste fixée par arrêté du 8 juin 2006, par ex., le dépistage de l'hépatite B.

En outre, l'organisme complémentaire doit communiquer chaque année aux assurés le montant et la composition des frais de gestion et d'acquisition de l'organisme affectés aux garanties destinées au remboursement et à l'indemnisation des frais occasionnés par une maladie, une maternité ou un accident, en pourcentage des cotisations ou primes afférentes à ce risque. Concrètement, il doit communiquer :

- Le montant des frais de gestion;
- Le montant des frais d'acquisition;
- La somme de ces deux montants.

La plupart des régimes de santé complémentaires collectifs sont conçus de manière responsable, encourageant l'assuré à suivre le parcours de soins coordonnés. Afin d'obtenir un remboursement complet de la part de leur organisme complémentaire, les patients doivent d'abord consulter leur médecin traitant avant de voir un spécialiste. Le contrat établissant des seuils minimum et maximum de remboursement pour diverses prestations de santé, conformément aux décrets du 18 novembre 2014 et du 11 janvier 2019, ainsi qu'à la circulaire du 30 janvier 2015.

#### **e) Les prestations complémentaires**

Certains contrats de prévoyance garantissent aussi :

- Une allocation journalière en cas d'hospitalisation du salarié et, le cas échéant, de sa famille;
- Une indemnité complémentaire à la rente d'incapacité permanent en cas d'infirmité liée à un accident corporel;
- Une indemnité ou le remboursement de frais liés à l'absence d'un "homme clef" de l'entreprise, un dirigeant de PME, par exemple, incapable d'exercer son activité ou décédé;
- Une indemnisation spécifique en cas d'accident du travail ou de dépendance;
- Une allocation de naissance;
- Une assistance santé.

#### **1.1.2.2 Qui peut garantir les risques de prévoyance?**

La loi limite les organismes assureurs habilités à gérer des opérations de prévoyance. On peut les classer dans trois catégories :

##### **1. Les sociétés d'assurance**

Elles sont régies par le Code des Assurances et soumises au contrôle de tutelle du Ministère de l'économie et des Finances ainsi qu'à un contrôle législatif et réglementaire par la Commission de Contrôle des Assurances. Une société d'assurance n'est autorisée à pratiquer des opérations d'assurance que si elle a reçu au préalable un agrément administratif. Deux formes juridiques sont possibles pour les sociétés d'assurance :

- Les sociétés anonymes : elles sont commerciales et sont à but lucratif : les excédents sont distribués aux actionnaires ;
- Les sociétés d'assurance à forme mutuelle : elles ont une forme commerciale mais un objet non commercial. Les excédents sont distribués aux assurés.

Même si la première catégorie est soumise au droit commercial et la seconde au droit des assurances, on peut considérer qu'il n'y a pas de différences importantes quant à leur fonctionnement.

## 2. Les institutions de prévoyance collective

Bien que régies par le Code de la sécurité sociale, les institutions de prévoyance ne sont pas des entités de la sécurité sociale. Elles sont des entités juridiques à but non lucratif relevant du secteur privé. Ces institutions sont gérées de manière paritaire par leurs membres adhérents (les entreprises ayant souscrit des contrats) et les membres participants (salariés, anciens salariés ou équivalents). Elles ont pour objectif de couvrir les risques liés à la prévoyance. Elles opèrent sous la tutelle du ministère de la sécurité sociale et sont soumises à la régulation de la Commission de Contrôle des Mutuelles et des Institutions de Prévoyance. Tout comme les d'assurance, elles doivent également respecter les exigences de solvabilité des entreprises.

Parmi les IPC, on peut également distinguer 3 catégories :

- Les Institutions de retraite complémentaire, ex : AGIRC, ARRCO ;
- Les Institutions de retraite supplémentaire ;
- Les Institutions de prévoyance.

## 3. Les mutuelles

Elles sont régies par le Code de la Mutualité et fonctionnent sous le double contrôle de tutelle du Ministère de la sécurité sociale et de régularité de la Commission de Contrôle des Mutuelles et des Institutions de Prévoyance. Cette dernière surveille leur solvabilité. Les mutuelles sont des groupements à but non lucratif réalisant des opérations de prévoyance, de solidarité et d'entraide à l'aide des cotisations de ses membres. Elles sont particulièrement présentes dans le secteur des frais de santé et sont obligatoirement administrées par des membres participants.

### 1.1.2.3 Les différents types de régimes de prévoyance complémentaire.

Les régimes et les adhérents	
Le Régime Général	Tous les salariés
Le Régime Agricole : MSA	Salariés et non salariés
Le Régime Social Des Indépendants (RSI)	Gérant SARL, nom propre (artisans, commerçants...)
Les régimes spéciaux	SNCF, Fonctionnaires, Église, Armée...
Autres institutions	Régimes complémentaires obligatoires de Retraite (Agirc-Arrco fusionné au 1.1.2019) Le régime du chômage (Pôle Emploi)
Les régimes complémentaires facultatifs (Santé, Prévoyance, Retraite)	Les organismes à but non lucratif : Les mutuelles relèvent du code de la mutualité, Les institutions de prévoyance relèvent du code de la sécurité sociale. Les compagnies d'assurance relèvent du code des assurances (but lucratif et actionnariat privé)

Le nombre d'organismes habilités par l'ACPR à pratiquer de telles opérations diminue depuis le milieu des années 1990 pour des raisons successives : la transposition aux mutuelles des directives européennes relatives aux assurances en 2002 (afin de mettre en place un marché unique européen, concurrentiel, de l'assurance privée). Le relèvement en 2007 et 2008 du seuil du fonds minimum de garantie obligatoire pour toute mutuelle exerçant une activité d'assurance, ont contraint les mutuelles à se restructurer pour atteindre une taille critique. Le nombre d'organismes a ainsi fortement reculé : il a baissé de 67 % chez les mutuelles, de 48 % chez les institutions de prévoyance et de 32 % chez les sociétés d'assurances entre 2006 et 2019 selon l'ACPR, principalement par effet de concentration.

Cette concentration s'est légèrement renforcée à partir de 2013, probablement en raison de l'approche imminente du nouveau régime prudentiel Solvabilité 2, qui est plus exigeant que le régime précédent. Cela peut également être attribué à la généralisation de la complémentaire santé d'entreprise à partir du 1er janvier 2016. Dans le domaine des contrats collectifs, la recherche d'alliances ou de partenariats a pu entraîner des fusions entre les organismes. L'année 2019 a confirmé que la diminution du nombre d'organismes d'assurance constituait une tendance à long terme.

#### 1.1.2.4 L'environnement juridique.

##### ■ Convention collective de retraite et de prévoyance des cadres du 14 mars 1947

Les cotisations sont exprimées en pourcentage du salaire : elles comprennent une part patronale et une part salariale.

Les prestations de la sécurité sociale sont assises sur le PASS.

##### ■ Montant et affectation des tranches :

- Tranche A (TA ou T1) = de 0 à 41 136€ (1PASS) ;
- Tranche B (TB ou T2) = de 41 136€ à 164 544 € (3PASS) ;
- Tranche C (TC ou T3) = de 164 544€ à 329 088€ (4PASS) ;
- Tranche D (TD ou T4) = de 329 088€ à l'infini.

##### ■ Que dit la CCN "Cadres" de 1947 ?

- Elle concerne les salariés cadres de toute entreprise ;
- Elle oblige tout employeur à souscrire à un régime de prévoyance au profit de son personnel cadre. Ce régime de prévoyance doit avoir un taux de cotisation minimum de 1,5% sur la Tranche A, pris en charge par l'employeur, principalement en cas de décès.

##### ■ Loi Evin du 31 décembre 1989

Elle a permis d'harmoniser les règles de prévoyance entre les différentes assurances. Elle a été déclinée dans chacun des codes. Elle a également permis de renforcer la protection des assurés.

Principales conséquences :

- Elle instaure le caractère collectif de la souscription ;
- Elle prévoit les sorties de groupe (retraités, licenciés, invalides... ) ;
- Elle instaure le maintien de prestations au niveau atteint lors de la résiliation (Elle a marqué la fin du régime par répartition et l'obligation, pour les assureurs, de constituer des provisions).
- Elle instaure le maintien de garanties décès au niveau atteint pour les personnes en Arrêt de Travail lors de la résiliation, loi Evin bis.

■ **Loi du 8 août 1994**

Elle renforce certaines dispositions de la loi Evin. Elle impose à l'employeur d'organiser la revalorisation des prestations en cas de résiliation.

■ **ANI (Accord National Interprofessionnel)**

Il renforce certaines dispositions de la loi Evin, en imposant à l'employeur, donc à l'assureur, le maintien des garanties Prévoyance et Santé des travailleurs ayant fait l'objet d'une résiliation de contrat.

■ **Les désignations, concerne surtout les IP**

Elles sont devenues inconstitutionnelles, décision Conseil Constitutionnel du 13/6/13. Les IP tentent de réagir en proposant des co-désignations qui seraient tolérées.

**1.1.2.5 La mise en place d'un système de protection sociale dans une entreprise.**

Les différentes manières de mettre en place un régime de prévoyance collective, formalismes juridiques :

1. Convention collective nationale;
2. Accord d'entreprise;
3. Référendum;
4. DUE - décision unilatérale employeur

**1. Convention collective nationale (CCN)**

La CCN est conclue entre les organisations patronales et les organisations syndicales de salariés. Elle traite de l'ensemble des relations entre les employeurs et les employés c'est-à-dire l'ensemble des conditions d'emploi et des garanties sociales.

■ La convention collective est définie :

- Soit au niveau national (CCN);
- Soit au niveau régional : on parle plutôt d'accord régional que de convention.

La CCN peut traiter de la mise en place d'un régime de prévoyance et/ou santé conventionnel. Ce régime est le régime de prévoyance minimum que doit souscrire l'ensemble des entreprises qui relèvent de la CCN.

■ Ce régime de prévoyance conventionnel va décrire :

- Les garanties minimales;
- Le taux de cotisation, c'est-à-dire le tarif;
- Les organismes assureurs.

Le régime peut :

- \* Désigner les organismes assureurs, impossible depuis le 13.6.13;
- \* Recommander les organismes assureurs, ex HCR Malakoff Humanis;
- \* Ne pas aborder le sujet des organismes assureurs, ex CCN Courtage.

■ La mise en place d'un régime de prévoyance par CCN se fait en plusieurs étapes :

1. Signature du texte entre les organisations patronales et les organisations syndicales de salariés;

2. La convention collective ne s'applique qu'aux entreprises qui sont adhérentes aux organisations patronales signataires du texte;
3. La CCN est étendue, c'est-à-dire qu'elle fait l'objet d'un arrêt ministériel d'extension;
4. Le texte s'applique alors à l'ensemble des entreprises de la branche. Il y a alors obligation pour les entreprises relevant de la CCN de mettre en place le régime de prévoyance conventionnel.

### **2. Accord collectif (ou accord d'entreprise)**

L'accord collectif est signé entre les organisations patronales et les organisations syndicales de salariés. Il est conclu au niveau de l'entreprise uniquement. Il traite d'un ou plusieurs sujets déterminés.

### **3. Référendum (au sein d'une entreprise)**

Le vote des salariés détermine le régime de prévoyance :

- ☞ Le projet est proposé par l'employeur et il est mis à disposition des salariés;
- ☞ Le projet fait l'objet d'un vote de l'ensemble des salariés;
- ☞ Le projet est adopté à la majorité simple des suffrages valablement exprimés;
- ☞ Le projet est appliqué à l'ensemble des salariés.

### **4. Décision unilatérale de l'employeur**

Elle trouve principalement son application au sein des petites entreprises. L'employeur est tenu de fournir aux salariés une liste détaillée des garanties offertes, sous la forme d'un avis d'information comprenant les conditions spécifiques et générales. Les salariés qui étaient déjà présents dans l'entreprise avant la mise en place de la couverture prévoyance collective ne sont pas tenus d'y adhérer s'il ya une contribution de leur part. Cependant, les nouveaux employés ont l'obligation d'y adhérer conformément au régime en place.

#### **Hiérarchie entre les " 4 formalismes " de mise en place de la prévoyance collective :**

1. CCN;
2. Accord collectif;
3. Référendum;
4. Décision unilatérale;

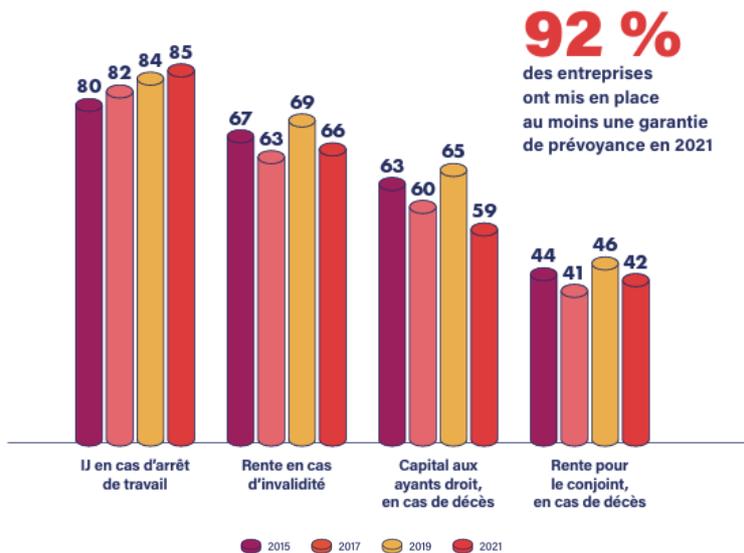
## **1.2 Etat des lieux de la prévoyance collective en France**

### **1.2.1 Quelques chiffres**

Les chiffres disponibles résultent principalement d'études des fédérations CTIP, FNME, FFA et de l'IRDES, ainsi que d'informations synthétisées par l'Argus de l'Assurance. À la fin de l'année 2022, les institutions de prévoyance couvraient 14 millions de salariés à travers 2 millions d'entreprises, environ 1818 000 'entreprises adhérentes pour la garantie Incapacité - invalidité.

## TAUX DE COUVERTURE CREDOC

Évolution du taux de couverture des entreprises  
par type de garantie de prévoyance  
(en %)



Prévoyance : un niveau élevé de couverture (en %)

Globalement, des taux élevés de couverture en prévoyance

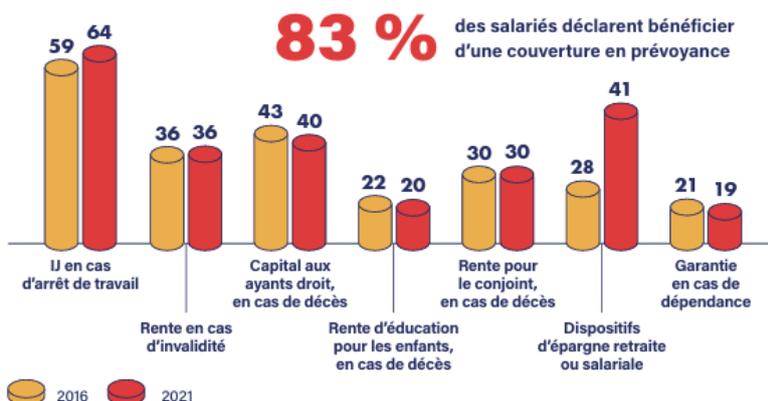


FIGURE 1.6 – TAUX DE COUVERTURE

1

l'IRDES note dans une enquête sur la protection sociale complémentaire d'entreprise de 2019 s'appuyant sur des données de 2017 que le taux d'établissement déclarant offrir un contrat prévoyance serait passé de 65% en 2009 à 77% en 2017, le taux de couverture des salariés passant ainsi de 86% à 91%. L'enquête fait ressortir des points intéressants :

- Une corrélation entre le taux d'équipement en prévoyance et la taille de l'entreprise, pas de contrat de prévoyance dans 32% des entreprises de moins de 5 salariés contre 1,3% pour les entreprises de 500 salariés et plus, ainsi que le secteur d'activité (pas de contrat prévoyance dans près de 40% des établissements de l'agriculture, contre 26% dans le commerce et l'administration publique, 20% dans la restauration, 14% dans la finance/assurance et 13,3% dans les transports);
- Une majorité d'établissements (54%) ayant mis en place un contrat de prévoyance avec des garanties décidées exclusivement au niveau de la branche professionnelle, contre 22% par décision unilatérale de l'employeur (DUE) et 22% par accord d'entreprise;

1. Sources : Baromètre CRÉDOC/CTIP - Années : 2015, 2017, 2019 et 2021  
Ensemble des salariés, Réponses multiples 2015, 2017 et 2019 : Interrogation téléphonique  
2016 et 2021 : Interrogation en ligne

Prévoyance : un niveau élevé de couverture (en %)

Globalement, des taux élevés de couverture en prévoyance

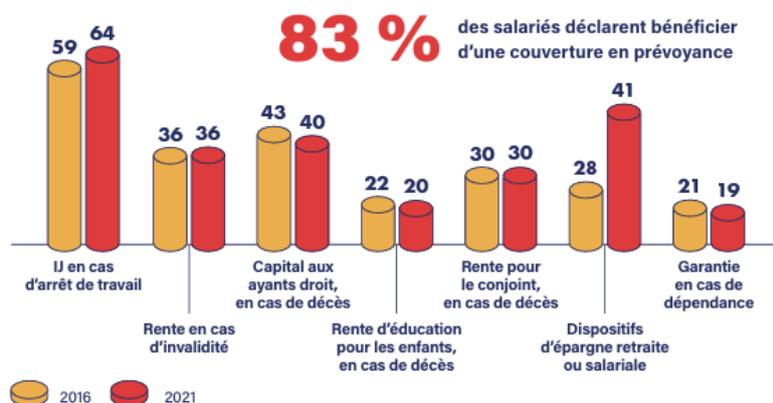


FIGURE 1.7 – TAUX DE COUVERTURE

- De fortes disparités concernant les prestations réellement offertes : un peu plus des deux tiers des établissements (86% des salariés) prévoient un capital décès et des prestations en cas d'incapacité ou d'invalidité mais un peu moins de la moitié d'entre eux prévoient des rente au conjoint (39%) ou des rentes d'éducation (43%). La couverture dépendance n'est proposée que par 16% des établissements regroupant 20% des salariés.

Cotisations et prestations en millions d'euros

	Cotisations*													
	2021	2022	Var 22/21	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	
TOTAL complémentaire santé	6 819	7 068	3,6 %											
Décès, rentes d'éducation et de conjoint	2 224	2 420	8,8 %											
Incapacité, invalidité, dépendance**	4 230	4 642	9,7 %											
				Santé	6 122	6 200	6 236	6 482	6 673	6 580	6 510	6 331	6 819	7 068
				Prévoyance	5 734	6 162	5 946	5 691	5 927	5 935	6 059	5 854	6 454	7 062

FIGURE 1.8 – Historique des cotisations sur 10 ans : vision globale et par métier

	Prestations*													
	2021	2022	Var 22/21	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	
TOTAL complémentaire santé	5 865	6 318	7,7 %											
Décès, rentes d'éducation et de conjoint	1 562	1 606	2,8 %											
Incapacité, invalidité, dépendance**	4 269	4 214	-1,3 %											
TOTAL prévoyance	5 831	5 820	-0,2 %	Santé	5 550	5 431	5 334	5 689	5 680	5 597	5 782	5 513	5 865	6 318
				Prévoyance	5 643	5 683	5 747	5 377	5 592	5 813	5 443	5 796	5 831	5 820

FIGURE 1.9 – Historique des prestations sur 10 ans : vision globale et par métier

23

Après une année 2020 marquée par la crise sanitaire, l'année 2021 enregistre un retour à un niveau de croissance robuste pour les assurances santé et prévoyance. Les cotisations atteignent 64,4 milliards d'euros, ce qui représente une augmentation de 4,8 % par rapport à 2020. Cette évolution se déroule dans un contexte macro-économique favorable, caractérisé par la reprise économique en France, avec une croissance du PIB de 6,8 %, ainsi que par la revitalisation du marché de l'emploi.

En 2021, le marché de la prévoyance enregistre une croissance avec un total de cotisations atteignant 24,3 milliards d'euros, ce qui représente une augmentation de 6 %. En revanche, les paiements des prestations restent globalement stables, enregistrant une augmentation de seulement 0,4 %.

Dans la catégorie des contrats collectifs, les cotisations sont réparties entre les sociétés d'assurance (41 %)

et les institutions de prévoyance (37 %), tandis que les mutuelles représentent 22 %. En ce qui concerne le marché de l'assurance individuelle, il est principalement partagé entre les sociétés d'assurance (53 %) et les mutuelles (44 %), avec une présence limitée des institutions de prévoyance (3 %).

En prévoyance (incapacité/invalidité/dépendance/décès), la croissance des cotisations des contrats collectifs, à 8,9 % pour atteindre 13,5 Md€, est nettement plus forte que celle des contrats individuels, à 2,6 % pour 10,8 Md€. Les contrats collectifs représentent plus de la moitié des cotisations de l'année (56 %).

### **1.2.2 Le contexte de sur-sinistralité en prévoyance collective**

Les régimes de prévoyance collective font face à des problèmes de rentabilité en raison de :

- La croissance de l'absentéisme et la diversification de ses causes;
- L'évolution du modèle familial;
- L'enjeu de la longévité et de l'assistance;
- La santé mentale;
- L'évolution rapide du monde du travail : essor de la digitalisation, du non salariat et du télétravail;
- L'apparition de nouvelles crises paralysant l'économie.

L'augmentation des arrêts de travail, le vieillissement de la population active et la baisse des taux d'intérêt jusqu'en 2022, ont été accentués par la crise liée au Covid-19. En raison de la hausse des arrêts de travail et de l'augmentation du recours au chômage partiel, la prévoyance collective se trouve confrontée à une situation de " sur-sinistralité " qui dégrade sa rentabilité.

Même avec la fin de la crise sanitaire, la situation n'a pas été résolue. Les arrêts maladie sont restés à un niveau élevé. Les changements dans l'organisation du travail, tels que la généralisation du télétravail et l'adoption du flex office, ont eu un impact significatif sur la santé mentale de certains employés qui se sentent isolés. Les arrêts maladie liés aux problèmes psycho-sociaux sont généralement plus longs et ajoutent une charge supplémentaire aux organismes.

### **1.2.3 Les pistes envisagées et exploitables pour le retour à l'équilibre**

Les acteurs opérant dans le domaine de la prévoyance doivent rétablir leur équilibre financier. Une démarche devenue d'autant plus pressante à la lumière d'une nouvelle problématique : la réforme des retraites. En effet, les risques associés au décès et aux arrêts de travail augmentent à mesure que les travailleurs vieillissent, entraînant une augmentation de la fréquence des sinistres. Pour faire face à cette situation, les assureurs disposent des stratégies et des moyens présentés ci-dessous.

#### **La hausse de tarif des contrats de prévoyance entreprise**

L'augmentation des tarifs représente la première mesure adoptée par les assureurs pour compléter cette sur-sinistralité. Cependant, ces ajustements tarifaires pourraient être mal perçus compte tenu de l'inflation et des difficultés économiques actuelles qui pèsent sur le pouvoir d'achat.

#### **La révision des garanties de prévoyance collective**

Opter pour une réduction des prestations constitue une autre option envisageable pour remédier à la situation des régimes de prévoyance complémentaire. Toutefois, cela exige d'obtenir l'aval des syndicats au niveau des entreprises ou des partenaires sociaux au sein des branches professionnelles. Les conventions collectives et les accords d'entreprise établissent en effet des seuils minimums pour les garanties offertes.

### Le focus sur la prévention

Les assureurs explorent désormais la voie de la prévention des risques en matière de santé et d'accidents. Il convient de rappeler qu'un rapport sur la prévention et la gestion des arrêts de travail avait été remis à Edouard Philippe en 2019. Bien que cette solution ne puisse pas offrir une solution à court terme, elle doit être envisagée sur le long terme. Plusieurs assureurs ont d'ailleurs déjà lancé des programmes de prévention à destination de leurs clients.

### L'idée de la prévoyance collective obligatoire pour tous les salariés

Bien que la prévoyance soit principalement liée aux employés, il existe d'importantes disparités dans les obligations de couverture au sein de la population salariée, ce qui peut être difficile à justifier. Alors que la loi du 17 juin 2013 sur la sécurisation de l'emploi a rendu obligatoire la couverture complémentaire santé en entreprise depuis le 1er janvier 2016, ce n'est pas le cas pour la prévoyance. À moins d'une disposition conventionnelle spécifique, seuls les cadres sont tenus d'être couverts en prévoyance, conformément à l'article 7 de la Convention Collective Nationale (CCN) des cadres de 1947.

Actuellement, 215 branches professionnelles assurent la protection des employés en matière de prévoyance par le biais d'accords collectifs, ce qui pourrait éventuellement couvrir 15 millions de salariés en France. Dans les accords conclus au sein de branches comptant plus de 50 000 salariés, les risques d'incapacité de travail, d'invalidité et de décès sont les mieux couverts. Les branches professionnelles comprenant entre 50 000 et 100 000 salariés affichent les taux de couverture les plus élevés pour les garanties mentionnées.

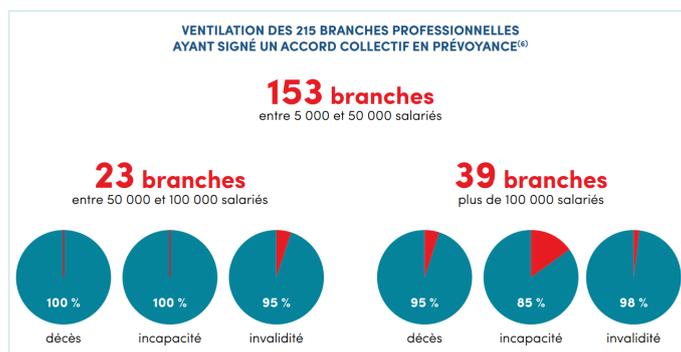


FIGURE 1.10 – États des lieux prévoyance

La prévoyance collective n'est aujourd'hui obligatoire que pour les cadres ou dans certaines branches professionnelles. Généraliser l'obligation d'une prévoyance collective permettrait en effet d'élargir l'assiette de cotisation.

### La nécessité de revoir son contrat de prévoyance collective

Dans ce contexte, il est donc indispensable de revoir ses dispositifs de protection sociale comme la prévoyance collective étant donné la forte concurrence sur ce marché. La prévoyance a donc de belles perspectives de développement, tant en ce qui concerne l'étendue des garanties que les populations couvertes.

Les éléments exposés dans cette première partie nous offrent une vue d'ensemble essentielle de la prévoyance collective, nous permettant de saisir pleinement son importance, surtout dans le contexte actuel de concurrence accrue. Dans la partie suivante, nous exposerons les principaux axes et bases de notre étude. Cette approche nous prépare à une analyse approfondie des mécanismes de revalorisation des rentes, ce qui contribuera à une compréhension plus approfondie de leur rôle essentiel au sein de la prévoyance collective.

## **Deuxième partie**

# **CADRE DU MÉMOIRE**

# Chapitre 2

## Les points clés de l'étude

L'objectif central de ce mémoire est de projeter un portefeuille de contrats de prévoyance collective, spécifiquement pour les garanties en incapacité et invalidité afin d'étudier les sensibilités de l'engagement assureur par rapport aux politiques de revalorisation des rentes et à l'inflation.

La revalorisation des rentes en prévoyance collective revêt une importance capitale pour les assureurs, et ce, pour plusieurs raisons. Au-delà de l'impératif de fidélisation des assurés, cet exercice nécessite un équilibre entre les aspirations à maintenir le pouvoir d'achat des bénéficiaires et l'obligation cruciale de rester solvable dans un environnement en constante évolution. Cette tâche délicate se situe au cœur des préoccupations des assureurs et exige une analyse attentive et une gestion éclairée. Le défi se complexifie encore davantage à mesure que les marchés financiers, les taux d'intérêt et les réglementations évoluent. Les assureurs doivent non seulement anticiper les variations économiques futures, mais aussi s'aligner sur les exigences réglementaires, telles que la norme Solvabilité 2, qui encadre étroitement nos modélisations.

Dans notre étude nous présenterons deux concepts de revalorisation :

- La revalorisation en fonction des produits financiers ;
- La revalorisation en fonction de l'évolution du point Agirc-Arrco.

Dans ce chapitre, nous présenterons premièrement le cadre réglementaire de notre étude, en abordant les principes fondamentaux guidant le calcul des provisions techniques et la formalisation des indicateurs clés de notre études. Dans un second temps, une analyse théorique des mécanismes de revalorisation des rentes en prévoyance collective sera réalisée.

### 2.1 Cadre réglementaire : SOLVABILITÉ II

Il est essentiel d'établir un cadre réglementaire qui orientera nos futurs examens. Cette approche nous permettra de bénéficier d'un cadre méthodologique solide, tout en garantissant la pertinence et la fiabilité de nos analyses.

L'activité d'assurance se distingue par une inversion du cycle de production. Les compagnies d'assurance collectent des primes auprès des assurés en prévision de la couverture des sinistres à venir. Ainsi, leur fonctionnement repose entièrement sur une anticipation des risques futurs. Le coût réel d'un contrat demeure incertain lors de sa commercialisation, car il est tributaire des sinistres à venir. La notion d'incertitude joue un rôle prépondérant dans le domaine de l'assurance, ce qui explique la nécessité de contrôles prudentiels.

La gestion efficace et prudente des fonds de prévoyance collective est essentielle pour assurer la sécurité financière des assurés et bénéficiaires. À cette fin, les normes de solvabilité jouent un rôle crucial en préservant la stabilité et la viabilité des institutions financières agissant dans le secteur de l'assurance. Parmi ces règles, Solvabilité 2 occupe une position centrale dans la supervision et la régulation des assureurs en Europe. Cette section se penche sur l'application de Solvabilité 2 pour les activités liées à la prévoyance collective.

Les études menées dans le cadre de ce mémoire concernent essentiellement le pilier 1. Les provisions techniques, évaluées en juste valeur, résultent de la somme entre la meilleure estimation des engagements de passif, le Best Estimate Liability et la marge de risque.



FIGURE 2.1 – STRUCTURE DU BILAN PRUDENTIEL DES IP

Les fonds propres de l'assureur doivent permettre de couvrir à tout moment le capital de solvabilité requis sans jamais descendre en-deçà d'un plancher, le Minimum Capital Requirement ou MCR. La part des fonds propres non affectée à la couverture du SCR constitue le surplus.

### 2.1.1 L'actif : Les placements financiers

Sous l'égide de Solvabilité II, les actifs sont enregistrés à leur valeur de marché. Cette valeur reflète le montant auquel ces actifs pourraient être échangés dans des conditions de concurrence normales. La valorisation en valeur de marché des actifs est relativement simple pour les actifs liquides grâce aux données de marché disponibles. Néanmoins, pour les actifs plus complexes tels que les dérivés, ou moins liquides comme l'immobilier, la détermination de la valeur peut être plus complexe.

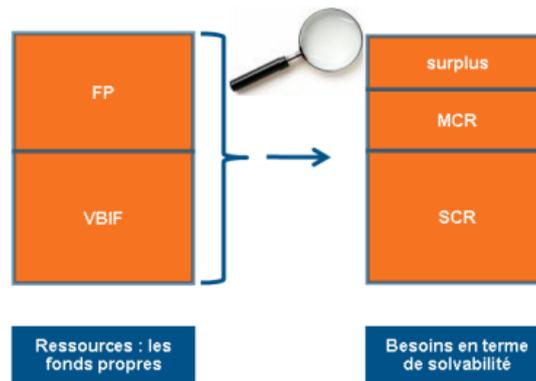
Postes - Vision au 31/12/2018	Valorisation Comptable (en k€)	Valorisation Solvabilité II (en k€)	%	Méthode de valorisation SII
Trésorerie et dépôts	4 266	4 266	39%	Valeur nette comptable
Immobilier	967	2 488	22%	Expertise indépendante
Obligations en direct	3 620	3 757	34%	Valeur de marché
Participations	4	4	0%	Valeur nette comptable
Actions et OPCVM	505	529	5%	Valeur de marché (cotée)/ Valorisation comptable (non cotée)
<b>Total Actif de placements</b>	<b>9 363</b>	<b>11 045</b>	<b>100%</b>	

FIGURE 2.2 – Exemple de placements financiers

Les grandes catégories de placements composant le portefeuille de la prévoyance sont les actions, les obligations, les immeubles, les fonds communs de placement, les prêts, la trésorerie (solde des comptes courants) et les dépôts (livrets, comptes à terme).

### 2.1.2 Les fonds propres

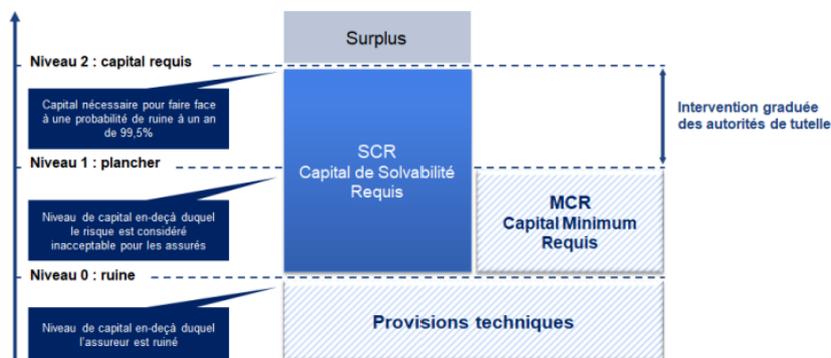
Les fonds propres agissent comme une réserve de sécurité pour les créanciers de l'entité. Des fonds propres plus élevés réduisent le risque de faillite.



Les fonds propres (own funds ou OF) correspondent à la somme des éléments suivants :

- Fonds propres de base (basic own funds ou BOF) :
  - Excédent des actifs par rapport aux passifs;
  - Passifs subordonnés.
- Fonds propres auxiliaires :
  - Autres éléments pouvant être appelés pour absorber les pertes (ex : capital social non appelé, lettre de crédit, etc.)

### Decomposition des fonds propres S2



#### ■ Un niveau de capital minimum : le MCR

Le Minimum Capital Requirement, ou exigence minimale de capital, constitue le premier niveau d'alerte de solvabilité. Son objectif est de fournir une mesure simplifiée tout en étant solide et fiable. Le MCR détermine le seuil en dessous duquel les fonds propres ne doivent pas descendre, afin d'éviter une intervention des autorités de supervision. Il est largement accepté que si l'entreprise tombe en dessous de ce niveau, son fonctionnement normal est compromis, et le non-respect de ce seuil nécessiterait une augmentation immédiate de capital, faute de quoi l'agrément pourrait être retiré.

