

Mémoire d'actuariat
Master 2 EURIA Brest

Construction d'un cadre de valorisation dynamique : Application à
l'évaluation et la prévision de dérivés vanilles

Réalisé par Léo SCHENK.

Encadré par Emmanuel KIZILIAN.

Mémoire réalisé au sein de la société Malakoff Médéric.

le 21 Septembre 2018

Mots-clés : Surface/Cube de volatilité, Produits dérivés, Crédit, Calibration, GSE, ALM.

Table des matières

Synthèse	xxiii
Remerciements	xxiii
Liste des sigles et abréviations	xxiv
Liste des figures	xxxi
Liste des tables	xxxiii
I Cadre de l'étude	1
1 Théorie et socles financiers	2
1.1 Généralités sur les taux	3
1.1.1 Taux comptant (spot)	4
1.1.2 Taux à terme (forward)	4
1.1.3 Taux swap	6
1.1.4 Structure par terme des taux d'intérêt et taux swap	7
1.1.5 Construction et extrapolation de la courbe des taux zéro-coupon par <i>Bootstrapping</i>	7
1.1.6 Construction et extrapolation de la courbe des taux zéro-coupon par le modèle de Nelson-Siegel (NS)	9
1.1.7 Construction et extrapolation de la courbe des taux zéro-coupon par le modèle de Nelson-Siegel-Svensson ou Nelson-Siegel augmenté	9
1.1.8 Construction et extrapolation de la courbe des taux zéro-coupon par le modèle de Christensen	10
1.2 Changement de numéraire	11
1.3 Produits optionnels	12
1.4 Le risque de crédit	14
1.4.1 Introduction au risque de crédit	14
1.4.2 Les dérivées de crédit	15
1.4.3 Modélisation du risque de crédit	16
2 Contexte de l'étude	19
2.1 Univers monde réel	20
2.2 Univers risque-neutre	20
2.3 Cohabitation de la probabilité monde-réel et risque-neutre	22

II	Construction du générateur de scénarios économiques	23
3	Implémentation de modèles financiers	24
3.1	La structure par terme des taux d'intérêt	26
3.1.1	Le modèle de taux d'intérêt	26
3.1.2	Reconstruction des séries chronologiques	27
3.1.3	Reconstruction de l'historique de la STTI par NSS	28
3.2	Modélisation de l'Equity (Action) et des dérivés associés	30
3.3	Calibration de la nappe de volatilité Equity	33
3.3.1	Contexte de l'étude	33
3.3.2	Spécification du modèle paramétrique	34
3.3.3	Estimation des paramètres	37
3.3.4	Reconstitution de la série chronologique	40
3.3.5	Analyse de l'historique de la structure par terme des taux de dividende	43
3.3.6	Le modèle de taux de dividende	45
3.3.7	Reconstruction des séries chronologiques	46
3.3.8	Reconstruction de l'historique de la STTI par NSS logité	47
3.3.9	Spécification du modèle paramétrique sur les volatilités des cap	60
3.4	Calibration du cube de volatilité des swaption	81
3.4.1	Spécification du modèle paramétrique sur les volatilités des swaption	81
3.5	Le risque de crédit des obligations : Govies et Corporate	101
3.5.1	Théorie du modèle LMN (à intensité de défaut)	101
3.5.2	Calibration du modèle LMN (à intensité de défaut)	105
3.6	Calibration de l'intensité de défaut	117
3.6.1	Spécification du modèle paramétrique	117
3.7	Modélisation de la structure par terme des γ_0	134
3.8	L'indice Immobilier : Euronext IEIF REIT Europe	142
3.9	L'indice SXXT	143
4	Construction du Vecteur AutoRégressif	144
4.1	Théorie du modèle VAR (Vecteur Auto Régressif)	145
4.1.1	Contexte historique	145
4.1.2	Définitions fondamentales en séries temporelles	146
4.1.3	Un exemple à deux variables	146
4.1.4	Généralisation à N variables du VAR(p)	147
4.1.5	Estimation, validation et prévision	148
4.2	Agrégation des séries temporelles en représentation des facteurs de risque des classes d'actifs	151
III	Application à l'évaluation et la prévision de dérivés vanilles	153
5	Evaluation & Forecasting	154
5.1	Hypothèse et calibration du VAR	156
5.2	L'indice action SX5E (dividendes non réinvestis)	157
5.3	L'indice SXXT	158
5.4	L'indice immobilier Euronext IEIF REIT Europe	159
5.5	La structure par terme des taux d'intérêt	160
5.6	La structure par terme des taux de dividende	162
5.7	La structure par terme des forward spot	164
5.8	La nappe de volatilité et de prix des produits dérivés action (<i>call</i>)	166
5.9	La nappe de volatilité et de prix des produits dérivés de taux (<i>cap</i>)	167

5.10	Le cube de volatilité et de prix des produits dérivés de taux (<i>swaption</i>) . . .	169
5.11	La nappe du paramètre d'intensité de défaut initial des CDS par pays et par <i>rating</i>	171
Conclusion		175
IV Annexe		267
A Cadre de l'étude		275
A.1	Théorie et socles financiers	275
A.1.1	Lemme d'Itô unidimensionnel	275
B Construction du générateur de scénarios économiques		276
B.1	Implémentation de modèles financiers	276
B.1.1	Le modèle de Bachelier (ou modèle normal)	276
B.1.2	Algorithme de Newton	285
B.2	Calibration paramétrique de l'intensité de défaut	285
Bibliographie		288

Résumé

Mots clefs : *Surface de volatilité implicite, Cube de volatilité implicite, Surface d'intensité de défaut, Instruments de marché, Crédit, LMN, GSE hybride, réplcation, Market Consistency*

L'évaluation prospective des dérivés action, crédit, taux nécessite un cadre de valorisation dynamique proposant un lien cohérent entre la probabilité historique et la probabilité risque neutre. Typiquement, le caractère réactionnaire des paramètres implicites à des stress de marché implique des valeurs calibrées ou estimées en accord avec la filtration financière engendrée.

Dès lors, le cadre de valorisation dynamique proposé repose sur une extraction des paramètres implicites de tout l'historique par inversion des formules de *pricing* propres à chaque classe de dérivés. Les grandeurs implicites engendrées sont extraites « brutes » par un algorithme d'optimisation (modèle de crédit) ou par lecture directe sur Bloomberg (volatilité log normale *call/put*, volatilité normale *cap/floor*, cube de volatilité normale pour les *swaption*) puis lissées par un modèle linéaire judicieusement choisi par une procédure de sélection de variables. Ces facteurs inobservables, rendus observables par notre procédure de calibrage et de lissage forment des sous-jacents propices à la construction d'un modèle linéaire dynamique multivarié. La diffusion des paramètres de modèle linéaire par un VAR (Vecteur auto-régressif) permet de déformer au cours du temps une surface ou une structure par terme implicite. Ces déformations sont dès lors cohérentes avec les filtrations financières prospectives et permettent de reconstruire les prix de marché avec les formules de *pricing* classiques (Black & Scholes avec dividendes pour les dérivés actions, Bachelier pour les dérivés de taux et LMN pour le crédit) en accord avec la probabilité historique.

La procédure de calibrage complète et la diffusion des grandeurs implicites produisent des résultats remarquables tant sur le nombre de dimensions optimisé, la qualité des prévisions, que sur la consistance des structures projetées (nappe de volatilité implicite action, cube de *swaption*, surface de volatilité des *cap*, structure par terme de dividendes, structures par terme de taux d'intérêt, surface des paramètres initiaux du processus d'intensité de défaut pour les *govies* et les *corporate*, structures par terme des paramètres initiaux du processus de liquidité pour les *govies* et les *corporate*). Par ailleurs, le caractère novateur du calibrage du modèle de crédit est une vraie avancée sur la *market consistency* et les conditions limites, points assez souvent délaissés sur le modèle LMN (un seul *tenor* considéré).

Abstract

Keywords : *Implied Volatility Surface, Implied Volatility Cube, Default Intensity Surface, Market Instruments, Credit, LMN, hybrid ESG, Replication, Market Consistency*

Prospective valuation of derivatives - such as equity, credit and rate derivatives – requires a dynamic pricing model which carries out a realistic link between the historical probability measure and the risk-neutral one. Certainly, the implied parameters sensibility to market stresses makes a meticulous calibrating necessary, with respect to the financial filtration.

Consequently, the dynamic pricing model introduced below is based on extraction of implied parameters from all historical data, done by inverting closed-form pricing formulas in each derivative class. Thus, implied values generated are firstly extracted as raw by using an optimization algorithm or by a direct observation on Bloomberg platform, secondly smoothed with a linear model judiciously chosen by a variable selection. Our calibration and smoothing procedures allow us to be capable of observing those factors, which provide a multivariate dynamic linear model. Diffusion of linear model parameters using an ARV – Auto-Regressive Vector – is a method for deforming a surface or an implied term structure with respect to time. Then, these distortions are consistent with prospective financial filtrations and allow us, with respect to historical probability measure, to rebuild market prices with classical pricing formulas such as Black & Scholes formula with dividends, Bachelier model for modelling forward-rates and LMN for modelling credit.

Complete calibration procedure and diffusion of implied parameters provide remarkable results as well on the optimized number of dimensions, the quality of the forecasts, as on the consistency of the projected structures (implied volatility surface of equity derivatives, cube of swaption, implied volatility surface of cap, dividend term structure, interest rate structure, surface of the initial parameters of the default intensity process for govies and corporate, term structure of the initial parameters of the liquidity process for govies and corporate). In addition, the innovative character of the calibration of the credit model is a real advance on market consistency and boundary conditions, points quite often neglected on the LMN model (only one tenor considered).

Note de synthèse

Dans un contexte économique et financier qui a généré d'importantes richesses pilotables dans les portefeuilles de performance, les assureurs se tournent naturellement vers des stratégies de protection de la marge financière. En effet, l'univers de taux durablement bas ne permet plus de garantir suffisamment de revenus fixes d'adossés pour subvenir aux engagements techniques et incite les assureurs à surpondérer les actifs de performance tout en restant attentifs à un retournement conjoncturel. Le recours à des fonds actions protégés dont la stratégie dynamique à caractère systématique entre dans le cadre des principes d'atténuation du risque des actes délégués prend dès lors une place à part entière dans la politique de gestion des risques des directions des investissements. Les fonds de crédit coté, *Investment grade* et *High yield*, sont également des classes d'actifs refuges destinées à générer une source de revenus supplémentaires.

Ainsi, dans un univers de risques financiers croissants, les études émanant des services ALM se doivent d'être les plus complètes possibles de façon à ne pas sous-estimer les risques multifactoriels inhérents aux portefeuilles d'actifs. L'enjeu est alors d'être en mesure de valoriser dynamiquement des dérivés vanilles (action, taux, crédit) permettant des études quantitatives prospectives basées sur des indicateurs stochastiques dont l'espérance présenterait la jambe de rendement et les mesures de type VaR, la jambe de risque.

L'état de l'art en la matière fait apparaître que la littérature est assez peu développée sur les problématiques de valorisation dynamique et quand bien même des modèles théoriques flexibles existent, leur procédure de calibrage issue d'un cadre complexe d'hybridation entre la probabilité historique et la probabilité risque neutre est inexplorée. En effet, la valorisation prospective induite par le ou les changements de probabilité doit théoriquement être en cohérence avec la probabilité historique. Autrement dit, les paramètres implicites des modèles de *pricing* dont les formules fermées émanent de changements de probabilité successifs doivent être corrélés avec les scénarios financiers. Typiquement, les volatilités implicites issues de la valorisation des dérivés actions sont très erratiques et corrélés avec les différents stress de marché. Malgré ce constat, les études financières partent souvent d'une hypothèse de « cristallisation » des paramètres implicites. Par exemple, les modèles ALM classiques prennent souvent en entrée une unique structure de volatilité implicite pour valoriser les dérivés vanilles dans le futur.

Le principe phare de nos travaux consiste à extraire des prix de marché, la structure des paramètres implicites de façon à considérer ces derniers comme des variables aléatoires dont les réalisations sont observables dans le passé. Pour garantir leur stabilité lors de leur diffusion et dans une optique de réduction de dimension, ces structures conjointes sont lissées soit par des modèles linéaires classiques de marché de type Nelson Siegel Svensson ou Christensen pour les structures par terme de taux, soit par des polynômes judicieusement choisis pour reproduire, directement les paramètres implicites et, indirectement les prix. Par ce biais, les séries chronologiques à reproduire sont assimilées à des facteurs de risques observables qu'ils soient issus de structures implicites (*smile* de volatilité implicite)

ou explicites (indice de prix). La famille des modèles linéaires dynamiques est un choix justifié par la stabilité qu'elle engendre d'un point de vue calibrage. Cette classe de modèle a en effet la vertu d'introduire une consistance intertemporelle des facteurs de risque de par l'estimation par moindres carrés qui garantit des séries chronologiques d'optimums globaux.

Les grandeurs projetées pour définir notre cadre de valorisation dynamique sont en accord avec la décomposition action, taux, crédit évoquée précédemment :

D'une part, l'évaluation des dérivés action par la formule de Black & Scholes, dans le futur, à tout *strike* et à tout *tenor*, s'effectue en projetant la structure par terme de dividendes implicites (un modèle Nelson Siegel Svensson sur transformation logit), la structure par terme de taux d'intérêt (un modèle Nelson Siegel Svensson), l'indice action hors dividende (SX5E) et la nappe de volatilité implicite lissée par un modèle linéaire à 6 degrés de liberté. La projection des nappes des volatilités est engendrée par la diffusion historique des paramètres du modèle linéaire et par reconstruction suivant la relation linéaire spécifiée. Les prix sont alors déterminés en utilisant la formule fermée et en allant chercher en lecture directe les paramètres implicites liés au scénario économique monde réel en vigueur.