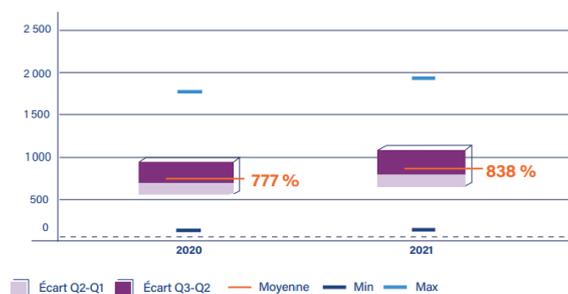


FIGURE 2.3 – Taux de couverture du MCR des institutions de prévoyance en %

### ■ Un niveau de capital souhaitable : le SCR

Le Solvency Capital Requirement (SCR) doit garantir que l'assureur puisse absorber des pertes inattendues et importantes tout en rassurant les assurés quant à la capacité de l'assureur à respecter ses engagements. Il est conçu pour représenter le montant de capital nécessaire à l'assureur pour honorer ses obligations sur une période spécifique, avec un certain niveau de confiance. Actuellement, le SCR vise à couvrir une probabilité de ruine de 0,5 % sur un an. La "ruine" est définie comme la situation où la valeur actuelle des actifs exprimée en valeur de marché est inférieure à celle des passifs. Si le niveau de capital de solvabilité est trop bas, les entreprises ne pourraient pas se rétablir par elles-mêmes si leurs fonds propres tombaient en dessous de ce seuil. Ce niveau peut être considéré comme une alarme, nécessitant des mesures décisionnelles de la part de l'entreprise afin de rétablir une situation financière viable.

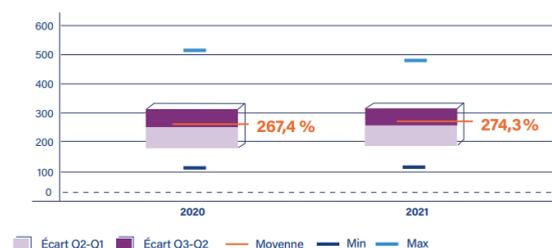


FIGURE 2.4 – Taux de couverture du SCR des institutions de prévoyance en %

### 2.1.3 Méthodes d'évaluations du SCR

Il existe différentes méthodes de calcul du Solvency Capital Requirement au choix de l'assureur. La formule standard fournie par l'EIOPA offre une approche simple et uniforme applicable à toutes les compagnies, indépendamment du pays. Toutefois, afin de mieux représenter les risques spécifiques auxquels chaque entreprise est exposée, elles ont la possibilité de créer des modèles internes, qui doivent être validés par les autorités de surveillance. En outre, elles peuvent opter pour une combinaison des deux approches en utilisant la formule standard pour certains risques et un modèle interne pour d'autres risques.

#### Formule Standard

- Fournie par les autorités de régulation européennes ;
- Règle prudentielle par défaut : volonté de l'EIOPA d'avoir une calibration prudente de la formule (fondée sur une moyenne du marché) ;
- Calibration identique pour toutes les entreprises ;
- Répartition des risques par modules auxquels sont associés des facteurs de risques (pré-calibrés) et une méthode de calcul de la marge de fonds propres associée ;
- Calcul simplifié fondé sur des hypothèses simples.

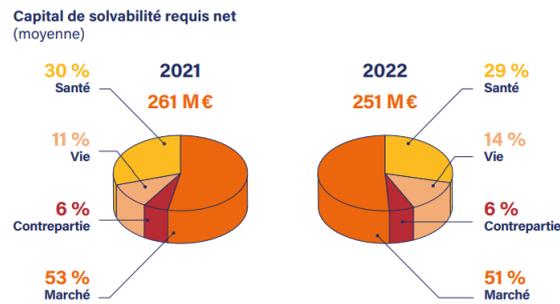


FIGURE 2.5 – Décomposition du SCR des IP

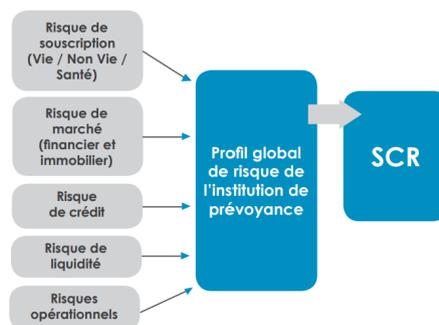
### Modèle interne

- Développé en interne par l'entreprise et sur son propre profil de risque, pour traiter de manière spécifique chaque classe de risque liée à son bilan
- Est soumis à des normes de validation et d'exécution définies par la Commission Européenne (article 120 à 127 de la directive 2009/138/CE) :
  - Tests relatifs à l'utilisation du modèle;
  - Normes de qualité statistique;
  - Normes de calibrage;
  - Attribution des profits et des pertes;
  - Normes de validation;
  - Normes en matière de documentation;
  - Mesures d'exécution.
- Permet de complètement bénéficier des effets de diversifications au sein d'un même groupe et entre les risques traités

Dans le cadre du mémoire les calculs seront effectués selon la formule standard.

#### 2.1.3.1 Formule standard

La formule standard repose sur une structure modulaire où chaque module est représentatif d'un risque soumis à une exigence de capital. Seuls certains de ces modules s'appliquent aux activités de prévoyance collective :



L'évaluation du capital de solvabilité requis se fait en plusieurs étapes :

**Etape 1 :** Constitution du bilan économique;

**Etape 2 :** Calcul du capital requis par risque, avant prise en compte de la capacité d'absorption des pertes par les provisions techniques et les impôts différés;

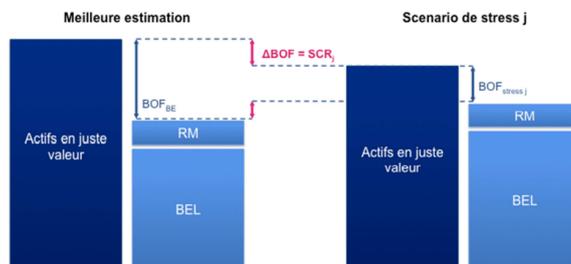
**Etape 3 :** Agrégation des risques et calcul du SCR de base, BSCR;

**Etape 4 :** Prise en compte des effets d'absorption et du risque opérationnel.

### 2.1.3.2 Approche factorielle et approche par compte de résultat

Dans le contexte de la formule standard, certains risques tels que les risques techniques non-vie, le risque de catastrophe en matière de santé et le risque opérationnel sont évalués en se basant sur une méthodologie factorielle spécifiée par l'EIOPA. Les autres risques sont évalués à travers une approche basée sur le compte de résultat, impliquant la mesure de la variation des fonds propres de base (Basic Own Funds ou BOF) suite à la concrétisation d'un scénario de choc soudain et/ou de tendance négative (stress).

Les fonds propres de base sont évalués par différence entre l'actif et le passif du bilan économique.



Il est crucial de noter qu'aucun facteur de risque ne peut provoquer une exigence de capital négative. Si un scénario de choc entraîne une augmentation des fonds propres de base, cela se traduit par une annulation du capital requis associé.

Chaque risque est évalué deux fois : une fois en prenant en compte l'impact du scénario de choc sur les prestations discrétionnaires futures incluses dans les provisions techniques, et une autre fois en ignorant cet impact.

### 2.1.3.3 Agrégation et mécanismes d'absorption

Les exigences en capital pour chaque risque sont regroupées pour tenir compte de l'effet de diversification entre les divers facteurs de risque. Ce processus d'agrégation est réalisé au moyen de matrices de corrélations spécifiées par la formule standard, qui sont appliquées au sein de chaque module ainsi qu'entre les modules composant le SCR de base .

Le SCR de base est ainsi évalué de la façon suivante :

$$BSCR = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} * SCR_i * SCR_j + SCR_{incorporel}}$$

$$SCR_{op} = \min(0.30 * BSCR, Op_{nul} + 0.25 * Exp_{ul})$$

$$SCR = BSCR + SCR_{op} - Adj$$

Avec :

- $SCR_i$  le capital requis au titre de l'un des risques suivants : risque de marché, risque de défaut de contrepartie, risques de souscription vie, non vie et santé;
- $Corr_{i,j}$  le coefficient de corrélation entre le risque i et le risque j;

- $Op_{Inut}$  Chargement de base au titre du risque opérationnel pour toutes les activités excepté l'activité en unité de compte (brut de réassurance) en Vie, Non-Vie et Santé;
- $Expul_{ul}$  Montant des frais annuels (bruts de réassurance) relatifs à l'activité en unités de compte.

i \ j	Marché	Défaut	Vie	Santé	Non-vie
Marché	1	0,25	0,25	0,25	0,25
Défaut	0,25	1	0,25	0,25	0,5
Vie	0,25	0,25	1	0,25	0
Santé	0,25	0,25	0,25	1	0
Non-vie	0,25	0,5	0	0	1

FIGURE 2.6 – Matrice de corrélation des modules de risque

Les modules de risques retenus dans le calcul du SCR dans le cadre du mémoire au vu de la structure des données en notre disposition sont : le risque de souscription Vie et le risque de marché.

### 2.1.4 Provisionnement réglementaire

Les provisions techniques d'une compagnie d'assurance représentent le montant auquel l'assureur est engagé envers ses assurés. Il s'agit de la somme actuelle que la compagnie devrait payer si elle cédait aujourd'hui ses obligations d'assurance à une autre entreprise.

Les provisions techniques en vigueur sont calculées comme la différence entre, d'une part, la valeur actuelle estimée des engagements contractuels de l'assureur et des coûts de gestion associés aux contrats en cours, et d'autre part, la valeur actuelle estimée des engagements pris par les assureurs.

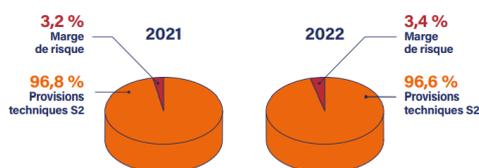


FIGURE 2.7 – STRUCTURE DES PROVISIONS TECHNIQUES DES IP

Dans le cadre de la prévoyance collective, nous distinguons deux natures de provision :

**Les provisions " globales " :** Les provisions globales sont encadrées par la réglementation. Elles ont pour objectif de participer à la solvabilité de l'organisme assureur et sont chacune associées à un risque particulier.

**Les provisions " de prestation " :** Les provisions techniques de prestation sont liées aux engagements en cours ou potentiels liés aux risques assurés. Ces provisions sont généralement présentées dans le bilan et les comptes de résultat spécifiques, également appelés, bien que cette présentation ne soit pas toujours appliquée aux provisions globales.

1. **Best Estimate de Sinistres (hors rentes en stock) :** Le Best Estimate de sinistres représente l'engagement de l'assureur concernant les sinistres déjà survenus à la date d'arrêt. Il inclut les règlements, les frais de gestion des sinistres et les recours. Ce BE est généralement calculé par des méthodes de cadencement de type CHAINLADDER appliquées aux triangles de liquidation.
2. **Best Estimate pour rentes en cours : PM** Le Best Estimate pour rentes en cours représente l'engagement de l'assureur sur les rentes déjà en service à la date d'arrêt. Il inclut les frais de gestion et la revalorisation des rentes, avec une actualisation des flux futurs basée sur la courbe des taux sans risque. Le calcul du Best Estimate pour rentes non-vie est identique au calcul des PM de rentes en norme française. L'unique différence concerne l'actualisation des flux futurs qui repose en Solvabilité II sur la

courbe des taux sans risque (taux différent selon la maturité) et non sur un taux unique fonction du TME.

3. **Best Estimate de Primes** : Le Best Estimate de primes représente l'engagement de l'assureur relatif aux sinistres survenant après la date d'arrêt. Il prend en compte les émissions de primes futures, les paiements de sinistres, les frais de gestion, les frais d'encaissement des primes et autres frais liés à la gestion des contrats. La frontière des contrats est définie précisément, incluant les contrats en cours et futurs pour lesquels l'assureur ne peut plus se désengager.

La section suivante abordera les diverses tables du BCAC employées pour l'arrêt de travail, ainsi que les tables INSEE utilisées pour les décès. De plus, il traitera des règles en vigueur concernant les taux d'actualisation utilisés dans le calcul des provisions mathématiques. Enfin, différentes formules de calcul pour ces provisions seront présentées.

Risque / Garantie	Loi / Table	Taux actualisation (maximum <sup>(1)</sup> )
Incapacité / Invalidité	"Nouveau" BCAC (Salariés)	75 % TME
	"Ancien" BCAC (Emprunteurs) ou Loi expérience	(à l'inventaire)
	Décès - Rente conjoint	TPG ou Table d'expérience
Décès - Rente Education	TPG ou Table d'expérience (+ loi poursuite d'études)	60 % TME après 8 ans (par année de survivance)

FIGURE 2.8 – hypothèses actuarielles de calcul des provisions

**Hypothèses et inputs du calcul des provisions :**

**Les tables du BCAC en arrêt de travail :** Les tables réglementaires de maintien en incapacité, passage en invalidité et maintien en invalidité ont été élaborées par le BCAC, à partir d'une étude réalisée en 1993 sur des portefeuilles de différentes compagnies d'assurances. Ces tables ont été homologuées par l'arrêté du 28 mars 1996 et sont utilisées dans le calcul des provisions techniques de prestations d'incapacité et d'invalidité, conformément à l'article A331-22 du Code des Assurances.

■ **Tables de maintien en incapacité**

Âge à l'entrée en incapacité	ancienneté en mois en incapacité					
	0	1	2	3	4	5
20	10 000	2 842	1 743	1 144	838	625
21	10 000	2 842	1 743	1 144	838	625
22	10 000	2 842	1 743	1 144	838	625
23	10 000	2 842	1 743	1 144	838	625
24	10 000	2 931	1 848	1 215	894	657
25	10 000	3 080	2 001	1 345	997	739
26	10 000	3 177	2 112	1 461	1 087	812
27	10 000	3 251	2 180	1 540	1 156	869
28	10 000	3 298	2 243	1 600	1 209	915
29	10 000	3 348	2 273	1 640	1 246	956
30	10 000	3 386	2 275	1 659	1 264	964

FIGURE 2.9 – Extrait d'une table de maintien en incapacité

Il s'agit une table bidimensionnelle : le nombre d'incapables restants est exprimé en fonction de l'ancienneté en incapacité (de 0 à 36 mois) et de l'âge d'entrée en incapacité (de 20 à 67 ans). Ainsi, on peut observer que parmi les 10 000 incapables de 28 ans présents à l'origine, il n'en reste que 1600 au bout de 3 mois.

■ **Table de passage en invalidité**

Âge à l'entrée en incapacité	ancienneté en mois en incapacité					
	0	1	2	3	4	5
20	1	0	0	0	0	0
21	1	0	0	0	0	0
22	1	0	0	0	0	0
23	1	0	0	0	0	0
24	1	0	0	0	0	0
25	1	0	0	0	0	0
26	1	0	1	0	0	0
27	1	0	1	0	0	0
28	1	0	1	0	0	0
29	1	0	1	0	0	1
30	1	0	2	0	1	0

FIGURE 2.10 – Extrait d'une table de passage en invalidité.

La table de passage en invalidité se lit de la même manière que la table de maintien en incapacité : le nombre de passages est exprimé en fonction du nombre de mois d'ancienneté en incapacité et de l'âge d'entrée en incapacité. Cette table fournit donc le nombre d'incapables entrés à un âge donné qui passent dans l'état d'invalidité au bout de x mois,  $x \in 0, \dots, 36$ .

■ **Table de maintien en Invalidité**

Âge à l'entrée en invalidité	ancienneté en année en invalidité					
	0	1	2	3	4	5
20	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163
21	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163
22	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163
23	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163
24	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163
25	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163
26	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163
27	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163
28	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163
29	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163
30	10 000	9 859	9 699	9 534	9 331	9 163

FIGURE 2.11 – Table de maintien en Invalidité

Cette table triangulaire permet d'observer le nombre d'invalides restant au bout de x années d'ancienneté selon l'âge d'entrée en invalidité,  $x \in 0, \dots, \text{agelimit} - \text{âge d'entrée en invalidité}$ . Parmi les 10 000 invalides de 28 ans présents à l'origine, il n'en reste que 9699 au bout de 2 ans.

**Les tables de mortalité de l'INSEE**

■ **TH00-02 et TF00-02**

Pour le calcul des provisions, les tables utilisées sont les tables de tarification. Or la distinction des tarifs par sexe est interdite. Pour la tarification et le calcul des provisions des rentes éducatives ou des rentes temporaires, une table mixte est donc constituée à partir des tables TH00-02 et TF00-02 :

Age (années)	Lx TH00-02	Lx TF00-02
0	100000	100000
1	99511	99616
2	99473	99583
3	99446	99562
4	99424	99545
5	99406	99531
6	99390	99519
7	99376	99508
8	99363	99498

FIGURE 2.12 – Table de mortalité

En partant d'une population de 100 000 individus, Lx indique le nombre de personnes encore en vie à l'âge x. Nous observons que les probabilités de décès de la TF00-02 sont inférieures à celle de la TH00-02 pour un âge x. L'utilisation de la TF00-02 entraînera donc la constitution de provisions plus importantes pour les garanties

en cas de vie car l'espérance de vie des femmes est plus élevée que celle des hommes.

■ **Tables de mortalité générationnelles**

Pour le calcul de provisions liées à des rentes viagères, les tables de mortalité en vigueur sont les TGH05 pour les adhérents de sexe masculin et la TGF05 pour les adhérents de sexe féminin. Ce sont des tables générationnelles :

âge	Génération:				
	1993	1994	1995	1996	1997
0	-	-	-	100 000	100 000
1	-	-	100 000	99 738	99 739
2	-	100 000	99 918	99 655	99 656
3	100 000	99 964	99 881	99 619	99 620
4	99 979	99 943	99 860	99 598	99 599
5	99 965	99 929	99 846	99 584	99 585
6	99 954	99 917	99 835	99 573	99 574
7	99 944	99 908	99 825	99 563	99 564
8	99 935	99 899	99 817	99 555	99 556

FIGURE 2.13 – Table de mortalité générationnelles

elles fournissent les données brutes du nombre de survivants , âge par âge pour toutes les générations de 1900 à 2005. A partir de 100 000 individus en 1996 pour chacune des générations inférieures ou égales à 1996 et de 100 000 individus à la naissance pour les générations postérieures à 1996, cette table nous informe sur le nombre de survivants année après année.

**Actualisation :** Elle fait référence au processus de conversion de flux monétaires futurs en une valeur équivalente au présent. Les flux de trésorerie sont actualisés en utilisant le taux d'actualisation sans risque correspondant à la date d'échéance respective. Si le marché financier ne fournit pas de données, une interpolation ou une extrapolation est appliquée. L'EIOPA a mis à disposition la courbe des taux d'intérêt, garantissant ainsi que tous les participants utilisent la même méthode d'actualisation. Cette approche d'actualisation à un taux variable diffère fondamentalement de la méthode de provisionnement réglementaire en vigueur, qui repose sur une actualisation à taux constant.

**Frais :** Une provision pour les frais futurs de gestion des contrats (frais administratif, gestion des investissements, dépenses de sinistres, frais généraux) doit être constituée.

**Fiscalité :** Les paiements d'impôts requis pour satisfaire les engagements du souscripteur doivent être provisionnés sur la base appliquée actuellement

**Réassurance :** Les provisions en Best Estimate doivent être évaluées brutes et nettes de réassurance.

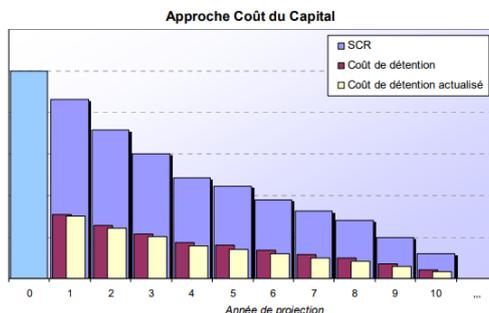
**Horizon temporel** Toutes les projections de cash flows doivent être faites sur un horizon d'un an pour avoir la possibilité de prendre en compte des mesures correctrices chaque année.

**2.1.5 Évaluation de la Risk Margin**

La marge de risque représente une protection contre les risques associés à la réalisation des passifs sur toute leur durée. Cette approche vise à sécuriser les droits des assurés en prenant en compte l'incertitude inhérente à l'évaluation des provisions en Best Estimate. Pour les risques non couvrables, la marge de risque peut être considérée comme un coût supplémentaire associé aux futurs besoins en capital de solvabilité. En effet, les risques couvrables par des instruments financiers sont entièrement protégés par la valeur mark-to-market, et la marge de risque est donc déjà intégrée dans le prix déterminé par cette méthode. Cela est essentiel pour

gérer l'activité jusqu'à la liquidation complète du portefeuille.

La marge de risque est déterminée comme le coût induit pour l'entreprise, par la mobilisation d'un montant de fonds propres éligibles égal au capital de solvabilité requis pour faire face aux engagements d'assurance jusqu'à leur terme. Elle est calculée comme suit :



Cette méthode vise à anticiper les éléments de risque en supposant une liquidation graduelle du portefeuille, puis à établir le niveau requis de capital de solvabilité (SCR) correspondant. Les risques pris en considération dans ce calcul englobent le risque de marché, le risque de contrepartie, le risque de souscription et le risque opérationnel. Toutefois, tous ces risques ne sont pas pris en compte chaque année. Le SCR pour la première année inclura seulement le risque de marché et de contrepartie, tandis que les SCR des années ultérieures se concentreront sur les risques de souscription et opérationnels. Ensuite, il convient d'appliquer un taux de coût du capital de 6 %, uniforme pour toutes les entreprises, tel qu'évalué par l'EIOPA. Enfin, la marge de risque est obtenue en additionnant les divers résultats obtenus pour chaque année, après actualisation en utilisant la structure des taux à terme.

$$\text{Marge de risque} = \sum_{t=1} \text{Facteur} * \frac{SCR_{ref,t}}{(1 + r_{t+1})^{t+1}}$$

- Facteur = 6% le taux normé de coût du capital;
- $SCR_{ref,t}$  le capital de solvabilité requis après t années pour l'entreprise de référence;
- $r_t$  le taux d'intérêt sans risque de base pour l'échéance t.

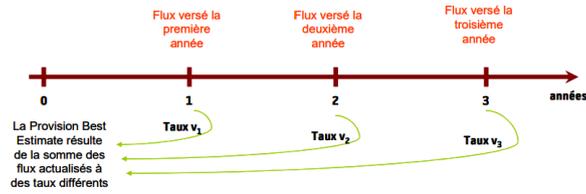
Il est important de noter que le calcul de la marge de risque n'inclut pas le SCR à la date t=0, car ce dernier représente le capital nécessaire à l'entreprise pour faire face à une probabilité de défaut de 0,5 % sur une période d'un an. La provision technique inscrite au passif du bilan sera le résultat de l'addition de cette marge de risque et du Best Estimate

### 2.1.6 Calcul des provisions mathématiques

Elle correspond à la somme des rentes futures actualisées pondérées par les probabilités de survie de l'assuré sinistré ou de l'ayant droit.

Dans le cas d'un contrat de prévoyance versant une rente :

- La valeur actuelle correspond à l'actualisation à la date 0 de tous les flux futurs;
- La valeur espérée correspond au montant probabilisé des flux;
- Les flux futurs correspondent à l'ensemble des flux pour une date donnée.



L'ensemble des flux futurs est ici actualisé par rapport à la courbe des taux d'intérêt fournis par l'EIOPA.

### 1. La provision mathématique pour les rentes d'invalidité

$$VAP(\text{Engagement assureur}) = R * \sum_{k=anc}^{62-x} \frac{l_{x,invalid}^k}{l_{x,invalid}^{anc}} * \frac{1}{(1+t)^{k-anc}}$$

- x l'âge d'entrée dans l'état d'invalidité;
- Le Taux d'actualisation annuel retenu;
- L'ancienneté en invalidité en nombre d'années, de 0 à 62-x-1 ans;
- $l_{x,invalid}^k$  le nombre d'invalides entrés à l'âge x et encore présents en invalidité k années plus tard;
- R le montant annuel de la rente d'invalidité.

La PM d'invalidité est ainsi calculée sans tenir compte des revalorisations futures des rentes :

$$PM_{invalid}(x, anc) = VAP(\text{Engagement assureur}) - VAP(\text{engagement assuré})$$

$$PM_{invalid}(x, anc) = R * \sum_{k=anc}^{62-x} \frac{l_{x,invalid}^k}{l_{x,invalid}^{anc}} * \frac{1}{(1+t)^{k-anc}}$$

### 2. Provisionnement pour les rentes d'invalidité en attente

Cette PM doit permettre de couvrir l'engagement de l'assureur lié au risque de passage de l'adhérent en invalidité sachant qu'il est actuellement en incapacité. La PM d'invalidité en attente pour un adhérent entré en incapacité à l'âge x et présent en incapacité depuis a années est calculée de la manière suivante :

$$VAP(\text{Engagement assureur}) = \sum_{k=0}^{35-anc} \frac{l_{x,passageinval}^{anc+k}}{l_{x,incap}^k} * \frac{1}{(1+t)^{k/12}} * PM_{invalid}(\text{Arrondi}(x + \frac{anc+k}{12}), 0)$$

- x l'âge d'entrée dans l'état d'incapacité;
- anc, le nombre de mois écoulés depuis l'entrée dans l'état d'incapacité, de 0 à 35 mois;
- $l_{x,incap}^k$  le nombre d'incapables entrés en incapacité à l'âge x et encore en incapacité k mois après;
- $l_{x,passageinval}^k$  le nombre d'incapables entrés en incapacité à l'âge x et entrant en invalidité k mois après.
- t le Taux d'actualisation mensuel retenu;
- $PM_{invalid}(Y, 0)$  désigne la PM pour une rente d'invalidité de 1 € pour un individu entré en invalidité à l'âge x et dont l'état d'invalidité est d'ancienneté k.

La PM d'invalidité est ainsi calculée :

$$PM_{att}(x, anc) = VAP(\text{Engagement assureur}) - VAP(\text{Engagement assuré})$$

$$PM_{att}(x, anc) = \sum_{k=0}^{35-anc} \frac{l_{x,passageinval}^{anc+k}}{l_{x,incap}^k} * \frac{1}{(1+t)^{k/12}} * PM_{invalid}(\text{Arrondi}(x + \frac{anc+k}{12}), 0)$$

### 3. Provisionnement pour les rentes incapacité

Cette PM doit permettre de couvrir l'engagement de l'assureur lié au maintien de l'assuré en incapacité.

La PM d'incapacité en cours pour un adhérent entré en incapacité à l'âge x et présent en incapacité depuis a mois est calculée de la manière suivante :

$$PM_{INC}(x, a) = \sum_{k=a+1}^{36} v^{(k-a)/12} * \frac{l^{INC}(x, k)}{l^{INC}(x, a)} * \mathbb{1}_{x+|k/12| \leq agelim}$$

- x l'âge d'entrée en incapacité;
- a le nombre de mois d'ancienneté en incapacité;
- $v = 1/(1 + \text{taux d'actualisation})$ ;
- agelim l'âge de départ à la retraite;
- $l^{INC}(x, k)$  = la loi de maintien en incapacité pour un individu entré en incapacité à l'âge x et présent en incapacité depuis k mois.

### 4. Provisionnement pour les rentes de conjoint

$$PM^{RC} = \sum_{k=1}^{n-\infty} v^k * \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

- x l'âge de l'enfant au moment du décès de l'assuré;
- n la durée de la rente en années, temporaire ou viagère selon les cas;
- $v = 1/(1 + \text{Taux d'actualisation})$ ;
- $l_x$  = le nombre d'individus d'âge x dans la table de mortalité (TGH05 TGF05);
- $s_x$  = le nombre d'individus d'âge x qui poursuivent leurs études.

### 5. Provisionnement pour les rentes éducation

$$PM^{RE} = \sum_{k=1}^{n-x} v^k * \frac{l_{x+k}}{l_x} * [\mathbb{1}_{x+k \leq 18} + \mathbb{1}_{x+k \neq 18} * \frac{s_{x+k}}{s_x}]$$

- x l'âge du conjoint au moment du décès de l'assuré;
- n l'âge limite de versement de la rente éducation;
- $v = 1/(1 + \text{Taux d'actualisation})$ ;
- $l_x$  = le nombre d'individus d'âge x dans la table de mortalité (TH00-02 et TF00-02).

### Provision Pour Sinistres A Payer

La PSAP représente la valeur estimative des dépenses en principal et en frais nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus et non payés, y compris les capitaux constitutifs des rentes non encore à la charge de l'entreprise. Cette provision n'inclut pas les règlements futurs en rentes.

$$\begin{array}{rcccl}
 \text{PSAP} & = & \text{Coût moyen} & * & \text{Nombre de sinistres} & - & \text{Règlements effectués} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \text{Estimé} & & \text{Estimé} & & \text{Déterminés} \\
 & & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & \\
 & & \text{=} & & & & \\
 & & \text{Charge finale estimée} & & & & 
 \end{array}$$

Coût moyen =  $\frac{\text{Charge finale relative aux sinistres déclarés}}{\text{Nombre de sinistres déclarés}}$ , où la charge finale peut être estimée par la méthode de Chain-Ladder de même que l'estimation du nombre de sinistres.

En résumé **Les provisions pour les sinistres déjà survenus** sont les provisions les plus importantes, car les plus conséquentes pour la garantie d'arrêt de travail en prévoyance collective. **Elles** correspondent aux provisions pour sinistres survenus et déclarés tardivement ou non déclarés PSAP (provision pour sinistre à payer) et aux provisions mathématiques des rentes en cours de service.

Les PSAP sont pour la plupart du temps calculées par des méthodes de cadencement du type Chain-Ladder. En l'absence de données nécessaires à la construction des triangles de liquidation, seules les provisions mathématiques de rentes en cours seront étudiées dans la suite de l'étude.

On introduit désormais le chapitre consacré à l'étude des différentes politiques de revalorisation qui jouent un rôle essentiel dans la projection des contrats. L'objectif de ce chapitre est de fournir un aperçu des approches de revalorisation appliqués sur le marché des assurances, en montrant théoriquement les avantages et des inconvénients associés.

## **2.2 Revalorisation des rentes**

### **2.2.1 Revalorisation du régime général de sécurité sociale**

En application des articles L.434-1, L.434-2, L.434-15 à L.434-17 et L.161-25 du Code de la sécurité sociale, les rentes d'accident du travail et maladies professionnelles ainsi que les indemnités en capital sont revalorisées, au 1er avril de chaque année, sur la base d'un coefficient égal à l'évolution de la moyenne annuelle des prix à la consommation, hors tabac, calculée sur les douze derniers indices mensuels de ces prix publiés par l'Institut national de la statistique et des études économiques l'avant-dernier mois qui précède la date de revalorisation des prestations concernées. Le coefficient de revalorisation s'établit à 1,056 au 1er avril 2023 5.3.3.

### **2.2.2 Revalorisation par les organismes assureurs**

#### **2.2.2.1 Aspect juridique et contractuel de la revalorisation des prestations**

Du point de vue juridique, l'augmentation des prestations en cas d'arrêt de travail n'est pas une obligation, mais à la discrétion de l'assureur. Cependant, elle est généralement stipulée dans le contrat de prévoyance collective. Il est essentiel de spécifier en détail les méthodes de revalorisation des prestations dans les termes techniques du contrat. De plus, ces méthodes doivent être explicitement définies dans la notice d'information concernant le contrat de prévoyance collective, qui doit être mise à la disposition des employés par l'entreprise.

Les prestations sont réévaluées conformément aux modalités stipulées dans le contrat de prévoyance collective, ce processus continu jusqu'à la résiliation de ce contrat conformément à l'article 7 de la Loi Evin. De plus, même en cas de résiliation, les prestations des assurées en arrêt de travail continuent d'être réévaluées chaque année. Cela est imposé par la loi du 8 août 1994, qui exige que l'employeur supervise la réévaluation des rentes en cas de changement d'assureur après la résiliation du contrat.

L'organisation de la revalorisation des prestations peut être représentée de la manière suivante :

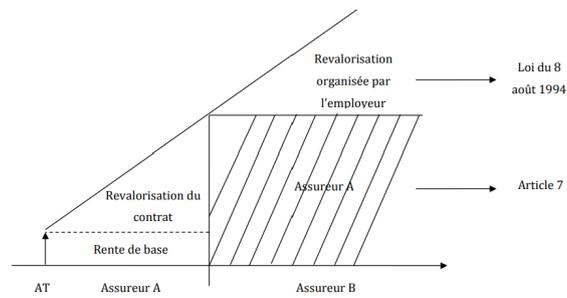


FIGURE 2.14 – Revalorisation des rentes après résiliation

L'assureur offre une rente initiale qui est révisée annuellement. Conformément à la loi Evin, en cas de résiliation du contrat, l'assureur est tenu de maintenir les garanties au niveau où elles se trouvaient à la date de résiliation, sans nouvelle revalorisation. Ainsi, l'employeur est responsable d'organiser la revalorisation des rentes après la résiliation. Dans la plupart des cas, le futur assureur prend en charge les futures revalorisations en échange du paiement d'une prime par l'entreprise.

Si la réévaluation est liée à un indice interne, il est important de noter qu'elle n'est pas soumise à une disposition, même si cela est spécifié dans le contrat. Cela est dû au fait que le taux de revalorisation peut ne pas être indiqué et peut être égal à zéro.

### 2.2.2.2 Les mécanismes de revalorisation

Dans cette section, nous examinerons les principales politiques de revalorisation des rentes en prévoyance collective.

#### a) La politique de revalorisation d'après un indice interne

La méthode de réévaluation basée sur un indice interne à l'assureur est la plus courante en matière de prévoyance collective. Elle est généralement liée aux performances techniques et financières de l'assureur. Cette approche offre à l'assureur une marge de manœuvre concernant la mise en œuvre des revalorisations de rentes.

Si les termes des conditions générales du contrat spécifient que la réévaluation des rentes est basée sur un indice interne à l'assureur, alors l'assureur effectue la revalorisation au 31 décembre de chaque année, en utilisant un taux qui est décidé lors d'une réunion du conseil d'administration.