Historique de la structure par terme des dividendes par NSS logité

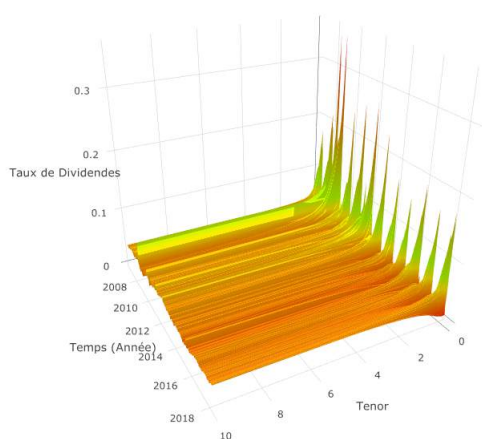


FIGURE 1 – Surface STTD historique par NSS logité

Surface de Taux d'Intérêt NSS historique

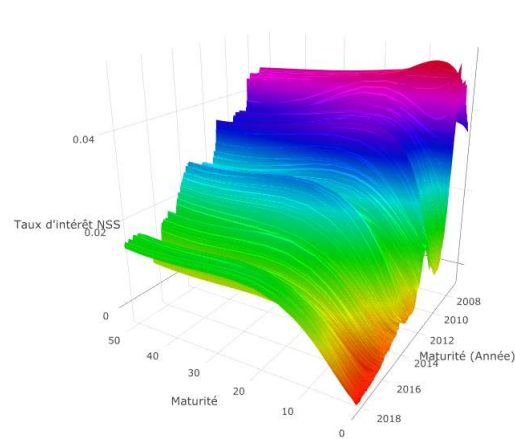


FIGURE 2 – Surface STTI historique par NSS

Surface de volatilité des Call

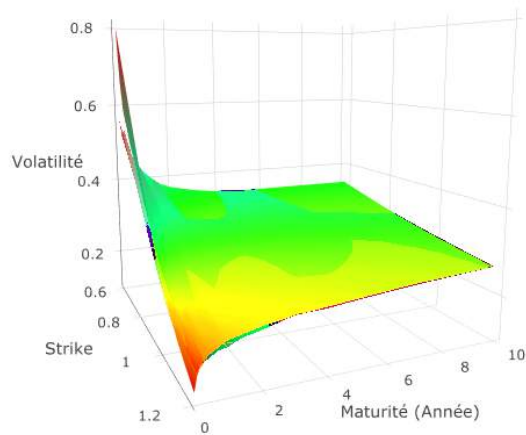


FIGURE 3 – Fitting surface de volatilité implicite des call au 06/08/2010 (REEL VS MODELE)

Surface de Prix des Call

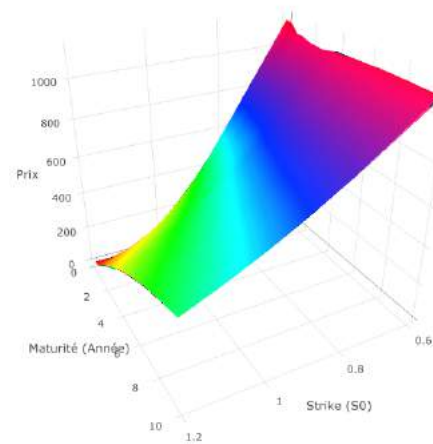


FIGURE 4 – Fitting surface de prix des call au 06/08/2010 (REEL VS MODELE)

D'autre part, dans le même esprit, le cadre de valorisation dynamique des dérivés de taux « vanilles » est construit par le lissage et la projection de la surface de volatilité normale issues des *cap* (modèle linéaire à 6 paramètres), du cube de *swaption* (modèle linéaire à 9 paramètres) et de la structure par terme des taux d'intérêt. La reproduction et la prévision de prix de ces instruments dérivés découle du modèle de Bachelier.

Fitting Surface de Volatilité des Cap

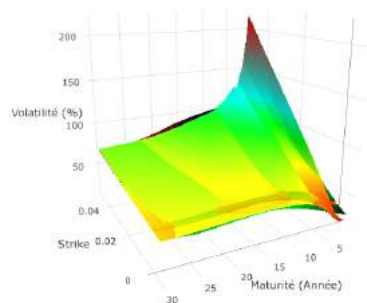


FIGURE 5 – Fitting surface de volatilité implicite des cap au 08/06/2018 (REEL VS MODELE)

Fitting Surface des Prix des Cap

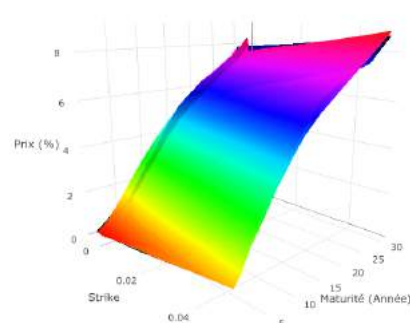
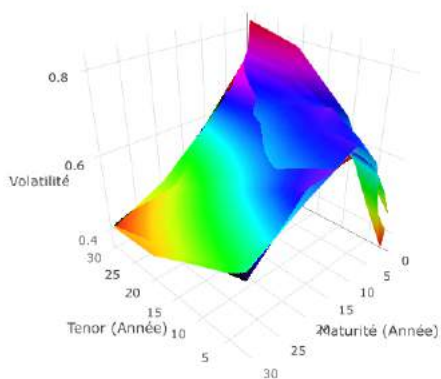
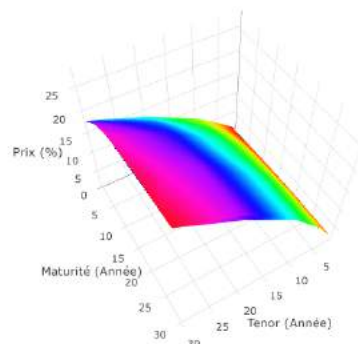


FIGURE 6 – Fitting surface de prix des cap au 08/06/2018 (REEL VS MODELE)

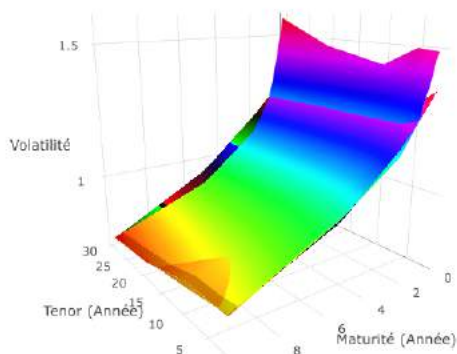
Fitting Surface de Volatilité des Swaption

FIGURE 7 – Surfaces de Vol. des swaption à $K = -100$ bps 04/02/2016

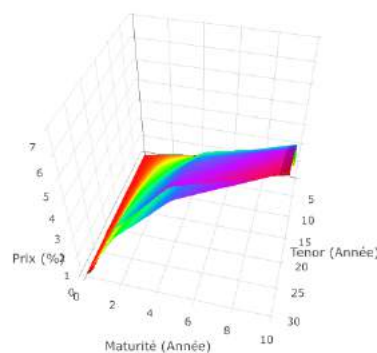
Fitting Surface de Prix des Swaption

FIGURE 8 – Surfaces de Prix des swaption à $K = -100$ bps au 04/02/2016

Fitting Surface de Volatilité des Swaption

FIGURE 9 – Surfaces de Vol. des swaption à $K = 150$ bps 05/09/2011

Fitting Surface de Prix des Swaption

FIGURE 10 – Surfaces de Prix des swaption à $K = 150$ bps au 05/09/2011

Enfin, les CDS et les prix des obligations risquées sont issus d'une projection et calibration originale et multivariée du modèle de Longstaff Mithal Neis. Les paramètres α , β , σ^2 du processus d'intensité de défaut sont calibrés indépendamment du temps tandis que l'initialisation de celui-ci est définie par une structure par terme à la Christensen. La surface conjointe des λ_0 des *govies* d'une part et des *corporate* d'autre part s'effectue par la projection de la composante autorégressive qui lie ces structures dans le temps. En ce qui concerne les paramètres du processus de liquidité, une structure par terme indépendante du temps sera déterminée pour les *govies* et les *corporate*, le η^2 (point fixe) et les structures par terme de γ_0 . La reproduction des prix est engendrée par les formules fermées du modèle LMN.

Fitting Surface des lambda_0 des CDS

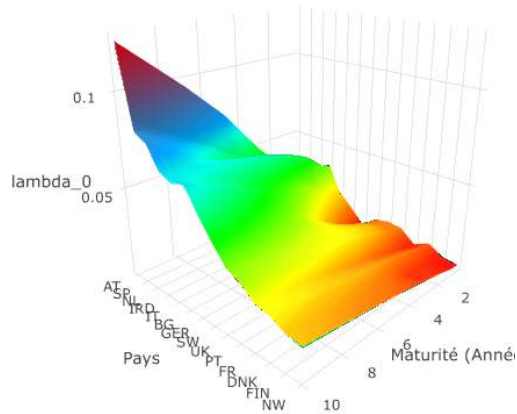


FIGURE 11 – Fitting lambda0 Pays au 14/09/2009

Fitting Surface de Prix des CDS

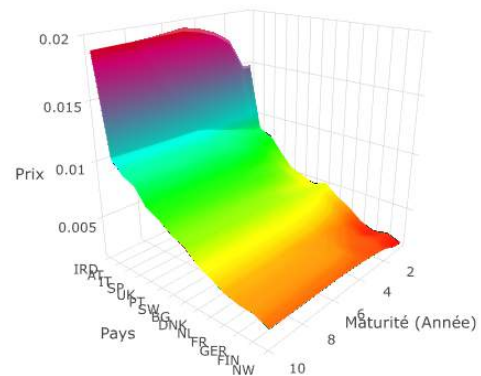


FIGURE 12 – Fitting Prix CDS Pays au 14/09/2009

Fitting Surface des lambda_0 des CDS

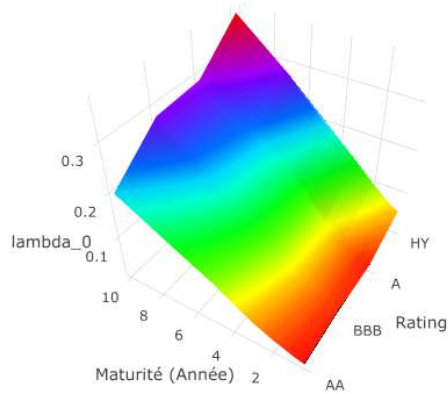


FIGURE 13 – Fitting lambda0 Rating au 18/12/2015

Fitting Surface de Prix des CDS

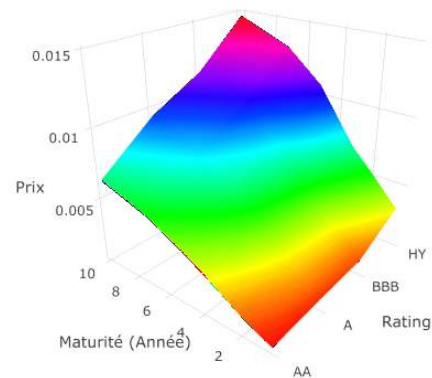


FIGURE 14 – Fitting Prix CDS Rating au 18/12/2015

Pour clôturer l'étude, la robustesse du modèle est quantifiée par la projection de nos grandeurs implicites via un modèle de série temporelle de type VAR (Vecteur AutoRégressif), la construction d'intervalle de confiance et la prévision de points de marché.

Market-Consistency des Volatilités des Call

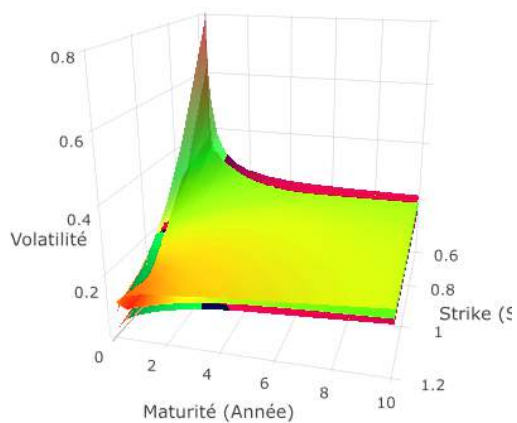


FIGURE 15 – Intervalle de Confiance CALL VOL au 22/08/2018

Forecasting des Volatilités des Call

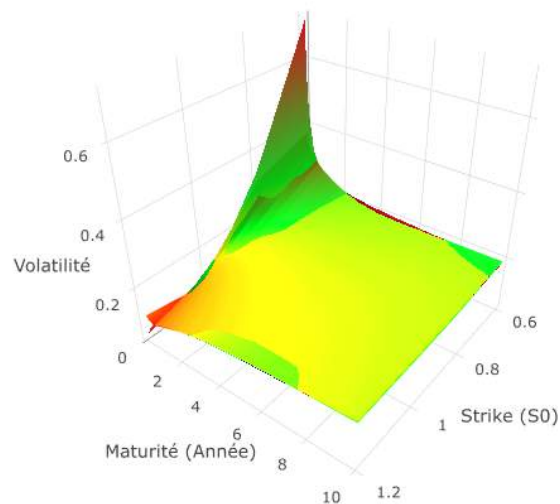


FIGURE 16 – Prévion CALL VOL au 22/08/2018

Market-Consistency des Prix des Call

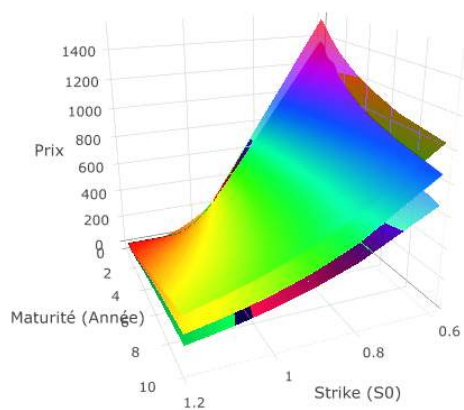


FIGURE 17 – Intervalle de Confiance CALL PRIX au 22/08/2018

Forecasting des Prix des Call

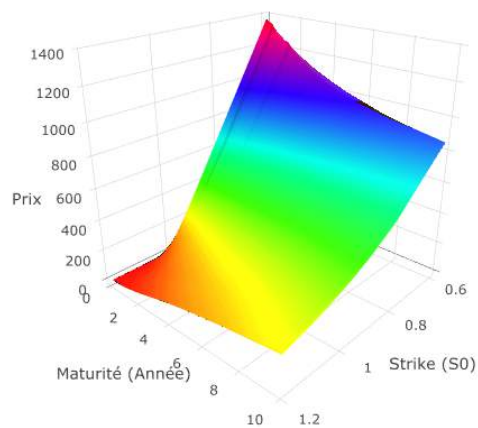


FIGURE 18 – Prévion CALL PRIX au 22/08/2018

Le cadre de valorisation dynamique proposé produit des résultats remarquables, de par la procédure de calibrage complète orientée (pondérée par les dérivés premières) pour reproduire fidèlement les prix parfois au détriment du *fitting* de la structure des paramètres implicites.

Le cadre de la présente étude est suffisamment flexible pour potentiellement étendre la modélisation à des produits structurés plus complexes. En l'occurrence, il est possible de recalibrer des modèles à volatilité stochastique à des pas de temps adaptés sur la base des filtrations financières projetés (projection monde réel des sous-jacents observables et des paramètres implicites inobservables).

Le cadre d'application de ces travaux de modélisation porte sur l'évaluation dynamique de stratégies de couverture et plus généralement d'un portefeuille financier par la prise en compte du risque de crédit des *Govies* et des *Corporate*. De fait, il peut bien évidemment être utilisé pour des études ALM diverses et variées appliquées à l'assurance.

Une autre application des surfaces de volatilité implicite est qu'il est possible de *pricer* de nouvelles options en prenant des estimations à partir des surfaces de volatilité implicite, qui peut être utilisée pour gérer des positions de produits dérivés exotiques comme des options à barrière. Dans le même esprit, il serait chronophage mais envisageable d'intégrer un recalibrage prospectif d'un modèle *full* risque neutre à chaque pas de temps d'arrêt de façon à valoriser économiquement les engagements techniques et produire de facto un bilan S2.

Un point d'attention est porté sur l'application de ce cadre dans les modèles ALM. L'implémentation de ce cadre nécessite de penser la structure du modèle financier au préalable, de façon à minorer le nombre d'*input* : par exemple, il n'est pas optimal de renvoyer une structure par terme de taux d'intérêts mais il est préférable de renvoyer seulement les régresseurs des facteurs de risque utilisés. De la même façon, les paramètres globaux (figés) des modèles de crédit (α , β , σ^2 , η^2 et les λ associés aux modèles NSS et Christensen) sont à considérer au niveau *model point*. Ces travaux donnent lieu à la construction d'un modèle ALM customisé pour accueillir et interpréter l'ensemble des grandeurs projetées ou figées.

Executive Summary

In an economic and financial environment which generated important controllable wealth in the portfolios of performance, the insurers turn naturally to strategies of protection of the financial margin. Indeed, the universe of rate durably low does not any more allow to guarantee enough fixed incomes of backing to meet the technical commitments and incite the insurers to overweight the assets of performance while remaining attentive to a cyclical reversal. The appeal of hedged equity funds whose dynamic strategy with systematic character enters within the framework of the principles of mitigation of the risk of the delegated acts takes takes aside from now on a significant place in the risk management policy of the managements of the investments. The funds of highly-rated credit, Investment rank and High yield, are also safe asset classes intended to generate a stream of additional income.

Thus, in a universe of increasing financial risks, the emanating studies ALM services owe be the most complete to not underestimate the multifactorial risks inherent to asset portfolios. The stake is then to be capable of valuing dynamically plain vanilla options (equity, rate, credit) allowing forward-looking quantitative studies based on stochastic indicators with the hope would present the yield and the measures like the Value at Risk, the risk.

The state of the art on the subject reveals that the literature is fairly developed on the problems of dynamic valuation and even though flexible theoretical models exist, their procedure of calibration stemming from a complex frame of hybridization between the historic probability and the risk-neutral probability is unexplored. Indeed, the forward-looking valuation inferred by one or several changes of probability has to be in theory in coherence with the historic probability. In other words, the implicit parameters of the models of pricing the closed formulae of which derived from successive changes of probability must be correlated to the financial scenarios. Typically, the implied volatilities stemming from the valuation of equity derivaties are very erratic and correlated with various stress of market. In spite of this report, financial studies often leave a hypothesis of "crystallization" of the implicit parameters. For example, the classic model ALM often takes in input a unique structure of implied volatility to value plain vanilla options in the future.

The key principle of our works consists in extracting market prices, structure of the implicit parameters to allow us to consider the latter as random variables the realizations of which are observable in past. To guarantee their stability during their diffusion and in a stake of reduction of dimension, these joint structures are smoothed either by classic linear models of market like Nelson Siegel Svensson or Christensen for the term structures of interest rates, or by polynomials sensibly chosen to reproduce, directly the implicit parameters and, indirectly the prices. Due to this, the chronological series to be reproduced are likened to observable risk factors that they arise from implicit structures (smile of implied volatility) or explicit (index). The family of the dynamic linear models

is a choice justified by the stability that it engenders from a point of view calibration. This class of model indeed has the virtue to introduce an intertemporal consistency of the risk factors due to the estimation by least squares which guarantees chronological series of global optima.

The magnitude projected to define our frame of dynamic valuation are in agreement with the decomposition of equity, rate, credit evoked previously :

On one hand, the equity derivatives evaluation by the formula of Black & Scholes, in the future, in all Strike and in every Tenor, is made by projecting the term structure of implicit dividends (a model Nelson Siegel Svensson on transformation logit), the term structures of interest rates (a model Nelson Siegel Svensson), the equity index without dividend reinvested (SX5E) and the implied volatility surface smoothed by a linear model in 6 degrees of freedom. The volatility surfaces projection is engendered by the historic distribution of the linear model parameters and by the reconstruction following the specified linear relation. The prices are then determined by using the closed formula and by fetching in direct reading the implicit parameters bound to the current real world economic scenario.

Historique de la structure par terme des dividendes par NSS logité

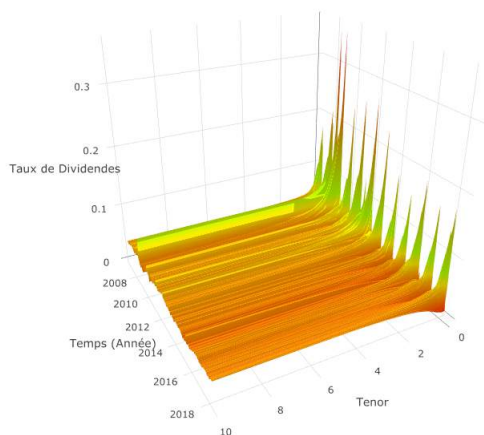


FIGURE 19 – Historic TSDR Surface by NSS with transformation logit

Surface de Taux d'Intérêt NSS historique

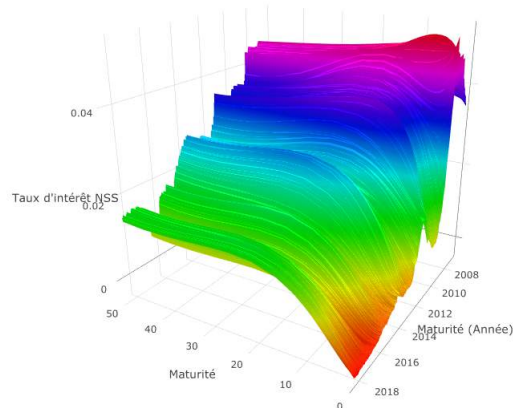


FIGURE 20 – Historic TSIR Surface by NSS

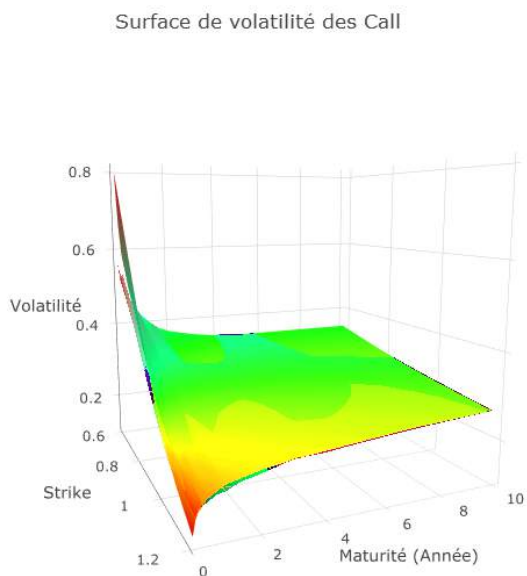


FIGURE 21 – Fitting of implied volatility surface of call on 06/08/2010 (REAL VS MODEL)

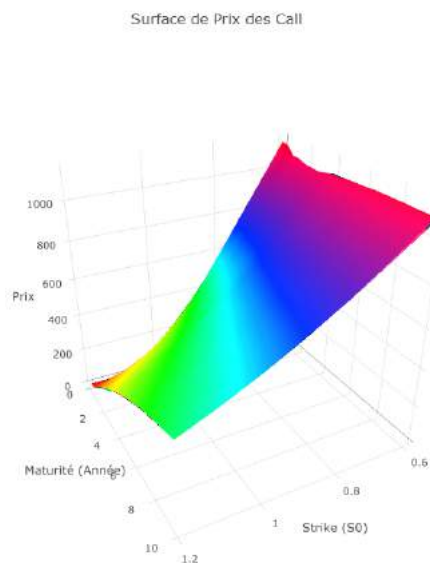


FIGURE 22 – Fitting of price surface of call on 06/08/2010 (REAL VS MODEL)

On the other hand, in the same spirit, the frame of dynamic valuation of « rate » plain vanilla options is built by the smoothing and the projection of the normal volatility surface outcomes of derivatives cap (linear model in 6 parameters), of the cube of swaption (linear model in 9 parameters) and of the term structure of interest rates. The reproduction and the price forecast of these derivatives came from the Bachelier model.

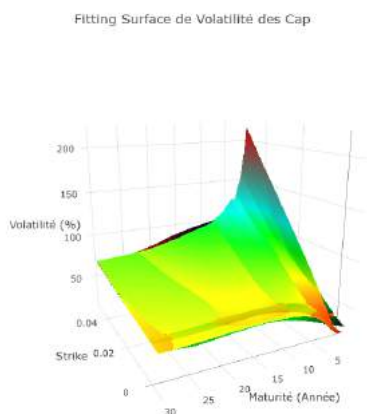


FIGURE 23 – Fitting of implied volatility surface of cap on 08/06/2018 (REAL VS MODEL)

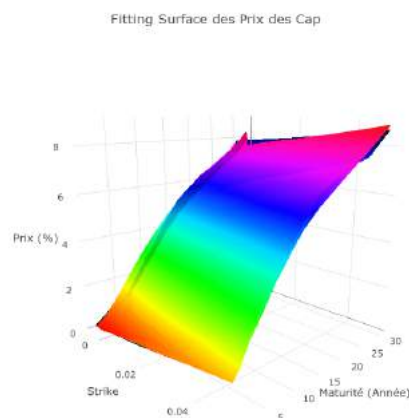


FIGURE 24 – Fitting of price surface of cap on 08/06/2018 (REAL VS MODEL)

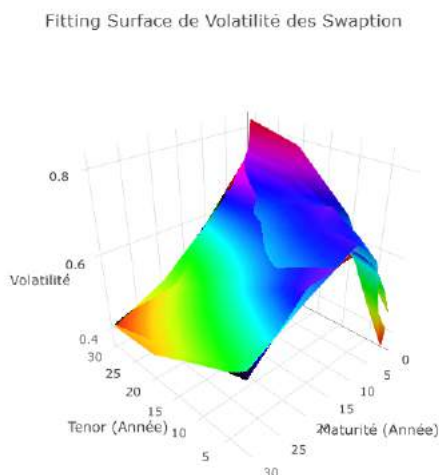


FIGURE 25 – Implied volatility surfaces of swaption $K = -100$ bps on 04/02/2016

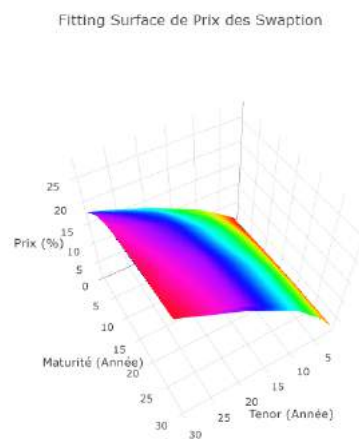


FIGURE 26 – Price surfaces of swaption $K = -100$ bps on 04/02/2016

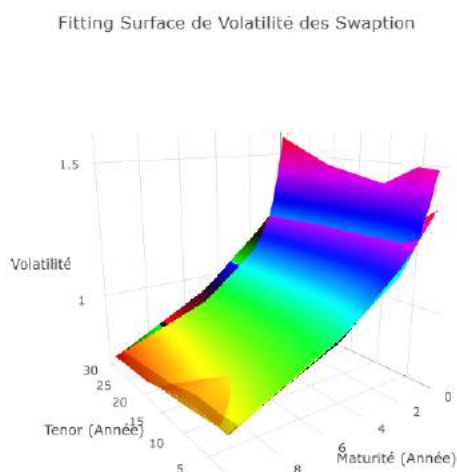


FIGURE 27 – Implied volatility surfaces of swaption $K = 150$ bps on 05/09/2011

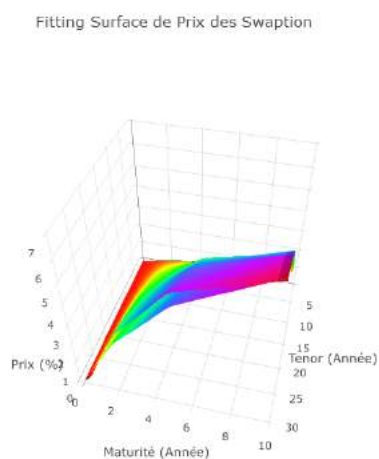


FIGURE 28 – Price surfaces of swaption $K = 150$ bps on 05/09/2011

Finally, the CDS and the prices of risky bonds arise from a projection and original calibration and multivariate of Longstaff Mithal Neis's model. The parameters α , β , σ^2 of the intensity of defect process are calibrated independently of time whereas the initialization of this one is defined by a structure by term with the Christensen model. The joint surface of the λ_0 of govies on one hand and corporate on the other hand is made by the projection of the autoregressive component which link these structures in time. However, the parameters of the liquidity process, η^2 (fixed point) and γ_0 is modeling by a structure by term with the Christensen model. The reproduction of the prices is generated by formulae closed by the model LMN.