L'assureur bénéficie de la flexibilité de ne pas être contractuellement tenu de procéder à des ajustements périodiques des rentes. Il peut donc prendre des décisions stratégiques concernant la revalorisation des rentes en cours. Cependant, pour l'assuré, cela implique une incertitude quant au taux potentiel de revalorisation de sa rente, ce qui peut constituer un inconvénient.

Les rentes de l'année N+1 seront revalorisées d'après un indice interne à l'organisme assureur.

Lors du calcul des Provisions Mathématiques, toutes les revalorisations futures auxquelles l'organisme assureur s'engage sont prises en considération. Cependant, la revalorisation future des rentes est soumise à des critères techniques et financiers minimums, et elle dépend d'une décision interne. En effet, l'organisme a le pouvoir de choisir les taux de revalorisation à appliquer dans le futur pour les rentes, et il peut même décider de ne pas revaloriser les rentes à venir. Ces revalorisations futures ne sont donc pas intégrées dans le calcul des Provisions Mathématiques.

#### b) Revalorisation d'après les produits financiers

La méthode de réévaluation basée sur les rendements financiers générés par l'organisme assureur n'est pas fréquemment employé dans le domaine de la prévoyance collective. Cette approche de réévaluation pourrait permettre de distribuer les bénéfices financiers obtenus par les rentes en cours de service lorsque les résultats financiers sont favorables, tout en entraînant la réévaluation en cas de résultats moins positifs.

- Un fonds de revalorisation est établi, sa valeur est calculée en appliquant un pourcentage aux revenus financiers de l'année :

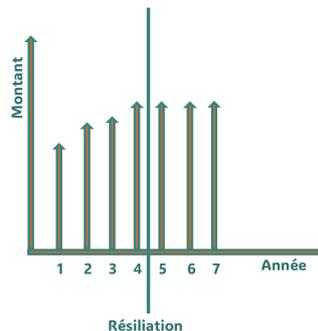
$$\text{enveloppe de revalorisation} = \% \text{ produit financiers}$$

- L'enveloppe de revalorisation est ensuite distribuée sous la forme de revalorisation des rentes :

$$\text{enveloppe de revalo} = \text{taux-revalo} * \sum_{\text{individus non résiliés}} \text{PM}$$

$$\text{taux-revalo} = \frac{\text{enveloppe de revalo}}{\sum_{\text{individus non résiliés}} \text{PM}}$$

Dans le cas où les conditions générales du contrat prévoiraient une revalorisation des rentes en fonction des produits financiers générés par l'organisme assureur, il incombe alors à l'assureur de procéder à la revalorisation des rentes pour l'ensemble des contrats en cours non résiliés au 31 décembre de chaque année, en utilisant ce taux. L'évolution des prestations versées par l'assureur sont illustrées dans le schéma ci-dessous :



Dans le cas d'un taux de rendement financier trop faible, les rentes ne sont pas revalorisées.

L'inconvénient pour l'assuré est le caractère aléatoire du taux de revalorisation de la rente.

L'avantage pour l'assureur est d'avoir un engagement lié à ses résultats financiers. En cas de pertes financières, il n'aura pas à supporter en plus une revalorisation des rentes en cours de service.

Ainsi, les rentes ne sont revalorisées que dans le cas où les produits financiers sont supérieurs aux intérêts techniques. La revalorisation des rentes n'entre donc pas dans la tarification car l'engagement de revalorisation ne se fait que lorsqu'un bénéfice est réalisé.

les tarifs restent inchangés.

Les rentes de l'année N+1 seront revalorisées grâce aux produits financiers réalisés au cours de l'année N. Le taux de revalorisation est noté  $t_{revalo}^{n+1}$ .

Lors du calcul des Provisions Mathématiques, toutes les revalorisations futures pour lesquelles l'organisme assureur s'engage sont prises en considération. Cependant, il est important de noter que la réévaluation future des rentes est conditionnée par la réalisation de rendements financiers supérieurs aux intérêts techniques. Ces futures réévaluations reposent donc sur des revenus futurs. Par conséquent, elles ne sont pas

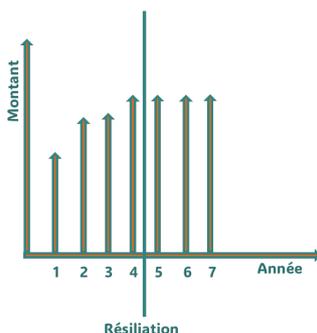
incluses dans le calcul des Provisions Mathématiques. Tout comme dans le cas de la réévaluation basée sur un indice interne, seules les réévaluations de l'année N+1 pour les individus dont les contrats ne sont pas résiliés sont prises en compte :

- $PM_{inval}(x, anc) = R * (1 + tx_{revalo}^{n+1}) * \sum_{k=anc}^{62-x} \frac{l_{x,inval}^k}{l_{anc}^{x,inval}} * \frac{1}{(1+t)^{k-anc}}$  si le contrat de l'individu est reconduit.
- $PM_{inval}(x, anc) = R * \sum_{k=anc}^{62-x} \frac{l_{x,inval}^k}{l_{anc}^{x,inval}} * \frac{1}{(1+t)^{k-anc}}$  si le contrat de l'individu est résilié.
- $PM_{att}(x, anc) = \sum_{k=0}^{35-anc} \frac{l_{x,passageinval}^{anc+k}}{l_{x,incap}^k} * \frac{1}{(1+t)^{k/12}} * PM_{inval}(Arrondi(x + \frac{anc+k}{12}), 0)$

### c) Revalorisation d'après un indice externe : cas de l'inflation

Les indices externes analysés dans ce document sont l'inflation ainsi que le point Agirc-Arrco. Dans cet exemple, nous examinons le cas de l'inflation

Si les conditions générales du contrat spécifient que les rentes sont réévaluées en fonction d'un indice externe, alors l'assureur est tenu de réévaluer les rentes pour tous les contrats non résiliés au 31 décembre, même en cas de pertes techniques et/ou financières. L'évolution des prestations versées par l'assureur sont illustrées dans le schéma ci-dessous :



Le taux de revalorisation des rentes est aléatoire et ne dépend que de l'évolution d'un indice externe.

L'avantage pour l'assuré est la totale transparence du taux de revalorisation : il se réfère à un indice qu'il peut consulter facilement et qui est une variable " économiquement explicable ".

L'inconvénient pour l'assuré est le caractère aléatoire du taux de revalorisation de la rente. L'inconvénient pour l'assureur est d'avoir un engagement non lié à ses résultats : il devra valoriser les rentes des contrats en vie au 31 Décembre alors que des pertes techniques et/ou financières peuvent avoir eu lieu pendant l'année.

- $VAP(assureur) = q_x^{inval} * R(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{62-x} \frac{l_{x,inval}^k}{l_0^{x,inval}} * \frac{1}{(1+t)^k} * (1 + E(tx_{revalo}^k))^k)$

Considérant l'historique des dix dernières années d'inflation en France, l'hypothèse prise concernant l'espérance de l'inflation est :

$$E(\text{inflation}_k) = 1,4\%$$

Lors du calcul de PM, toutes les revalorisations futures pour lesquelles l'organisme assureur est engagé sont prises en compte. Les revalorisations futures étant contractuelles, l'assureur a pour obligation de provisionner cet engagement .

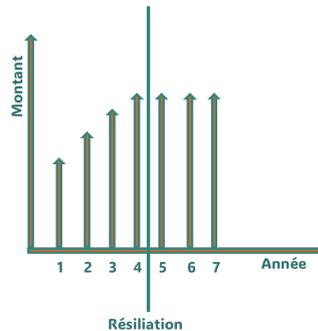
Afin d'évaluer le montant probable des revalorisations futures, l'hypothèse simplificatrice choisie est d'utiliser la moyenne des taux de revalorisation des 3 dernières années. Le taux de revalorisation alors estimé est noté :  $tx_{revalo}$ .

- $PM_{inval}(x, anc) = R * \sum_{k=anc}^{62-x} \frac{l_{x,inval}^k}{l_{anc}^k} * \frac{1+tx_{revalo}}{(1+t)^{k-anc}}$  si le contrat de l'individu est reconduit.
- $PM_{inval}(x, anc) = R * \sum_{k=anc}^{62-x} \frac{l_{x,inval}^k}{l_{anc}^k} * \frac{1}{(1+t)^{k-anc}}$  si le contrat de l'individu est résilié.
- $PM_{att}(x, anc) = \sum_{k=0}^{anc+k} \frac{l_{x,passageinval}^{anc+k}}{l_{x,incap}^k} * \frac{1}{(1+t)^{k/12}} * PM_{inval}(Arrondi(x + \frac{anc+k}{12}), 0)$

#### d) Revalorisation fixée contractuellement

La politique de réévaluation établie contractuellement n'est pas une méthode fréquente. Elle offre à l'assuré la garantie de ne pas être soumis aux fluctuations concernant la réévaluation de sa rente.

Si les conditions générales du contrat indiquent que les rentes sont réévaluées de manière fixe, alors l'assureur est tenu de réévaluer les rentes pour tous les contrats non résiliés au 31/12 de l'année, en utilisant ce taux choisi, même si l'assureur a enregistré des pertes techniques et/ou financières. L'évolution des prestations versées par l'assureur sont illustrées dans le schéma ci-dessous :



Le taux de revalorisation des rentes est fixe. L'avantage pour l'assuré est la connaissance du taux de revalorisation. L'inconvénient pour l'assureur est de devoir revaloriser toutes les rentes au taux fixé tant que les contrats ne sont pas résiliés.

La revalorisation des rentes étant fixe, elle doit être prise en compte dans le tarif :

- $VAP(assureur) = q_x^{inval} * R(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{62-x} \frac{l_{x,inval}^k}{l_{anc}^k} * \frac{1}{(1+t)^k} * (1 + E(tx_{revalo}^k)))$   
car il est considéré que l'état de l'assuré est indépendant du taux de revalorisation.  
Lors du calcul de PM, toutes les revalorisations futures pour lesquels l'organisme assureur est engagé sont prises en compte. Les revalorisations futures étant contractuelles, l'assureur a pour obligation de provisionner cet engagement. Le taux de revalorisation utilisé pour le calcul de PM sociales est le taux contractuel :
- Si le contrat de l'individu est reconduit :  $PM_{inval}(x, anc) = R * \sum_{k=anc}^{62-x} \frac{l_{x,inval}^k}{l_{anc}^k} * \frac{(1+tx_{revalo})^k}{(1+t)^{k-anc}}$
- Si le contrat de l'individu est résilié :  $PM_{inval}(x, anc) = R * \sum_{k=anc}^{62-x} \frac{l_{x,inval}^k}{l_{anc}^k} * \frac{1}{(1+t)^{k-anc}}$
- $PM_{att}(x, anc) = \sum_{k=0}^{anc+k} \frac{l_{x,passageinval}^{anc+k}}{l_{x,incap}^k} * \frac{1}{(1+t)^{k/12}} * PM_{inval}(Arrondi(x + \frac{anc+k}{12}), 0)$

Après avoir exposé les mécanismes de revalorisation et le cadre réglementaire de notre étude, le chapitre suivant se concentrera sur la modélisation de l'inflation et le point Agirc-Arrco.

# Chapitre 3

## Modélisations des indices externes

### 3.1 Modélisation de l'inflation

#### 3.1.1 Présentation

L'inflation est un phénomène de hausse généralisée des prix, et correspond donc à une baisse durable de la valeur réelle de la monnaie. La valeur de la monnaie a tendance à baisser avec le temps, mais il lui arrive parfois d'augmenter. Ses causes sont complexes et variées, mais il est possible d'en décrire trois principales qui, combinées ou séparément, génèrent de l'inflation :

- La première est l'augmentation de la quantité de monnaie en circulation par rapport à la quantité de bien produit ;
- La seconde est une augmentation des prix, liée à une augmentation des coûts de production. Cela peut être dû à une augmentation des prix des matières premières importées, dans ce cas on parle d'inflation importée ;
- La troisième est induite par une augmentation de la demande par rapport à l'offre.

La conjonction de ces trois phénomènes peut inquiéter les investisseurs. En effet, pendant la crise, les pays européens ont vu leur dette augmenter de façon importante, au point que la capacité de remboursement de certains d'entre eux a été remise en doute.

#### Mesure de l'inflation

L'inflation pose des défis en raison de la difficulté à comparer la valeur de biens et services à travers le temps. L'inflation est souvent évaluée en référence à un panier représentant la consommation moyenne d'un ménage au sein d'une population spécifique. Cela rend l'inflation intrinsèquement subjective, car son calcul repose sur des paniers différents d'un pays à l'autre. En France, l'INSEE mesure l'inflation au moyen d'un indice connu sous le nom d'indice des prix à la consommation (IPC). L'IPC, calculé selon la méthode de Laspeyres, compare l'évolution des prix d'un échantillon de biens à quantité constante par rapport à une année de référence. Aux États-Unis, l'indice utilisé pour évaluer l'inflation est le Consumer Price Index (CPI).

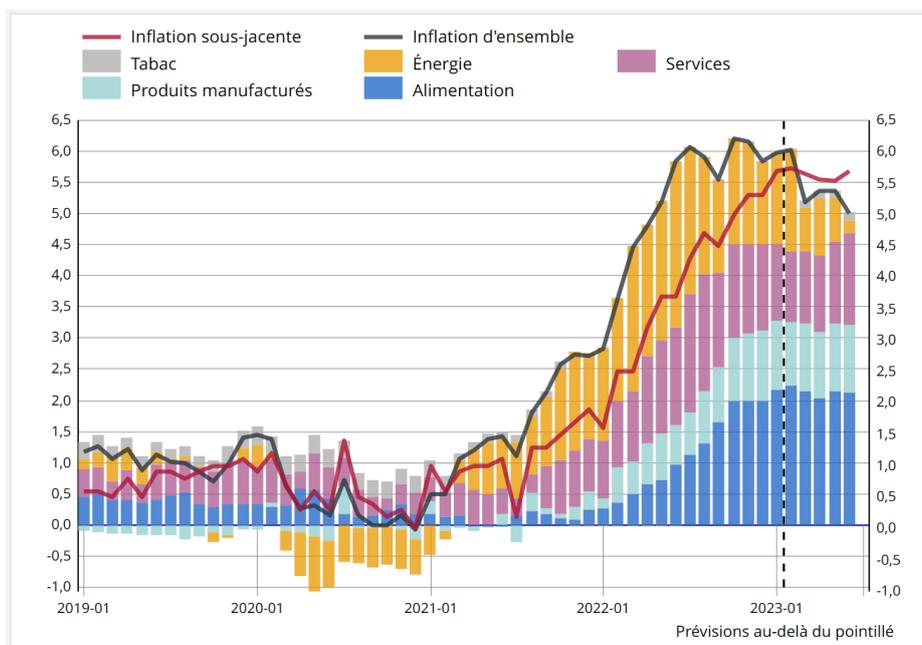


FIGURE 3.1 – Inflation d'ensemble et contributions par poste

L'indice des prix à la consommation a augmenté de 6,0 % en 2023, selon l'estimation provisoire. L'alimentation contribuait pour 2,2 points à cette hausse. Les dernières estimations montrent un taux d'inflation à 4,9% en septembre 2023.

### Inflation et marchés financiers

L'inflation reflète la montée des dépenses courantes et agit ainsi comme un indicateur de l'expansion économique. Lorsqu'elle augmente excessivement, avec des prix grimant plus rapidement que les salaires, le gouvernement peut opter pour une augmentation des taux d'intérêt. Cette décision vise à freiner les emprunts tout en favorisant l'épargne, ce qui contribue à ralentir l'économie et à atténuer l'inflation.

Dans le cas contraire, si l'économie nécessite une impulsion, les taux d'intérêt peuvent être réduits. En règle générale, des taux d'intérêt bas encouragent les emprunteurs à contracter davantage de prêts, stimulant ainsi leurs dépenses et nourrissant l'économie, ce qui engendre une augmentation de l'inflation.

L'inflation est l'un des indicateurs utilisés pour mesurer la croissance économique, laquelle peut être contrôlée par les taux d'intérêt qui, à leur tour, peuvent affecter l'inflation.

Les investisseurs ont un intérêt particulier pour l'inflation, car elle influe directement sur eux. Initialement, un investissement génère des flux de trésorerie futurs. Toutefois, si la monnaie perd de sa valeur, les flux financiers à venir perdent également en valeur, réduisant ainsi la rentabilité de l'investissement. L'inflation avantage les emprunteurs mais désavantage les prêteurs. Les actionnaires subissent moins d'impact de l'inflation puisque les revenus des entreprises croissent en parallèle avec celle-ci. En revanche, les porteurs d'obligations peuvent être considérablement affectés, surtout lorsque leurs taux d'intérêt sont fixes.

Les investisseurs institutionnels, en particulier les fonds de pension, sont réceptifs aux fluctuations de l'inflation. Ces fonds jouent un rôle clé dans l'achat d'obligations émises par les gouvernements. Ainsi, les États ont commencé à émettre des obligations liées à l'inflation, d'autant plus que leurs revenus augmentent en parallèle avec la hausse des prix.

Étant généralement touchés par l'inflation, les créanciers ont observé la montée de produits dérivés proposés par de nombreuses institutions financières afin de se protéger de ce risque. Dans ces marchés, les banques d'investissement ont tendance à jouer le rôle de vendeurs de protection, tandis que les principaux acheteurs sont des assureurs et des fonds de pension.

### L'inflation et le secteur de la prévoyance

Pendant plus de trois décennies, les assureurs ont fait face à une chute constante des taux d'intérêt. Le retour à la hausse des taux vise à rétablir une situation plus normale. La baisse des taux a eu pour conséquence d'accroître les réserves nécessaires. La remontée des taux est avantageuse car elle permet de reconstituer les réserves de manière quasi symétrique. Le premier impact de cette hausse des taux est une amélioration de la solidité financière des assureurs, car elle rend la collecte de fonds en euros moins préjudiciable.

Cependant, même si une remontée des taux atténue quelque peu les obligations liées aux risques importants et n'aggrave pas la situation financière des assureurs, l'augmentation de la pression inflationniste aura inévitablement des répercussions sur les activités d'assurances. Si l'inflation dépasse les 2,5%, comment peut-on revaloriser les rentes à un niveau similaire? Actuellement, les assureurs ne réalisent pas de tels rendements avec leurs portefeuilles. L'inflation a un impact direct sur le coût des sinistres, nécessitant des provisions dans les réserves.

Si les bénéfices des obligations demeurent constamment inférieurs à l'inflation actuelle et prévue du coût des sinistres, il pourrait être nécessaire de revoir à la hausse les tarifs. Sinon, cela pourrait entraîner des dommages pour les comptes et la solidité financière de l'entreprise. La préoccupation quant à l'inflation est tout à fait justifiée, car cette poussée inflationniste pourrait ultimement neutraliser les gains de solidité obtenus grâce à la hausse des taux.

#### 3.1.2 Modélisation de l'inflation via ses composantes temporelles

Afin de calculer le taux d'inflation pour une période donnée, nous aurons besoin des informations suivantes :

- L'indice des prix à la consommation pour le début de la période;
- L'indice des prix à la consommation pour la fin de la période.

$$\text{Taux d'inflation} = [(B - A) / A] \times 100$$

A= IPC précédent ou initial

B= IPC actuel ou final

Modéliser l'inflation revient donc à modéliser l'IPC. Nous disposons de l'historique mensuel de l'indice des prix à la consommation de 1990 à 2022. A présent nous présenterons comment l'IPC a été modélisé dans le cadre de ce mémoire en tant qu'une série temporelle.

##### 3.1.2.1 Généralité sur les séries temporelles

Une série temporelle (ou chronologique) est une suite d'observations  $x_1, x_2, \dots, x_n$  indexée par le temps. On supposera qu'il s'agit d'une réalisation d'un processus  $X$ , c'est à dire d'une suite  $X_i$  de variables aléatoires. L'analyse de ces séries temporelles peut être poursuivie pour différents buts :

- description : détermination de composantes;
- Filtrage : Transformation de la série dans le but d'éliminer certaines caractéristiques ou des valeurs aberrantes;
- Modélisation : recherche de causalité;
- Prévision;

Une série temporelle est généralement constituée des éléments suivants :

**Tendance** : représente l'évolution à long terme de la série (échelle interannuelle).

Exemples : croissance économique, évolution climatologique à long terme (cyclique ou non).

**Saisonnalité** : évolution se répétant régulièrement tous les ans ou tous les mois ou toutes les semaines.

Exemples :

- En météorologie, températures plus faibles en hiver qu'en été;
- En économie, saisonnalité induite par les périodes de vacances, les périodes de fêtes, le climat, etc;
- Chiffre d'affaire d'un magasin.

**Composante stationnaire (ou résiduelle)** : Ce qui reste lorsque l'on a enlevé les autres composantes. Décrit l'évolution à court terme de la série (échelle journalière).

Cette notion de stationnarité sera définie plus précisément dans la suite. Cette hypothèse jouera un rôle fondamental dans la suite, et remplacera l'hypothèse usuelle des v.a i.i.d.

Le modèle le plus courant consiste à supposer que la série initiale s'écrit sous la forme(modèle additif) :

$$X_t = T_t + S_t + Y_t$$

avec  $T_t$ , la tendance,  $S_t$  la composante saisonnière (fonction périodique de période un an) et  $Y_t$  la composante stationnaire

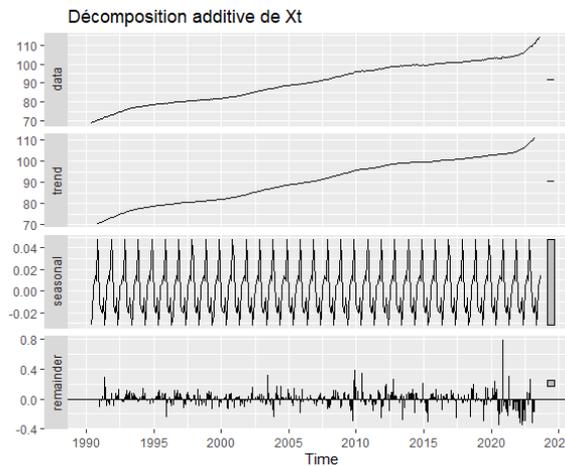


FIGURE 3.2 – Historique de l'IPC depuis Mars 1990

Le processus général pour étudier une série temporelle est :

1. Dans un premier temps on trace la série des données et on repère ses principales caractéristiques;
2. Dans un deuxième temps, on s'attache à estimer ou enlever la tendance et la composante saisonnière  $s_t$  pour obtenir une série  $Y_t$  de résidus stationnaires. Pour cela on peut utiliser plusieurs techniques :
  - Transformation des données, estimer les tendances et composantes saisonnières puis les enlever des données;
  - Différencier la série, considérer par exemple la série  $Y_t - Y_{t-d}$ .
3. Choisir un modèle de série stationnaire pour les résidus;
4. Prévoir les valeurs futures de la série en prévoyant d'abord celles des résidus puis "remonter" jusqu'à la série initiale.

### 3.1.2.2 Traitement des composantes déterministes

Estimation par Moindre carrés :

On fait l'hypothèse que la tendance est une combinaison linéaire de fonctions temporelles, connues et déterministes

$$T_t = \sum_{i=0}^n \alpha_i T_t^i$$

Seuls les coefficients  $\alpha_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , sont inconnus et doivent donc être estimés.

L'idée est alors d'estimer les paramètres inconnus  $\alpha_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$  par moindres carrés, i.e.

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \underset{(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^T (T_t - T_t^i)^2$$

Un cas relativement simple est celui où la tendance est polynomiale ou plus généralement sous forme d'une combinaison linéaire de fonctions entièrement connues, ce qui n'est pas le cas avec les tendances exponentielles, Gompertz et Logistique. On tombe en effet dans le cadre d'un modèle de régression linéaire. En effet, en introduisant :

$$\mathbb{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \mathbb{e} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ v_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \mathbb{X} = \begin{pmatrix} T_1^0 & \dots & T_1^N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T_t^0 & \dots & T_t^n \end{pmatrix}$$

on peut écrire

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X}\beta + \mathbb{e}$$

L'estimateur des moindres carrés de  $\beta$  est donné par :

$$\beta = (\mathbb{X}\mathbb{X}')^{-1} \mathbb{X}' \mathbb{Y}$$

### Estimation par filtrage de moyenne mobile

L'opérateur retard B sur une série temporelle est défini par :

$$B X_t = X_{t-1}, \forall t \in T$$

On note de manière naturelle :

$$B^i X_t = B X_{t-i}, \forall t \in T, t \in \mathbb{N}^*$$

L'opérateur avance F sur une série temporelle est défini par :

$$F X_t = X_{t+1}, \forall t \in \mathbb{Z}$$

On note aussi

$$F^i X_t = F X_{t+i}, \forall t \in T, \forall i \in \mathbb{N}^*$$

Et  $B^{-i} = F^i$  pour tout  $i$ . Une moyenne mobile est un opérateur linéaire (ou encore filtre linéaire) de forme générale :

$$M = \sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i B^i$$

L'ordre de la moyenne mobile est l'entier  $m_1 + m_2 + 1$ . La moyenne mobile est dite

- Normalisée si

$$\sum_{i=-m_1}^{m_2} \theta_i = 1$$

;

- Centrée si  $m_1 = m_2$ ;
- Symétrique si  $m_1 = m_2 = m$  et  $\theta_i = \theta_{-i}$ , pour  $i = 1, \dots, m$ .

La moyenne mobile est une méthode simple permettant d'extraire les composantes basses fréquences d'une série temporelle autrement dit sa tendance. Elle est également connue comme une méthode de lissage car

elle agit comme un filtre passe bas et donc élimine le bruit. Il ne reste plus qu'un terme de tendance à variation relativement lente. La moyenne mobile peut aussi être vue comme une estimation non paramétrique de la tendance par moyennes locales.

Si elle est convenablement choisie, son usage permet d'estimer la tendance. L'idée est alors de parvenir à trouver une moyenne mobile  $M$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- La moyenne mobile laisse invariante la tendance, i.e.  $MT_t = T_t$  ;
- La moyenne mobile absorbe la saisonnalité, i.e.  $MS_t = 0$  ;
- La moyenne mobile réduit la variance du processus observé, i.e.  $MY_t$  a une variance plus faible que  $Y_t$  . Le coefficient  $MY_t/Y_t$  est appelé pouvoir de réduction de la variance.

Dans ce cas  $MY_t$  donnera une estimation de la tendance comme on l'a déjà vu et il restera à travailler sur la série corrigée de la tendance, i.e. sur  $Y_t^{CT} = Y_t - MY_t$  pour estimer la saisonnalité.

### Élimination de la tendance par différenciation

L'opérateur différenciation (à l'ordre 1)  $\Delta$  d'une série temporelle est défini comme opérateur qui associe à une série  $Y_t$  une série  $\tilde{Y}_t$ , déterminée par

$$\tilde{Y}_t = \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = Y_t - BY_t = (I - B)Y_t$$

Naturellement, la différenciation à l'ordre  $k$  de la série est :

$$\Delta^k Y_t = (I - B)^k Y_t, \forall t \in \mathbb{N}^*$$

Ainsi, la différenciation permet d'éliminer les tendances polynomiales et donc pratiquement toutes les tendances car elles peuvent très souvent être approchées par des polynômes. Mais insistons bien sur le fait que cette technique ne permet pas une estimation de la tendance mais seulement son élimination.

### Élimination de la saisonnalité par différenciation

Pour supprimer une saisonnalité de périodicité  $r$ , on peut utiliser une méthode de différenciation similaire à celle utilisée pour éliminer la tendance.

#### **3.1.2.3 Au sujet de la composante aléatoire**

La détermination d'un processus équivaut à la connaissance de la loi de chaque vecteur  $(X_t, X_{t+h})$ , pour tout entier  $h$ .

**Définition 1 :** Une série temporelle  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est dite stationnaire au sens fort si la loi de tout vecteur  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est invariante par translation temporelle, c'est-à-dire si :

$$L(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = L(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}), \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$$

et  $h \in \mathbb{Z}$ .

Cependant, cette notion peut parfois être trop contraignante. Dans de tels cas, on préfère la stationnarité au second ordre :

**Définition 2 :** Le processus  $(X_t)$  est dit stationnaire de second ordre, ou simplement stationnaire, si et seulement si pour tout entier  $h$ , l'espérance  $E[X_{t+h}]$  est constante et la covariance  $\text{cov}(X_t, X_{t+h})$  ne dépendent que de la différence en temps  $h$ .

Il est important de noter que ces deux définitions sont équivalentes lorsque  $(X_t)$  est un processus gaussien,

c'est-à-dire lorsque la loi du vecteur  $(X_t, X_{t+h})$  est gaussienne pour tout  $h$ . Pour un processus stationnaire, les moments d'ordre 1 et 2,  $E[X_t]$  et  $\text{var}(X_t)$ , sont constants au cours du temps.

### Fonction d'auto-covariance

L'étude d'un processus centré stationnaire peut être entièrement ramenée à l'analyse de la fonction d'auto-covariance définie par :

$$\text{cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h)$$

Ainsi qu'à la connaissance de la variance du processus, notée  $\sigma_X^2 = \gamma(0)$ , et de la fonction d'autocorrélation, définie comme :

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

La fonction d'autocorrélation  $\rho(h)$  partage des propriétés similaires avec la fonction d'autocovariance  $\gamma(h)$ . Notamment, on observe les propriétés suivantes :

- 1.  $\rho(0) = 1$  ;
- 2.  $|\rho(h)| \leq 1$  (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz) ;
- 3.  $\rho(h) = \rho(-h)$ , ce qui montre que  $\rho$  est une fonction paire.

### Auto-corrélations partielles

Soit  $(X_t)$  un processus stationnaire. L'autocorrélation partielle d'ordre  $h$ , notée  $\pi(h)$ , est définie comme suit :

$$\forall h \geq 2, \pi(h) = \text{corr}(X_{t+h} - \mathbb{E}(X_{t+h}|X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}); X_t - \mathbb{E}(X_t|X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}))$$

où  $\mathbb{E}(\cdot|X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1})$  désigne l'espérance conditionnelle linéaire.  $\mathbb{E}(\cdot|X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1})$  est donc l'opérateur de projection orthogonale sur l'espace vectoriel engendré par  $\{X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\}$ . On convient que  $\pi(0) = 1$  et  $\pi(1) = \rho(1)$ .

En général, on utilise l'auto-corrélation pour caractériser les dépendances linéaires dans des séries résiduelles (ie des séries temporelles corrigées de la tendance et la saison). En effet, la tendance et la saison sont des composantes déterministes et ça a peu de sens d'estimer des propriétés statistiques de quantités déterministes.

De plus, si la série étudiée a ses caractéristiques qui évoluent dans le temps, il peut être difficile d'estimer ses propriétés statistiques car on dispose en général d'une seule réalisation du processus ce qui n'est pas suffisant pour faire de l'estimation. Cependant, il est très utile de comprendre quelle sera l'allure de l'autocorrélation empirique d'une série brute comportant une tendance et/ou une saison.

### 3.1.3 Modélisation SARIMA

Modéliser l'inflation à l'aide d'un modèle SARIMA permet de prendre en compte ses caractéristiques temporelles, saisonnières et structurelles, ce qui rend cette méthode précieuse pour l'analyse économique et la prévision. Cependant, il est important de noter que les modèles SARIMA ne sont qu'un outil parmi d'autres pour analyser l'inflation, et leur performance dépendra de la qualité des données et de la pertinence de l'approche pour un contexte économique spécifique.

Introduisons à présent de façon générale les notions et modèles classiques de séries chronologiques utiles à la construction du modèle SARIMA.

#### Le bruit blanc

Le modèle le plus simple est celui du bruit blanc, où l'on suppose qu'il n'y a aucune dépendance temporelle, soit au sens strict, soit seulement au second ordre, donnant ainsi les deux notions suivantes :

1. Le processus  $(X_t)$  est un bruit blanc fort si et seulement si les variables aléatoires  $X_t$  sont identiquement distribuées et indépendantes. On note  $(X_t) \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$  où  $\sigma^2$  est la variance de  $X_t$ .
2. Le processus  $(X_t)$  est un bruit blanc (faible) si et seulement si les variables aléatoires  $X_t$  sont identiquement distribuées et non linéairement corrélées, c'est-à-dire que  $\text{cov}(X_t, X_{t+h}) = 0$  pour tout  $h$ . On note  $(X_t) \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$ . Dans le cas de processus gaussiens, les deux notions coïncident et on parle alors de bruit blanc gaussien.

**Propriétés du second ordre :** Un bruit blanc est stationnaire et les auto-corrélations  $\rho(h)$  et  $\pi(h)$  sont nulles dès que  $h \geq 1$ .

### Modèle auto-régressif (AR)

Le modèle auto-régressif d'ordre  $p$ , noté  $\text{AR}(p)$ , est défini par l'équation suivante :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t,$$

où  $(Z_t) \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$  est un bruit blanc d'ordre 0, c'est-à-dire indépendant et identiquement distribué, avec variance  $\sigma^2$ . Le modèle  $\text{AR}(p)$  peut être exprimé de manière synthétique sous la forme suivante :

$$\Phi(B)X_t = Z_t,$$

où  $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$  est un polynôme en l'opérateur retard  $B$ .

### Modèle à moyenne mobile (MA)

Le modèle à moyenne mobile d'ordre  $q$ , noté  $\text{MA}(q)$ , est défini par l'équation suivante :

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q},$$

où  $(Z_t) \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$  est un bruit blanc d'ordre 0, c'est-à-dire indépendant et identiquement distribué, avec variance  $\sigma^2$ . Le terme "MA" vient du fait que  $X_t$  est exprimé comme une moyenne mobile de  $(Z_t)$  avec les poids  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ .

Le modèle  $\text{MA}(q)$  peut être exprimé de manière synthétique sous la forme suivante :

$$X_t = \Theta(B)Z_t,$$

où  $\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q$ .

### Modèle mixte ARMA

L'inconvénient des modèles AR (resp. MA) est que si la fonction d'auto-corrélation partielle (resp. de corrélation) décroît très lentement, on doit avoir recours à des modèles d'ordre élevé pour bien caractériser les données. Les modèles ARMA, en combinant un processus AR et un processus MA, permettent de représenter un grand nombre de processus aléatoires stationnaires en impliquant un nombre raisonnable de paramètres. Il est supposé à ce niveau que l'on a isolé, dans la série chronologique d'origine, sa partie aléatoire, en lui retirant tendances et facteurs saisonniers.