Fitting Surface des lambda_0 des CDS

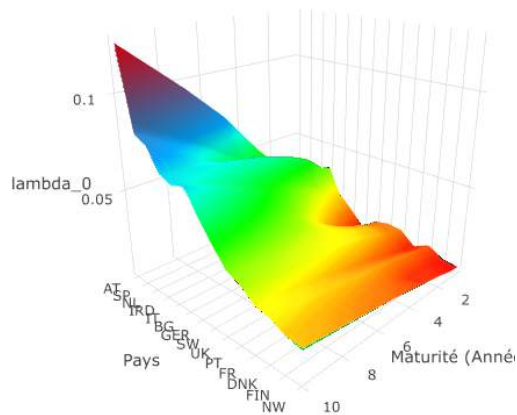


FIGURE 29 – Fitting lambda0 Countries on 14/09/2009

Fitting Surface de Prix des CDS

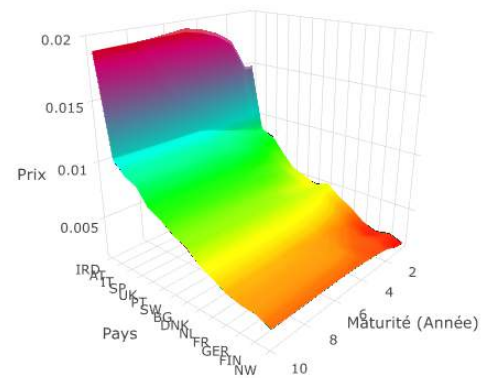


FIGURE 30 – Fitting Prices CDS Countries on 14/09/2009

Fitting Surface des lambda_0 des CDS

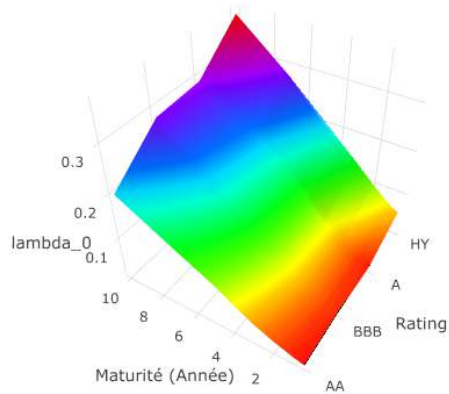


FIGURE 31 – Fitting lambda0 Rating on 18/12/2015

Fitting Surface de Prix des CDS

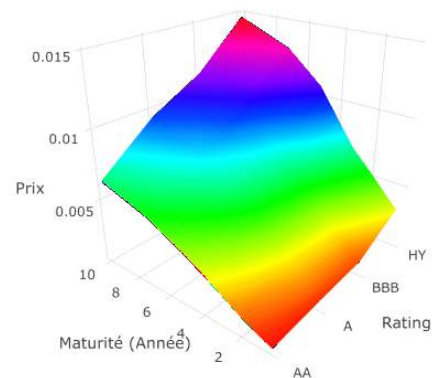


FIGURE 32 – Fitting Prices CDS Rating on 18/12/2015

To enclose the study, the robustness of the model is quantified by the projection of our implicit magnitude thanks to a model of temporal series like the VAR (Autoregressive Vector), the construction of confidence interval and the forecast of points of market.

Market-Consistency des Volatilités des Call

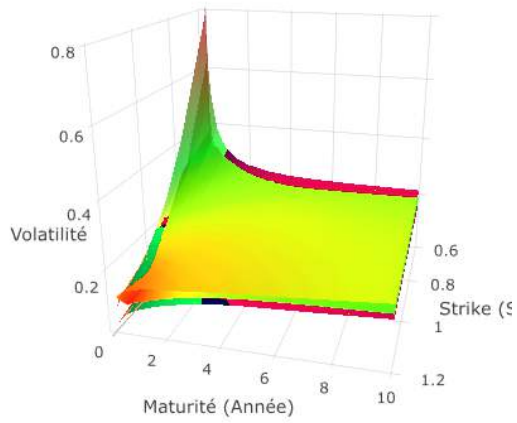


FIGURE 33 – Confidence interval CALL VOL on 22/08/2018

Forecasting des Volatilités des Call

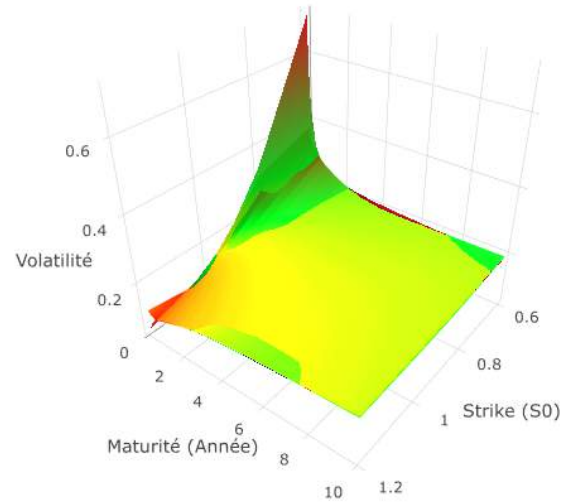


FIGURE 34 – Forecast CALL VOL on 22/08/2018

Market-Consistency des Prix des Call

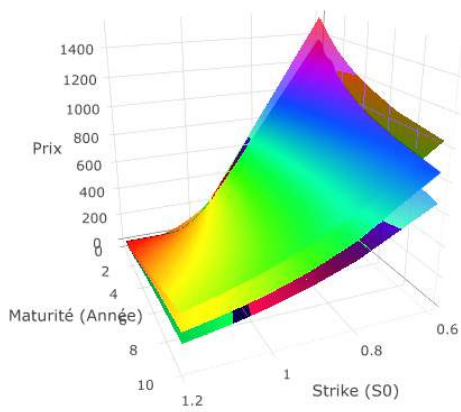


FIGURE 35 – Confidence interval CALL PRICES on 22/08/2018

Forecasting des Prix des Call

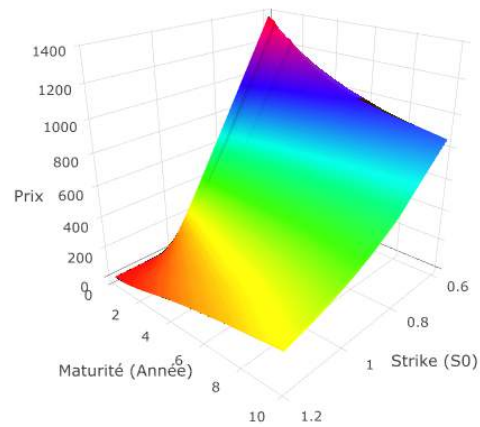


FIGURE 36 – Forecast CALL PRICES on 22/08/2018

The frame of dynamic valuation proposed produces remarkable results, due to the complete procedure of calibration directed (balanced by the first derivatives) to reproduce faithfully the prices sometimes to the detriment of the fitting of the implicit parameters structure.

The frame of the present study is enough flexible to spread potentially the modelling to more complex structured products. In this case, it is possible to re-calibrate models with stochastic volatility in steps of times adapted on the basis of the financial filtrations projected (real world projection of observable underlying and unobservable implicit parameters).

The frame of application of these works of modelling concerns the dynamic evaluation of cover strategies and more generally a financial portfolio by the consideration of the Govies and Corporate credit risk. Actually, it can be naturally used for diverse and varied studies ALM applied to the insurance.

Another application of the implied volatility surfaces is that it is possible to price new options by taking estimations from the implied volatility surfaces, which can be used to manage positions of exotic options as barrier options. In the same spirit, it would be very time-consuming but possible to integrate a forward-looking recalibration of a full risk neutral model at every step of reporting date to value economically the technical commitments and produce de facto a S2 balance sheet.

A attention point concerned the application of this frame in the ALM model. The implementation of this frame requires to think of the financial model beforehand structure, to underestimate the number of input : for example, it is not optimal to send back a term structure of interest rates but it's better to send back only the regressors of the used risk factors. In the same way, the global parameters (fixed) of the credit models (α , β , σ^2 , η^2 and λ associated in the NSS and Christensen models) are to be considered at the level model. These works give rise to the construction of a ALM model customized to welcome and interpret all the projected or fixed magnitude.

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier mon maître de stage M. KIZILIAN Emmanuel, responsable ALM, pour sa confiance, sa disponibilité et son investissement. Son expertise en finance de marché m'a été précieuse pour saisir l'enjeu du sujet de stage.

Aussi, je remercie Timothée FABRE, alternant et étudiant ISFA de Master 1 pour avoir réalisé plusieurs travaux pendant la rédaction du mémoire.

Je remercie globalement l'équipe de la Direction des Investissements (DI) de Malakoff Médéric pour m'avoir accueilli pour réaliser mon stage de fin d'études, dans une ambiance de travail stimulante et chaleureuse.

Je souhaite également remercier l'ensemble du corps professoral de l'EURIA pour la qualité de la formation que j'ai reçue pendant ces trois années d'études et tout particulièrement M. BUCKDAHN Rainer pour son suivi dynamique et ses nombreuses relectures de mémoire.

J'adresse aussi mes remerciements à Mme SALAUN Pauline, ma tutrice pédagogique de l'EURIA pour ses remarques et son suivi.

Introduction

Dans un contexte économique et financier qui a généré d'importantes richesses pilotables dans les portefeuilles de performance, les assureurs se tournent naturellement vers des stratégies de protection de la marge financière. En effet, l'univers de taux durablement bas ne permet plus de garantir suffisamment de revenus fixes d'adossés pour subvenir aux engagements techniques et incite les assureurs à surpondérer les actifs de performance tout en restant attentifs à un retournement conjoncturel. Le recours à des fonds actions protégés dont la stratégie dynamique à caractère systématique entre dans le cadre des principes d'atténuation du risque des actes délégués prend dès lors une place à part entière dans la politique de gestion des risques des directions des investissements. Les fonds de crédit coté, *Investment grade* et *High yield*, sont également des classes d'actifs refuges destinées à générer une source de revenus supplémentaires.

Ainsi, dans un univers de risques financiers croissants, les études émanant des services ALM se doivent d'être les plus complètes possibles de façon à ne pas sous-estimer les risques multifactoriels inhérents aux portefeuilles d'actifs. L'enjeu est alors d'être en mesure de valoriser dynamiquement des dérivés vanilles (action, taux, crédit) permettant des études quantitatives prospectives basées sur des indicateurs stochastiques dont l'espérance présenterait la jambe de rendement et les mesures de type VaR, la jambe de risque.

L'état de l'art en la matière fait apparaître que la littérature est assez peu développée sur les problématiques de valorisation dynamique et quand bien même des modèles théoriques flexibles existent, leur procédure de calibrage issue d'un cadre complexe d'hybridation entre la probabilité historique et la probabilité risque neutre est inexplorée. En effet, la valorisation prospective induite par le ou les changements de probabilité doit théoriquement être en cohérence avec la probabilité historique. Autrement dit, les paramètres implicites des modèles de *pricing* dont les formules fermées émanent de changements de probabilité successifs doivent être corrélés avec les scénarios financiers. Typiquement, les volatilités implicites issues de la valorisation des dérivés actions sont très erratiques et corrélés avec les différents stress de marché. Malgré ce constat, les études financières partent souvent d'une hypothèse de « cristallisation » des paramètres implicites. Par exemple, les modèles ALM classiques prennent souvent en entrée une unique structure de volatilité implicite pour valoriser les dérivés vanilles dans le futur.

Le principe phare de nos travaux consiste à extraire des prix de marché, la structure des paramètres implicites de façon à considérer ces derniers comme des variables aléatoires dont les réalisations sont observables dans le passé. Pour garantir leur stabilité lors de leur diffusion et dans une optique de réduction de dimension, ces structures conjointes sont lissées soit par des modèles linéaires classiques de marché de type Nelson Siegel Svensson ou Christensen pour les structures par terme de taux, soit par des polynômes judicieusement choisis pour reproduire, directement les paramètres implicites et, indirectement les prix. Par ce biais, les séries chronologiques à reproduire sont assimilées à des facteurs de risques observables qu'ils soient issus de structures implicites (*smile* de volatilité implicite) ou explicites (indice de prix). La famille des modèles linéaires dynamiques est un choix justifié par la stabilité qu'elle engendre d'un point de vue calibrage. Cette classe de modèle a en effet la vertu d'introduire une consistance intertemporelle des facteurs de risque de par l'estimation par moindres carrés qui garantit des séries chronologiques d'optimums

globaux.

Les grandeurs projetées pour définir notre cadre de valorisation dynamique seront en accord avec la décomposition action, taux, crédit évoquée précédemment :

D'une part, l'évaluation des dérivés action par la formule de Black & Scholes, dans le futur, à tout *strike* et à tout *tenor*, s'effectuera en projetant la structure par terme des taux de dividende implicite (un modèle Nelson Siegel Svensson sur transformation logit), la structure par terme des taux d'intérêt (un modèle Nelson Siegel Svensson), l'indice action hors dividende (SX5E) et la nappe de volatilité implicite lissée par un modèle linéaire à 6 degrés de liberté. La projection des nappes des volatilités sera engendrée par la diffusion historique des paramètres du modèle linéaire et par reconstruction suivant la relation linéaire spécifiée. Les prix seront alors déterminés en utilisant la formule fermée et en allant chercher en lecture directe les paramètres implicites liés au scénario économique monde réel en vigueur.

D'autre part, dans le même esprit, le cadre de valorisation dynamique des dérivés de taux « vanilles » sera construit par le lissage et la projection de la surface de volatilité normale issues des *cap* (modèle linéaire à 6 paramètres), du cube de *swaption* (modèle linéaire à 9 paramètres) et de la structure par terme des taux d'intérêt. La reproduction et la prévision de prix de ces instruments dérivés découlera du modèle de Bachelier.

Enfin, les CDS et les prix des obligations risquées sont issus d'une projection et calibration originale et multivariée du modèle de Longstaff Mithal Neis. Les paramètres α , β , σ^2 du processus d'intensité de défaut sont calibrés indépendamment du temps tandis que l'initialisation de celui-ci est définie par une structure par terme à la Christensen. La surface conjointe des λ_0 des govies d'une part et des corporate d'autre part s'effectue par la projection de la composante autorégressive qui lie ces structures dans le temps. En ce qui concerne les paramètres du processus de liquidité, une structure par terme indépendante du temps sera déterminée pour les *govies* et les *corporate*, le η^2 (point fixe) et les structures par terme de γ_0 . La reproduction des prix est engendrée par les formules fermées du modèle LMN.

Pour clôturer l'étude, la robustesse du modèle sera quantifiée par la projection de nos grandeurs implicites via un modèle de série temporelle de type VAR (Vecteur Auto Régressif), la construction d'intervalle de confiance et la prévision de points de marché.

Liste des abréviations et sigles

ALM	Asset Liability Management
AOA	Absence d'Opportunité d'Arbitrage
GSE	Générateur de Scénarios Économiques
IC	Intervalle de Confiance
STTI	Structure par Terme des Taux d'Intérêt
S2	Solvabilité 2
ZC	Zéro-Coupon
OTM	Out The Money
ITM	In The Money
ATM	At The Money
OLS	Ordinary Least Squares
WLS	Weighted Least Squares
NS	Nelson-Siegel
NSS	Nelson-Siegel-Svensson
LMN	LONGSTAFF, MITHAL, and NEIS
CDS	Credit Default Swap
CB	Corporate Bond
STTD	Structure par Terme de Taux de Tividende
VAR	Vecteur AutoRégressif
MOY	Moyenne/Espérance
RN	Risque-Neutre

Table des figures

1	Surface STTD historique par NSS logité	vii
2	Surface STTI historique par NSS	vii
3	Fitting surface de volatilité implicite des call au 06/08/2010 (REEL VS MODELE)	viii
4	Fitting surface de prix des call au 06/08/2010 (REEL VS MODELE)	viii
5	Fitting surface de volatilité implicite des cap au 08/06/2018 (REEL VS MODELE)	viii
6	Fitting surface de prix des cap au 08/06/2018 (REEL VS MODELE)	viii
7	Surfaces de Vol. des swaption à K = -100 bps 04/02/2016	ix
8	Surfaces de Prix des swaption à K = -100 bps au 04/02/2016	ix
9	Surfaces de Vol. des swaption à K = 150 bps 05/09/2011	ix
10	Surfaces de Prix des swaption à K = 150 bps au 05/09/2011	ix
11	Fitting lambda0 Pays au 14/09/2009	x
12	Fitting Prix CDS Pays au 14/09/2009	x
13	Fitting lambda0 Rating au 18/12/2015	x
14	Fitting Prix CDS Rating au 18/12/2015	x
15	Intervalle de Confiance CALL VOL au 22/08/2018	xi
16	Prévision CALL VOL au 22/08/2018	xi
17	Intervalle de Confiance CALL PRIX au 22/08/2018	xi
18	Prévision CALL PRIX au 22/08/2018	xi
19	Historic TSDR Surface by NSS with transformation logit	xiv
20	Historic TSIR Surface by NSS	xiv
21	Fitting of implied volatility surface of call on 06/08/2010 (REAL VS MODEL)	xv
22	Fitting of price surface of call on 06/08/2010 (REAL VS MODEL)	xv
23	Fitting of implied volatility surface of cap on 08/06/2018 (REAL VS MODEL)	xv
24	Fitting of price surface of cap on 08/06/2018 (REAL VS MODEL)	xv
25	Implied volatility surfaces of swaption K = -100 bps on 04/02/2016	xvi
26	Price surfaces of swaption K = -100 bps on 04/02/2016	xvi
27	Implied volatility surfaces of swaption K = 150 bps on 05/09/2011	xvi
28	Price surfaces of swaption K = 150 bps on 05/09/2011	xvi
29	Fitting lambda0 Countries on 14/09/2009	xvii
30	Fitting Prices CDS Countries on 14/09/2009	xvii
31	Fitting lambda0 Rating on 18/12/2015	xvii
32	Fitting Prices CDS Rating on 18/12/2015	xvii
33	Confidence interval CALL VOL on 22/08/2018	xviii
34	Forecast CALL VOL on 22/08/2018	xviii
35	Confidence interval CALL PRICES on 22/08/2018	xviii
36	Forecast CALL PRICES on 22/08/2018	xviii
1.1	Taux swap et taux zéro-coupon sur Euribor 6 mois au 03/05/2018	8

3.1	Serie chronologie Beta0 STTI NSS	27
3.2	Serie chronologie Beta1 STTI NSS	27
3.3	Serie chronologie Beta2 STTI NSS	27
3.4	Serie chronologie Beta3 STTI NSS	27
3.5	Historique de la structure par terme des taux d'intérêt reconstruit par NSS	28
3.6	Historique de la la structure par terme des taux d'intérêt réels	29
3.7	L'Indice SX5E	30
3.8	Représentation de l'historique du VSTOXX	34
3.9	Surface du vega en fonction de la maturité et du prix d'exercice (dividendes non nuls)	38
3.10	Surface de volatilité (SX5E) en fonction de la maturité et du prix d'exercice	41
3.11	Historique de la structure par terme des forward spot	42
3.12	Historique de la structure par terme des taux de dividende réelle	43
3.13	STTD NSS logité VS STTD OBS. (1)	44
3.14	STTD NSS logité VS STTD OBS. (2)	44
3.15	STTD NSS logité VS STTD OBS. (3)	44
3.16	STTD NSS logité VS STTD OBS. (4)	44
3.17	Serie chronologie Beta0 STTD NSS logité	46
3.18	Serie chronologie Beta1 STTD NSS logité	46
3.19	Serie chronologie Beta2 STTD NSS logité	46
3.20	Serie chronologie Beta3 STTD NSS logité	46
3.21	Historique de la structure par terme des taux de dividende par le modèle de NSS logité	47
3.22	Serie chronologie Beta0 Call	50
3.23	Serie chronologie Beta1 Call	50
3.24	Serie chronologie Beta2 Call	51
3.25	Serie chronologie Beta3 Call	51
3.26	Serie chronologie Beta4 Call	51
3.27	Serie chronologie Beta5 Call	51
3.28	Surface 23/10/2008	52
3.29	Surface Prix 23/10/2008	52
3.30	Surface 03/11/2008	52
3.31	Surface 03/11/2008	52
3.32	Surface 11/11/2008	52
3.33	Surface 11/11/2008	52
3.34	Surface 18/11/2008	53
3.35	Surface 18/11/2008	53
3.36	Fitting 03/08/2007	55
3.37	Fitting Prix 03/08/2007	55
3.38	Fitting 06/08/2010	55
3.39	Fitting Prix 06/08/2010	55
3.40	Surface de volatilités des cap sans le strike ATM 08/06/2018	62
3.41	Courbe des taux forward au 03/05/2018	63
3.42	Volatilité des caps et caplets avec strike $K = 1\%$ au 08/06/2018	65
3.43	Comparaison des prix des cap : Volatilité Cap VS Volatilités Caplet pour chaque strike sauf ATM	66
3.44	Comparaison des prix des cap : Volatilité Cap VS Volatilités Caplet avec strike ATM	67

3.45	Surface du vega de cap en fonction de la maturité du cap et du prix d'exercice	69
3.46	Serie chronologie Beta0 Cap	74
3.47	Serie chronologie Beta1 Cap	74
3.48	Serie chronologie Beta2 Cap	74
3.49	Serie chronologie Beta3 Cap	74
3.50	Serie chronologie Beta4 Cap	74
3.51	Serie chronologie Beta5 Cap	74
3.52	Surface all	75
3.53	Surface reduced	75
3.54	Fitting de la surface de prix du 03/01/2013	76
3.55	Fitting 07/01/2015	77
3.56	Fitting Prix 07/01/2015	77
3.57	Fitting 17/11/2011	79
3.58	Fitting Prix 17/11/2011	79
3.59	Fitting 07/11/2016	79
3.60	Fitting Prix 07/11/2016	79
3.61	Fitting 08/06/2018	79
3.62	Fitting Prix 08/06/2018	79
3.63	Surface swaption à $K = -1.5\%$	82
3.64	Surface swaption à $K = \text{ATM}$	82
3.65	Surface swaption à $K = 1.5\%$	83
3.66	Surface de Vega de maturité fixe 2 ans (i)	85
3.67	Surface de Vega de maturité fixe 30 ans (i)	85
3.68	Surface de Vega de strike 1.5% (ii)	86
3.69	Surface de Vega de strike ATM (ii)	86
3.70	Surface de Vega de strike -1.5% (ii)	86
3.71	Surface de Vega de tenor fixe 2 an (iii)	86
3.72	Serie chronologie Beta0 Swaption	91
3.73	Serie chronologie Beta1 Swaption	91
3.74	Serie chronologie Beta2 Swaption	92
3.75	Serie chronologie Beta3 Swaption	92
3.76	Serie chronologie Beta4 Swaption	92
3.77	Serie chronologie Beta5 Swaption	92
3.78	Serie chronologie Beta6 Swaption	93
3.79	Serie chronologie Beta7 Swaption	93
3.80	Serie chronologie Beta8 Swaption	93
3.81	Surfaces de Volatilité des swaption à $K = -150$ bps	94
3.82	Surfaces de Prix des swaption à $K = -150$ bps	94
3.83	Surfaces de Volatilité des swaption à $K = -100$ bps	94
3.84	Surfaces de Prix des swaption à $K = -100$ bps	94
3.85	Surfaces de Volatilité des swaption à $K = -50$ bps	94
3.86	Surfaces de Prix des swaption à $K = -50$ bps	94
3.87	Surfaces de Volatilité des swaption à $K = -25$ bps	95
3.88	Surfaces de Prix des swaption à $K = -25$ bps	95
3.89	Surfaces de Volatilité des swaption à $K = \text{ATM}$ bps	95
3.90	Surfaces de Prix des swaption à $K = \text{ATM}$	95
3.91	Surfaces de Volatilité des swaption à $K = 25$ bps	95
3.92	Surfaces de Prix des swaption à $K = 25$ bps	95