Le modèle  $\text{ARMA}(p, q)$  est formé de la combinaison du modèle  $\text{AR}(p)$  et du modèle  $\text{MA}(q)$ . Il est défini par l'équation suivante :

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t,$$

où  $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$  et  $\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q$  sont des polynômes en l'opérateur retard  $B$ . Plus précisément,  $\Phi(B)X_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_p X_{t-p}$  et  $\Theta(B)Z_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q}$ . On se limite au cas où les polynômes  $\Phi$  et  $\Theta$  n'ont pas de zéros communs (on peut traiter le cas général, au prix d'une grande complexité).

**Identification**

Pour tout processus aléatoire stationnaire dont la fonction de corrélation  $\rho(\cdot)$  tend vers 0 à l'infini, et pour tout entier  $k > 0$ , il est possible de trouver un processus ARMA dont la fonction de corrélation est égale à celle du processus aléatoire jusqu'à l'ordre  $k$ .

Il y a présomption de processus ARMA si les conditions suivantes sont satisfaites :

- Le processus est stationnaire à l'analyse visuelle : pas de tendance, pas de saisonnalité, variance constante;
- La fonction de corrélation empirique est : à décroissance pas trop lente et sans pics périodiques.

En pratique, lorsque l'on doit ajuster un modèle AR, MA ou ARMA à des données réelles la première question qui se pose est celle du choix des ordres  $p$  et  $q$  du modèle ARMA (on considère que les AR et MA sont un cas particulier d'ARMA avec respectivement  $q=0$  et  $p=0$ ). Pour choisir ces ordres, nous pouvons exploiter les résultats suivants :

	AR(p)	MA(q)	ARMA(q)
ACF	Décroissance	Non significatif après décalage q	$\rho(h) \searrow 0, h \geq q+1$
PACF	Non significatif après décalage p	Rien de particulier	$r(h) \searrow 0, h \geq \max(q+1,p)$

Ses résultats sont facilement exploitables dans le cas d'un AR ou MA pur :

- Les autocorrélations simples d'un processus AR(p) décroissent, de manière exponentielle ou sinusoidale amortie, vers 0;
- Les autocorrélations partielles d'un processus MA(q) sont solutions d'une équation linéaire récurrente d'ordre q. Elles décroissent, de manière exponentielle ou sinusoidale amortie, vers 0.

**3.1.3.1 Processus non stationnaires : ARIMA et SARIMA**

**ARIMA(p,d,q)**

Les modèles ARIMA sont bien adaptés au cas des séries temporelles présentant une décroissance très lente de la fonction d'auto-covariance (présence d'une tendance). Les séries temporelles avec des tendances, ou avec des saisonnalités, ne sont pas stationnaires. En effet, la tendance et la saisonnalité affecteront la valeur de la série temporelle. En général, une série temporelle stationnaire ne comportera aucun schéma prévisible à long terme. En pratique, on modélise le processus des accroissements  $X_t - X_{t-d}$  par un processus ARMA : ARIMA(p,d,q). Le plus souvent  $d = 1$ , ce qui permet d'éliminer une tendance linéaire. Le I de ARIMA signifie "intégré".

Le processus  $(X_t)$  suit le modèle ARIMA(p, d, q) lorsque la série différenciée  $(Y_t)$ , définie par  $(Y_t) = (1 - B)^d(X_t)$ , suit le modèle ARMA(p, q). Formellement, cela s'exprime comme suit :

$$(1 - B)^d X_t = \Phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t,$$

où  $\Phi(B)$  et  $\Theta(B)$  sont deux polynômes unitaires de degré respectif  $p$  et  $q$ , et  $(Z_t) \sim BB(0, \sigma^2)$  est un bruit blanc d'ordre 0.

**SARIMA(p,d,q)(P,D,Q)[s]**

Le processus  $(X_t)$  suit le modèle SARIMA(p, d, q)(P, D, Q, s) lorsque la série différenciée  $(Y_t)$ , définie par  $(Y_t) = (1 - B)^d(1 - B^s)^D X_t$ , suit un modèle ARMA "saisonnier" du type :

$$(1 - B^s)^D \Phi_s(B)\Phi(B)X_t = \Theta_s(B)\Theta(B)Z_t,$$

où  $\Phi_s(B)$ ,  $\Phi(B)$ ,  $\Theta_s(B)$  et  $\Theta(B)$  sont des polynômes unitaires de degré respectif  $P$ ,  $p$ ,  $Q$  et  $q$ , et  $(Z_t) \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$  est un bruit blanc d'ordre 0. Le modèle s'écrit également comme suit :

$$(1 - B)^d (1 - B^s)^D X_t = \Phi_s(B) \Phi(B) X_t = \Theta_s(B) \Theta(B) Z_t.$$

Où  $S$  correspond à la période du processus SARIMA qu'on peut identifier en regardant l'autocorrélogramme (cf exemple précédent) ou la densité spectrale. Les entiers  $d$  et  $D$  sont choisis de sorte que la série différenciée :  $(1 - L)^d (1 - L^s)^D$  soit stationnaire. Les ordres  $p$  et  $q$  s'obtiennent comme pour les modèles ARMA( $p, q$ ) classiques (auto-corrélation partielle et simple), les ordres  $P$  et  $Q$  en regardant les ordres multiples de  $s$  de l'autocorrélogramme.

Détaillons à présent la méthodologie Box et Jenkins qui mène à la modélisation de l'inflation.

### 3.1.3.2 L'approche de Box-Jenkins et modélisation de l'IPC :

Face à une série d'observations, il est crucial, dans une approche probabiliste, de sélectionner le modèle le plus approprié. Au cours des années 1970, Box et Jenkins ont développé une méthodologie systématique permettant, lorsque cela est possible, de choisir un modèle de type SARIMA. Nous présenterons cette méthode et son application pour la modélisation de l'IPC sur les données mensuelles de janvier 2000 à Juin 2023 de l'INSEE.

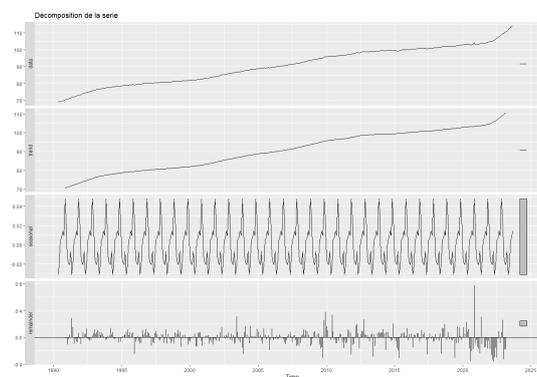
L'indice des prix à la consommation (IPC) joue un rôle essentiel en tant qu'outil de mesure de l'inflation. Il permet d'évaluer la variation moyenne des prix des biens et services consommés par les ménages sur une période donnée.

Pour calculer l'IPC, un panier fixe de biens et services est pris en compte, et ce panier est actualisé chaque année. Chaque élément du panier est attribué un poids dans l'indice global, proportionnel à son importance dans les dépenses de consommation des ménages. Étant donné l'IPC de deux mois consécutifs  $j$  et  $j + 1$ , l'inflation mensuelle est donnée par la relation :

$$\text{Inflation}_j = \frac{\text{IPC}_{j+1} - \text{IPC}_j}{\text{IPC}_j} \tag{3.1}$$

#### 1. Préparation des données :

- On transforme la base en série temporelle avec la fonction `ts()` de R;
- On précise la fréquence de la série (ici mensuelle) et la date de début de la série;
- On décompose la série afin d'observer ses composantes.



On remarque une forte saisonnalité (ici annuelle) et une tendance, la série n'est donc pas stationnaire, vérifions par l'ADF test :

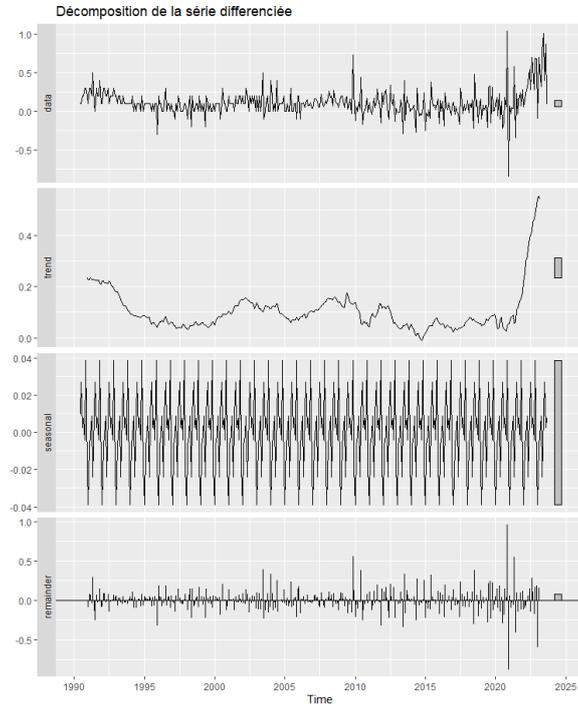
```
Augmented Dickey-Fuller Test

data: (ipc_ts)
Dickey-Fuller = 0.66763, Lag order = 0, p-value = 0.99
alternative hypothesis: stationary
```

L'hypothèse nulle est acceptée, la série n'est pas stationnaire.

2. Différenciation (simple et/ou saisonnière).

Pour stationnariser notre série par l'élimination de la tendance et la saisonnalité, effectuons une première différenciation. On décompose la série temporelle différenciée pour l'analyser.

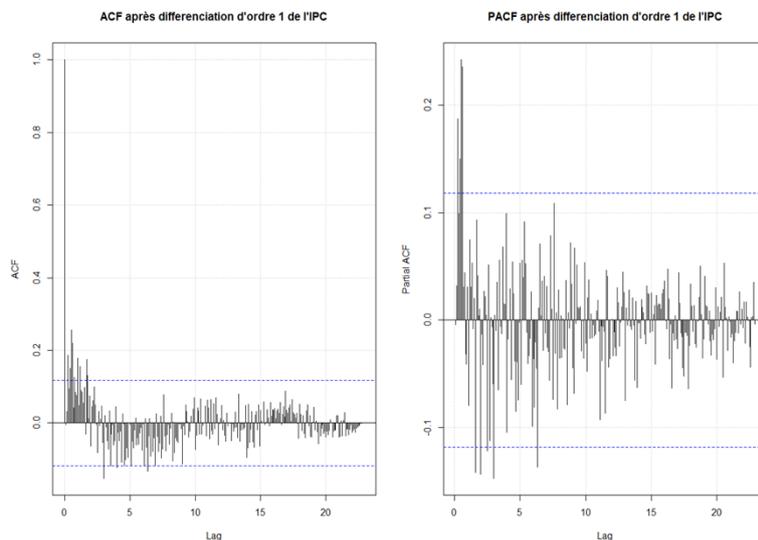


Après application de l'opérateur  $\Delta$  on observe que cela n'a pas été suffisant pour éliminer complètement la saisonnalité. On observe néanmoins la disparition de la tendance. Vérifions la disparition de la tendance par le test de Mann-Kendall. En résumé, le test de Mann-Kendall permet de déterminer si une série de données présente une tendance monotone significative au fil du temps. Une p-value faible indique la présence d'une tendance, tandis qu'une p-value élevée suggère l'absence de tendance.

**Résultat** dans notre application : pvalue = 0.11373.

3. Identification du modèle.

Nous avons pu éliminer la tendance mais pas la saisonnalité. Observons les autocorrélations simples et partielles de la série différenciée.



La fonction d'autocorrélation suggère un modèle à moyenne mobile et la fonction d'autocorrélation

partielle un modèle auto régressif, ainsi le modèle approprié dans ce cas de figure est le SARIMA.

4. Estimation des paramètres.

Après avoir déterminé la structure de notre modèle, il nous faut maintenant déterminer les différents paramètres de nos modèles. Pour cela nous allons utiliser la fonction `auto.arima` du package `forecast`, qui lui-même choisit les paramètres  $d, p, q, D, P, Q$  en minimisant le critère AICc, nous obtenons :

```
Series: ipc_ts
ARIMA(2,1,2)(0,0,1)[12] with drift

Coefficients:
      ar1      ar2      ma1      ma2      sma1      drift
1.2756  -0.2881  -1.5119  0.6364  0.1223  0.1754
s.e.  0.1169  0.1176  0.0936  0.0854  0.0562  0.0884

sigma^2 = 0.0231; log likelihood = 187.93
AIC=-361.85  AICc=-361.56  BIC=-333.91

Training set error measures:
      ME      RMSE      MAE      MPE      MAPE      MASE      ACF1
Training set 0.0001427415 0.15066 0.1018777 -0.001138574 0.1095483 0.08090979 -0.01177184
```

Ces différentes notions et des informations relatives aux régressions appliquées seront disponibles en Annexe 5.3.3.

5. Analyse des résidus **Test de Ljung-Box** :

- **Hypothèse Nulle (H0)** : Les résidus de la série temporelle sont indépendants (absence d'auto-corrélation) ;
- **Hypothèse Alternative (H1)** : Les résidus de la série temporelle présentent de l'auto-corrélation ;
- **Statistique de Test** : La statistique de test de Ljung-Box (Q) est calculée à partir des résidus de la série temporelle. Elle mesure la somme des carrés des auto-corrélations des résidus pour différents retards(lags) ;
- **Interprétation** : Si la valeur p associée à la statistique Q est inférieure au niveau de signification  $\alpha$ , alors on rejette l'hypothèse nulle. Cela suggère que les résidus présentent de l'auto-corrélation, ce qui indique que le modèle n'est pas adéquat. Si la valeur p est supérieure à alpha, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle, ce qui suggère que les résidus sont indépendants et que le modèle est approprié.

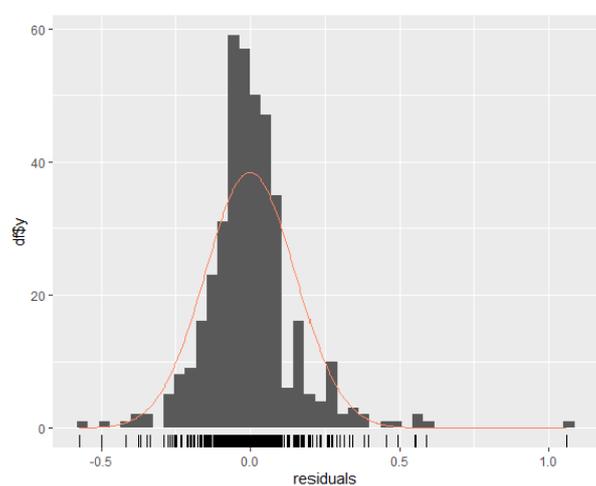
Le test de Ljung-Box est largement utilisé pour vérifier l'adéquation des modèles de série temporelle, notamment les modèles ARIMA. Il permet de s'assurer que les résidus du modèle ne présentent pas de structure temporelle non capturée, ce qui est essentiel pour obtenir des prévisions fiables.

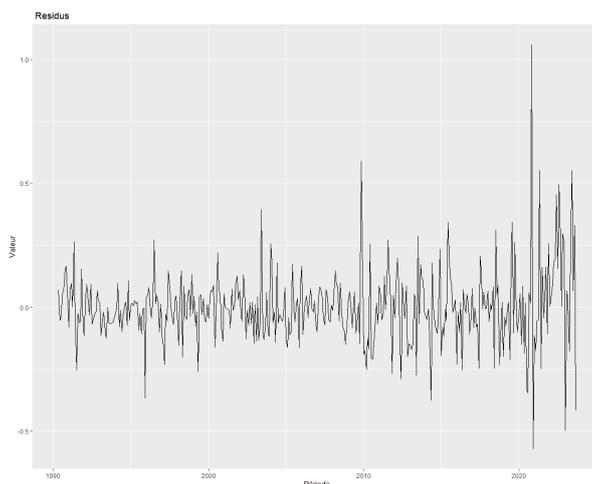
Dans notre on a obtenu les résultats suivants :

```
Ljung-Box test

data: Residuals from ARIMA(2,1,2)(0,0,1)[12] with drift
Q* = 29.487, df = 19, p-value = 0.0587

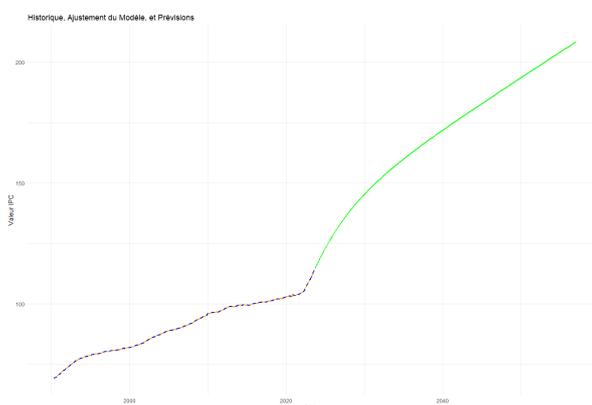
Model df: 5. Total lags used: 24
```





L'hypothèse nulle est donc acceptée pour le seuil de significative de 0.005, on conclut que nos résidus sont non corrélés, uniformément repartis autour de zéro, de moyenne  $0.0001427415 \approx 0$  et de variance constante, nous en déduisons que notre suite de résidus est un bruit blanc.

### 6. Prédiction de l'IPC



Après avoir projeté l'IPC, nous déduisons grâce à l'équation 3.1 la courbe d'inflation :

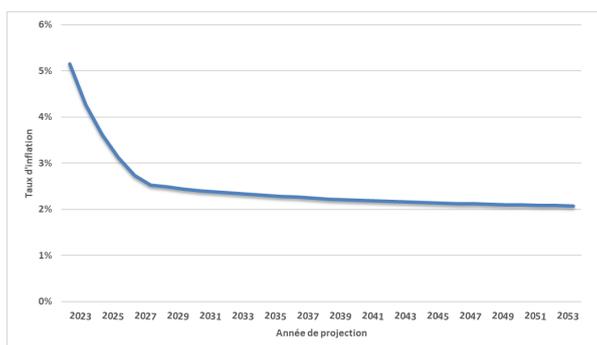


FIGURE 3.3 – Projection SARIMA de l'inflation

On obtient une courbe strictement décroissante jusqu'en 2027, qui se stabilise en tendant vers 2%. Ce qui reste cohérent avec l'idée que la BCE a pour objectif de maintenir un niveau d'inflation autour de 2%. La BCE maintient les taux d'inflation autour de 2 % pour plusieurs raisons :

1. **Marge de sécurité contre la déflation** : Une inflation de 2 % assure une marge de sécurité pour éviter la déflation. En cas de déflation, les mesures habituelles de politique monétaire, comme la baisse des taux d'intérêt, deviennent inefficaces.

2. **Stabilité dans la zone euro** : La BCE vise à maintenir la stabilité des prix dans l'ensemble de la zone euro. Un objectif d'inflation de 2 % offre une marge en cas d'écarts des taux d'inflation entre les pays membres de la zone euro.

Ce scénario unique n'est pas suffisant pour mesurer l'impact de l'inflation, de ce fait, dans la section suivante, nous modéliserons des scénarios d'inflation bien définis via un modèle stochastique de taux.

### 3.1.4 Génération des Scénarios d'inflation via un modèle stochastique de taux

L'objectif est de modéliser les Scénarios suivants :

1. Stabilité des prix : taux d'inflation autour de 2%;
2. Inflation rampante : 3 à 4% par an;
3. Inflation ouverte : 5 à 10% de hausse.

Dans chaque scénario, on a :

- Une courbe d'inflation;
- Les courbes de taux d'actualisation associées, à la hausse et à la baisse;
- Une courbe d'évolution du point Agirc.

Ces modélisations seront réalisées grave aux modèles stochastiques de taux.

#### 3.1.4.1 Généralités sur les modèles d'équilibre

Les modèles d'équilibre s'appuient sur un ensemble d'hypothèses concernant certaines variables économiques pour en déduire le comportement du taux court. Ces modèles sont adaptés à des projections de long terme et incluent des phénomènes de "retour à la moyenne". Ils utilisent un processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour modéliser l'évolution future du taux court instantané.

La dynamique du taux court  $r_t$  sous l'univers "risque neutre" s'écrit :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma r_t^\beta dW_t \text{ où :} \quad (3.2)$$

- $a$  : vitesse de retour à la moyenne à long terme (speed mean-reversion);
- $b$  : moyenne à long terme du taux court (mean-reversion);
- $\sigma$  : volatilité du taux court;
- $W_t$  mouvement brownien standard.

#### Modèle d'équilibre partiel : Vasicek à un facteur

La modélisation stochastique des taux d'intérêt à véritablement commencé avec le modèle de Vasicek en 1977. Il a été l'un des sujets en finance qui a eu un impact considérable au cours des vingt dernières années. Les travaux de Vasicek ont permis présenter un processus, d'Ornstein-Uhlenbeck dont le taux d'intérêt ne dépend que du taux instantané mais autorisant des taux négatifs.

Le modèle de Vasicek est un modèle d'équilibre avec  $\beta = 0$ . Sous l'univers "risque neutre", l'évolution du taux court instantané est décrite par la dynamique suivante :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \text{ où :} \quad (3.3)$$

Le prix d'une obligation zéro-coupon achetée à l'instant  $t$  qui délivre une unité monétaire à  $T$  est une fonction affine de  $r_t$ . Le modèle fournit des formules analytiques pour les prix des produits dérivés de taux (caps, floors, swaptions) ce qui facilite le calibrage. Cependant dans le modèle de Vasicek, le taux court peut devenir négatif

**Modèle d'équilibre général : les modèles " CIR " (Cox, Ingersoll et Ross, 1985)**

Dans le modèle de Vasicek, le taux court peut devenir négatif car l'écart-type instantané ne dépend pas du niveau atteint par  $r_t$ . Le modèle CIR est construit selon une dynamique incluant la racine carrée du taux courant dans le terme de diffusion  $\beta = 1/2$ .  $r_t$  est donc toujours positif.

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma r_t^{1/2} dW_t \text{ où :} \tag{3.4}$$

Le scénario moyen du taux court débute toujours au point de départ  $r_0$ , qui est également un paramètre du modèle, pour converger sur un horizon de projection suffisamment grand vers  $b$ . La vitesse de convergence du scénario moyen entre  $r_0$  et  $b$  est négativement exponentielle. La dynamique CIR contient en réalité deux sources de volatilité :

- Une volatilité induite par le mouvement brownien;
- Une volatilité induite de façon moins intuitive par le relâchement de l'effet de retour à la moyenne. En effet, si l'effet de retour à la moyenne agit intensément, la volatilité du taux court sera contenue. Inversement, si l'effet de retour à la moyenne intervient peu, le taux court, étant libéré de la force de rappel au taux court de long terme  $b$ , générera davantage de volatilité.

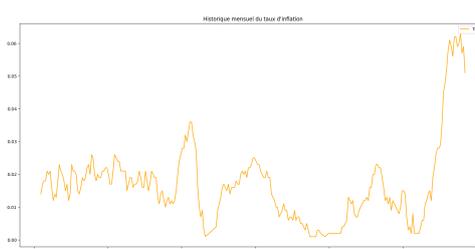
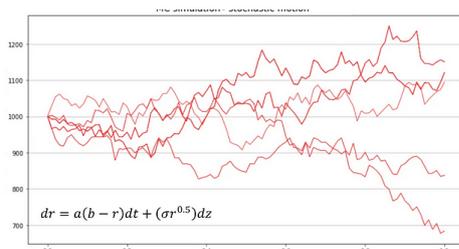
Outre le fait de ne pas produire de taux négatifs, l'introduction de la racine carrée dans l'équation de diffusion a pour conséquences que :

- La distribution des taux d'intérêt passe d'une loi normale symétrique à une loi du  $\chi^2$  non centrée asymétrique;
- La volatilité de la variation du taux court sera modulée en fonction du niveau de taux ce qui est plus conforme à la réalité;
- Le modèle CIR est un modèle affine : le prix d'une obligation zéro-coupon achetée à l'instant  $t$  qui délivre une unité monétaire à  $T$  est une fonction affine de  $r_t$ .

**3.1.4.2 Projection CIR de l'inflation**

**Phénomène de retour à la moyenne**

L'hypothèse selon laquelle le taux d'intérêt à court terme se comporte comme un prix d'action est un point de départ naturel mais moins qu'idéal. Une différence importante entre les taux d'intérêt et les prix des actions est que les taux d'intérêt semblent être ramenés à un niveau moyen à long terme au fil du temps.



Ce phéno-

mène est connu sous le nom de réversion à la moyenne. Lorsque  $r$  est élevé, la réversion à la moyenne tend à lui donner une dérivée négative; lorsque  $r$  est bas, la réversion à la moyenne tend à lui donner une dérivée positive. La réversion à la moyenne est illustrée dans la figure ci-dessus.

### Méthode du Maximum de Vraisemblance (MLE)

Il est maintenant approprié de discuter de la manière dont les paramètres dans le modèle que nous avons considéré, sont estimés à partir de données historiques. L'approche utilisée est la méthode du maximum de vraisemblance. Le principe du maximum de vraisemblance est que, si l'on doit choisir un modèle répliquant les données observées, on choisit les valeurs des paramètres qui maximisent la vraisemblance du modèle par rapport aux données, des paramètres qui maximisent la chance (ou la vraisemblance) que les données se produisent. La vraisemblance est définie comme suit :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (3.5)$$

Et pour le logarithme de la fonction de vraisemblance :

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \theta) \quad (3.6)$$

Pour illustrer la méthode, commençons par un exemple très simple. Supposons que nous échantillonnions dix actions au hasard un certain jour et que nous constatons que le prix de l'une d'entre elles a diminué ce jour-là, tandis que les prix des neuf autres sont restés inchangés ou ont augmenté. Quelle est notre meilleure estimation de la proportion de toutes les actions dont le prix a diminué? La réponse naturelle est de 10%. Voyons si c'est ce que la méthode du maximum de vraisemblance donne.

Supposons que la proportion d'actions dont le prix diminue soit  $p$ . La probabilité qu'une action particulière voie son prix diminuer et que les neuf autres restent inchangées ou augmentent est  $p(1-p)^9$ . En utilisant l'approche du maximum de vraisemblance, la meilleure estimation de  $p$  est celle qui maximise  $p(1-p)^9$ .

En différenciant cette expression par rapport à  $p$  et en égalant le résultat à zéro, nous trouvons que  $p = 0.1$  maximise l'expression. Cela montre que l'estimation du maximum de vraisemblance de  $p$  est de 10%, comme prévu.

$$L(p) = p(1-p)^9$$

### Estimation des paramètres de CIR avec MLE

On discrétise notre équation comme suit :

$$r_{t+\delta t} = r_t + a(b - r_t)\delta t + \sigma\sqrt{r_t}\sqrt{\delta t}\epsilon_t \quad (3.7)$$

On cherche de manière itérative pour trouver les paramètres. Cela implique une procédure de recherche itérative.

### Simulation Monte Carlo

Nous passons maintenant à la discussion de la simulation Monte Carlo. Cela utilise le résultat de la valorisation neutre au risque. Le taux d'intérêt attendu  $r$  dans un monde neutre au risque est calculé à l'aide d'une procédure d'échantillonnage.

De manière générale, le problème que l'on cherche à résoudre par les méthodes de Monte-Carlo est celui de l'estimation de l'espérance d'une variable aléatoire  $X$ , que l'on note généralement  $\mathbb{E}[X]$ .

La méthode de Monte-Carlo la plus simple consiste à générer un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées  $X_1, \dots, X_n$  suivant la même loi que  $X$ . Ensuite, on estime l'espérance  $\mathbb{E}[X]$  avec l'estimateur, dit de Monte-Carlo ou encore de la moyenne empirique,

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k. \quad (3.8)$$

Ainsi  $\mu_n$  est censé être une bonne approximation de la valeur que l'on recherche, à savoir  $\mathbb{E}[X]$ . Cet estimateur est non biaisé dans le sens où  $\mathbb{E}[\mu_n] = \mathbb{E}[X]$ . Ce qui justifie la pertinence de cet estimateur est la loi forte des grands nombres qui nous dit que, si  $X$  admet une espérance finie (ce qui est en pratique très souvent le cas puisque l'on cherche justement à estimer cette espérance qui a priori est finie), alors on a la convergence presque sûre  $\mu_n \rightarrow \mathbb{E}[X]$  lorsque la taille de l'échantillon  $n$  tend vers l'infini.

Il est même possible de connaître l'ordre de grandeur de l'erreur commise par cet estimateur grâce au théorème central limite. En effet, si  $X$  admet une variance finie  $\sigma^2 < \infty$ , alors le théorème central limite nous dit que la convergence :

$$\frac{\mu_n - \mathbb{E}[X]}{\sigma} \times \sqrt{n} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \quad (3.9)$$

a lieu en loi quand  $n$  tend vers l'infini, où  $\mathcal{N}(0, 1)$  désigne une loi normale centrée réduite. On peut donc en déduire que, si  $X$  admet une variance finie, alors l'erreur de l'estimateur de Monte-Carlo est de l'ordre de  $1/\sqrt{n}$  et l'on voit bien que plus la taille de l'échantillon est grande, plus l'erreur se rapproche de zéro. Par exemple, multiplier par 100 la taille de l'échantillon devrait, à peu près, diviser par 10 l'erreur commise.

En utilisant le théorème central limite, on peut déduire des intervalles de confiance asymptotiques pour l'estimateur de Monte-Carlo. Soit un réel  $\alpha \in [0, 1]$  qui correspond au niveau de confiance désiré et notons  $q_\beta$  le quantile d'ordre  $\beta$  de la loi normale centrée réduite. C'est-à-dire que, si  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$  alors  $\mathbb{P}(Z \leq q_\beta) = \beta$  (par exemple pour  $\beta = 97.5\%$  on a  $q_{0.975} \approx 1.96$ ). Alors on a la convergence :

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{E}[X] \in \left[\mu_n - \frac{\sigma q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}, \mu_n + \frac{\sigma q_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right]\right) \rightarrow 1 - \alpha \quad (3.10)$$

lorsque  $n$  tend vers l'infini. Il faut garder en tête que cet intervalle de confiance est bien asymptotique et pas exact car il repose sur le théorème central limite qui est un résultat de convergence et non une égalité. En pratique, on connaît rarement la variance  $\sigma^2$  de  $X$  ce qui est gênant dans le calcul de l'intervalle de confiance asymptotique ci-dessus. On peut résoudre ce problème en approximant cette variance via l'estimateur

$$\sigma_n^2 := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mu_n)^2. \quad (3.11)$$

Encore une fois, par la loi forte des grands nombres, cet estimateur converge vers la variance  $\sigma^2$  lorsque cette dernière est finie.

En supposant que  $a$ ,  $b$ , et  $\sigma$  sont constants, nous pouvons modéliser l'évaluation du taux court comme suit :

1. Échantillonner un chemin aléatoire pour  $r$  dans un monde neutre au risque;
2. Répéter l'étape 1 pour obtenir de nombreuses valeurs d'échantillonnage du taux d'intérêt attendu dans un monde neutre au risque;
3. Calculer la moyenne des taux d'intérêt attendus échantillonnés pour obtenir une estimation du taux d'intérêt attendu dans un monde neutre au risque.

Une simulation implique la construction d'une trajectoire complète pour  $r$  en utilisant  $N$  échantillons aléatoires d'une distribution normale.

### Prédiction du taux d'inflation

Afin de mettre en œuvre le modèle CIR pour cette prédiction, nous avons utilisé le modèle Monte Carlo pour estimer le taux d'inflation pour les années à venir. Le modèle Monte Carlo est largement utilisé dans les situations où il n'y a pas de solution analytique et d'autres approches (telles que l'arbre binomial) sont moins

appropriées, comme dans le cas des options dépendantes du chemin complexe (notre cas).

Comme cette erreur type diminue très lentement avec le nombre de simulations, il est généralement nécessaire d'utiliser des dizaines de milliers (voire plus) de chemins d'échantillonnage pour atteindre un niveau d'exactitude acceptable.

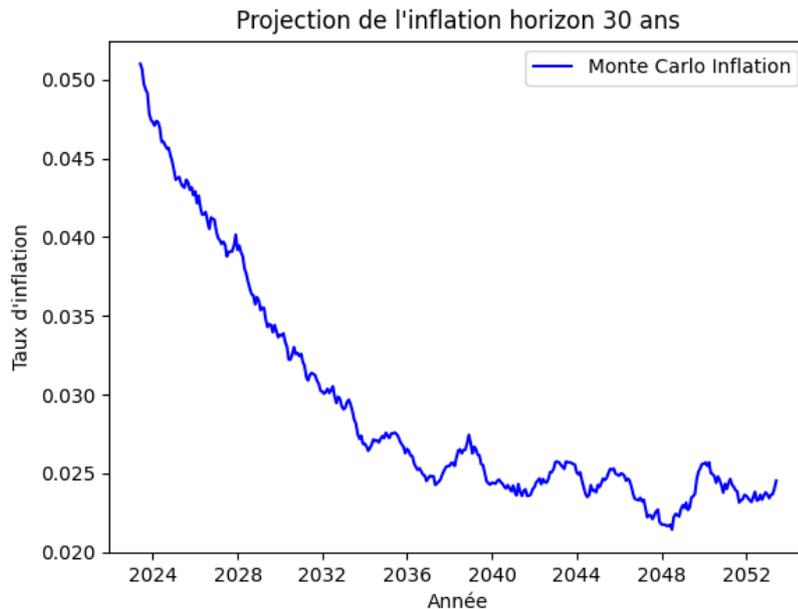
Nous utiliserons 50 000 chemins aléatoires dans ce calcul. Les paramètres optimaux sont :

Paramètres	$a$	$b$	$\sigma$	$\gamma$	$h$
Valeurs	0.14735811	0.02383191	0.06739742	0.00377785	1.76811418

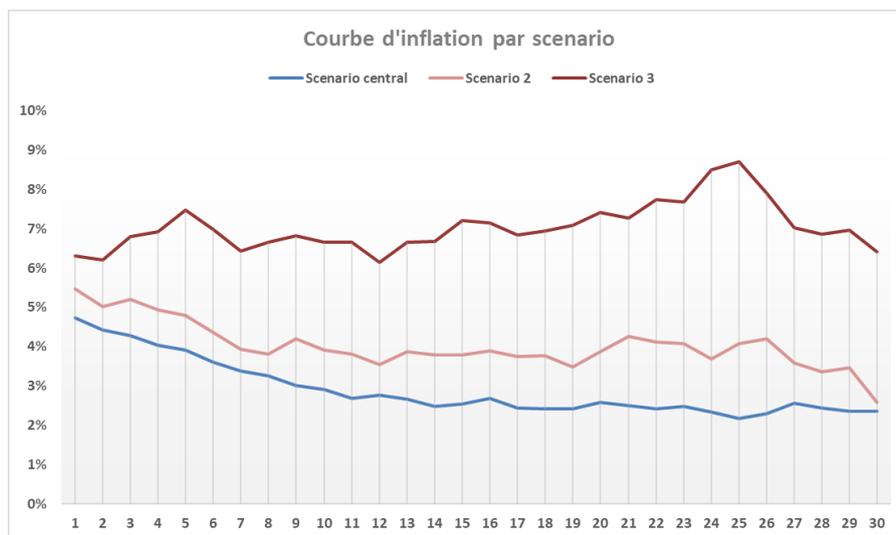
Deux paramètres ont été ajoutés au modèle pour ajouter de la précision :

- Le paramètre  $\gamma$  correspond au coefficient de volatilité de la volatilité. Il représente la sensibilité de la volatilité du taux court à ses propres fluctuations. Plus précisément, il détermine la vitesse à laquelle la volatilité autour du niveau moyen  $\mu_r$  du taux court revient vers sa moyenne. En d'autres termes,  $\gamma$  contrôle à quel point la volatilité est "auto-corrélée". Une valeur plus élevée de  $\gamma$  signifie que la volatilité est plus auto-corrélée et revient plus rapidement à sa moyenne, tandis qu'une valeur plus faible signifie que la volatilité est moins auto-corrélée et peut rester éloignée de sa moyenne pendant plus longtemps.
- Dans le contexte du modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR), le paramètre  $h$  représente la hauteur des sauts. C'est un paramètre utilisé dans les modèles à sauts tels que le modèle CIR à sauts (Jump CIR). Il détermine l'amplitude des sauts dans le processus stochastique du taux d'intérêt court. Les sauts dans le modèle Jump CIR sont des événements aléatoires qui modifient le comportement du processus du taux d'intérêt. Le paramètre  $h$  contrôle à quel point ces sauts peuvent affecter le processus. Une valeur plus élevée de  $h$  signifie des sauts plus importants, tandis qu'une valeur plus faible de  $h$  signifie des sauts moins importants. En d'autres termes,  $h$  détermine l'intensité des sauts dans le modèle Jump CIR.