3.93	Surfaces de Volatilité des swaption à $K = 50$ bps	96
3.94	Surfaces de Prix des swaption à $K = 50$ bps	96
3.95	Surfaces de Volatilité des swaption à $K = 100$ bps	96
3.96	Surfaces de Prix des swaption à $K = 100$ bps	96
3.97	Surfaces de Volatilité des swaption à $K = 150$ bps	96
3.98	Surfaces de Prix des swaption à $K = 150$ bps	96
3.99	Surfaces de Vol. des swaption à $K = -100$ bps 04/02/2016	99
3.100	Surfaces de Prix des swaption à $K = -100$ bps au 04/02/2016	99
3.101	Surfaces de Vol. des swaption à $K = 50$ bps au 08/03/2016	99
3.102	Surfaces de Prix des swaption à $K = 50$ bps au 08/03/2016	99
3.103	Surfaces de Vol. des swaption à $K = 150$ bps 05/09/2011	100
3.104	Surfaces de Prix des swaption à $K = 150$ bps au 05/09/2011	100
3.105	Surfaces de Vol. des swaption à $K = -150$ bps 05/09/2011	100
3.106	Surfaces de Prix des swaption à $K = -150$ bps au 05/09/2011	100
3.107	Structure par terme de λ_0 de la Finlande au 06/11/2009	107
3.108	Structure par terme des Prix des CDS de la Finlande au 06/11/2009	108
3.109	Structure par terme de λ_0 extrapolée par Christensen de l'Autriche au 14/02/2014	109
3.110	Structure par terme des Prix extrapolée par Christensen des CDS de l'Autriche au 14/02/2014	109
3.111	Structure par terme de λ_0 extrapolée par Christensen de la Finlande au 06/11/2009	110
3.112	Structure par terme des Prix extrapolée par Christensen des CDS de la Finlande au 06/11/2009	110
3.113	Structure par terme des prix CDS extrapolée par Christensen de la Finlande calibrée avec les deux tenor extrêmes (1)	112
3.114	Structure par terme des prix CDS extrapolée par Christensen de la Finlande calibrée avec les deux tenor extrêmes (2)	112
3.115	Structure par terme des prix CDS extrapolée par Christensen de la Finlande calibrée avec les deux tenor extrêmes (3)	113
3.116	Paramètres globaux LMN Govies par pays	113
3.117	Paramètres globaux LMN Govies par rating	114
3.118	Paramètres λ Christensen Govies par pays	114
3.119	Paramètres λ Christensen Govies par rating	115
3.120	Paramètre global Corporate par pays	115
3.121	Paramètre global Corporate par rating	115
3.122	Surface de Vega ajusté des CDS par pays	120
3.123	Surface de Vega ajusté des CDS par rating	120
3.124	Serie chronologie Beta0 Intensite de Defaut des Pays	124
3.125	Fitting réduit λ_0 10/01/2017	126
3.126	Fitting réduit Prix CDS 10/01/2017	126
3.127	Fitting complet λ_0 10/01/2017	126
3.128	Fitting complet Prix CDS 10/01/2017	126
3.129	Fitting réduit λ_0 14/09/2009	127
3.130	Fitting réduit Prix CDS 14/09/2009	127
3.131	Fitting complet λ_0 14/09/2009	127
3.132	Fitting complet Prix CDS 14/09/2009	127
3.133	Serie chronologie Beta0 Intensite de Defaut des Rating	129
3.134	Fitting réduit λ_0 18/12/2015	131

3.135	Fitting réduit Prix CDS 18/12/2015	131
3.136	Fitting complet lambda0 18/12/2015	131
3.137	Fitting complet Prix CDS 18/12/2015	131
3.138	Fitting réduit lambda0 22/03/2018	132
3.139	Fitting réduit Prix CDS 22/03/2018	132
3.140	Fitting complet lambda0 22/03/2018	132
3.141	Fitting complet Prix CDS 22/03/2018	132
3.142	Fitting Probabilité de Défaut des pays au 10/01/2017	133
3.143	Fitting Probabilité de Défaut des rating au 22/03/2018	133
3.144	Structures par terme de gamma0 du rating A sur tous les pas de temps	134
3.145	Structures par terme de gamma0 de l'Espagne sur tous les pas de temps	134
3.146	Structures par terme de gamma0 de la Finlande sur tous les pas de temps	134
3.147	Surface de Vega des CB par rating	138
3.148	Structure par terme de gamma0 de la Belgique	140
3.149	Structure par terme de prix des CB de la Belgique	140
3.150	Structure par terme de gamma0 de la Finlande	140
3.151	Structure par terme de prix des CB de la Finlande	140
3.152	Structure par terme de gamma0 du rating A	141
3.153	Structure par terme de prix des CB du rating A	141
3.154	Indice IEIF REIT Europe	142
3.155	Indice SXXT	143
5.1	Représentation graphique de l'intervalle de confiance du SX5E VAR et celle réelle	157
5.2	Représentation graphique de la moyenne du SX5E VAR et celle réelle	157
5.3	Représentation graphique de l'intervalle de confiance du SXXT VAR et celle réelle	158
5.4	Représentation graphique de la moyenne du SXXT VAR et celle réelle	158
5.5	Représentation graphique de l'intervalle de confiance de l'Euronext IEIF REIT VAR et celle réelle	159
5.6	Représentation graphique de la moyenne de l'Euronext IEIF REIT VAR et celle réelle	159
5.7	Représentation graphique de l'intervalle de confiance de la STTI VAR et celle réelle au 16/08/2018	160
5.8	Représentation graphique de la moyenne de la STTI du VAR et celle réelle au 16/08/2018	160
5.9	Représentation graphique de l'intervalle de confiance de la STTI VAR et celle réelle au 20/08/2018	161
5.10	Représentation graphique de la moyenne de la STTI du VAR et celle réelle au 20/08/2018	161
5.11	Représentation graphique de l'intervalle de confiance de la STTD VAR et réelle au 22/08/2018	162
5.12	Représentation graphique de la moyenne de la STTD VAR et réelle au 22/08/2018	162
5.13	Représentation graphique de l'intervalle de confiance de la STTD VAR et réelle au 15/08/2018	163
5.14	Représentation graphique de la moyenne de la STTD VAR et réelle au 15/08/2018	163
5.15	Représentation graphique de l'intervalle de confiance de la STT des Forward Spot VAR et réelle au 17/08/2018	164

5.16	Représentation graphique de la moyenne de la STT des Forward Spot VAR et celle réelle au 17/08/2018	164
5.17	Représentation graphique de l'intervalle de confiance de la STT des Forward Spot VAR et réelle au 21/08/2018	165
5.18	Représentation graphique de la moyenne de la STT des Forward Spot VAR et celle réelle au 21/08/2018	165
5.19	IC CALL VOL 22/08/2018	166
5.20	MOY CALL VOL 22/08/2018	166
5.21	IC CALL PRIX 22/08/2018	166
5.22	MOY CALL PRIX 22/08/2018	166
5.23	IC CAP VOL 22/08/2018	167
5.24	MOY CAP VOL 22/08/2018	167
5.25	IC CAP PRIX 22/08/2018	167
5.26	MOY CAP PRIX 22/08/2018 (1)	167
5.27	MOY CAP PRIX 22/08/2018 (2)	168
5.28	IC SW VOL 22/08/2018 Strike -100 bps	169
5.29	MOY SW VOL 22/08/2018 -100 bps	169
5.30	IC SW PRIX 22/08/2018 Strike -100 bps	169
5.31	MOY SW PRIX 22/08/2018 Strike -100 bps	169
5.32	IC SW VOL 22/08/2018 Strike 25 bps	170
5.33	MOY SW VOL 22/08/2018 Strike 25 bps	170
5.34	IC SW PRIX 22/08/2018 Strike 25 bps	170
5.35	MOY SW PRIX 22/08/2018 Strike 25 bps	170
5.36	IC lambda0 réduit Rating au 22/08/2018	171
5.37	IC Prix réduit Rating au 22/08/2018	171
5.38	MOY lambda0 réduit Rating au 22/08/2018	171
5.39	MOY Prix réduit Rating au 22/08/2018	171
5.40	IC lambda0 all Rating au 22/08/2018	172
5.41	IC Prix all Rating au 22/08/2018	172
5.42	MOY lambda0 all Rating au 22/08/2018	172
5.43	MOY Prix all Rating au 22/08/2018	172
5.44	IC lambda0 réduit Pays au 22/08/2018	173
5.45	IC Prix réduit Pays au 22/08/2018	173
5.46	MOY lambda0 réduit Pays au 22/08/2018	173
5.47	MOY Prix réduit Pays au 22/08/2018	173
5.48	IC lambda0 all Pays au 22/08/2018	174
5.49	IC Prix all Pays au 22/08/2018	174
5.50	MOY lambda0 all Pays au 22/08/2018	174
5.51	MOY Prix all Pays au 22/08/2018	174
5.52	Historique des STTI observées	185
5.53	Historique des STTI AFNS	185
5.54	Serie chronologie Beta0 STTI AFNS	186
5.55	Serie chronologie Beta1 STTI AFNS	186
5.56	Serie chronologie Beta2 STTI AFNS	186
5.57	Surface de prix des cap inflation au 11/06/2018	195
5.58	Surface de volatilités des caplet inflation au 11/06/2018	196
5.59	Représentation de l'historique du VSTOXX	198
5.60	Surface de prix des cap inflation au 11/06/2018	201
5.61	Surface de volatilités des caplet inflation au 11/06/2018	202

5.62	Surface du vega en fonction de la maturité et du taux d'exercice	204
5.63	Surface de Vega Ajusté en fonction de la maturité et du taux d'exercice . .	205
5.64	Historique des STTI nominaux observé	208
5.65	Historique des STTI nominaux AFNS	208
5.66	Serie chronologie Beta0 STTI nominaux AFNS	209
5.67	Serie chronologie Beta1 STTI nominaux AFNS	209
5.68	Serie chronologie Beta2 STTI nominaux AFNS	209
5.69	Historique des STTI réels observé	210
5.70	Historique des STTI réels AFNS	210
5.71	Serie chronologie Beta0 STTI réels AFNS	211
5.72	Serie chronologie Beta1 STTI réels AFNS	211
5.73	Serie chronologie Beta2 STTI réels AFNS	211
5.74	Serie chronologie Beta0 Caplet Inflation	214
5.75	Serie chronologie Beta1 Caplet Inflation	214
5.76	Serie chronologie Beta2 Caplet Inflation	215
5.77	Serie chronologie Beta3 Caplet Inflation	215
5.78	Serie chronologie Beta4 Caplet Inflation	215
5.79	Serie chronologie Beta5 Caplet Inflation	215
5.80	Fitting de la surface de volatilité des caplet 20/12/2012	216
5.81	Fitting de la surface de Prix des Cap 20/12/2012	216
5.82	Fitting de la surface de volatilité des caplet 25/03/2015	216
5.83	Fitting de la surface de Prix des Cap 25/03/2015	216
5.84	Représentation de l'historique du VSTOXX	233
5.85	Surface de Volatilité Call/Put EUR/USD (25/09/2018)	235
5.86	Surface de Strike Call/Put EUR/USD (25/09/2018)	235
5.87	Surface de Prix Call/Put EUR/USD (25/09/2018)	236
5.88	Surface de Prix Call EUR/USD (25/09/2018)	237
5.89	Surface de Volatilité Call EUR/USD (25/09/2018)	237
5.90	Surface du vega en fonction de la maturité et du prix d'exercice	240
5.91	Serie chronologie Beta0 Call EUR-USD	245
5.92	Serie chronologie Beta1 Call EUR-USD	245
5.93	Serie chronologie Beta2 Call EUR-USD	245
5.94	Serie chronologie Beta3 Call EUR-USD	245
5.95	Serie chronologie Beta4 Call EUR-USD	246
5.96	Serie chronologie Beta5 Call EUR-USD	246
5.97	Fitting Surface Volatilité Call EUR-USD (22/08/2013)	246
5.98	Fitting de la surface de Prix des Call EUR-USD (22/08/2013)	246
5.99	Fitting Surface Volatilité Call EUR-USD (23/03/2011)	247
5.100	Fitting de la surface de Prix des Call EUR-USD (23/03/2011)	247
5.101	Fitting Surface Volatilité Call EUR-USD (15/01/2018)	247
5.102	Fitting de la surface de Prix des Call EUR-USD (15/01/2018)	247
5.103	Serie chronologie Beta0 Call EUR-JPY	249
5.104	Serie chronologie Beta1 Call EUR-JPY	249
5.105	Serie chronologie Beta2 Call EUR-JPY	249
5.106	Serie chronologie Beta3 Call EUR-JPY	249
5.107	Serie chronologie Beta4 Call EUR-JPY	250
5.108	Serie chronologie Beta5 Call EUR-JPY	250
5.109	Fitting Surface Volatilité Call EUR-JPY (22/08/2013)	250
5.110	Fitting de la surface de Prix des Call EUR-JPY (22/08/2013)	250

5.111	Fitting Surface Volatilité Call EUR-JPY (23/03/2011)	251
5.112	Fitting de la surface de Prix des Call EUR-JPY (23/03/2011)	251
5.113	Fitting Surface Volatilité Call EUR-JPY (15/01/2018)	251
5.114	Fitting de la surface de Prix des Call EUR-JPY (15/01/2018)	251
5.115	Serie chronologie Beta0 Call EUR-GBP	252
5.116	Serie chronologie Beta1 Call EUR-GBP	252
5.117	Serie chronologie Beta2 Call EUR-GBP	253
5.118	Serie chronologie Beta3 Call EUR-GBP	253
5.119	Serie chronologie Beta4 Call EUR-GBP	253
5.120	Serie chronologie Beta5 Call EUR-GBP	253
5.121	Fitting Surface Volatilité Call EUR-GBP (22/08/2013)	254
5.122	Fitting de la surface de Prix des Call EUR-GBP (22/08/2013)	254
5.123	Fitting Surface Volatilité Call EUR-GBP (03/04/2011)	254
5.124	Fitting de la surface de Prix des Call EUR-GBP (03/04/2011)	254
5.125	Fitting Surface Volatilité Call EUR-GBP (15/01/2018)	255
5.126	Fitting de la surface de Prix des Call EUR-GBP (15/01/2018)	255