On obtient graphiquement :



En ajustant nos paramètres de vitesse et de retour à la moyenne dans notre modèle CIR, nous définissons nos scénarios d'inflation 1 et 2 comme suit :



Après avoir minutieusement élaboré nos scénarios d'inflation, nous franchissons une étape cruciale en nous penchant sur la construction de nos courbes de taux à pas de projection annuel. Cette démarche est essentielle dans notre processus, car elle vise à actualiser nos flux en tenant compte de l'évolution anticipée de l'inflation. L'objectif étant la précision dans la mesure de l'impact de l'inflation sur nos provisions à chaque horizon de projection. Ainsi, il est impératif que notre courbe d'actualisation projetée intègre de manière adéquate les fluctuations inflationnistes afin de garantir la justesse de nos estimations.

### 3.2 Modélisation de l'actualisation avec prise en compte de l'inflation

La modélisation des taux d'intérêt est un enjeu majeur pour les assureurs, puisque ceux-ci sont utilisés en permanence, en particulier pour évaluer leurs engagements envers les assurés. Il est ainsi important de pouvoir représenter l'évolution de ces taux en fonction du temps à l'aide d'une structure par terme des taux d'intérêt ou courbe des taux. La courbe des taux permet de connaître, pour une maturité donnée d'un instrument financier, le niveau du taux d'intérêt associé. Lorsque les taux sont élevés, l'économie a tendance à ralentir et il y a une faible demande de fonds de la part des emprunteurs. En conséquence, les taux diminuent. Lorsque les taux sont bas, l'économie a tendance à s'accélérer et il y a une forte demande de fonds de la part des emprunteurs. En conséquence, les taux augmentent.

Il existe différentes courbes des taux que l'on peut regrouper en deux catégories :

- Les courbes de marché qui sont construites directement grâce aux observations faites sur les marchés;
- Courbe des taux d'obligations d'état :
  - Les courbes implicites qui sont construites indirectement à partir des cotations de marché d'instruments financiers tels que les swaps et les obligations d'État;
  - Courbe des taux zéro-coupons;
  - Courbe des taux forward instantanés.

Nous modéliserons dans notre étude des taux zéro-coupon

**Théorie des Anticipations Rationnelles :** La théorie des anticipations rationnelles a été introduite par John Muth en 1961. Elle postule que les agents économiques sont capables d'anticiper de manière rationnelle les conséquences des politiques économiques initiées par les États.

Selon Robert Lucas (Prix Nobel de l'économie en 1995), les agents économiques modifient instantanément

leur comportement en anticipant rationnellement les effets des décisions politiques. Les changements instantanés dans le comportement des agents annulent systématiquement toute intervention à long terme de l'État ou des banques centrales sur les prix.

Supposons qu'un État mette en place une politique monétaire expansionniste en augmentant la masse monétaire pour stimuler l'activité économique. Les agents économiques anticipent rationnellement les conséquences de cette politique. En réaction, ils augmentent leur taux d'épargne en prévision d'une possible augmentation de l'inflation. En conclusion, la mesure de la banque centrale n'aura pas d'effet significatif à long terme. Les anticipations rationnelles des agents annulent les effets attendus de la politique monétaire, car ces agents ajustent instantanément leur comportement. C'est sur elle, que repose le et de retour a la moyenne modélise par la majorité des modèles de diffusion de taux courts. Les taux convergeront toujours vers un état d'équilibre quelle que soit la politique monétaire menée par les états ou la banque centrale.

Nous allons donc présenter le modèle G2++ prenant en compte implicitement cette théorie macro-économique qui nous servira de courbe des taux centrale.

### Les Tests de Conformité Solvabilité II

Les exigences de Solvabilité II en matière de GSE sont le test de martingalité et le test de market-consistency. Nous détaillerons ces tests et présenterons une approche pour les valider.

#### 1. Test de Martingalité

Pour ce test, nous commençons par évaluer l'adéquation à la courbe de référence. Dans le contexte risque-neutre, la vérification repose sur l'égalité suivante :

$$\forall T, \mathbb{E}^Q \left[ e^{-\int_0^T r_u du} \right] = P^M(0, T) \tag{3.12}$$

Ici,  $P^M(0, T)$  représente les prix issus de la courbe de référence. Ensuite, nous examinons si les processus de prix actualisés provenant du modèle sont des martingales, ce qui se traduit par :

$$\forall t \leq T, \mathbb{E}^Q \left[ e^{-\int_0^t r_u du} P(t, T) \right] = P(0, T) \tag{3.13}$$

Il est important de confirmer que la moyenne des prix actualisés des taux zéro coupons, recalculés à partir des simulations à toute date t de maturité T, est égale à la valeur en t=0 du prix du zéro-coupon de maturité T, comme dérivé de l'équation précédente.

Nous utilisons la courbe de référence fournie par l'EIOPA au 30 novembre 2023.

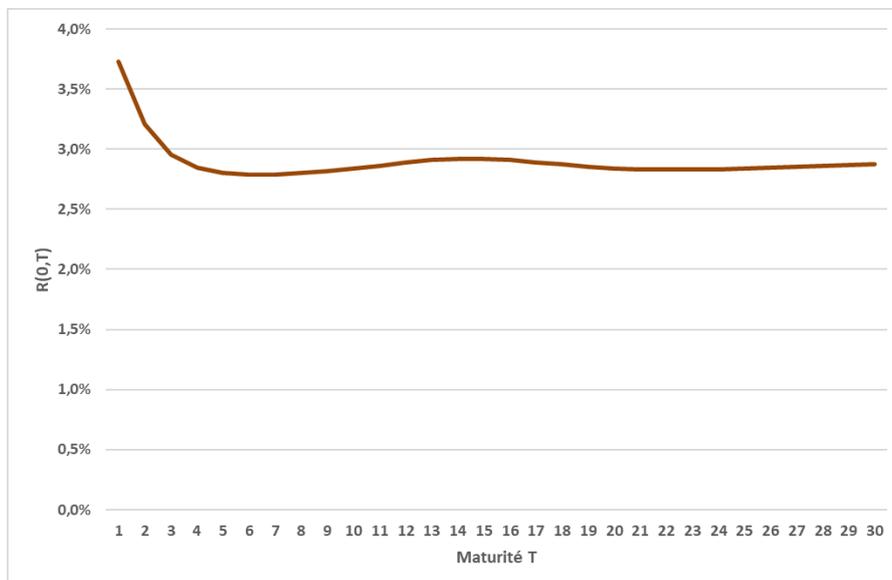


FIGURE 3.4 – Courbe des taux sans risque de l'EIOPA au 30/11/2023

## 2. Test de Market Consistency

La notion de « market consistency » ou de « cohérence avec le Marché » consiste, intuitivement, à injecter dans les modèles de l'information de marché, qui contient d'abord les prix : courbes de taux, prix d'actions, spread de crédit obligataire, prix d'options listées, etc. Le GSE doit générer des prix d'actifs cohérents avec ceux observés sur les marchés financiers. Pour garantir cela, nous effectuons le test de market-consistency en comparant les prix d'options sur le marché avec ceux obtenus à partir de nos projections.

Nous calibrons notre modèle sur le prix des swaptions qu'on définira dans la suite, ce qui nous permet de valider ce test.

### 3.2.1 Mise en oeuvre du modèle G2++

Il s'agit d'un modèle bi-factoriel déterminant le taux court crée par Brigo and Mercurio (2006). La dynamique du taux court est donnée par :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \phi(t) \text{ où} \quad (3.14)$$

$$dx(t) = a x(t)dt + \sigma_1 dW_1(t) \quad \& \quad dy(t) = b y(t)dt + \sigma_2 dW_2(t)$$

- a,b : coefficients de retour a la moyenne;
- $\sigma_1, \sigma_2$  volatilités des processus;
- $\phi(t)$  est une fonction déterministe;
- W1 et W2 sont des processus de Wiener de facteur de corrélation  $\rho$ ;
- $x_0 = y_0 = 0$ .

Les deux facteurs sont des processus de Vasicek à un facteur. Puisque ces processus oscillent en moyenne autour de 0, c'est la fonction déterministe qui va donner la tendance au taux court. Il va donc avoir un effet de retour vers la fonction déterministe.

La mise en oeuvre consiste a :

1. Générer deux processus gaussiens corrélés;
2. Discrétisation de la dynamique des deux processus dOrnstein-Uhlenbeck pour le modéliser;
3. Modélisation du taux forward par la méthode Nelson-Siegel-Svensson;
4. Récupérer les prix observés sur le marché des swaptions (resp autres produits vanilles);
5. Estimer le prix des caplets (resp. des swaptions) grâce a la formule fermée du G2++;
6. Par la méthode des moindres carrés, déterminer les cinq paramètres, Il s'agit de minimiser la somme des résidus aux carrés.

Puis nous modélisons la courbe de taux d'intérêt.

#### Quelques notations et définitions

Le Prix d'une obligation zero-coupon de nominal 1, a la date 0, de maturité T est :

$$P(0, T) = \mathbb{E} \left[ \exp - \int_0^T r_s ds \right] \quad (3.15)$$

Le Prix d'une obligation zero-coupon de nominal 1, a la date 0, de maturité T est :

$$P(t, T) = \mathbb{E} \left[ \exp - \int_t^T r_s ds \mid \mathbb{F} \right] \quad (3.16)$$

Le Taux zéro-coupon a la date 0, de maturité T :  $R(0, T)$  avec :

$$R(t, T) = - \frac{\ln(P(t, T))}{T - t} \quad (3.17)$$

C'est le taux d'intérêt continu associe a une obligation zero-coupon. Nous appelons courbe des taux a une date t, la courbe de la fonction :  $T \rightarrow R(t, T)$

Le taux forward ou taux a terme la quantité  $F(0, t, T)$  avec  $t < T$  définie par :

$$F(0, t, T) = - \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \times \frac{1}{T - t} \quad (3.18)$$

C'est le taux spot entre t et T garanti en date 0.

Le Taux forward instantané a la date t de maturité T :

$$f(t, T) = - \frac{d \ln(P(t, T))}{dT} \quad (3.19)$$

### Formule fermée pour le prix des zéro-coupons via le modèle G2++

Après intégration des équations différentielles stochastiques en utilisant le lemme d'Ito, nous avons :

$$r(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \sigma_1 \int_s^t e^{-a(t-s)} dW_1(u) + \sigma_2 \int_s^t e^{-b(t-s)} dW_1(u) + \phi(t) \quad (3.20)$$

Le taux court est à nouveau gaussien. Nous cherchons ensuite à exprimer le prix d'une obligation zéro-coupon. Notons  $\mathbb{F}_t$  la filtration engendrée par le couple  $(x, y)$ , sous la probabilité risque-neutre le prix d'une obligation zéro-coupon est donne par :

$$P_{zc}(t, T) = e^{\left( - \int_t^T \phi(u) du - \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} x(t) \right)} \times e^{\left( - \frac{1-e^{-b(T-t)}}{b} y(t) + \frac{1}{2} V(t, T) \right)} \quad (3.21)$$

Où

$$\begin{aligned} V(t, T) = & \frac{\sigma_1^2}{a^2} \left( T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right) + \\ & \frac{\sigma_2^2}{b^2} \left( T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-a(T-t)} - \frac{3}{2b} \right) + \\ & 2\rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{ab} \left( T - t + \frac{e^{-a(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a+b} \right) \end{aligned}$$

Pour que le modèle nous permette de retrouver la courbe du marché en date 0, il est nécessaire que :

$$\phi(T) = f^M(0, T) + \frac{\sigma_1^2}{2a^2} (1 - e^{-aT} - 1)^2 + \frac{\sigma_2^2}{2b^2} (1 - e^{-bT})^2 + \rho \frac{\sigma_1 \sigma_2}{ab} (1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT})$$

Nous calibrons le modèle avec les données du marché, le prix d'une obligation zéro-coupon a la date t est donnée par :

$$P_{zc}(t, T) = \frac{P_{zc}^M(0, T)}{P_{zc}^M(0, t)} e^{A(t, T)} \quad (3.22)$$

Où :

$$A(t, T) = \frac{1}{2} \left( ((V(t, T) - V(0, T) + V(0, t))) - \frac{(1 - e^{-aT})}{a} x(t) - \frac{(1 - e^{-bT})}{b} y(t) \right)$$

C'est un modèle à deux facteurs stochastiques et donc plus de paramètres, ils sont donc plus difficiles à calibrer. Néanmoins, pour obtenir des meilleures projections, il est nécessaire d'avoir plusieurs facteurs stochastiques. Avec un modèle mono-factoriel la corrélation des variations instantanées de deux zéro-coupons de maturités distinctes T1 et T2 est égale à 1. Or sur les marchés nous pouvons observer que les taux de maturité très proches sont fortement corrélés, tandis que les taux de maturité éloignée le sont très peu.

### Discrétisation des modèles pour la simulation

Pour pouvoir utiliser ces modèles de taux courts en pratique, il est nécessaire de les discrétiser. En effet, leurs équations de diffusion sont exprimées de manière continue, il faut donc en faire une approximation discrète. Dans la suite de ce mémoire nous considérerons uniquement un pas de temps annuel, nous avons alors  $dt=1$ .

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t e^{-a} \sigma_1 \sqrt{\frac{1-e^{-2a}}{2a}} Z_1 \\ y_{t+1} = y_t e^{-b} \sigma_2 \sqrt{\frac{1-e^{-2b}}{2b}} Z_1 \end{cases}$$

$Z_1$  et  $Z_2$  sont des variables aléatoires normales centrées réduites de corrélation. Pour les générer, nous allons utiliser le théorème de factorisation de Cholesky.

**Factorisation de Cholesky :** Si  $A$  est une matrice symétrique définie positive, il existe une matrice réelle triangulaire inférieure  $L$  telle que

$$A = LL^T$$

. Puisque les processus de Wiener ont un facteur de corrélation  $\rho$ , nous voulons générer un vecteur gaussien de matrice de variance-covariance  $\Theta = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$ . Puisque  $\Theta$  est symétrique définie positive, nous pouvons utiliser le théorème de factorisation de Cholesky, ainsi :  $\Gamma = LL^T$  avec  $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}$ . En notant  $\Gamma = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix}$  un

vecteur aléatoire composé de lois normales centrées réduites indépendantes, le vecteur  $Z = L\Gamma$  est un vecteur gaussien de matrice de variance-covariance  $\Gamma$ . Nous pouvons donc simplement générer notre vecteur gaussien pour la discrétisation.

### Calibration sur les swaptions

Supposons qu'un investisseur ayant un emprunt de nominal  $N_2$  à taux variable anticipe une hausse des taux d'intérêt dans deux ans. Pour se couvrir, il va alors acheter un swaption payeur de maturité deux ans, qui lui permettra, dans le cas d'une hausse des taux, de rentrer dans un swap pour payer le taux fixe  $x_e$  à la place du taux variable de son emprunt qui sera payé par la jambe variable.

Une swaption représente une option sur un swap. Il permet à son détenteur de rentrer dans un swap à une date d'exercice ( $T_m$ ), également appelée maturité, et à un taux swap convenu  $K$ , également appelé strike.

Il existe deux sortes de swaptions :

- Les swaptions payeurs, qui donnent le droit de rentrer dans un swap pour payer le taux fixe et recevoir le taux variable.
- Les swaptions receveurs, qui donnent le droit de rentrer dans un swap pour payer le taux variable et recevoir le taux fixe.

Nous appelons gain d'exercice (*Payoff*) la valeur que rapporte un swaption en cas d'exercice. Un swaption est à règlement en espèces (cash-settlement) si, à la date de maturité, le payoff est versé directement, autrement dit, le détenteur du swaption ne rentre pas dans le swap.

Sur les marchés, un swaption est à la monnaie si son strike est égal au taux forward swap du forward swap

sous-jacent. Par exemple, si le prix d'un swaption 3Y 1Y est à la monnaie, alors son strike sera égal au taux forward swap d'un forward swap 3Y 1Y.

Pour vérifier le test de la market-consistency, nous devons retrouver le prix des swaptions à l'aide de nos scénarios économiques. Comme pour l'option de vente, le prix en univers risque-neutre d'un swaption est égal à l'espérance du payoff actualisé :

$$\text{Prix} = \mathbb{E} \left[ e^{-\int_0^{T_m} r_u du} \cdot \text{Payoff} \right]$$

Les swaptions sur lesquels nous allons réaliser le test de market-consistency possèdent les caractéristiques suivantes :

		Tenors													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30
Maturité	1	105,98	107,77	105,00	103,44	102,10	101,13	100,22	99,41	98,54	97,66	94,62	92,09	90,53	89,04
	2	103,09	102,15	99,70	98,89	97,99	97,42	96,76	96,43	95,86	94,96	90,45	88,24	86,52	85,89
	3	98,47	97,69	96,18	95,27	94,58	94,32	93,80	93,44	93,15	93,01	88,14	85,07	83,63	82,68
	4	95,20	94,71	93,21	91,96	90,83	90,34	90,39	90,23	89,90	88,74	84,13	81,07	79,52	78,10
	5	92,70	92,27	90,89	89,45	88,73	88,06	87,48	87,11	86,78	86,17	81,47	78,59	76,94	75,73
	7	89,58	89,39	87,64	85,97	84,74	83,73	82,78	82,01	81,47	80,87	76,33	73,44	71,76	70,41
	10	86,26	86,08	83,75	81,87	79,91	78,73	77,58	76,52	75,55	74,51	69,77	67,24	65,76	64,57
	15	79,26	79,01	76,86	74,64	72,27	70,87	69,54	68,32	67,23	66,30	61,53	59,26	57,65	56,38
	20	73,60	73,51	71,27	68,90	66,58	65,21	63,86	62,72	61,49	60,30	55,56	53,66	52,07	50,76
	25	69,67	69,60	67,53	64,77	62,11	60,61	59,14	57,83	56,63	55,54	51,44	49,53	48,00	46,73
	30	66,08	66,06	63,81	60,89	58,62	57,04	55,52	54,16	52,57	51,51	47,29	45,68	44,27	43,15

- Le taux variable de référence est le taux Euribor 06 mois;
- Ils sont de type payeur et utilisent la méthode de règlement en espèces (cash-settlement) ;
- Nous choisissons des swaptions sur l'Euribor 06 mois, car la courbe fournie par l'EIOPA est construite en utilisant des swaps sur l'Euribor 06 mois.

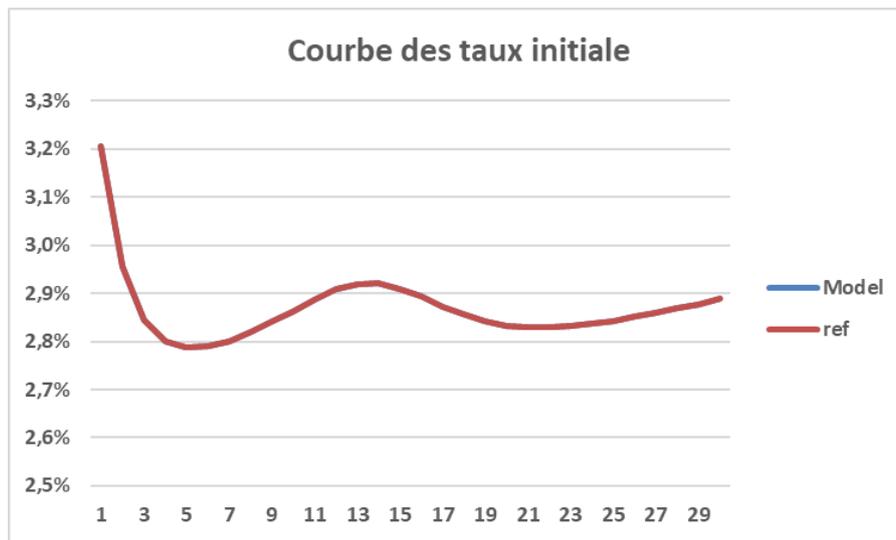
**La formule de Black-76** Nous allons utiliser la formule de Black-76, pour obtenir un prix en pourcentage du nominal. Le prix d'un swaption payeur de maturité  $T_m$  et de ténor  $\tau = T_n - T_m$  en fonction des zéros coupons :

$$prix_{\text{swaption}} = \sum_{i=1}^n P(0, T_{m+i}) (S(T_0, T_m, T_n)\phi(d_1) - K\phi(d_2))$$

Où :

- $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(T_0, T_m, T_n)}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T_m}{\sigma T_m}$
- $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T_m}$
- $P(0, T_{m+1})$  prix en 0 d'un zéro coupon de maturité  $T_{m+1}$ . déduit de notre modèle.
- $K$  le taux strike
- $\sigma$  la volatilité implicite que nous observons sur les marche  $\phi()$  est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.
- $S(T_0, T_m, T_n) = \frac{P(0, T_m) - P(0, T_m + \tau)}{\sum_{i=1}^n P(0, T_{m+i})}$ ; le taux du forward swap sous-jacent.

**Résultats** Nous obtenons la courbe suivante :



Notre modèle réplique bien la courbe initiale. Grâce à notre modèle nous générons à chaque horizon de projection  $h$ , une courbe de taux pour l'évaluation de notre BE.

### 3.2.2 Insertion de l'inflation dans notre modélisation :

Dans le but de mesurer l'impact de l'inflation sur nos provisions, à chaque scénario d'inflation doit correspondre une courbe de taux associée.

La courbe des taux modélisée hors ajustement d'inflation sera utilisée pour le premier scénario. En effet notre modélisation étant market-consistent sous-entend la prise en compte implicite de l'inflation attendue sur les prochaines années. Les travaux suivants concernent uniquement la modélisation des scénarios 2 et 3.

#### Détermination des chocs :

De manière générale, si vous vous demandez comment et pourquoi la BCE fait évoluer ses taux d'intérêt, c'est afin de contrôler et surtout limiter la hausse de l'inflation. Cela fait partie de la mise en place d'une politique monétaire globale cherchant à maintenir l'inflation à un niveau avoisinant les 2% à moyen terme.

Concrètement, lorsque l'inflation est trop élevée, la BCE augmente ses taux d'intérêt, en vue d'entraîner une baisse des dépenses dans l'économie, ce qui ralentit alors le taux d'inflation. À l'inverse, lorsque la BCE revoit son taux d'intérêt à la baisse, c'est essentiellement pour inciter à une augmentation des dépenses, de façon à favoriser l'activité économique et stimuler l'économie. Partant de ce postulat et la difficulté d'établir une corrélation exacte entre niveau inflation et évolution des taux, nous faisons l'hypothèse que les taux seront revus à la hausse en période d'inflation. Nous déterminerons les chocs inflations comme suit :

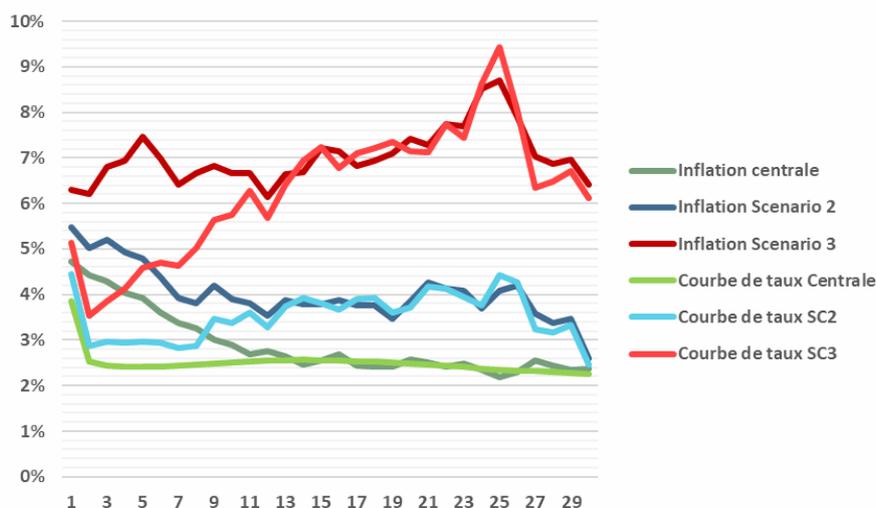
$$\forall t, \text{Choc}_t = \frac{i_{t,\text{scénario } k}}{i_{t,\text{scénario centrale}}}$$

Le Taux spot devient :

$$R(t, T) = -\frac{\ln(P(t, T))}{T - t} * \text{Choc}_{T+t} \tag{3.23}$$

On obtient pour les 3 scénarios les courbes initiales suivantes :

### Exemple d'application du choc sur la courbe initiale pour chaque scenario



Les résultats obtenus sont cohérents avec l'idée initial, d'avoir un scénario relativement stable à court terme, un scénario de hausse de taux d'actualisation relative au niveau d'inflation et pour finir un scénario plus extrême.

Dans la partie suivante nous présenterons point Agirc-Arrco et modéliserons sa valeur de service, afin de l'utiliser comme indice de revalorisation de nos prestations.

### 3.3 Modélisation de la valeur de service du point Agirc-Arrco

#### ARCCO et AGIRC : la retraite complémentaire des cadres et des salariés du privé

Le versement de cotisation auprès de l'Agirc et l'Arrco est une démarche obligatoire pour les salariés du privé, cadres ou non-cadres, pour qu'ils puissent se constituer une retraite complémentaire.

##### 1. Qui est affilié à l'Agirc et à l'Arrco ?

Les salariés, cadres et non-cadres, du privé sont obligés de cotiser à l'Arrco. Les salariés-cadres doivent, en plus, verser des cotisations auprès de l'Agirc. Il faut noter que les caisses Arrco et Agirc ont fusionnées en 2019 regroupant tous les salariés, cadres et non-cadres, dans une même caisse de retraite complémentaire.

##### 2. Les cotisations de retraite

La cotisation salariale des salariés du privé est déduite de leur salaire brut et elle est additionnée aux parts patronales avant d'être versée à l'Arrco. Les salariés-cadres cotisent auprès de l'Agirc sur le même principe. Comme il s'agit d'un système de retraite par point, les cotisations versées sont transformées en point :

- Le montant versé est transformé en points des cotisations et le nombre de points acquis dépend du prix pratiqué à la date du versement.
- Au moment de la liquidation des droits à la retraite, le nombre de points cumulés est multiplié par la valeur de service du point à ce moment-là et permet d'obtenir le montant de la pension complémentaire à verser à l'assuré.

Il est fortement recommandé de bien conserver ses relevés de points tout au long de sa carrière professionnelle.

Le calcul d'une retraite par points Agirc-Arrco repose sur deux valeurs :

- **Valeur de service du point de retraite complémentaire :** Lors de la liquidation de la retraite, cette valeur est utilisée pour convertir les points en euros, déterminant ainsi le montant de la pension mensuelle. Cette valeur est régulièrement mise à jour, généralement en novembre. Une augmentation de la valeur du point entraîne une augmentation proportionnelle de la pension.
- **Valeur d'achat du point :** Utilisée pour calculer le nombre de points acquis en fonction des cotisations versées.

La valeur du point Agirc-Arrco est généralement augmentée chaque année en novembre pour prendre en compte l'inflation. Les partenaires sociaux ont décidé en octobre 2022 une revalorisation de la valeur de service du point Agirc-Arrco de 5,12%. Cette revalorisation améliore la pension de 13 millions de retraités. Elle contribue à préserver leur pouvoir d'achat dans un contexte de forte inflation. Actuellement, la valeur du point est de 1,3498. Elle devrait rester inchangée jusqu'en novembre 2023, date de la prochaine mise à jour. Le **conseil d'administration** de l'Agirc-Arrco ajuste la valeur de service du point en fonction de l'évolution des prix à la consommation hors tabac.

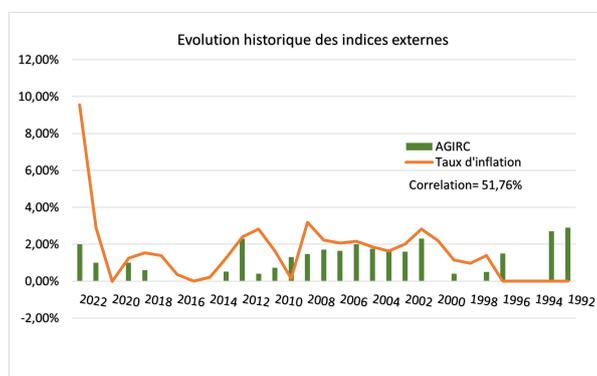
La **valeur d'achat du point** est fixée par le conseil d'administration à partir du 1er janvier de chaque année. Elle est utilisée pour calculer le nombre de points acquis en échange des cotisations versées. Pour 2021, la valeur d'achat a été figée en raison de la baisse du salaire moyen due à l'activité partielle. En 2022, la valeur d'achat sera basée sur l'évolution prévisionnelle du salaire annuel moyen en 2020 et 2021 des affiliés.

### Modélisation de la valeur du point Agirc-Arrco

La prédiction de la valeur du point Agirc-Arrco s'avère complexe en raison de son caractère discrétionnaire. La complexité de la modélisation du point réside dans l'identification des variables explicatives pertinentes. L'Accord national interprofessionnel du 10 mai 2019 prévoit deux règles de calcul de la valeur de service du point :

- Si l'évolution des prix est inférieure à celle des salaires, la valeur de service du point doit évoluer au moins comme les prix à la consommation hors tabac en moyenne annuelle ;
- Si, en revanche, l'évolution des prix est supérieure à celle des salaires, la valeur de service du point doit évoluer comme le salaire moyen des ressortissants du régime tel qu'il est estimé pour l'année en cours.

L'accord prévoit également, pour le cas où la valeur de service du point est fixée en fonction de l'évolution des prix, une marge de manœuvre de plus ou moins 0,2 point laissée à l'appréciation du conseil d'administration du régime. Par exemple, pour un niveau d'inflation annuelle de 1 %, le conseil d'administration peut décider, en fonction de la situation financière du régime, de revaloriser la valeur de service du point d'un pourcentage allant de 0,8 % à 1,2 %.



Cela souligne la complexité de l'exercice de prédiction, car les décisions concernant la valeur du point semblent dépendre de facteurs multiples et potentiellement imprévisibles, en dehors de l'inflation. En intégrant davantage d'informations et en explorant de nouvelles pistes d'analyse, il est possible que nous puissions affiner notre modèle de prédiction et mieux anticiper les variations de cette valeur. Par ailleurs nous choisissons de

modéliser la valeur de service du point en fonction de l'inflation.

Nous modélisons ensuite la valeur de service du Agirc-Arrco via une régression linéaire fonction de l'inflation.

**Modèle 1 :**

$$\text{Agirc}_n = \alpha \cdot \text{Agirc}_{(n-1)} + \beta \cdot \text{Inflation}_n$$

**Modèle 2 :**

$$\text{Agirc}_n = \alpha \cdot \text{Agirc}_{(n-1)} + \beta \cdot \text{Inflation}_{(n-1)}$$

**Modèle 3 :**

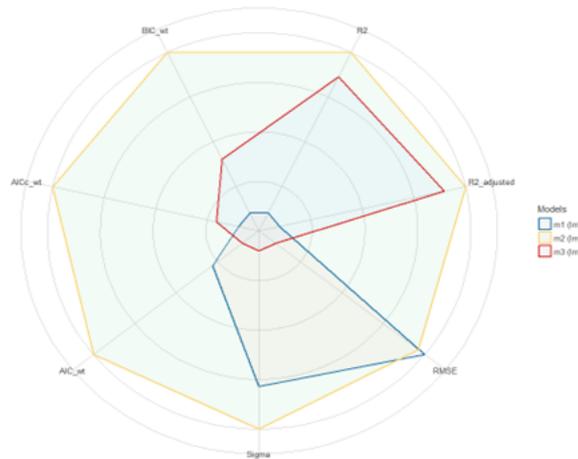
$$\text{Agirc}_n = \text{Inflation}_n$$

Le "-1" signifie qu'on ajuste le modèle de régression linéaire sans intercept.

**Résultats :**

Nom	$R^2$	$R^2$ (adj.)	RMSE	AIC weights	AICc weights	BIC weights	Performance-Score
m2	0.772	0.752	0.006	0.597	0.616	0.585	99.37%
m3	0.725	0.713	0.006	0.157	0.219	0.283	31.26%
m1	0.463	0.414	0.006	0.246	0.165	0.131	28.04%

La modélisation de la valeur du point Agirc-Arrco a impliqué l'évaluation de plusieurs modèles. Parmi eux, le **Modèle 2** a été retenu comme optimal en fonction de divers critères de performance.



Les résultats des tests incluent des mesures telles que le coefficient de détermination ( $R^2$ ), le  $R^2$  ajusté, la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (RMSE), et le score de performance. Le **Performance-Score** est une mesure globale qui prend en compte plusieurs facteurs de performance des modèles. Dans notre cas, le **Modèle 2** a obtenu un score de **99.37%**, indiquant une performance exceptionnelle par rapport aux autres modèles considérés. Ce score est calculé en tenant compte des poids associés aux critères tels que l'AIC, l'AICc, et le BIC. Ces critères sont des indicateurs de la qualité du modèle, prenant en considération à la fois la précision et la complexité.

Ainsi, le **Modèle 2** a été préféré en raison de sa performance supérieure globale, ce qui suggère qu'il offre une meilleure adéquation aux données observées par rapport aux autres modèles testés.

Ces différents indicateurs et les explications relatives aux régressions appliquées seront disponibles en Annexe 5.3.3.

Après avoir réalisé la modélisation des indices et indicateurs permettant de quantifier les taux de revalorisation pour chaque politique de revalorisation, on introduit désormais le chapitre consacré à l'étude des

différentes politiques de revalorisation. L'objectif de ce chapitre est de fournir un aperçu des types de revalorisation appliquées sur le marché des assurances, en montrant théoriquement certains avantages et des inconvénients de chaque approche.

On s'attachera à déterminer quelle politique offre la meilleure solution pour l'entreprise et les adhérents, en tenant compte de divers critères tels que les résultats financiers, les projections, les variations des provisions, et les tendances observées au fil du temps. Ce chapitre sera structuré de manière à offrir une analyse éclairée de ces politiques afin d'aider les parties prenantes à prendre des décisions éclairées en matière de revalorisation des rentes.

## **Troisième partie**

# **Projection du portefeuille**

## Chapitre 4

# Hypothèses et modélisation théorique des contrats

### 4.1 Présentation du Portefeuille

#### 4.1.1 Les risques et garanties

Les données à disposition correspondent aux garanties d'arrêt de travail, plus précisément aux assurés en situation d'incapacité et d'invalidité au 31 octobre 2022.

Au 31 octobre 2022, le portefeuille "incapacité" comprend 37 563 bénéficiaires de rentes. Ces personnes sont detentrices du contrat initial de prévoyance qui offre une garantie d'indemnités journalières. Cette garantie entre en jeu en cas d'activation due à un accident ou à une maladie, entraînant l'incapacité physique du titulaire à exercer son activité professionnelle. Les paiements des indemnités sont effectués mensuellement après une période d'attente de 3 jours (à compter du 4ème jour d'arrêt de travail)

La garantie "rente invalidité" couvre 31 905 contrats. Ces contrats sont détenus par les titulaires du contrat initial de prévoyance qui possèdent une garantie de rente d'invalidité activée en cas d'invalidité du titulaire. La garantie de "rente invalidité" prévoit le versement d'une rente si l'assuré devient totalement ou partiellement invalide avant l'âge de 62 ans. La rente versée est temporaire et court jusqu'à l'âge de 62 ans, correspondant à l'âge de départ à la retraite. Les informations disponibles pour chaque bénéficiaire comprennent :

- La date de naissance;
- La date d'entrée dans l'état;
- L'âge d'entrée dans l'état;
- La date de début d'incapacité;
- La date de début d'invalidité;
- La limite d'âge de la garantie;
- Le montant mensuel de la rente incapacité;
- Le montant annuel de la rente invalidité.

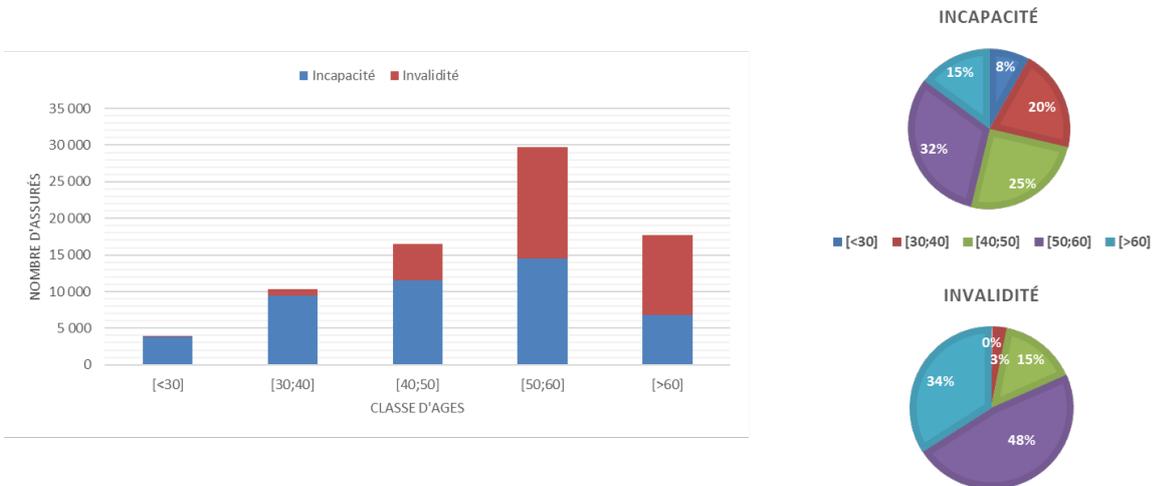
Au 31 octobre 2022. Voici une synthèse des caractéristiques fournies.

Garantie	Incapacité	Invalidité	Unité
Nombre de rentiers	37 563	31 905	
Age d'entrée moyen	44	47	En année
Rente moyenne	777	7 612	En euros
Age limite de la garantie	62	62	En année
Ancienneté moyenne	12	8	En mois/Année

### 4.1.2 Quelques statistiques descriptives

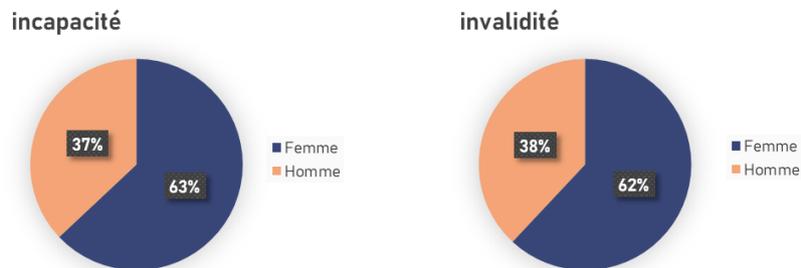
Après avoir décrit les caractéristiques et les garanties du produit, nous allons analyser la composition du portefeuille.

Âges :

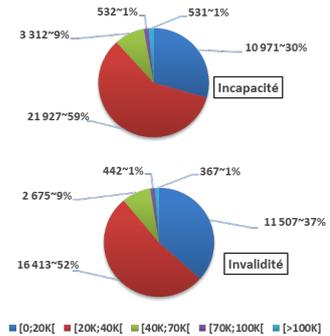
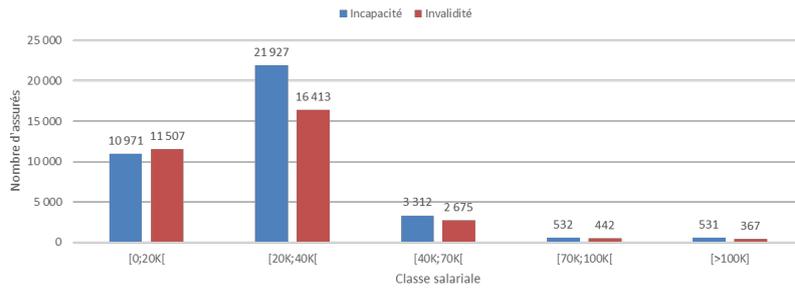


Les assurés ayant plus de 30 ans dominent le portefeuille "incapacité". Le portefeuille des invalides se différencie, 97% des assurés ont plus de 40 ans. Sur les deux portefeuilles, on dénombre plus d'assurés sinistrés entre 50 et 60 ans. Ce qui peut s'expliquer par l'effet de l'âge sur la santé donc l'exposition du corps en général.

sexe Le portefeuille est majoritairement composé de femme, à plus de 60% des deux portefeuilles.



Salaire annuel Le salaire annuel moyen est environ égal à 25K€.



90% des assurés présents dans le portefeuille au 31/10/2022 ont une base de garantie inférieure à 40K€, toute garantie confondue.

## 4.2 Entrées, sorties et sinistralité du portefeuille

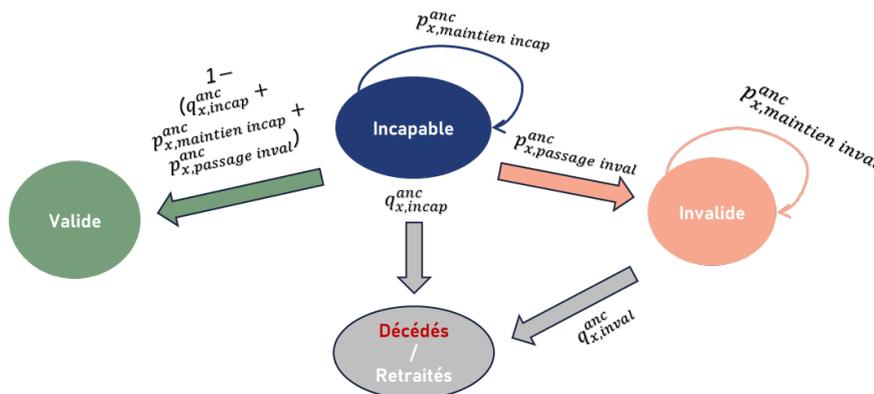
La projection est réalisée run-off, excluant les résiliations, pas de loi comportementale.

La projection de la sinistralité se fait avec un pas de temps annuel : l'état dans lequel se trouve l'individu en fin d'année est évalué sans modéliser les états parmi lesquels il passe pendant l'année.

Pour chaque individu, chaque scénario, chaque année, l'état de l'individu évolue aléatoirement selon son état en début d'année, son âge et le cas échéant son ancienneté en incapacité ou invalidité. Tous les individus en portefeuille considérés comme étant valides y demeurent. Pour les individus en portefeuille, leur état en fin d'année N-1 est le même que leur état en début d'année N. Les états dans lesquels les individus peuvent être sont les suivants :

- Valide;
- Incapable;
- Invalide;
- Retraité;
- Décédé;

Le schéma suivant résume les différents états des individus :



Dans le modèle, un retraité en début d'année reste toujours retraité en fin d'année, le décès du retraité n'est pas modélisé car il n'a pas d'influence sur nos projections. Évidemment, un individu décédé en début d'année

est toujours décédé en fin d'année. La modélisation est en revanche plus élaboré dès lors que l'individu est valide, incapable ou invalide en début d'année.

#### 4.2.1 L'individu est valide en début d'année

Si l'individu a 61 ans en début d'année, alors il est retraité en fin d'année. S'il a 60 ans ou moins en début d'année, alors il peut être dans les 4 autres états. Afin d'évaluer la probabilité que l'individu soit décédé en fin d'année, les taux de mortalité issu de la table TH/F 00-02 sont utilisés. La probabilité qu'un individu d'âge  $x$  en début d'année décède en cours d'année est notée  $q_x$  :

$$q_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

Avec  $l_x$  les nombres d'individus survivants.

Afin d'évaluer la probabilité que l'individu soit dans l'état d'incapacité en fin d'année, les lois d'incidence utilisées pour la tarification sont à nouveau utilisées.

La probabilité que l'individu soit incapable en fin d'année depuis  $k$  mois sachant qu'il est valide en début d'année est notée  $q_{x,k}^{incap}$ . La probabilité que l'individu soit incapable en fin d'année sachant qu'il est valide en début d'année est alors :

$$q_x^{incap} = \sum_{K=0}^{11} q_{x,k}^{incap}$$

La probabilité que l'individu soit invalide en fin d'année sachant qu'il est valide en début d'année est notée  $q_x^{inval}$ . Ainsi, si l'individu a 60 ans ou moins en début d'année, alors le tableau suivant résume les états dans lesquels il peut se trouver en fin d'année :

Etat	Décédé	Incapable	Invalide	Valide
Probabilité	$q_x$	$q_x^{incap}$	$q_x^{inval}$	$1 - q_x - q_x^{incap} - q_x^{inval}$

Afin de modéliser cette loi, pour chaque année, pour chaque scénario et pour chaque individu valide de 60 ans ou moins en début d'année, une variable aléatoire  $u$  suivant une loi uniforme entre 0 et 1 est simulée (la réalisation de  $U$  est notée  $u$ )

- Si  $u < q_x$ , alors l'individu est décédé en fin d'année;
- Si  $q_x \leq u < q_x + q_x^{incap}$  alors l'individu est incapable en fin d'année;
- Si  $q_x + q_x^{incap} \leq u < q_x + q_x^{incap} + q_x^{inval}$  alors l'individu est invalide en fin d'année;
- Si  $q_x + q_x^{incap} + q_x^{inval} \leq u$ , alors l'individu est valide en fin d'année.

De plus, dans le cas où l'individu devient incapable à la fin de l'année, une évaluation de son ancienneté en incapacité est effectuée.

#### 4.2.2 L'individu est en incapacité en début d'année

Si l'individu a 61 ans en début d'année, alors il est retraité en fin d'année. S'il a 60 ans ou moins en début d'année, alors il peut être dans les 4 autres états.

Afin d'évaluer la probabilité que l'individu soit décédé en fin d'année, nous utilisons la table de mortalité en incapacité du BCAC. La probabilité qu'un individu tombé en incapacité à l'âge  $x$  et en incapacité depuis  $anc$  mois en début d'année décède en cours d'année est notée  $q_x^{incap}$  :

$$q_{x,incap}^{anc} = \frac{l_{x,incapDC}^{anc} - l_{x,incapDC}^{anc+12}}{l_{x,incapDC}^{anc}}$$

Avec  $l_{x,incapDC}^{anc}$  les nombres d'individus tombés en incapacité à l'âge  $x$  et toujours en vie  $anc$  mois après. Afin d'évaluer la probabilité que l'individu soit toujours dans l'état d'incapacité en fin d'année, la table de maintien en incapacité du BCAC est utilisée. La probabilité qu'un individu tombé en incapacité à l'âge  $x$  et en incapacité depuis  $anc$  mois en début d'année soit toujours en incapacité en fin d'année, est notée  $p_{x,maintienincap}^{anc}$  :

$$p_{x,maintienincap}^{anc} = \frac{l_{x,incap}^{anc+12}}{l_{x,incap}^{anc}}$$

Avec  $p_{x,maintienincap}^{anc}$  le nombre d'individus entrés en incapacité à l'âge  $x$  et toujours en incapacité après  $anc$  mois. Afin d'évaluer la probabilité que l'individu soit dans l'état d'invalidité en fin d'année, la table de passage d'incapacité vers l'invalidité du BCAC est utilisée.

La probabilité qu'un individu tombé en incapacité à l'âge  $x$  et en incapacité depuis  $anc$  mois en début d'année passe en invalidité en fin d'année est notée  $p_{x,passageinval}^{anc}$  :

$$p_{x,passageinval}^{anc} = \frac{\sum_{i=0}^{11} l_{x,passageinval}^{anc+i}}{l_{x,incap}^{anc}}$$

Avec  $l_{x,incap}^{anc}$  le nombre d'individus entrés en incapacité à l'âge  $x$  et toujours en incapacité après  $anc$  mois et  $l_{x,passageinval}^{anc}$  le nombre d'individus entrés en incapacité à l'âge  $x$  passant en invalidité après  $anc$  mois d'incapacité.

Ainsi, si l'individu a 60 ans ou moins en début d'année, alors le tableau suivant résume les états dans lesquels il peut se trouver en fin d'année :

Etat	Décédé	Incapable	Invalide	Valide
Probabilité	$q_{x,incap}^{anc}$	$p_{x,maintienincap}^{anc}$	$p_{x,passageinval}^{anc}$	$1 - q_{x,incap}^{anc} - p_{x,maintienincap}^{anc} - p_{x,passageinval}^{anc}$

Afin de modéliser cette loi, pour chaque année, pour chaque scénario et pour chaque individu valide de 60 ans ou moins en début d'année, une variable aléatoire  $U$  suivant une loi uniforme entre 0 et 1 est simulée. La réalisation de  $U$  est notée  $u$  :

- Si  $u < q_{x,incap}^{anc}$ , alors l'individu est décédé en fin d'année;
- Si  $q_{x,incap}^{anc} \leq u < q_{x,incap}^{anc} + p_{x,maintienincap}^{anc}$  alors l'individu est incapable en fin d'année;
- Si  $q_{x,incap}^{anc} + p_{x,maintienincap}^{anc} \leq u < q_{x,incap}^{anc} + p_{x,maintienincap}^{anc} + p_{x,passageinval}^{anc}$  alors l'individu est invalide en fin d'année;
- Si  $q_{x,incap}^{anc} + p_{x,maintienincap}^{anc} + p_{x,passageinval}^{anc} \leq u$ , alors l'individu est valide en fin d'année.

### 4.2.3 L'individu est invalide en début d'année

Si l'individu a 61 ans en début d'année, alors il est retraité en fin d'année. S'il a 60 ans ou moins en début d'année, alors il peut être dans les 4 autres états.

Afin d'évaluer la probabilité que l'individu soit décédé en fin d'année, nous utilisons la table de mortalité en incapacité du BCAC. La probabilité qu'un individu tombé en invalidité à l'âge  $x$  et en invalidité depuis  $anc$  années en début d'année décède en cours d'année est notée  $q_{x,inval}^{anc}$  :

$$q_{x,inval}^{anc} = \frac{l_{x,invalDC}^{anc} - l_{x,invalDC}^{anc+1}}{l_{x,invalDC}^{anc}}$$

Avec  $l_{x,invalid}^{anc}$  les nombres d'individus tombés les nombres d'individus tombés en invalidité à l'âge  $x$  et en vie  $anc$  années après. Afin d'évaluer la probabilité que l'individu soit toujours dans l'état d'invalidité en fin d'année, la table de maintien en invalidité du BCAC est utilisée. La probabilité qu'un individu tombé en invalidité à l'âge  $x$  et en invalidité depuis  $anc$  années en début d'année soit toujours en invalidité en fin d'année est notée  $p_{x,maintien\ inval}^{anc}$  :

$$p_{x,maintien\ inval}^{anc} = \frac{l_{x,invalid}^{anc+1}}{l_{x,invalid}^{anc}}$$

Avec  $p_{x,maintien\ incap}^{anc}$  le nombre d'individus entrés en incapacité à l'âge  $x$  et toujours en incapacité après  $anc$  mois. Afin d'évaluer la probabilité que l'individu soit dans l'état d'invalidité en fin d'année, la table de passage d'incapacité vers l'invalidité du BCAC est utilisée.

La probabilité qu'un individu tombé en invalidité à l'âge  $x$  et en invalidité depuis  $anc$  années en début d'année soit toujours en invalidité en fin d'année est notée  $p_{x,maintien\ inval}^{anc}$  :

$$p_{x,maintien\ inval}^{anc} = \frac{l_{x,invalid}^{anc+1}}{l_{x,invalid}^{anc}}$$

Avec  $l_{x,invalid}^{anc}$  le nombre d'individus entrés en incapacité à l'âge  $x$  et toujours en incapacité après  $anc$  mois et  $l_{x,passage\ inval}^{anc}$  le nombre d'individus entrés en incapacité à l'âge  $x$  passant en invalidité après  $anc$  mois d'incapacité.

Ainsi, si l'individu a 60 ans ou moins en début d'année, alors le tableau suivant résume les états dans lesquels il peut se trouver en fin d'année :

Etat	Décédé	Invalide	Valide
Probabilité	$q_{x,invalid}^{anc}$	$p_{x,maintien\ inval}^{anc}$	$1 - q_{x,invalid}^{anc} - p_{x,maintien\ inval}^{anc}$

Afin de modéliser cette loi, pour chaque année, pour chaque scénario et pour chaque individu valide de 60 ans ou moins en début d'année, une variable aléatoire  $U$  suivant une loi uniforme entre 0 et 1 est simulée (la réalisation de  $U$  est notée  $u$ ) :

- Si  $u < q_{x,invalid}^{anc}$ , alors l'individu est décédé en fin d'année;
- Si  $q_{x,invalid}^{anc} \leq u < q_{x,invalid}^{anc} + p_{x,maintien\ inval}^{anc}$  alors l'individu est invalide en fin d'année;
- Si  $q_{x,invalid}^{anc} + p_{x,maintien\ inval}^{anc} \leq u$  alors l'individu est valide en fin d'année.

1000 trajectoires d'évolutions des états sont simulées.

### 4.3 Les flux techniques

La charge de sinistres de chaque garantie est modélisée à partir des termes du contrat et des futurs états.

	Garanties	Prestations
AT	Incapacité	Loi de maintien en incapacité
	Invalidité en attente et invalidité	Loi de passage en invalidité
		Loi de maintien en invalidité

La modélisation étant annuelle, certaines approximations sont effectuées :

- **Individu Valide :**

- Aucune prestation ni cotisation en début ou en fin d'année.
- **Individu en Incapacité :**
  - Décédé en fin d'année : Rente proportionnelle aux mois vécus ;
  - Devenu Valide : Aucune prestation (hypothèse de rémission au début de l'année) ;
  - Devenu Retraité : Aucune prestation (hypothèse de départ à la retraite au début de l'année) ;
  - Devenu Invalide : Prestation selon le nombre de mois en incapacité.
- **Individu Invalide :**
  - Décédé en fin d'année : Rente basée sur les caractéristiques personnelles ;
  - Devenu Valide : Aucune prestation (hypothèse de rémission au début de l'année) ;
  - Restant Invalide : Rente d'invalidité ;
  - Devenu Retraité : Aucune prestation (hypothèse de départ à la retraite au début de l'année).
- **Retraités :**
  - Aucune prestation, qu'ils soient valides ou invalides.
- **Cotisations :**
  - Seuls les individus valides paient des cotisations.

## 4.4 Modélisation de l'actif

On considère que le portefeuille d'actifs de la compagnie est constitué de la façon suivante :

Type d'actifs	Allocation cible
Actions	16%
Obligations	60%
Immobilier	20%
Monétaire	4%

### 4.4.1 Hypothèses financières

Les chocs réglementaires sont appliqués conformément aux normes édictées par l'EIOPA.

La projection des investissements est réalisée selon le Scénario suivant qui sera extrapolé sur 30 ans :

Dynamique	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Performances actions	10,60%	8,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%	9,50%
Rendements Actions	0,54%	0,30%	0,53%	0,58%	0,40%	0,12%	0,31%	0,20%	-0,01%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%	0,60%
Immobilier	2,92%	-3%	3,25%	-0,40%	1,78%	0,00%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%	-0,64%
Monétaire	0,41%	0,54%	0,65%	0,72%	0,78%	0,83%	0,87%	0,93%	0,98%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	1,03%	

FIGURE 4.1 – Dynamique de l'actif

### 4.4.2 Stratégies d'investissements

#### Allocation cible d'actif

Opter pour une stratégie d'allocation nous donne la possibilité de définir la valeur de marché cible à atteindre pour chaque classe d'actifs, de manière à couvrir les flux techniques de manière optimale.

**Exemple :** Supposons que la valeur de marché totale de notre portefeuille d'actifs soit de 110k€ pour l'année projetée. Supposons également une répartition d'actifs fixe dans le portefeuille : 80% en obligations, 20% en actions. Par conséquent, le montant des obligations dans le portefeuille s'élève à 88k€ et 22k€ pour les actions. Pour l'année consécutive projetée, supposons que la valeur de marché de notre portefeuille passe à 100k€. Le portefeuille d'actifs a donc perdu de sa valeur et nous devons désinvestir 10k€ au total sur les actions et les obligations, de telle sorte que l'allocation cible soit toujours respectée. Pour tenir compte de ce désinvestissement, nous envisageons une stratégie d'allocation d'actifs : l'allocation cible des flux.

La stratégie d'allocation cible des flux consiste à allouer le cash-flow total en fonction de notre vecteur d'allocation renseigné au départ. Dans le cadre de notre précédent exemple, nous optons pour désinvestir suivant la répartition d'actifs fixe. Par conséquent, 80% des 10k€ et 20% des 10k€ sont désinvestis respectivement dans le portefeuille d'actions et dans le portefeuille obligataire. En fin d'année, les montants des actifs en face du passif généré par l'activité modélisée sont estimés de telle sorte que leurs proportions soient conforme à l'allocation cible :

$$\text{Action} = 16\% * PM ;$$

$$\text{Obligation} = 60\% * PM ;$$

$$\text{Immobilier} = 20\% * PM ;$$

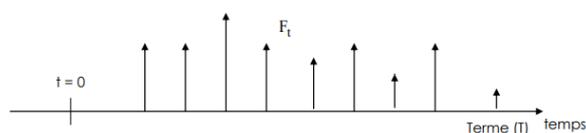
$$\text{Monétaire} = 4\% * PM .$$

Où PM est la somme des provisions mathématiques constituées.

#### 4.4.2.1 Adossement en duration

Pour être en mesure de revaloriser les rentes, l'assureur doit faire en sorte que les placements à l'Actif soient tels qu'ils correspondent, tant en rendement qu'en disponibilité, aux exigences des engagements au Passif. Pour caler la politique de placements (en obligations notamment) avec les engagements constitués, nous devons tenir compte de la duration du Passif de l'assureur. L'approche par un équilibrage de duration de l'actif et du passif est souvent utilisée pour aborder les problèmes d'ALM. Dans le cas où le gap de duration serait négatif, autrement dit si la duration du passif est supérieure à celle de l'actif, l'assureur est en position courte. Il encourrait un risque de baisse des taux. Au contraire, si le gap de duration est positif, alors le risque encouru est un risque de hausse des taux.

**Valeur actuelle, Duration et sensibilité** Soit une série de flux de prestations versées à des périodes  $t=1, \dots, T$ .



■ La valeur actuelle de la série de flux est :

$$VA(T) = \sum_{t=1}^T \frac{F_t}{(1+r_t)^t}, \text{ avec } r_t \text{ le taux d'actualisation de l'année } t.$$

■ Dans la pratique, deux approches de la duration sont en général retenues :

- La duration comme durée moyenne des flux futurs :
  - Avantage : plus simple à calculer et à suivre, oriente la stratégie d'investissement des obligations.
  - Limite : ne tient pas compte de l'option de rachat pour les contrats d'épargne.
- La duration comme sensibilité de la valeur actuelle des flux aux mouvements de la courbe des taux.

- Avantage : capte l'incertitude liée à l'option de rachat des contrats d'épargne,
- Limite : complexe, car peut nécessiter de faire plusieurs calculs stochastiques.
- Point d'attention : Nécessite une utilisation pragmatique lorsqu'on a une stratégie d'investissement du type buy and hold sur les actifs obligataires.

**Duration de Macaulay : La duration comme durée moyenne des flux futurs garantis**

- Dans un premier temps, on détermine tel que  $VA(T) = \sum_{t=1}^T \frac{F_t}{(1+r)^t}$ , avec  $r$  le taux actuariel
- La duration de Macaulay est calculée via la formule suivante :  $D = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{t \cdot F_t}{(1+r)^t}}{VA(T)}$ .

Nous investissons à chaque période sur les obligations qui construisent une duration sensiblement proche à celle du passif global. L'horizon d'exercice est annuel. Il s'agit donc d'une stratégie dynamique, qui suppose que le gestionnaire soit suffisamment attentif et présent sur le marché pour saisir les opportunités d'arbitrage annuelles, le cas échéant faisant intervenir ses fonds propres.

**Sensibilité** La duration comme sensibilité de la valeur actuelle des flux au mouvement de la courbe des taux :

$$\sum_{t=1}^T \frac{-D}{(1+r)^t}$$

La Duration modifiée est la variation relative de la valeur actualisée des flux au taux d'intérêt.

**4.4.2.2 Projection des actifs en valeur de marché**

■ Actions

Afin de pouvoir projeter la valeur de marché des actifs composant le portefeuille, nous faisons référence à la dynamique de l'actif 4.1. Chaque année projetée, on utilise les caractéristiques suivantes :

- La valeur de marché notée  $VM_p^a$ ;
- La performance de l'action  $n_p^a$ .

La valeur de marché de l'action considérée est mise à jour via les prédictions du tableau de la dynamique des actifs. Cette mise à jour s'effectue par le biais la performance. Ainsi, nous avons :

$$VM_p^a = n_p^a * VM_{p-1}^a$$

■ Obligations

Une obligation est définie dans notre modèle par :

- Son nominal (ou valeur faciale), noté  $N^o$ ; Il correspond au capital de départ emprunté par l'émetteur de l'obligation;
- Son coupon : Il correspond au versement périodique d'un intérêt au détenteur de l'obligation  $C_{p_t}$ ;
- Son taux de rendement actuariel, noté  $\tau$ ;
- Sa valeur de marché notée à l'instant p,  $VM_p^o$ ;
- Sa date d'achat. Elle correspond à l'instant où le titre obligataire a été acheté par son détenteur;
- Sa date d'échéance (ou de maturité) notée T. Il s'agit de la durée de vie de l'obligation.

La valeur de marché d'une obligation est la valeur actualisée des flux futurs probabilisés par le défaut de l'émetteur (coupons et nominal) selon la courbe des taux. En utilisant une actualisation continue, nous avons :

$$VM_p^0 = \sum_{t=1}^T e^{-\tau * t} C_{p_t} + e^{-\tau * T} C_{p_T}$$

Notre portefeuille d'obligation est composé uniquement d'OATi afin de prendre en compte l'inflation à l'actif. Les 7 OATi sont :

Titre	Date d'échéance
OATi 2,10 %	25 juillet 2023
OATi 0,10 %	1 mars 2025
OATi 0,10 %	1 mars 2028
OATi 3,40 %	25 juillet 2029
OATi 0,10 %	1 mars 2032
OATi 0,10 %	1 mars 2036
OATi 0,55 %	1 mars 2039

TABLE 4.1 – Les OATi

Puisque nous investissons sur des titres d'état, on fait l'hypothèse que le risque de défaut est nul. les notions associées aux Oati sont disponibles en Annexes 5.3.3.

## 4.5 Projection théorique des postes étudiés

Chaque année, les revenus financiers de l'année "i" sont déterminés en se basant sur la valeur de l'actif financier à la fin de l'année "i-1" et le rendement de cet actif pendant l'année i. Les produits financiers de l'année i sont calculés de la manière suivante :

$$\text{produits} * \phi_i = \text{Actions}_{i-1} * \text{Rdt actions}_i + \text{Obligations}_{i-1} * C_{p_t}$$

Avec :

- $\text{Actions}_{i-1}$  le montant d'actions en fin d'année i-1 ;
- $\text{Obligations}_{i-1}$  le montant d'obligations en fin d'année i-1 ;
- $\text{Rdt actions}_i$  le rendement des actions lors de l'année i.

Ainsi, lors de la première évaluation, il n'y a pas de produits financiers car considérée comme point de départ. Dans la modélisation, les éléments suivants sont calculés :

- La somme des prestations reçues pendant l'année i est notée :  $\text{prestations}_i$  ;
- La somme des provisions d'incapacité en fin d'année i est notée :  $\text{PM}_{\text{incap}}$  ;
- La somme des provisions d'invalidité en attente en fin d'année i est notée :  $\text{PM}_{\text{inval att}}$  ;
- La somme des provisions d'invalidité en fin d'année i est notée :  $\text{PM}_{\text{inval}}$ .

On observe les résultats suivants

- Les Provisions techniques en fin d'année valent :  $\sum_{i=1}^{\text{nb d'individus}} \text{PM}^i$  ;
- La Risk Margin notée RM ;
- Le SCR.

NB : Le montant total réinvesti dans les actifs est estimé en fin d'année  $i$  comme étant égal au montant total des provisions mathématiques.

Le produit financier correspond au rendement des actifs en représentation des provisions techniques placées en date 0.

Après avoir établi les fondements théoriques des contrats et exposé en détail les hypothèses sous-jacentes à la modélisation, la démarche se poursuit avec l'exploration des résultats obtenus. On se penche maintenant sur les différentes politiques de revalorisation des rentes et leur impact dans chaque scénario d'inflation. L'objectif réside dans l'évaluation des impacts sur certains indicateurs clés présentés dans la suite.

# Chapitre 5

## Analyse des résultats

L'analyse est menée en mode "Stand Alone", ce qui permet d'évaluer la rentabilité inhérente du produit sans tenir compte du portefeuille existant. Cette méthode se révèle exigeante en termes de capital, étant donné que l'effet de diversification n'est pas pris en compte dans les calculs du SCR et de la Marge de Risque.

### 5.1 Projection des rentiers

Nous explorons une analyse approfondie des résultats issus de la modélisation des états. Après avoir construit des modèles de représentation des différents états sous python et comme présenté à la section 4.2, notre attention se tourne vers l'examen des transitions d'état à état pour chaque individu. À travers cette étude, nous visons à obtenir un aperçu clair de la dynamique des passages d'un état à un autre, ainsi que du nombre d'incidences associées à chaque transition, en adoptant une perspective des chaînes de Markov. Les projections ont été obtenues via une simulation de Monte Carlo avec 10 000 réalisations des variables aléatoires.

**État 0** : Valide;

**État 1** : Incapable;

**État 2** : Invalide;

**État 3** : Retraité;

**État 4** : Décédé, état absorbant.

L'horizon de projection est de 30 ans, et le pas de projection est fixé à une année. Cette exploration des transitions entre les différents états nous permettra de mieux comprendre les tendances et les évolutions potentielles des situations dans le temps.

Au 31/10/2022, il y a 37563 incapables, 31905 invalides, pour un nombre total de 69468 assurés. Ci-dessous l'évolution des rentiers.