Liste des tableaux

3.1	Tableaux récapitulatifs de validation du modèle [Equity] (1)	54
3.2	Tableau récapitulatif de validation du modèle [Equity] (2)	54
3.3	Tableau récapitulatif de validation du modèle [Equity] (3)	54
3.4	Tableaux récapitulatifs de validation du modèle [Cap] (1)	78
3.5	Tableau récapitulatif de validation du modèle [Cap] (2)	78
3.6	Tableau récapitulatif de validation du modèle [Cap] (3)	78
3.7	Tableaux récapitulatifs de validation du modèle [Swaption] (1)	98
3.8	Tableau récapitulatif de validation du modèle [Swaption] (2)	98
3.9	Tableau récapitulatif de validation du modèle [Swaption] (3)	98
3.10	Tableaux récapitulatifs de validation du modèle [Intensité de Défaut des Pays] (1)	125
3.11	Tableau récapitulatif de validation du modèle [Intensité de Défaut des Pays] (2)	125
3.12	Tableau récapitulatif de validation du modèle [Intensité de Défaut des Pays] (3)	125
3.13	Tableaux récapitulatifs de validation du modèle [Intensité de Défaut des Rating] (1)	130
3.14	Tableau récapitulatif de validation du modèle [Intensité de Défaut des Rating] (2)	130
3.15	Tableau récapitulatif de validation du modèle [Intensité de Défaut des Rating] (3)	130
4.1	Table GSE	152
5.1	Tableau erreur modèle	217
5.2	Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite Caplet Inflation (1)	218
5.3	Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite Caplet Inflation (2)	219
5.4	Conventions des primes de change pour des couples de devises sélectionnés	224
5.5	Couples de devises sélectionnés et prime de change par défaut déterminant le type de delta	227
5.6	Valeurs strike à la monnaie et delta pour différentes conventions de delta	229
5.7	Matrice de volatilités implicites des call EUR-USD	230
5.8	Tableau erreur modèle EUR-USD	248
5.9	Tableau erreur modèle EUR-JPY	252
5.10	Tableau erreur modèle EUR-GBP	255
5.11	Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite EUR-USD (1)	256
5.12	Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite EUR-USD (2)	257
5.13	Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite EUR-USD (3)	258
5.14	Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite EUR-USD (4)	259

5.15	Sélection modèle nappe volatilité implicite EUR-JPY (1)	260
5.16	Sélection modèle nappe volatilité implicite EUR-JPY (2)	261
5.17	Sélection modèle nappe volatilité implicite EUR-JPY (3)	262
5.18	Sélection modèle nappe volatilité implicite EUR-JPY (4)	263
5.19	Sélection modèle nappe volatilité implicite EUR-JPY (5)	264
5.20	Sélection modèle nappe de volatilité implicite EUR-GBP (5-7 variables) (1)	265
5.21	Sélection modèle nappe de volatilité implicite EUR-GBP (5-7 variables) (2)	266
22	Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite Equity (1)	268
23	Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite Equity (2)	269
24	Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite Equity (3)	270
25	Résultats des indicateurs de sélection de modèle (5 à 7 variables) [Cap]	271
26	Résultats des indicateurs de sélection de modèle [Swaption]	272
27	Résultats des indicateurs de sélection de modèle [CDS Pays]	273
28	Résultats des indicateurs de sélection de modèle [CDS Rating]	274

Première partie
Cadre de l'étude

Chapitre 1

Théorie et socles financiers

Le but de ce chapitre sera d'établir les différentes notions qui permettront aux lecteurs de comprendre les outils financiers utilisés dans la présente étude afin d'établir un cadre de travail lié à un modèle de gestion actif-passif (ALM).

Sommaire

1.1	Généralités sur les taux	3
1.2	Changement de numéraire	11
1.3	Produits optionnels	12
1.4	Le risque de crédit	14

1.1 Généralités sur les taux

Nous introduisons $r = (r_t)$ comme processus stochastique sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $\int_0^T |r_t| dt < \infty$, P-p.s, $T > 0$.

Définition du compte de marché monétaire : *Un compte de marché monétaire est un investissement sans risque où les gains sont cumulés de manière continue au taux sans risque du marché. On note sa valeur $B(t)$ avec $B(0) = 1$ et on admet qu'elle suit l'équation différentielle suivante : $dB(t) = r_t B(t) dt$*

Si on considère que le taux court suit une dynamique stochastique, on peut appliquer la formule d'Itô à $\ln(B(t))$ et on obtient la formule :

$$B(t) = \exp\left(\int_0^t r_s ds\right) \quad (1.1)$$

où r_s est le taux spot instantané auquel le compte bancaire croît continûment, appelé aussi taux court.

On peut alors se demander quelle est la valeur à l'instant t d'une unité monétaire versée à l'instant T tel que $(t < T)$. On fait donc appelle à la notion de déflateur.

Définition du facteur d'actualisation stochastique : *Un déflateur ou facteur d'actualisation stochastique entre t et T , est le montant en date t qui est équivalent à une unité monétaire payable à la date T . On le note $D(t, T)$ avec :*

$$D(t, T) = \frac{B(t)}{B(T)} = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \quad (1.2)$$

Définition d'une obligation zéro-coupon (ZC) : *Une obligation zéro-coupon de maturité T est un actif qui garantit à son détenteur le paiement d'une unité monétaire à l'instant T sans aucun paiement intermédiaire. On note $P(t, T)$ sa valeur à l'instant $t < T$ avec $P(T, T) = 1$.*

En univers risque neutre, les prix actualisés au taux sans risque forment une martingale sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} . On suppose $r = (r_t)$ \mathbb{F} -adapte et intégrable par rapport à t , \mathbb{Q} -p.s. Ainsi en supposant que H est le prix d'un actif qui suit un processus (\mathcal{F}_t) adapté et intégrable de payoff H_T à maturité T , sa valeur en t est donnée par :

$$H_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(D(t, T)H_T | \mathcal{F}_t)$$

En remplaçant H par P avec $P(T, T) = 1$, on a :

$$P(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(D(t, T) | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t\right) \quad (1.3)$$

Le prix d'une obligation zéro-coupon est donc l'espérance sous la mesure risque-neutre du déflateur. On peut également remarquer que lorsque r est déterministe $D(t, T) = P(t, T)$.

Aussi, l'outil de base d'un modèle de taux est l'obligation zéro-coupon, cela permet de définir plusieurs types de taux qui seront utiles par la suite.

1.1.1 Taux comptant (spot)

Définition du taux d'intérêt instantané en composition continue : *Le taux instantané composé continûment est le taux constant auquel un investissement de $P(t, T)$ à l'instant t croît continûment pour donner une unité de monnaie à T , on le note $R(t, T)$ tel que :*

$$R(t, T) := -\frac{\ln(P(t, T))}{\tau(t, T)} \quad (1.4)$$

Où $\tau(t, T)$ est le différentiel de temps entre t et T (la maturité), exprimé conventionnellement en année.

On nomme parfois $R(t, T)$ "taux zéro-coupon" : c'est le taux continu constant sur la période entre t et la maturité T tel que $P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$.

Définition du taux d'intérêt comptant en composition simple : *Le taux d'intérêt simplement composé est le taux auquel un investissement de $P(t, T)$ à l'instant t croît proportionnellement au temps pour rapporter une unité de monnaie à T . On le note $L(t, T)$ et le définit par la formule suivante :*

$$L(t, T) := \frac{1 - P(t, T)}{\tau(t, T)P(t, T)} \quad (1.5)$$

Définition du taux d'intérêt comptant en composition annuelle : *Le taux d'intérêt annuellement composé est le taux auquel un investissement de $P(t, T)$ à l'instant t croît en étant réinvesti une fois par an pour rapporter une unité de monnaie à T . On le note $Y(t, T)$ et est défini par la formule suivante :*

$$Y(t, T) := \frac{1}{P(t, T)^{\frac{1}{\tau(t, T)}}} - 1 \quad (1.6)$$

1.1.2 Taux à terme (forward)

Les contrats à terme (futures ou forward) sont caractérisés par des taux forward. Ces taux forward sont eux-mêmes caractérisés par trois dates différentes, à savoir t , T , S tel que $0 \leq t \leq T \leq S$ avec :

- t : la date à laquelle on considère le taux.
- T : la date de départ.
- S : la date de fin.

Définition du taux forward en composition simple : *Le taux forward évalué en t , de maturité S et d'expiration T , noté $F(t, T, S)$, est donné par :*

$$F(t, T, S) := \frac{P(t, T) - P(t, S)}{\tau(T, S)P(t, S)} \quad (1.7)$$

Ce taux "forward" ou taux à terme peut être vu comme une estimation du futur taux spot $L(T, S)$ à partir des conditions de marché en date t .

Définition du taux forward instantané : On appelle *taux forward instantané* à la date t pour la maturité T , noté $f(t, T)$, la quantité :

$$f(t, T) := \lim_{S \rightarrow T^+} F(t, T, S) = -\frac{\partial \ln(P(t, T))}{\partial T} \quad (1.8)$$

Avec,

$$P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, u) du\right)$$

On peut alors définir les prix zéro-coupon forward à la date t d'expiration T et de maturité S par :

$$P(t, T, S) = \frac{P(t, S)}{P(t, T)} = \exp\left(-\int_T^S f(t, u) du\right)$$

Définition d'un contrat forward (FRA) : Un contrat forward évalué en t , d'expiration T , de maturité S et de nominal N est un contrat qui donne à son souscripteur un versement à la date S au taux fixe (simplement composé) K pour la période entre T et S contre le paiement à cette même date S d'un taux variable $L(T, S)$ fixé en T pour cette même période (de T à S). On le note $FRA(t, T, S, K, N)$ et son payoff est donné par :

$$\Pi^{FRA}(S, T, S) = N\tau(T, S)(K - L(T, S)) \quad (1.9)$$

En remplaçant $L(T, S)$ par sa valeur, on obtient :

$$\Pi^{FRA}(S, T, S) = N\tau(T, S)K - N\left(\frac{1}{P(T, S)} - 1\right)$$

Puis, en remarquant que les quantités $P(t, S)$ et $P(t, T)P(T, S)$ sont équivalentes d'après la relation entre les prix zéro-coupon, on obtient :

$$P(T, S) = P(t, T, S) = \frac{P(t, S)}{P(t, T)}$$

La valeur du contrat à la date t s'écrit donc :

$$\Pi^{FRA}(t, T, S, K, N) = N[(\tau(T, S)P(t, S)K - P(t, T) + P(t, S))] \quad (1.10)$$

On peut aussi écrire le prix du FRA en fonction du taux forward par :

$$\Pi^{FRA}(t, T, S, K, N) = N\tau(T, S)P(t, S)[K - F(t, T, S)] \quad (1.11)$$

A l'équilibre le prix du FRA en t doit être nul, ainsi :

$$\exists ! K_{eq} : FRA(t, T, S, K_{eq}) = 0$$

Par absence d'opportunité d'arbitrage, le taux d'équilibre K_{eq} du FRA et le taux forward doivent être égaux :

$$K_{eq} = F(t, T, S) = \frac{P(t, T) - P(t, S)}{\tau(T, S)P(t, S)}$$

1.1.3 Taux swap

Les taux swap sont des taux fournis par le marché (Bloomberg par exemple) et servent notamment dans les produits dérivés tels que les swap de taux. On utilise également ces taux swap pour obtenir les taux zéro-coupon : en effet, on "découpe" la courbe des taux swap pour passer au taux zéro-coupon par bootstrapping (méthode expliquée plus tard). On va d'abord décrire ce qu'est un swap de taux puis ce qu'est un contrat swap forward (généralisation d'un contrat forward [FRA] sur plusieurs dates de paiement).

Définition d'un swap de taux d'intérêt : *Un swap est un accord d'échange de flux entre deux entités. Par exemple, un swap de taux permet d'échanger des taux variables contre des taux fixes ou inversement. En général, ce sont des échanges de taux d'intérêts sur un prêt (obligation). La contrepartie A va verser les intérêts au taux fixe perçus sur ce prêt à une contrepartie B qui, en échange, va lui verser les intérêts au taux variable (ou l'inverse). Au final, une des deux contreparties sera gagnante et l'autre perdante. Le LIBOR est le marché de référence de ces contrats. Le swap de taux consiste donc à échanger à dates fixes un flux d'intérêts basé sur un taux fixe contre un flux d'intérêts basé sur un taux variable. Ces flux sont libellés dans la même devise et calculés d'après un capital appelé "montant notionnel" (le capital n'étant jamais échangé).*

On considère pour la suite un calendrier de dates T_i et deux entiers α et β tels que $i, \alpha, \beta \in \{0, \dots, M\}$. On note $\tau_i := \tau(T_{i-1}, T_i)$ et $\mathcal{T} := \{T_\alpha, \dots, T_\beta\}$.

Définition d'un contrat swap forward : *Le contrat swap receveur, de maturité T_α et de tenor $T_\beta - T_\alpha$, est un contrat payant à son détenteur un taux fixe $\tau_i K$, contre le taux Libor $\tau_i L(T_{i-1}, T_i)$, à chaque date T_i tel que $i \in \{\alpha + 1, \dots, \beta\}$. On note la valeur de ce contrat en $t < T_\alpha$, $RFS(t, \tau, K)$ dont la quantité est :*

$$RFS(t, \tau, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(t, T_i) \tau_i (K - F(t, T_{i-1}, T_i)) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} FRA(t, T_{i-1}, T_i, K) \quad (1.12)$$

En utilisant l'expression du FRA obtenue précédemment, on a :

$$RFS(t, \tau, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (\tau_i P(t, T_i) K - P(t, T_{i-1}) + P(t, T_i)) \quad (1.13)$$

$$= -P(t, T_\alpha) + P(t, T_\beta) + K \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i) \quad (1.14)$$

Par absence d'opportunité d'arbitrage la valeur de ce contrat en t est nulle, ainsi il existe une unique valeur K_{eq} qui rend le contrat équitable en t . Cette valeur est appelée *taux swap forward*.

Remarque : *Un investisseur entre dans un swap payeur lorsqu'il paye le taux fixe en échange du taux variable. Dans le cas contraire, on parle de swap receveur.*

Définition du taux swap forward : *Le taux swap forward évalué en t , pour les dates τ , noté $S_{\alpha, \beta}(t)$, est le taux qui annule le contrat $RFS(t, \tau, S_{\alpha, \beta}(t))$. Formellement :*

$$S_{\alpha, \beta}(t) = \frac{P(t, T_\alpha) - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)} \quad (1.15)$$

Définition du taux swap : Le taux swap évalué en t noté $S_\beta(t)$, est le taux forward évalué en $T_\alpha = t$:

$$S_\beta(t) = \frac{1 - P(t, T_\beta)}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(t, T_i)} \quad (1.16)$$

Remarque : Les taux dans les contrats FRA et RFS sont libellés dans la même devise et calculés suivant un nominal qui n'est jamais échangé.