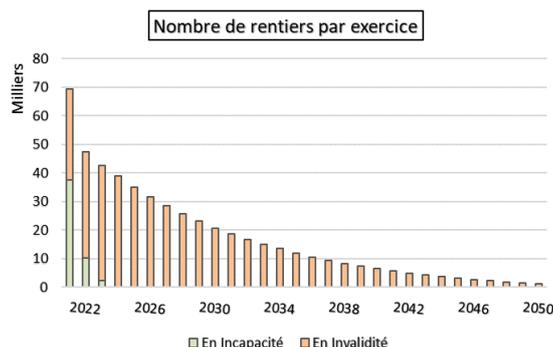
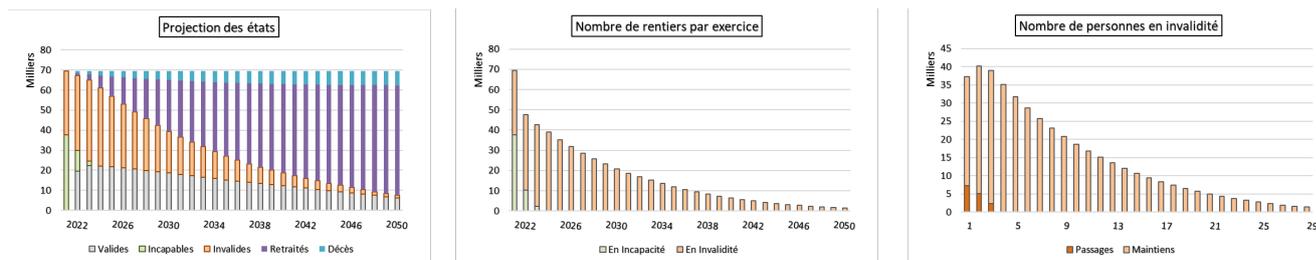


FIGURE 5.1 – Nombre de rentiers par exercice

La durée de maintien en invalidité est de 10 ans.



Le nombre de valides dans le portefeuille augmente strictement au fil des années projetées. Cette hausse s’explique d’une part, par l’absence de loi d’incidence de l’incapacité/Invalidité .

En effet tous les individus se trouvant en état valide y demeurent jusqu’à la retraite ou au décès. D’autre part partant de 31905 incapables, 19857 redeviennent valides, ceci explique le pic de valide en 2023. En l’absence d’hypothèse d’incidence, il n’y a plus d’incapables au bout de trois ans, En raison d’un passage en invalidité ou un retour à la validité.

Le nombre d’invalides dans le portefeuille augmente strictement les 4 premières années en raison du passage de certains incapables en invalidité. On observe une décroissance progressive dû principalement aux départs à la retraite, et de façon secondaire en raison des retours en états valide. Cette décroissance s’explique également par l’absence d’incidence de l’invalidité à partir de l’état valide.

On a un taux de décès assez faible toute la durée. Le nombre total de décès observé dans le portefeuille durant ces 30 années de projection est de 8691.

**NB :** La modélisation des états dans les scénarios de chocs est déterminante pour le calcul du SCR longévité.

## 5.2 Les indicateurs à étudier

Il s’agit dans cette section de présenter les paramètres essentiels qui sous-tendent l’évaluation de la performance et de la stabilité financière, sous Solvabilité 2. Chaque paramètre a un rôle spécifique dans l’évaluation approfondie du compte de résultat et du bilan. Ces indicateurs concernent spécifiquement :

- Les prestations;
- Le résultat;
- Solvabilité 2.

### Indicateurs de sinistres

1. Taux d’incidence Il correspond à la probabilité qu’un contrat en portefeuille soit sinistré.

$$\text{Taux d'incidence} = \frac{\text{Nombre de contrats sinistrés}_n}{\text{Nombre total de contrat}_n}$$

2. Taux de maintien : Il mesure la persistance dans l’état d’incapacité ou d’invalidité.

Pour analyser l’état de la sinistralité, une segmentation par risque permet une meilleure analyse du régime. L’évolution de ces indicateurs permet de dépister une dérive de l’allongement de la durée moyenne des arrêts par exemple. L’analyse se fait dans la durée, sur plusieurs années.

## Indicateur financier : La Net Asset Value

Par hypothèse notre portefeuille d'actif est adossé à nos provisions à chaque clôture. La Marge de notre actif sur notre passif représente le profit que l'on réalise sur l'activité projetée. C'est cette marge que nous définissons comme "Net Asset Value". Elle représente la valeur actuelle des profits futurs (cash-flows) générés par les contrats en portefeuille. Sa détermination repose sur la projection des marges futurs à partir du portefeuille d'affaires actuellement en cours.

$$NetAssetValue = \sum_i \frac{(Actif - passif)_i}{(1 + r_i)^i}$$

C'est une mesure intéressante car elle capture la rentabilité de l'activité.

## Indicateurs S2

En termes de couverture des exigences en capital, les indicateurs suivants sont importants à suivre :

1. Le SCR

2. Ratio de solvabilité : FP/SCR

Le ratio de solvabilité résulte de la division des fonds propres éligibles par le capital de solvabilité requis. Un ratio supérieur à 100% signifie une conformité complète aux exigences réglementaires. Au plus ce ratio est élevé, au plus le bilan de la compagnie est estimé robuste. Le minimum requis en matière de ratio de solvabilité est de 100%. Il sert notamment à anticiper les crises de grande ampleur, provoquées par des catastrophes exceptionnelles, comme la crise sanitaire de 2020.

3. Le ratio SCR/BE

Il permet de mesurer le capital requis par rapport au niveau d'engagement

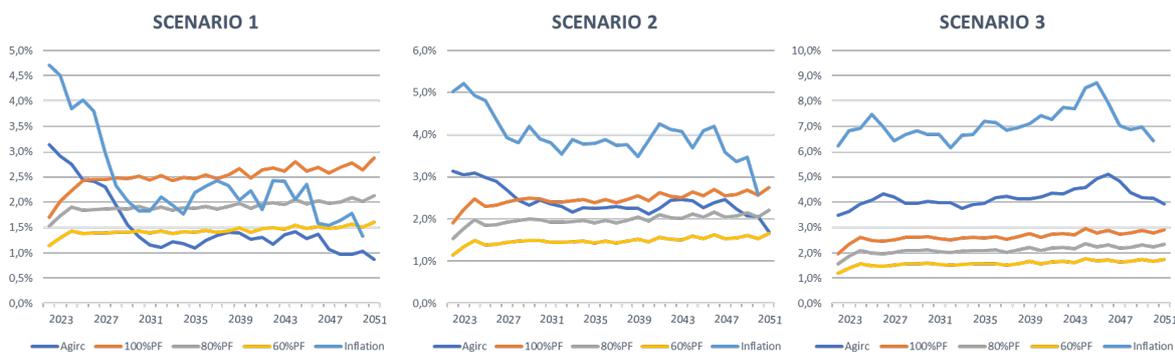
## 5.3 Présentation des impacts

L'évolution de l'actif au fil des années révèle une relation étroite avec les provisions techniques. Cette corrélation découle de notre stratégie d'investissement, où à chaque étape de la projection, l'actif est modélisé en fonction des engagements (provisions techniques) associés aux contrats en cours. Cette approche méthodique garantit que la rémunération des prestations dépend des performances techniques et financières de l'assureur, mais uniquement en ce qui concerne les individus inclus dans le portefeuille à la clôture de chaque exercice. Cette représentation souligne l'importance cruciale de la gestion prudente des actifs car elle influence directement la capacité de l'assureur à honorer ses obligations envers ses assurés. Ce aspect n'est pas étudié dans ce mémoire en l'absence des données nécessaires.

### 5.3.1 Les provisions mathématiques

#### Les taux de revalorisation servis par Scénario

Une observation importante mérite d'être soulignée : en cas de taux négatif, il n'y aura pas de revalorisation.



### Scénario 1 :

Les taux de revalorisation Agirc garde la même dynamique que les taux d’inflation. Une revalorisation décroissante jusqu’en 2031 de 4,7% à 1,8% et qui oscille par la suite dans un voisinage proche de 2%. Elle offre sur la durée des revalorisations plus faibles par rapport aux autres politiques et reste éloignée de l’inflation . La deuxième politique, dépendante des produits financiers avec différentes proportions, observe une croissance faible pour toutes les proportions, seuls les taux relatifs à 100% des produits financiers restent constamment au-dessus de l’inflation. Dans ce cas de figure une intuition sur le compromis entre satisfaction des assurés via une revalorisation proche de l’inflation et une prudence financière en minimisant les engagements, serait de revaloriser via 80% des produits financiers. Il est nécessaire de trouver un compromis entre recherche de rendements et prudence financière.

### Scénario 2 :

Les taux d’inflation sont strictement supérieurs aux taux de revalorisation, ils varient entre 5 et 1.3% sur tout l’horizon de projection. La politique de revalorisation Agirc oscille entre les taux 80% et 100% des produits financiers. Les revalorisations sont élevées par rapport au premier Scénario mais reste réalistes se trouvant dans un voisinage de 2%. Dans ce Scénario, revaloriser les rentes via 100% des produits financiers ne suffit pas à atteindre une revalorisation égale à l’inflation.

### Scénario 3 :

L’inflation et les taux Agirc s’éloigne des autres politiques avec des taux au-dessus de 4% en moyenne pour Agirc et 6% pour l’inflation, on imagine une dégradation prononcée des comptes dans ce cas de figure. On constate une légère hausse des taux de revalorisation via les produits financiers qui reste néanmoins inférieurs à 3% sur tout l’horizon de projection.

L’aspect crucial de maintenir le pouvoir d’achat des assurés trouve une résonance particulière dans ces résultats. Les variations entre les politiques de revalorisation s’alignent avec la stabilité future de l’inflation. Les résultats suggèrent que la politique basée sur les produits financiers pourrait mieux répondre à cet impératif. Toutefois, la politique de revalorisation basée sur une proportion des produits financiers, générant des taux servis plus élevés met en évidence l’équilibre délicat entre la recherche de contrats attractifs et la nécessité de maintenir une base solide pour faire face aux obligations futures. En même temps, la politique de revalorisation basée sur l’évolution du point Agirc-Arrco, souvent liée à l’inflation, peut contribuer à soutenir la solvabilité et à préserver la confiance des assurés dans un contexte d’incertitude économique.

**Provisions techniques**

Politique de revalorisation	SC1	SC2	SC3
Hors revalorisation	1,6 MD	1,4 MD	1,1 MD
Agirc	132%	149%	194%
100%PF	145%	146%	150%
80%PF	134%	135%	138%
60%PF	124%	125%	127%

**1. Impact sur le Best Estimate (BE)**

**Politique de Revalorisation Agirc**

Contrairement aux autres politiques de revalorisation étudiées, les provisions estimées via la politique de revalorisation Agirc incluent les revalorisations futures, entraînant des montants de provisions plus importants, excepté dans le premier scénario. L'impact est particulièrement marqué dans les deux derniers scénarios, avec des augmentations de +49% et +94% de l'impact sur le BE. Cela s'explique par le fait que les taux de revalorisation appliqués sont adossés au taux d'inflation. Le fait de pouvoir prendre en compte la revalorisation dans le provisionnement suggère une plus grande prudence dans l'application de cette politique de revalorisation.

**Politique d'après les Produits Financiers**

La capitalisation des montants de provisions investis permet d'assurer cette garantie. En supposant dans notre modélisation que l'inflation s'accompagne d'une hausse des taux, donc des rendements plus importants, cela explique l'évolution croissante de notre BE avec le changement de scénario. Bien évidemment, l'impact sur le BE est croissant avec le pourcentage de produits financiers investis dans la revalorisation.

**Autres Observations**

Le cas particulier du premier scénario, où les produits financiers ont un impact BE plus important, s'explique par le fait que le taux d'inflation chute rapidement vers 2% et le taux Agirc vers 1%, ce qui n'est pas suffisant pour évaluer, même de façon cumulée, la revalorisation de 100% et 80% des produits financiers qui servent des taux plus élevés initialement.

**2. Analyse du taux de couverture des prestations futures**

Nous nous intéressons au taux de couverture qui traduit le nombre de fois, où le rapport entre BE + RM et la valeur actuelle des prestations futures est supérieur à 100% sur les 1000 trajectoires des états simulées.

Politique de revalorisation	SC1	SC2	SC3
Hors revalorisation	100%	100%	100%
Agirc	86,37%	90,38%	94,62%
100%PF	70,94%	76,45%	84,07%
80%PF	68,98%	75,22%	83,74%
60%PF	70,90%	77,17%	94,69%

Évolution des prestations versées

$$R^n \rightarrow R^n * (1 + T_x^{n+1}) \rightarrow \dots \rightarrow R^n * (1 + T_x^{n+1}) * (\dots) * (1 + T_x^{n+k})$$

$R^n$  = Montant de la rente de base  
 $T_x^n$  = Taux de revalorisation servi l'année n

**Observation générale**

On observe un taux de couverture à 100% lorsqu'on ne revalorise pas les rentes, démontrant une bonne évaluation des prestations futures par notre modèle.

Dans les deux premiers scénarios, la politique Agirc a le meilleur taux de couverture en raison de sa prise

en compte dans le provisionnement. Dans le scénario 3, la politique de revalorisation 60PF a le meilleur taux de couverture car elle propose des revalorisations à 1%, ce qui conforte l'idée qu'une revalorisation plus faible diminue l'erreur de l'évaluation de l'engagement de l'assureur (provisions techniques). Cette analyse indique que la politique Agirc est la plus optimale pour assurer la couverture des prestations futures, même dans des scénarios inflationnistes variés. En face, la revalorisation via des produits financiers permet selon le scénario d'avoir des prestations plus faibles. Cependant, en termes de provisionnement, elle ne permet pas d'être prudente et expose l'assureur à des imprévus.

#### **Corrélation positive entre le taux de couverture et le taux d'inflation**

En effet, si l'augmentation de l'inflation ainsi que celle des taux de revalorisations entraîne une augmentation des prestations, l'augmentation des taux d'actualisation a un effet contraire sur l'évaluation des prestations futures. Plus les taux seront élevés, plus les prestations futures rapportées à aujourd'hui seront faibles, ce qui impacte négativement notre BE.

#### **Croissance des taux de couverture**

Les taux de couverture augmentent avec l'inflation car, certes, le BE baisse, mais les prestations futures rapportées à aujourd'hui baissent plus vite du fait des taux appliqués plus longtemps (30 ans) qui augmentent drastiquement par rapport à l'inflation.

#### **Analyse jointe des deux indicateurs**

La revalorisation étant faible pour la politique à 60PF des produits financiers, le décalage entre les prestations (revues à la hausse du fait de la revalorisation) et le BE constitué à l'initial n'est pas très grand, ce qui entraîne un taux de couverture abordable.

Cette observation est accentuée par une évolution de la courbe des taux impactant plus les prestations actualisées comparativement au BE (par exemple dans le scénario 3). En résumé, le BE est moins sensible à la courbe des taux par rapport aux prestations observées actualisées.

### **5.3.2 La Net Asset Value**

Une NAV>0 signifie que la stratégie d'investissement a généré des fonds propres.

Une NAV<0 traduit que l'assureur devra injecter des fonds supplémentaires pour la gestion de ce portefeuille.

On observe les résultats suivants :

<b>Politique de revalorisation</b>	S1	S2	S3
Agirc	1 302 M€	46 M€	-1 495 M€
100%PF	1 297 M€	47 M€	-1 249 M€
80%PF	1 310 M€	97 M€	-1 176 M€
60%PF	1 323 M€	144 M€	-1 105 M€

Chaque montant correspond à la somme des NAV futures actualisées par scénario × la politique revalorisation.

De façon générale, on dégage du profit sur les deux premiers scénarios et on est défavorable sur le troisième. Par ailleurs, on a un résultat plus favorable avec la politique basée sur 60% des produits financiers. Les scénarios d'inflation et la prise en compte des revalorisations futures dans le provisionnement augmentant drastiquement le BE, on a une NAV moins favorable pour le point Agirc.

#### **Sur la décroissance de la NAV**

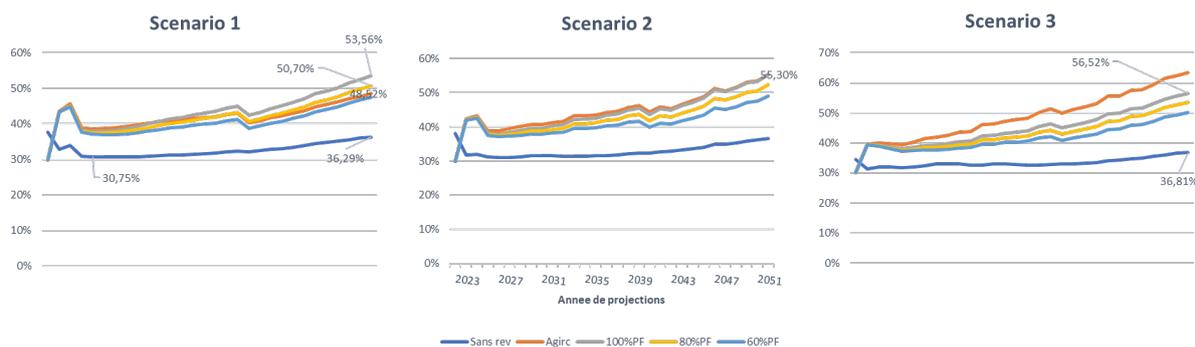
Dans les scénarios 1 et 2 où les taux de revalorisation ne sont pas très élevés, les investissements liés à l'activité permettent de générer des fonds propres.

La décroissance s'explique par le fait que la capitalisation des investissements (via notre hypothèse financière) n'est pas suffisante pour faire face aux évolutions BE d'un scénario à l'autre. De plus, la valeur de l'actif,

majoritairement composé d'obligations, baisse avec l'évolution des taux. Cet impact est accentué dans le scénario 3. Pour résumer on note :

- La baisse des rendements des actifs d'un scénario à l'autre, du fait de la hausse des taux;
- L'augmentation plus rapide des BE, car on revalorise d'une année à l'autre;
- L'augmentation pour l'Agirc, car elle prend en compte les revalorisations futures.

### 5.3.3 SCR/BE



Lorsque les rentes ne sont pas revalorisées, le ratio SCR/BE garde la même tendance, une croissance de 30% à 36%. Cette constatation met en lumière la délicatesse du processus de définition de la politique de revalorisation. Cette croissance soutenue du ratio SCR/BE dans le cadre de l'application des revalorisations, souligne que les besoins en capital augmentent de manière plus prononcée par rapport au BE (et décroissent moins vite). Ce ratio représente l'augmentation du BE nécessaire pour absorber des Scénarios de pertes inattendues et limiter la probabilité de ruine à 0,5% à l'horizon d'un an.

#### Scénario 1

Les ratios sont relativement proches jusqu'en 2036. Le SCR représente une proportion des provisions constituées allant jusqu'à 55%, 50%, 48% pour respectivement la revalorisation 100% des produits financiers, la revalorisation 80% et la revalorisation Agirc.

#### Scénario 2

Les ratios sont relativement proches jusqu'en 2033. La politique Agirc entraîne plus de ressource supplémentaire à détenir. Le SCR rapporté au BE est plus faible pour la revalorisation via les produits financiers.

#### Scénario 3

On a des divergences marquées dès les premières années. Ce Scénario d'inflation a amplifié les différences au niveau du SCR/BE. Cela est dû en partie à l'augmentation des taux d'intérêt, donc de la diminution des BE et un risque de taux plus considérable.

La politique 60% entraîne des SCR rapporté au BE plus faible dans tous les Scénarios inférieur à 50%. Le changement de Scénario d'inflation entraîne une augmentation moyenne de 2% du ratio SCR/BE.

Le rapport reste élevé, compris entre 30 et 70% du BE Cette observation suggère que les risques potentiels liés au portefeuille d'assurance prennent de l'ampleur au fil du temps, exposant ainsi l'entreprise à des engagements plus substantiels, principalement générés par les politiques de revalorisation. Il en résulte que les conséquences financières des chocs inattendus ou des événements adverses sont considérablement amplifiées.

# CONCLUSION

En parcourant l'ensemble des analyses et des résultats présentés dans ce mémoire, il ressort que l'activité des rentes est impactée par plusieurs facteurs :

1. Financiers : Gestion de l'actif, être attentif aux opportunités et aux évolutions du marché.
2. Techniques : Les politiques de revalorisation des rentes.

L'application des mécanismes de revalorisation des rentes en prévoyance collective revêt une importance cruciale pour les assureurs, les assurés et la stabilité financière de l'entreprise. À travers une exploration approfondie de deux politiques de revalorisation distinctes, à savoir la revalorisation basée sur l'évolution du point Agirc-Arrco et la revalorisation basée sur une proportion des produits financiers, d'importantes perspectives ont émergé quant à la gestion optimale des engagements de l'assureur. La mise en lumière des mécanismes de revalorisation a permis de dégager des enseignements essentiels. Les résultats ont démontré que la revalorisation basée sur l'évolution du point Agirc-Arrco présente une tendance supérieure en termes de résultats, indiquant une meilleure adéquation entre les ajustements des rentes et les évolutions économiques. Cela suggère un alignement avec l'objectif de maintenir le pouvoir d'achat des assurés, évitant ainsi les résiliations en cas de dégradation de ce pouvoir d'achat.

D'un autre côté, les politiques de revalorisation basées sur une proportion des produits financiers ont mis en évidence l'impact positif de la gestion financière performante sur l'augmentation des prestations. Cependant, il est important de noter que cette approche nécessite une évaluation minutieuse, car une augmentation des prestations peut engendrer des défis liés aux engagements futurs et à la solvabilité.

3. Économiques :

A travers la réalisation des différentes évaluations dans divers scénarios d'inflations, nous avons constaté que l'évolution de l'inflation impact directement l'engagement assureur, à travers notamment l'augmentation des prestations, l'augmentation des taux d'intérêt qui s'en suit ainsi que l'augmentation des taux de revalorisations servis.

**Perspectives Futures :** Ce mémoire offre une exploration de l'évolution d'un portefeuille de rente en cours, en parcourant des mécanismes de revalorisation des rentes en prévoyance collective. Les résultats ont mis en lumière les implications financières associées. En guise d'amélioration, l'étude pourrait prendre en compte la satisfaction des assurés à travers par exemple la définition d'un taux de revalorisation cible. L'objectif étant que les assureurs soient guidés vers une prise de décision éclairée en matière de politiques de revalorisation, avec un engagement constant envers le maintien de l'équilibre entre stabilité financière et satisfaction des assurés. Une amélioration supplémentaire serait également de probabiliser la survenance des scénarios d'inflation étudiés et d'approfondir les recherches sur la corrélation entre taux d'inflation et taux d'intérêt.

### **Limites de l'étude**

Les principales limites de l'étude sont relatives aux données à dispositions. Dans l'idéal il aurait fallu avoir :

- Des données permettant l'évaluation du BE de sinistres ( Hors rente en cours);
- Un portefeuille complet comprenant les individus valides afin d'évaluer également le BE de primes, permettant de mesurer de façon plus élargie et précise, l'impact des revalorisations et de l'inflation;
- Un portefeuille d'actif réel représentatif des garanties considérées;
- Des tables d'expériences, incidences incapacité/invalidité pour la modélisation des états;
- Loi comportementale ou données historiques relatives aux résiliations;
- Historique des revalorisations pour Backtester les méthodes de revalorisation appliquées;
- Modélisation de la valeur du point Agirc intégrant des facteurs démographiques;
- Manque de données financières pour un pilotage Actif/Passif avec prise en compte de l'inflation.

# **ANNEXES**





## Annexe B

# Code de la sécurité sociale

### Article L434-1

Modifié par LOI n° 2015-1702 du 21 décembre 2015 - art. 89 (V)

Une indemnité en capital est attribuée à la victime d'un accident du travail atteinte d'une incapacité permanente inférieure à un pourcentage déterminé.

Son montant est fonction du taux d'incapacité de la victime et déterminé par un barème forfaitaire fixé par décret dont les montants sont revalorisés au 1er avril de chaque année par application du coefficient mentionné à l'article L. 161-25. Il est révisé lorsque le taux d'incapacité de la victime augmente tout en restant inférieur à un pourcentage déterminé.

Cette indemnité est versée lorsque la décision est devenue définitive. Elle est incessible et insaisissable.

### Article L434-2

Modifié par LOI n°2023-270 du 14 avril 2023 - art. 17 (V) Le taux de l'incapacité permanente est déterminé d'après la nature de l'infirmité, l'état général, l'âge, les facultés physiques et mentales de la victime ainsi que d'après ses aptitudes et sa qualification professionnelle, compte tenu d'un barème indicatif d'invalidité.

Lorsque l'incapacité permanente est égale ou supérieure à un taux minimum, la victime a droit à une rente égale au salaire annuel multiplié par le taux d'incapacité qui peut être réduit ou augmenté en fonction de la gravité de celle-ci.

La victime titulaire d'une rente, dont l'incapacité permanente est égale ou supérieure à un taux minimum, a droit à une prestation complémentaire pour recours à tierce personne lorsqu'elle est dans l'incapacité d'accomplir seule les actes ordinaires de la vie. Le barème de cette prestation est fixé en fonction des besoins d'assistance par une tierce personne de la victime, évalués selon des modalités précisées par décret. Elle est revalorisée au 1er avril de chaque année par application du coefficient mentionné à l'article L. 161-25.

En cas d'accidents successifs, le taux ou la somme des taux d'incapacité permanente antérieurement reconnue constitue le point de départ de la réduction ou de l'augmentation prévue au deuxième alinéa pour le calcul de la rente afférente au dernier accident. Lorsque, par suite d'un ou plusieurs accidents du travail, la somme des taux d'incapacité permanente est égale ou supérieure à un taux minimum, l'indemnisation se fait, sur demande de la victime, soit par l'attribution d'une rente qui tient compte de la ou des indemnités en capital précédemment versées, soit par l'attribution d'une indemnité en capital dans les conditions prévues à l'article L. 434-1. Le montant de la rente afférente au dernier accident ne peut dépasser le montant du salaire servant de base au calcul de la rente.

Lorsque l'état d'invalidité apprécié conformément aux dispositions du présent article est susceptible d'ouvrir droit, si cet état relève de l'assurance invalidité, à une pension dans les conditions prévues par les articles L. 341-1 et suivants, la rente accordée à la victime en vertu du présent titre dans le cas où elle est inférieure à ladite pension d'invalidité, est portée au montant de celle-ci. Toutefois, cette disposition n'est pas applicable si la victime est déjà titulaire d'une pension d'invalidité des assurances sociales.

Les victimes titulaires d'une rente sont informées, selon des modalités prévues par décret, des dispositions prévues à l'article L. 351-1-4 avant un âge fixé par décret.

#### **Article L434-15**

Création Décret 85-1353 1985-12-17 art. 1 JORF 21 décembre 1985

Les rentes dues aux victimes atteintes d'une incapacité permanente égale ou supérieure à un taux minimum ou, en cas de mort, à leurs ayants droit, sont calculées d'après le salaire annuel de la victime.

Le salaire servant de base au calcul de la rente est déterminé suivant les modalités fixées par décret en Conseil d'Etat.

#### **Article L434-16**

La rente due aux ayants droit de la victime d'un accident mortel ou à la victime d'un accident ayant occasionné une réduction de capacité égale ou supérieure à un taux minimum ne peut être calculée sur un salaire annuel inférieur à un minimum déterminé au 1er avril de chaque année d'après le coefficient mentionné à l'article L. 161-25, compte tenu des dispositions du quatrième alinéa de l'article L. 434-2.

Dans tous les cas où l'article L. 434-2 et les articles L. 434-7 et suivants déterminent en fonction du salaire annuel une rente individuelle ou collective, ou la limite assignée à l'ensemble des rentes dues aux ayants droit de la victime, le salaire annuel est le salaire réduit, le cas échéant, par application de l'alinéa suivant.

Lorsqu'il s'agit de la victime de l'accident, quelle que soit la réduction de capacité subie, si son salaire annuel est supérieur au salaire minimum déterminé à l'alinéa précédent, le calcul de la rente est effectué selon une formule dégressive dont les modalités sont déterminées par un décret en Conseil d'Etat. **Article L434-17**

Création LOI n° 2015-1702 du 21 décembre 2015 - art. 89 (V)

Les rentes mentionnées à l'article L. 434-15 sont revalorisées au 1er avril de chaque année par application du coefficient mentionné à l'article L. 161-25.

#### **Article L161-25**

Version en vigueur depuis le 01 janvier 2016

Modifié par LOI n°2015-1785 du 29 décembre 2015 - art. 67 (V)

La revalorisation annuelle des montants de prestations dont les dispositions renvoient au présent article est effectuée sur la base d'un coefficient égal à l'évolution de la moyenne annuelle des prix à la consommation, hors tabac, calculée sur les douze derniers indices mensuels de ces prix publiés par l'Institut national de la statistique et des études économiques l'avant-dernier mois qui précède la date de revalorisation des prestations concernées. Si ce coefficient est inférieur à un, il est porté à cette valeur.

## **Annexe C**

### **Article 7 Loi Evin**

Version en vigueur depuis le 10 août 1994

Modifié par Loi n°94-678 du 8 août 1994 - art. 14 () JORF 10 août 1994

Lorsque des assurés ou des adhérents sont garantis collectivement contre les risques portant atteinte à l'intégrité physique de la personne ou liés à la maternité, le risque décès ou les risques d'incapacité ou d'invalidité, la résiliation ou le non-renouvellement du contrat ou de la convention est sans effet sur le versement des prestations immédiates ou différées, acquises ou nées durant son exécution. Le versement des prestations de toute nature se poursuit à un niveau au moins égal à celui de la dernière prestation due ou payée avant la résiliation ou le non-renouvellement, sans préjudice des révisions prévues dans le contrat ou la convention. De telles révisions ne peuvent être prévues à raison de la seule résiliation ou du seul non-renouvellement.

L'engagement doit être couvert à tout moment, pour tous les contrats ou conventions souscrits, par des provisions représentées par des actifs équivalents.

# Annexe D

## Les OAT

### Présentation

Les Obligations Assimilables du Trésor (OAT) sont des instruments de financement à moyen et long terme émis par l'État, ayant une maturité allant de 2 à 50 ans. À compter du 1<sup>er</sup> janvier 2013, dans un souci de simplification, les nouveaux titres de référence à moyen terme, initialement d'une maturité de 2 ans et 5 ans et précédemment émis sous la forme de Bons du Trésor à Taux Fixe et Intérêts Annuels (BTAN), sont désormais émis sous la forme d'OAT, rejoignant ainsi les titres à plus long terme (8,5 ans et plus en 2021).

Désormais, les OAT représentent la forme unique de financement à moyen et long terme de l'État, après avoir été privilégiées pour le long terme entre 1985 et 2012. Ces titres sont assimilables, avec une maturité initiale allant de 2 à 50 ans, et sont généralement émis par adjudication. Le mécanisme d'assimilation permet de lier une nouvelle émission à une tranche d'emprunt précédemment émise. Cela permet à l'État d'émettre des tranches d'emprunts dont le prix est ajusté en fonction de l'évolution du marché, tout en conservant les caractéristiques de l'émission initiale. Ainsi, l'état évite la multiplication des emprunts aux caractéristiques différentes tout en garantissant la liquidité des titres en circulation.

Les OAT ont une valeur nominale de 1 €, et le calcul des intérêts courus se base sur une méthode de calcul " nombre de jours exact sur nombre de jours exact " (ACT/ACT). Les échéances de paiement des coupons et du principal des OAT sont fixées au 1<sup>er</sup> ou au 25 du mois. Les opérations relatives aux OAT sont gérées par les dépositaires centraux nationaux et internationaux.

### Les Adjudications des OAT

Le vendredi précédant une adjudication, l'Agence France Trésor (AFT) annonce les lignes d'OAT qui seront mises aux enchères le jeudi suivant, et fournit une fourchette indicative du montant total à lever. Les adjudications des OAT à long terme (8 ans et plus) ont lieu le premier jeudi du mois à 10h50, tandis que celles des OAT à moyen terme (2 à 8 ans) ont lieu le troisième jeudi du mois à la même heure. Les soumissions sont acceptées à partir d'un montant minimum d'un million d'euros, exprimées en pourcentage du nominal, avec une précision de deux décimales. Depuis le 6 octobre 2014, le règlement des adjudications d'OAT a lieu en J+2, c'est-à-dire le lundi suivant l'adjudication.

# Annexe E

## Les OATi

### Présentation des OATi

L'État a émis, pour la première fois le 15 septembre 1998, une OAT indexée sur l'indice des prix à la consommation en France (OATi). Une autre innovation a eu lieu en octobre 2001, avec l'émission de la première OAT indexée sur l'indice des prix de la zone euro (OAT€i). Depuis ces dates, l'AFT s'est engagée à émettre de manière régulière et transparente des titres indexés sur l'inflation et à construire deux courbes réelles, l'une indexée sur l'inflation française, l'autre sur l'inflation européenne. Ainsi, l'AFT émet environ 10

Depuis 2004, les OATi et OAT€i sont adjudgées régulièrement, les mêmes jours que les OAT à moyen terme, mais lors d'une séance d'adjudication dédiée (à 11h50). Les OATi et OAT€i sont destinées à toutes les catégories d'investisseurs désirant protéger le pouvoir d'achat de leurs investissements, améliorer l'adossement de leur passif, améliorer la gestion de leur coussin de liquidité, ou diversifier la composition de leur portefeuille. Elles s'adressent aux investisseurs institutionnels - entreprise d'assurance, caisses de retraite et de prévoyance, gestionnaires d'actifs, banques, etc. - résidents ou non-résidents, mais aussi aux particuliers.

### Caractéristiques générales des OATi

Leur nominal est de 1 € et leur coupon réel, déterminé lors de l'émission et fixé pour la durée de vie du titre, est un pourcentage fixe du principal indexé. Le coupon payé est un coupon annuel calculé selon la formule suivante : coupon réel x nominal x coefficient d'indexation.

Le coefficient d'indexation est le rapport entre la référence quotidienne d'inflation du jour J et la référence de base. La référence quotidienne est calculée par interpolation linéaire entre l'IPC du mois M-3 et l'IPC du mois M-2, et la référence de base est la référence quotidienne d'inflation à la date de jouissance (1) de l'OAT lors de sa première émission. Le coefficient d'indexation calcule ainsi à tout moment l'évolution de l'indice des prix depuis la date de jouissance. L'indice de référence utilisé est l'IPC, l'indice des prix à la consommation hors tabac, pour l'ensemble des ménages résidant en France, publié mensuellement par l'INSEE.

Le remboursement de l'OAT s'effectue par application de la formule : nominal x coefficient d'indexation à la date de remboursement. Au cas où la référence quotidienne d'inflation à maturité serait inférieure à la référence de base, le remboursement est garanti égal au nominal. (1) La date de jouissance d'une OAT est la date de début de calcul du premier coupon à payer sur cette OAT, soit la date d'échéance de coupon précédant la première émission de cette OAT. Par exemple, pour une OAT émise la première fois le 1er avril de l'année N avec une échéance 25 mai N, la date de jouissance est le 25 mai N-1.

## Un cadre précis pour le calcul des OATi

L'AFT est l'agent calculateur de ses propres titres, c'est-à-dire qu'elle est seule responsable du calcul des coefficients d'indexation. A ce titre, la référence quotidienne d'inflation et le coefficient d'indexation sont calculés et publiés par l'AFT sur son site internet.

Pour le calcul des références quotidiennes d'inflation et des coefficients d'indexation, l'AFT respecte une méthodologie commune à l'ensemble des OATi et définie par le cadre réglementaire qui s'applique au titre des arrêtés de création de ces titres, publiés au Journal Officiel de la République Française. Ceux-ci précisent en particulier que l'indice retenu pour le calcul des références quotidiennes d'inflation est " l'indice définitif des prix à la consommation, hors tabac, pour l'ensemble des ménages, France entière (métropole et DOM), calculé et publié mensuellement par l'INSEE. "

En cas de changement de base, c'est-à-dire dans le cas très spécifique où l'Office statistique compétent (l'INSEE pour les OATi) déciderait d'un changement d'année de référence servant de base à l'indice et dans ce cas uniquement, les arrêtés relatifs aux OATi précisent la manière dont sont ajustés les coefficients : " lorsque l'INSEE procède à un changement de base pour le calcul de l'indice des prix à la consommation, la transition entre deux mois dont les indices sont calculés sur des bases différentes s'effectue sur l'indice des prix à la consommation du mois de décembre de la dernière année commune de publication calculé selon les deux bases. Il est déterminé une clé de passage " qui figure au JO n° 17 du 21/01/2010

$$clé = \frac{IPC_{\text{de cembre}}^{\text{nouvelle base}}}{IPC_{\text{de cembre}}^{\text{ancienne base}}} \text{ de sorte que } Indice_{\text{date t}}^{\text{nouvelle base}} = Indice_{\text{date t}}^{\text{ancienne base}} * clé$$

Sous-titre	OBLIGATIONS ASSIMILABLES DU TRÉSOR INDEXÉES SUR L'INDICE DES PRIX À LA CONSOMMATION EN FRANCE (OATI)
Code ISIN	FR0012558310
Nature du titre	Indexé sur l'indice définitif des Prix à la Consommation, hors tabac, pour l'ensemble des ménages, France entière (métropole et DOM)
Devise d'émission	Euro
Valeur nominale	1 Euro
Maturité	01/03/2025
Amortissement	nominal x coefficient d'indexation à la date de remboursement et au minimum au pair
Coupon	0,10 % x nominal x coefficient d'indexation
Intérêts	Annuels, payables à terme échu le 1 mars de chaque année Base de calcul : ACT/ACT
Date de jouissance	01/03/2014
Référence de base à la date de jouissance de l'OAT	99,87331
Procédure d'émission	Adjudication à la "hollandaise"
Textes d'émission	Loi n°2014-1654 du 29 décembre 2014 de finances pour 2015 Décret n° 2014-1693 du 30 décembre 2014 relatif à l'émission des valeurs du Trésor
Arrêté de création	Arrêté du 13 février 2015 (NOR: FCPT1504254A)
Caractéristiques juridiques	Reg°, 144A Les certificats des titres créés après le 1er janvier 2013 sont assortis de clauses d'action collectives (CAC) comme tous les titres obligataires de la zone euro, par conséquent non assimilables aux souches émises avant cette date.
Démembrable	oui

FIGURE E.1 – Exemple : OATi 0,10 % 1 MARS 2025

## Annexe F

# Les techniques de simulations

### Loi Uniforme $U(a, b)$

Pour simuler une variable aléatoire suivant une loi uniforme  $U(a, b)$  sur l'intervalle  $[a, b]$ , nous utilisons l'algorithme suivant :

1. Générer un nombre aléatoire  $U$  à partir d'une distribution uniforme entre 0 et 1.
2. Calculer  $X$  tel que  $X = a + U \cdot (b - a)$ .
3.  $X$  suit une loi uniforme sur l'intervalle  $[a, b]$ .

Cet algorithme exploite le fait que si  $U$  est uniformément distribué entre 0 et 1, alors  $a + U \cdot (b - a)$  est uniformément distribué sur l'intervalle  $[a, b]$ .

### Loi Binomiale

Pour simuler une variable aléatoire suivant une loi binomiale  $B(n, p)$ , où  $n$  est le nombre de tentatives et  $p$  est la probabilité de succès pour chaque tentative, nous utilisons l'algorithme suivant :

1. Répéter  $n$  fois :
  - (a) Générer un nombre aléatoire  $U$  à partir d'une distribution uniforme entre 0 et 1.
  - (b) Si  $U < p$ , incrémenter le compteur de succès.
2. Le compteur de succès obtenu est la réalisation de la loi binomiale  $B(n, p)$ .

Cet algorithme simule le nombre de succès obtenus dans  $n$  tentatives, où chaque tentative a une probabilité  $p$  de succès et  $1 - p$  de non succès.

### Loi de Poisson

Pour simuler une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ , nous utilisons l'algorithme suivant :

1. Générer un nombre aléatoire  $U$  à partir d'une distribution exponentielle de paramètre  $\lambda$ .
2. Calculer  $X$  tel que  $X = \lfloor U \rfloor$ , où  $\lfloor U \rfloor$  est la partie entière de  $U$ .
3.  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

Cet algorithme exploite la relation entre la distribution exponentielle et la distribution de Poisson pour simuler des réalisations de la loi de Poisson.

**Loi Géométrique**

Pour simuler une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre  $p$ , où  $p$  est la probabilité de succès pour chaque tentative, nous utilisons l'algorithme suivant :

1. Répéter jusqu'à l'obtention d'un succès :
  - (a) Générer un nombre aléatoire  $U$  à partir d'une distribution uniforme entre 0 et 1.
  - (b) Si  $U < p$ , arrêter la répétition.
2. Le nombre de tentatives nécessaires pour obtenir le premier succès est la réalisation de la loi géométrique de paramètre  $p$ .

Cet algorithme simule le nombre de tentatives nécessaires pour obtenir le premier succès dans une séquence de tentatives indépendantes, où chaque tentative a une probabilité  $p$  de succès.

**Loi Normale (Gaussienne)**

Pour simuler une variable aléatoire suivant une loi normale (gaussienne) de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ , nous utilisons l'algorithme de la méthode de Box-Muller :

1. Générer deux nombres aléatoires  $U_1$  et  $U_2$  à partir d'une distribution uniforme entre 0 et 1.
2. Calculer  $Z_0 = \sqrt{-2\ln(U_1)} \cos(2\pi U_2)$  et  $Z_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)} \sin(2\pi U_2)$ .
3.  $Z_0$  et  $Z_1$  sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée réduite

## Annexe G

# Critères de sélection de modèles et métriques utilisées dans nos modélisation

Dans ce chapitre, nous explorerons les critères de sélection de modèles et les métriques de modélisation en statistiques. Ces outils sont essentiels pour évaluer la qualité des modèles statistiques et choisir le modèle le plus approprié pour une tâche donnée.

### Critère d'Information d'Akaike (AIC)

Le Critère d'Information d'Akaike (AIC) est une mesure couramment utilisée pour évaluer la qualité des modèles statistiques, en particulier dans le contexte de la sélection de modèles. Il a été développé par Hirotugu Akaike en 1974 et est basé sur des principes de la théorie de l'information. L'AIC est largement utilisé dans les domaines de la statistique, de l'apprentissage automatique et de l'analyse de données.

### Formule de l'AIC

Mathématiquement, l'AIC est défini comme suit pour un modèle statistique donné :

$$AIC = -2 \cdot \ln(L) + 2k$$

Où :

- $L$  représente la fonction de vraisemblance maximale du modèle. Elle mesure à quel point le modèle est capable d'expliquer les données observées.
- $k$  est le nombre de paramètres libres du modèle.

### Interprétation de l'AIC

L'objectif de l'AIC est de trouver un équilibre entre la capacité d'ajustement du modèle aux données et sa complexité. L'AIC pénalise les modèles complexes qui ont un grand nombre de paramètres, ce qui peut conduire à un surajustement (overfitting). En d'autres termes, l'AIC favorise les modèles qui expliquent bien les données avec un nombre minimal de paramètres.

- Un AIC plus faible indique un meilleur ajustement du modèle aux données. Les modèles avec des AIC plus bas sont généralement préférés.
- Un AIC plus élevé indique que le modèle a plus de difficulté à expliquer les données ou qu'il est trop complexe par rapport à la quantité de données disponible.

## Utilisation de l'AIC

L'AIC est couramment utilisé pour comparer plusieurs modèles statistiques pour une tâche donnée. Voici comment il est utilisé dans la sélection de modèles :

1. On ajuste différents modèles à un ensemble de données donné.
2. On calcule l'AIC pour chaque modèle en utilisant la formule.
3. On compare les valeurs de l'AIC entre les modèles. Le modèle avec le plus bas AIC est considéré comme le meilleur en termes de trade-off entre l'ajustement aux données et la complexité.
4. On peut également calculer la différence entre l'AIC de chaque modèle et l'AIC du meilleur modèle (appelée  $\Delta AIC$ ) pour évaluer à quel point les autres modèles sont moins favorables.
5. En règle générale, un modèle avec  $\Delta AIC$  inférieur à 2 est considéré comme ayant un soutien fort, tandis qu'un modèle avec un  $\Delta AIC$  supérieur à 10 a très peu de soutien.

## Limitations de l'AIC

L'AIC est un outil puissant pour la sélection de modèles, mais il présente quelques limitations. Il suppose que les données suivent un modèle statistique bien défini, ce qui peut ne pas être le cas dans des situations réelles. De plus, l'AIC ne tient pas compte des aspects spécifiques du domaine ou des connaissances a priori sur les modèles.

En résumé, l'AIC est un critère largement utilisé pour évaluer et comparer des modèles statistiques. Il favorise les modèles qui expliquent bien les données avec un nombre minimal de paramètres, ce qui en fait un outil précieux dans la sélection de modèles.

Bien sûr, voici une section détaillée sur le Critère d'Information Bayésien (BIC) qui inclut ses fondements mathématiques, son utilité et son interprétation.

## Critère d'Information Bayésien (BIC)

Le Critère d'Information Bayésien (BIC), également connu sous le nom de Bayesian Information Criterion, est un critère de sélection de modèles largement utilisé en statistiques et en apprentissage automatique. Il est conçu pour évaluer la qualité d'un modèle statistique tout en prenant en compte la complexité du modèle. Le BIC est particulièrement utile dans le contexte de la sélection de modèles lorsque l'on cherche à choisir le meilleur modèle parmi un ensemble de candidats.

## Fondements Mathématiques

Le BIC repose sur des principes de la théorie de la probabilité et de la statistique bayésienne. Sa formule mathématique est la suivante :

$$BIC = -2 \cdot \log(L) + k \cdot \log(n)$$

Où :

- $L$  est la vraisemblance du modèle, c'est-à-dire la probabilité d'observer les données sous l'hypothèse du modèle.
- $k$  est le nombre de paramètres du modèle.
- $n$  est la taille de l'échantillon de données.

L'objectif du BIC est de trouver le modèle qui maximise la vraisemblance tout en pénalisant les modèles avec un grand nombre de paramètres.

## Utilité

Le BIC est principalement utilisé dans les tâches de sélection de modèles, telles que la sélection de variables en régression ou le choix de la structure de modèles en apprentissage automatique. Ses avantages incluent :

- **Pénalisation de la Complexité** : Le terme  $-2 \cdot \log(L)$  pénalise les modèles qui ont une vraisemblance élevée mais qui sont trop complexes en termes de nombre de paramètres. Cela encourage la sélection de modèles plus simples et plus parcimonieux.
- **Consistance Asymptotique** : Le BIC a une propriété de consistance asymptotique, ce qui signifie que, sous certaines conditions, il sélectionnera le modèle vrai (celui qui a généré les données) lorsque la taille de l'échantillon tend vers l'infini.
- **Évite le Surajustement** : En favorisant les modèles plus simples, le BIC aide à éviter le surajustement, c'est-à-dire le fait que le modèle s'ajuste trop aux données d'apprentissage au détriment de sa capacité à généraliser sur de nouvelles données.

## Interprétation

L'interprétation du BIC est relativement simple : un modèle avec un BIC plus bas est préféré. Cela signifie que, lors de la comparaison de plusieurs modèles, vous devriez choisir celui qui a le BIC le plus bas.

- **Comparaison de Modèles** : Lorsque vous avez plusieurs modèles candidats, calculez le BIC pour chacun d'eux et choisissez le modèle avec le BIC le plus bas.
- **Comparaison avec un Seuil** : Vous pouvez également comparer le BIC d'un modèle avec un seuil préalablement défini. Si le BIC d'un modèle est nettement plus bas que le seuil, cela indique que ce modèle est probablement le meilleur choix.
- **Interprétation** : Un BIC plus bas indique généralement un meilleur compromis entre l'ajustement aux données et la complexité du modèle. Cependant, il est important de noter que le BIC seul ne fournit pas de mesure de la qualité absolue du modèle, mais plutôt une comparaison relative entre les modèles.

En conclusion, le Critère d'Information Bayésien est un outil puissant pour la sélection de modèles, favorisant la simplicité tout en préservant la qualité de l'ajustement aux données. Il repose sur des principes mathématiques solides et est largement utilisé dans de nombreuses applications statistiques et d'apprentissage automatique.

## Méthode de la Validation Croisée

La méthode de la validation croisée est une technique essentielle en statistiques pour évaluer la capacité de généralisation d'un modèle statistique et pour sélectionner le meilleur modèle parmi plusieurs candidats. Elle est largement utilisée dans la modélisation, en particulier dans le contexte de l'apprentissage automatique et de la régression.

## Fondements

La validation croisée repose sur le principe de diviser l'ensemble de données en plusieurs parties, appelées plis ou échantillons. Le processus se déroule comme suit :

1. L'ensemble de données est divisé en  $k$  sous-ensembles égaux, où  $k$  est un nombre entier déterminé à l'avance. Typiquement,  $k = 5$  ou  $k = 10$  sont des choix courants.

2. Le modèle est entraîné sur  $k-1$  sous-ensembles (plis) et évalué sur le pli restant. Ce processus est répété  $k$  fois, chaque pli étant utilisé comme ensemble de test exactement une fois.
3. Les performances du modèle, mesurées à chaque itération, sont agrégées pour obtenir une estimation globale de la performance du modèle.

Mathématiquement, supposons que nous ayons un modèle avec un paramètre ajustable ( $\theta$ ) que nous souhaitons évaluer à l'aide de la validation croisée. La fonction de perte ( $L(\theta)$ ) mesure la performance du modèle, et nous cherchons à minimiser cette fonction. La validation croisée vise à estimer l'espérance de la perte

## Utilité et Interprétation

La validation croisée offre plusieurs avantages essentiels :

- **Estimation de la Performance du Modèle** : Elle fournit une estimation réaliste de la performance d'un modèle sur des données non vues. Cela permet d'éviter la surajustement (overfitting) et d'obtenir une évaluation plus fiable des performances.
- **Comparaison de Modèles** : Elle permet de comparer facilement plusieurs modèles en utilisant une métrique de performance commune. Cela aide à sélectionner le modèle le plus performant pour une tâche donnée.
- **Optimisation des Hyperparamètres** : La validation croisée peut être utilisée pour optimiser les hyperparamètres d'un modèle en évaluant sa performance sur différentes combinaisons d'hyperparamètres.

Interpréter les résultats de la validation croisée implique d'examiner la performance moyenne du modèle sur les plis de test. Les métriques couramment utilisées incluent l'erreur quadratique moyenne (EQM), l'erreur absolue moyenne (EAM), la précision, le rappel, etc. Ces métriques fournissent une indication de la capacité du modèle à bien généraliser à de nouvelles données.

En conclusion, la validation croisée est une méthode puissante pour évaluer et comparer les performances des modèles statistiques. Elle repose sur des fondements mathématiques solides et permet une interprétation fiable des résultats, contribuant ainsi à des décisions de modélisation informées.

## Métriques de Modélisation : MSE, RMSE, MAE, MAPE et MSLE

Dans cette section, nous explorerons en détail des métriques couramment utilisées pour évaluer la performance des modèles statistiques : le Mean Square Error (MSE), l'erreur quadratique moyenne (RMSE), le Mean Absolute Error (MAE), le Mean Absolute Percentage Error (MAPE) et le Mean Squared Logarithmic Error (MSLE).

### G.0.1 Mean Squared Error and Root Mean Square Error

#### Fondements Mathématiques

Le Mean Squared Error (MSE) est une métrique couramment utilisée pour évaluer la performance des modèles de régression. Mathématiquement, elle est définie comme suit :

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Où : -  $n$  est le nombre d'observations dans l'échantillon, -  $y_i$  représente la valeur réelle de la variable dépendante pour l'observation  $i$ , -  $\hat{y}_i$  représente la valeur prédite par le modèle pour l'observation  $i$ .

La MSE calcule la moyenne des carrés des erreurs entre les valeurs prédites et les valeurs réelles. Elle pénalise davantage les erreurs importantes, car elles sont élevées au carré.

Le RMSE est simplement la racine carrée de la MSE :

$$RMSE = \sqrt{MSE}$$

La RMSE a la même unité que la variable dépendante, ce qui la rend plus facilement interprétable. Par exemple, si vous modélisez les ventes en dollars, la RMSE est également en dollars.

### Utilité

La MSE et la RMSE sont des métriques essentielles pour évaluer la précision d'un modèle de régression. Elles permettent de répondre à la question suivante : "Dans quelle mesure les prédictions du modèle correspondent-elles aux valeurs réelles?" Une MSE ou une RMSE faible indique une meilleure adéquation du modèle aux données, car les erreurs sont petites en moyenne.

### Interprétation

L'interprétation de la MSE et de la RMSE dépend de l'unité de la variable dépendante. Voici comment les interpréter :

- Une MSE ou une RMSE proche de zéro indique une excellente adéquation du modèle aux données, car cela signifie que les valeurs prédites sont très proches des valeurs réelles.
- Une MSE ou une RMSE plus élevée indique une moins bonne adéquation du modèle, car les erreurs sont plus importantes en moyenne.
- La RMSE est particulièrement utile pour quantifier l'erreur moyenne dans la même unité que la variable dépendante. Par exemple, si la RMSE est de 10 dollars, cela signifie que, en moyenne, les prédictions du modèle diffèrent de 10 dollars par rapport aux valeurs réelles.
- Gardez à l'esprit que la MSE et la RMSE sont sensibles aux valeurs aberrantes. Une seule valeur aberrante peut considérablement augmenter ces métriques.

En résumé, la MSE et la RMSE sont des métriques fondamentales pour évaluer la performance des modèles de régression. Une MSE ou une RMSE faible indique une meilleure adéquation du modèle aux données, mais il est essentiel de tenir compte du contexte de la tâche pour interpréter ces métriques correctement.

### G.0.2 Mean Absolute Error (MAE)

Le Mean Absolute Error (MAE) est une métrique de régression qui mesure la moyenne des valeurs absolues des erreurs entre les valeurs prédites par un modèle et les valeurs réelles. Sa formule mathématique est la suivante :

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|$$

Où : -  $n$  est le nombre d'observations. -  $y_i$  représente la valeur réelle de l'observation  $i$ . -  $\hat{y}_i$  représente la valeur prédite par le modèle pour l'observation  $i$ .

#### Utilité et Avantages de MAE

- MAE est facile à comprendre et à interpréter, car il mesure l'erreur moyenne en unités absolues. - Il est moins sensible aux valeurs aberrantes que d'autres métriques telles que l'EQM. - MAE est approprié pour les problèmes de régression où les erreurs doivent être évaluées en termes absolus.

### Inconvénients de MAE

- MAE ne pénalise pas les grosses erreurs de la même manière que l'EQM. Ainsi, il peut donner une importance égale aux erreurs petites et grandes, ce qui peut ne pas être souhaitable dans certains cas.

### Interprétation de MAE

Plus le MAE est faible, meilleure est la performance du modèle, car cela signifie que les prédictions du modèle sont en moyenne proches des valeurs réelles.

### G.0.3 Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

Le Mean Absolute Percentage Error (MAPE) est une métrique de régression qui mesure la moyenne des pourcentages absolus d'erreur entre les valeurs prédites par un modèle et les valeurs réelles. Sa formule mathématique est la suivante :

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \times 100\%$$

Où les symboles sont définis de la même manière que pour MAE.

### Utilité et Avantages de MAPE

- MAPE exprime l'erreur en pourcentage, ce qui le rend interprétable et comparable entre différents ensembles de données. - Il est largement utilisé dans les prévisions et la planification, car il mesure l'erreur relative.

### Inconvénients de MAPE

- MAPE peut être problématique lorsque les valeurs réelles sont proches de zéro, car la division par zéro n'est pas définie. Cela peut conduire à des résultats imprécis.

### Interprétation de MAPE

Un MAPE plus faible indique une meilleure performance du modèle, car cela signifie que les prédictions du modèle sont en moyenne proches des valeurs réelles en pourcentage.

### G.0.4 Mean Squared Logarithmic Error (MSLE)

Le Mean Squared Logarithmic Error (MSLE) est une métrique de régression qui mesure la moyenne des carrés des erreurs logarithmiques entre les valeurs prédites par un modèle et les valeurs réelles. Sa formule mathématique est la suivante :

$$MSLE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log(1 + y_i) - \log(1 + \hat{y}_i))^2$$

Où les symboles sont définis de la même manière que pour MAE.

### Utilité et Avantages de MSLE

- MSLE est utile lorsque les valeurs à prédire ont une distribution exponentielle ou sont sujettes à de grands écarts. - Il pénalise davantage les grandes erreurs que MAE, ce qui peut être approprié dans certains

cas.

### Inconvénients de MSLE

- MSLE peut être sensible aux valeurs aberrantes, tout comme l'EQM.

### Interprétation de MSLE

Un MSLE plus faible indique une meilleure performance du modèle, car cela signifie que les prédictions du modèle sont en moyenne proches des valeurs réelles après avoir été transformées logarithmiquement.

## Coefficient de Détermination ( $R^2$ )

Le coefficient de détermination, souvent noté  $R^2$ , est une métrique couramment utilisée en statistiques pour évaluer la qualité d'un modèle de régression. Il mesure la proportion de la variance totale de la variable dépendante qui est expliquée par le modèle. En d'autres termes, il quantifie à quel point le modèle s'ajuste bien aux données.

### Fondements Mathématiques

Le calcul du coefficient de détermination  $R^2$  repose sur la décomposition de la somme des carrés totale (SST), la somme des carrés expliquée (SSE) et la somme des carrés résiduels (SSR). Mathématiquement, il est défini comme suit :

$$R^2 = \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{SSR}{SST}$$

Où :

- $SSE$  est la somme des carrés expliquée, également appelée somme des carrés de régression.
- $SSR$  est la somme des carrés résiduels, qui mesure la variabilité non expliquée par le modèle.
- $SST$  est la somme des carrés totale, qui représente la variabilité totale des données.

$R^2$  varie de 0 à 1, où : -  $R^2 = 0$  signifie que le modèle n'explique aucune variation dans les données, c'est-à-dire qu'il ne s'ajuste pas du tout. -  $R^2 = 1$  signifie que le modèle explique toute la variation, c'est-à-dire qu'il s'ajuste parfaitement aux données.

### Utilité

Le coefficient de détermination  $R^2$  est largement utilisé pour évaluer la qualité d'un modèle de régression pour plusieurs raisons :

- **Mesure de l'ajustement du modèle :** Il indique à quel point le modèle s'ajuste bien aux données. Plus  $R^2$  est proche de 1, meilleure est l'adéquation du modèle.
- **Comparaison de modèles :** Il permet de comparer différents modèles de régression pour déterminer lequel explique mieux les données. Un modèle avec un  $R^2$  plus élevé est généralement préféré.
- **Communication :**  $R^2$  est facile à interpréter et à communiquer, ce qui en fait une métrique populaire pour présenter les résultats aux parties prenantes.

## Avantages

- **Interprétation intuitive :**  $R^2$  mesure la proportion de variance expliquée, ce qui est facile à comprendre. Un  $R^2$  élevé indique que le modèle explique une grande partie de la variabilité des données.
- **Comparaison directe :** Il permet de comparer directement la performance de différents modèles en utilisant une seule métrique.

## Inconvénients

- **Dépendance du nombre de prédicteurs :**  $R^2$  a tendance à augmenter avec le nombre de prédicteurs, même si les prédicteurs ajoutés n'apportent pas d'information significative. Cela peut conduire à une utilisation excessive de variables inutiles.
- **Ne mesure pas la qualité des prédictions :**  $R^2$  mesure la qualité de l'ajustement aux données, mais ne dit rien sur la capacité du modèle à faire des prédictions précises en dehors de l'échantillon d'apprentissage.

## Interprétation

L'interprétation de  $R^2$  dépend de son contexte d'application :

- $R^2$  proche de 1 : Cela indique que le modèle explique la plupart de la variation des données. Il est considéré comme un bon ajustement.
- $R^2$  proche de 0 : Cela signifie que le modèle n'explique que peu ou pas de variation. Il peut s'agir d'un mauvais ajustement ou d'une variabilité intrinsèque élevée des données.
- $R^2$  négatif : Cela peut se produire si le modèle est pire que la ligne horizontale moyenne. Il indique que le modèle n'est pas approprié.

Il est important de noter que  $R^2$  seul ne fournit pas une image complète de la qualité du modèle. Il doit être interprété en conjonction avec d'autres métriques et considéré dans le contexte de la tâche de modélisation spécifique.

## Conclusion

Ce chapitre a exploré en profondeur les critères de sélection de modèles et les métriques de modélisation en statistiques. La compréhension de ces outils est essentielle pour évaluer la performance des modèles statistiques et prendre des décisions éclairées dans le processus de modélisation.

## Références

Pour des informations plus détaillées, vous pouvez consulter les sources suivantes :

- Site 1 : <https://kobia.fr/regression-metrics-quelle-metrique-choisir/>
- Site 2 : <http://www.jybaudot.fr/Stats/indicecartes.html>
- Site 3 : <http://www.graie.org/graie/graiedoc/reseaux/autosurv/GRAIE-Criteres-INDICATEURS-AUTOEVALUATION.pdf>
- Site 4 : <http://cedric.cnam.fr/~saporta/selectionmodeles.pdf>

# Annexe H

## Les séries temporelles

### Test de Mann-Kendall

Le test de Mann-Kendall est un test statistique non paramétrique utilisé pour détecter la présence de tendances monotones dans une série de données. Il est couramment utilisé dans divers domaines, notamment l'environnement, la climatologie, la finance et d'autres domaines où l'analyse des tendances temporelles est importante.

- Principe du test

Le test de Mann-Kendall se base sur la comparaison des paires de données dans la série temporelle. Pour chaque paire de points de données  $(X_i, X_j)$ , le test examine si les valeurs de  $X_i$  et  $X_j$  sont dans le même ordre (ascendant ou descendant) que leurs indices respectifs  $(i, j)$ . Le test calcule ensuite une statistique de test, appelée la statistique de Mann-Kendall (MK), qui mesure la tendance générale des données.

- Hypothèses du test :

$H_0$  : Il n'y a pas de tendance monotone dans les données.

$H_a$  : Il y a une tendance monotone dans les données.

- Interprétation du test

L'interprétation du test de Mann-Kendall dépend de la statistique de Mann-Kendall (MK) et de sa distribution sous l'hypothèse nulle  $H_0$ . Les résultats possibles sont les suivants :

1. Si la statistique MK est significativement différente de zéro (p-value inférieure à un niveau de signification choisi,  $\alpha = 0.05$ ), alors on rejette l'hypothèse nulle  $H_0$ . Cela indique qu'il y a une tendance monotone significative dans les données.
2. Si la statistique MK n'est pas significativement différente de zéro (p-value supérieure à  $\alpha$ ), alors on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle  $H_0$ . Cela suggère qu'il n'y a pas de tendance monotone significative dans les données.

En résumé, le test de Mann-Kendall permet de déterminer si une série de données présente une tendance monotone significative au fil du temps. Une p-value faible indique la présence d'une tendance, tandis qu'une p-value élevée suggère l'absence de tendance.

# Glossaire

**IRDES** Institut de recherche et de développement en économie de la santé . 13

**PASS** Le plafond annuel de la sécurité sociale. 10

**PVFP** La valeur actuelle des profits futurs.

**Plafond Mensuel de la sécurité sociale** Le plafond de la sécurité sociale est un montant de référence (barème) pris en compte pour le calcul du montant maximal de certaines prestations.

**Taux d'intérêt technique** Il correspond au taux de rentabilité annuel moyen que l'institution de prévoyance espère réaliser à moyen terme en tenant compte d'une marge de sécurité appropriée. Ce taux est directement lié aux conditions des marchés financiers et à la politique de placement des institutions. La loi fixe des limites pour les différentes catégories de placements afin de s'assurer que les institutions de prévoyance adoptent une stratégie prudente..

**TME** Le taux moyen des emprunts d'état correspond au taux moyen de rendement sur le marché secondaire des emprunts d'États à taux fixes et sur une durée supérieure à 7 ans. Publié chaque mois par la Caisse des dépôts et Consignations, le TME est notamment consultable sur le site de la Banque de France..

**Taux technique en assurance-vie** Le taux technique est défini par l'A.C.P.R (autorité de contrôle prudentiel et de régulation), le "gendarme de l'assurance", comme "la revalorisation minimale des provisions mathématiques qu'il garantit chaque année à l'assuré. Ce taux interviendra dans le calcul du tarif de la garantie et dans le montant des provisions mathématiques. Pour des raisons prudentielles, il est encadré par la réglementation et ne peut excéder un certain nombre de seuils, décroissants en fonction de la durée sur laquelle ce taux est garanti." Le taux technique est donc le taux de rendement minimum garanti annuellement sur toute la durée du contrat..

**Taux d'actualisation** Afin d'actualiser les flux financiers futurs estimés lors du calcul des provisions, les organismes assureurs utilisent un taux d'actualisation, également appelé taux technique. L'actualisation revient à se demander combien provisionner aujourd'hui pour que cette somme, placée sur les marchés financiers, permette d'obtenir le montant nécessaire au moment du versement. Prenons l'exemple d'une prestation de 1 000 € à payer dans 10 ans. En considérant un rendement annuel de 1,5 %, il conviendrait de provisionner aujourd'hui 862 € (contre 744 € avec rendement annuel de 3 %).

**CTIP** Le Centre technique des institutions de prévoyance (CTIP) représente et défend les intérêts des institutions de prévoyance, ainsi que ceux des entreprises adhérentes et des salariés participants, dans le domaine de la prévoyance collective. .

**DREES** direction de la recherche, des études, de l'évaluation et des statistiques du ministère de la santé .

**FFA** Fédération française de l'assurance.

**IRDES** Institut de recherche et de développement en économie de la santé .

**PSAP** provisions pour sinistres à payer .

**BCAC** Bureau Commun des Assurances Collectives .

**ARRCO** Association des régimes de retraite complémentaire .

**AGIRC** Association générale des institutions de retraite des cadres .

**CEIOPS** L'Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles (AEAPP), en anglais European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA), est la dénomination qui a remplacé le 24 novembre 2010 le CEIOPS .

**MCR** Minimum Capital Requirement .

**ORSA** L'Orsa ou évaluation interne des risques et de la solvabilité (Own Risk and Solvency Assessment) est défini à l'article 45 de la directive Solvabilité 2. Il s'agit d'un processus et pas seulement d'un rapport d'évaluation prospective des risques et de la solvabilité permettant d'intégrer la dimension risque dans le pilotage de l'entreprise. Il est appréhendé sur 3 ou 5 ans et peut correspondre à celui du business plan de l'entreprise..

**QIS** Quantitative Impact Studies, l'étude d'impact teste l'application des règles proposées par l'EIOPA dans les pays de l'UE et permettent de quantifier l'impact de la réforme sur la marge de solvabilité (impacts quantitatifs de la réforme classe de risque par classe de risque et identification des principales lacunes en matière de données)..

# Bibliographie

- [1] Franck-Olivier BAGONNEAU. *Revalorisation des rentes viagères en assurance dépendance, par la participation aux bénéfices*.
- [2] Gary BENSAID. *ORSA en prévoyance : principes, mise en œuvre opérationnelle et principe de proportionnalité*.
- [3] Damien POINTIN . *Les assureurs peuvent-ils continuer à vendre des contrats en euros?*. 22 Septembre 2017.
- [4] Vincent MEISTER. *Solvabilité II Solvabilité II : contexte : contexte : contexte, valorisation et impacts valorisation et impacts sur l'exigence en capital*. 2007.
- [5] Frédéric PLANCHET, Pierre-E. THÉRON. *RENTES EN COURS DE SERVICE : UN NOUVEAU CRITÈRE D'ALLOCATION D'ACTIFS*. 31 août 2005.
- [6] CTIP. *LES GARANTIES INCAPACITÉ DE TRAVAIL ET INVALIDITÉ D'ENTREPRIS*. lieudate.
- [7] Sia Conseil. *Mise en place opérationnelle du projet : Le Pilier 1*. Juin 2010.
- [8] LA PREVOYANCE. *RAPPORT SUR LA SOLVABILITE ET LA SITUATION FINANCIERE*. 11/04/2019.
- [9] Khedija CLAVERIE, ACTUARIS Yossy BOHBOT, OPTIMIND WINTER . *Indicateurs de suivi et de pilotage en prévoyance*.  
[https://www.institutdesactuaire.com/global/gene/link.php?doc\\_id=11727&fg=1](https://www.institutdesactuaire.com/global/gene/link.php?doc_id=11727&fg=1).
- [10] Makram Ben Dbabis. *Modèles et méthodes actuarielles pour l'évaluation quantitative des risques en environnement solvabilité II*. Octobre 2012.
- [11] Tristan CUVILLIER. *Modélisation, projection et pilotage d'un portefeuille prévoyance*.
- [12] Allan PEPIN. *Application de la norme Solvabilité II à une Institution de Prévoyance : du pilier 1 au pilier 2*. 1 mars 2017.
- [13] Tanguy LOAEC. *Modélisation et pilotage d'un portefeuille de rentes de prévoyance*. 2002.
- [14] CTIP. *CAHIER STATISTIQUE 2021*. lieudate.