1.1.4 Structure par terme des taux d'intérêt et taux swap

Définition de la structure par terme des taux : La structure par terme des taux d'intérêt ou courbe de taux est la fonction qui, à une date donnée, associe pour chaque maturité le niveau du taux d'intérêt associé (R , L ou Y).

En pratique, il existe sur le marché deux familles de courbes des taux :

- **Les courbes de marché :** elles sont directement obtenues des cotations sur le marché (exemple : la courbe des taux swap)
- **Les courbes implicites :** elles sont déduites et donc construites indirectement des cotations de marché d'instruments financiers. On compte parmi elles la courbe des taux forward et celle des taux zéro-coupon.

Courbe des taux swap

Les taux swap cotés sur le marché sont issus de taux interbancaires comme l'EURIBOR. Généralement, on ne dispose pas de toutes les maturités des taux swap, ainsi, pour obtenir les valeurs manquantes, on interpole ou extrapole les données de marché.

1.1.5 Construction et extrapolation de la courbe des taux zéro-coupon par *Bootstrapping*

Il s'agit de la courbe des taux d'intérêts comptants en composition annuelle et elle dépend donc des prix zéro-coupon qui ne sont pas directement observables sur le marché. Pour les construire, on peut les déduire des taux swap par la méthode de proche en proche appelée "Bootstrapping".

Pour cela, on applique pour la première maturité T_1 la formule du taux swap défini précédemment pour $t = 0$, $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, on obtient :

$$S_1(0) = \frac{1 - P(0, T_1)}{\tau_1 P(0, T_1)} \quad (1.17)$$

On en déduit alors le taux zéro-coupon pour la 1^{ère} maturité T_1 :

$$P(0, T_1) = \frac{1}{1 + \tau_1 S_1(0)} \quad (1.18)$$

Il s'ensuit une formule plus générale pour $i \geq 2$:

$$P(0, T_i) = \frac{1 - S_i(0) \sum_{j=1}^{i-1} \tau_j P(0, T_j)}{1 + \tau_i S_i(0)} \quad (1.19)$$

On obtient alors une courbe de taux zéro-coupon annuel avec la formule des taux d'intérêt comptant en composition annuelle.

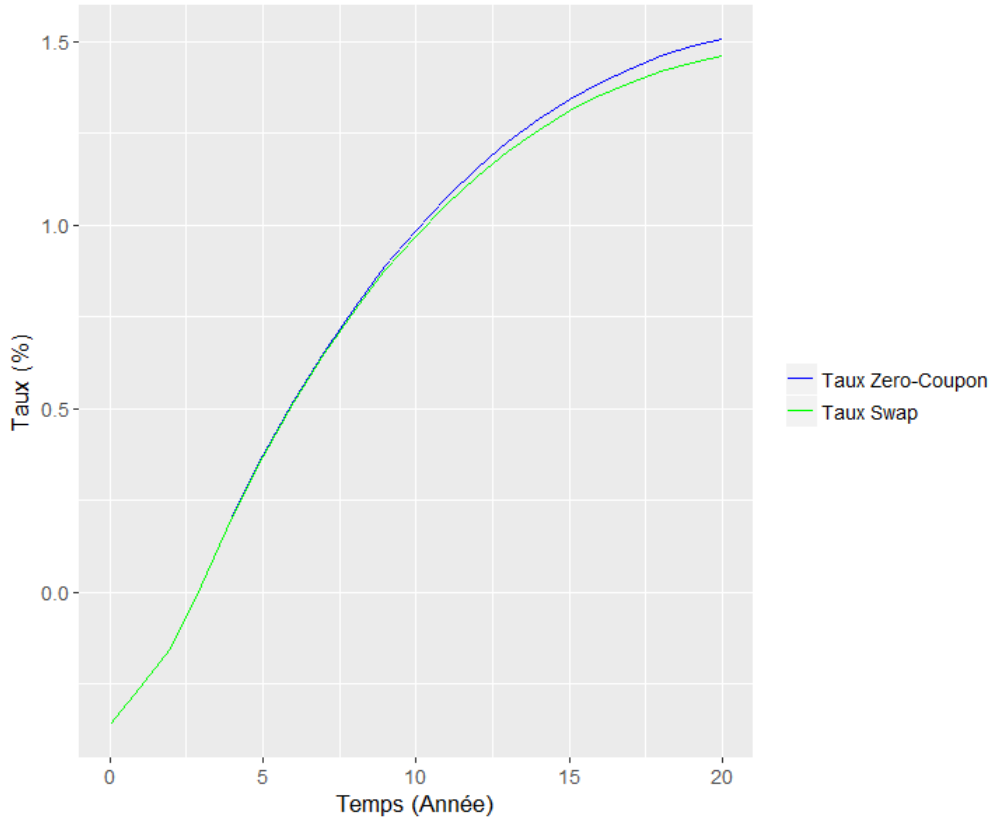


FIGURE 1.1 – Taux swap et taux zéro-coupon sur Euribor 6 mois au 03/05/2018

Reconstruction de la structure par terme des taux d'intérêt :

L'approche récursive vue précédemment permet de déterminer les taux zéros-coupon à partir de la courbe des taux swap, **mais seulement pour les maturités observées sur le marché**. Or, in fine, on souhaite obtenir les zéros-coupon quelle que soit la maturité.

Autrement dit, la démarche précédente a permis d'obtenir la grandeur suivante :

$$P(0, T)_{T \in \{t_1, \dots, t_n\}} \quad (1.20)$$

Avec, $t_1 = 1, \dots, t_n = 20$.

Or, on cherche :

$$P(0, T)_{T > 0} \quad (1.21)$$

On va donc devoir interpoler et construire une approximation de la courbe des taux spot : on repasse par les taux spot comme suit :

$$Y(0, T)_{T \in \{t_1, \dots, t_n\}} = -\frac{1}{T} \ln(P(0, T)) \quad (1.22)$$

On obtient donc $Y(0, T)_{T > 0}$ et on en déduit les taux zéro-coupon spot :

$$P(0, T)_{T > 0} = \exp(-T * Y(0, T)) \quad (1.23)$$

1.1.6 Construction et extrapolation de la courbe des taux zéro-coupon par le modèle de Nelson-Siegel (NS)

Nelson et Siegel [1987] ont proposé l'utilisation de la fonctionnelle suivante pour la modélisation des taux zéro-coupon au temps τ :

$$R_t^{NS}(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \left(\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda})}{\frac{\tau}{\lambda}} \right) + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda})}{\frac{\tau}{\lambda}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda}) \right) \quad (1.24)$$

Avec :

- β_0 représente le facteur de niveau correspondant au taux long.
- β_1 représente le facteur de rotation correspondant à l'écart entre le taux court et le taux long (spread).
- β_2 représente le facteur de courbure.
- λ représente le paramètre d'échelle.

Le modèle de NS possède 4 paramètres à estimer. La fonctionnelle est une combinaison linéaire de trois fonctions dont les coefficients sont obtenus par minimisation de l'écart quadratique entre les prix obtenus à partir de celle-ci et les prix de marché. Le paramètre λ joue un rôle très significatif dans les différentes formes de courbe des taux. L'instabilité de ce paramètre dans le temps nécessite de le supposer constant sur un historique donné. Il peut être calibré sur la base d'une métrique visant à *fitter* au mieux l'ensemble des données historiques.

Cependant, ce modèle est le moins flexible puisqu'il ne permet pas de représenter toutes les courbes observées sur le marché, notamment celles avec une bosse et un creux pour les maturités courtes. Un autre problème de ce modèle est son inefficacité à bien *fitter* les taux au-delà des maturités de 7 ans (modèle de moyen terme).

Afin d'être plus flexible, Svensson a augmenté le modèle de NS d'un paramètre pour prendre davantage en considération les formes plus complexes de courtes maturités ainsi que les maturités au-delà de 7 ans.

1.1.7 Construction et extrapolation de la courbe des taux zéro-coupon par le modèle de Nelson-Siegel-Svensson ou Nelson-Siegel augmenté

Le modèle de Svensson est une extension du modèle de Nelson-Siegel qui permet de donner plus de flexibilité à la courbe. La fonctionnelle utilisée dans ce modèle est la suivante :

$$R_t^{NSS}(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \left(\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_1})}{\frac{\tau}{\lambda_1}} \right) + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_1})}{\frac{\tau}{\lambda_1}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_1}) \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_2})}{\frac{\tau}{\lambda_2}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_2}) \right) \quad (1.25)$$

Avec :

- β_0 représente le facteur de niveau correspondant au taux long.

- β_1 représente le facteur de rotation correspondant à l'écart entre le taux court et le taux long (spread).
- β_2 représente le facteur de courbure.
- β_3 représente le facteur améliorant la partie courte de la courbe.
- λ_1 représente le 1^{er} paramètre d'échelle.
- λ_2 représente le 2^{ème} paramètre d'échelle.

Le modèle de Nelson-Siegel augmenté (Nelson-Siegel-Svensson) fonctionne beaucoup mieux pour reproduire les différentes formes de courbes sur le marché. En effet, le paramètre de courbure supplémentaire β_3 a surtout une influence sur la partie courte de la courbe pour reproduire les bosses ou les creux. Cependant, le 2^{ème} désavantage du modèle de Nelson-Siegel persiste, il manque de souplesse d'ajustement pour les maturités supérieures à 7 ans si bien que les obligations de telles maturités sont parfois mal évaluées par le modèle.

Le modèle de NSS possède 6 paramètres à estimer. La fonctionnelle est une combinaison linéaire de quatre fonctions dont les coefficients sont obtenus par minimisation de l'écart quadratique entre les prix obtenus à partir de cette fonctionnelle et les prix de marché. Pour des problématiques d'instabilité et d'inversion matricielle, les λ_1 et λ_2 sont à supposer indépendants du temps.

Ces deux modèles paramétriques doivent satisfaire une contrainte de long-terme : la courbe doit posséder une asymptote horizontale. En effet, l'anticipation que l'on réalise aujourd'hui pour des taux d'intérêt dans 30 ans ne doit pas être éloignée de l'anticipation que l'on réalise pour des taux d'intérêt dans 25 ans par exemple.

Aussi, ces modèles présentent l'avantage d'avoir des paramètres directement interprétables financièrement : les différents paramètres représentent le facteur de niveau correspondant au taux long, le facteur de rotation et le facteur de courbure. De plus, ces paramètres sont parcimonieux dans le sens où un faible nombre de paramètres est utilisé pour représenter la courbe.

1.1.8 Construction et extrapolation de la courbe des taux zéro-coupon par le modèle de Christensen

Le modèle de Christensen est un modèle encore plus paramétré qu'un NSS et permet un meilleur *fitting* de la courbe. Ce modèle combine les caractéristiques du modèle de NSS et d'un Heath-Jarrow-Morton modèle (HJM). La fonctionnelle utilisée dans ce modèle est la suivante :

$$R_t^{Christ}(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \frac{\tau}{2} + \beta_{2,t} \frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda})}{\frac{\tau}{\lambda}} + \beta_{3,t} \lambda \left(\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda})}{\frac{\tau}{\lambda}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda}) \right) + \beta_{4,t} \lambda \frac{1 - \exp(-\frac{2\tau}{\lambda})}{\frac{2\tau}{\lambda}} \quad (1.26)$$

Avec :

- β_0 représente une constante de niveau s'ajoutant au 2^{ème} terme.
- β_1 représente le facteur de niveau correspondant au taux long lorsque τ est très grand.

- β_2 représente le facteur de rotation correspondant à l'écart entre le taux court et le taux long (spread).
- β_3 représente le facteur de courbure.
- β_4 représente le facteur améliorant la partie courte et longue de la courbe.
- λ représente le paramètre d'échelle.

Le modèle de Christensen permet de reproduire les différentes formes de courbes des taux sur le marché. Avec une calibration adéquate du paramètre λ , il est possible de reproduire une multitude de courbe de manière presque parfaite. De cette façon, ce modèle sera utile plus tard pour lisser la structure par terme des intensités de défaut et celle du paramètre de liquidité.

Le modèle de Christensen possède 6 paramètres à estimer. La fonctionnelle est une combinaison linéaire de cinq fonctions dont les coefficients sont obtenus par minimisation de l'écart quadratique entre les prix obtenus à partir de cette fonctionnelle et les prix de marché.

Le principal problème de ce modèle est sa limite de long-terme qui dépend très fortement du signe du β_1 .

1.2 Changement de numéraire

Définition d'un numéraire : On appelle numéraire, tout actif financier strictement positif ne payant pas de dividendes. Le zéro-coupon $P(t, T)$, $0 \leq t \leq T$ est un numéraire.

Théorème du changement de numéraire : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On suppose qu'il existe un numéraire N et une probabilité \mathbb{Q}^N équivalente à la probabilité historique \mathbb{P} tel que le prix de n'importe quel actif financier X normalisé par N soit une martingale sous \mathbb{Q}^N , i.e pour $0 \leq t \leq T$:

$$\frac{X_t}{N_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^N} \left[\frac{X_T}{N_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (1.27)$$

Alors, pour tout numéraire U , il existe une probabilité \mathbb{Q}^U équivalente à \mathbb{P} tel que le prix de n'importe quel actif financier Y normalisé par U soit une martingale sous \mathbb{Q}^U , i.e pour $0 \leq t \leq T$:

$$\frac{Y_t}{U_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^U} \left[\frac{Y_T}{U_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] \quad (1.28)$$

De plus, la densité de Radon-Nikodym qui définit la probabilité \mathbb{Q}^U est donnée par :

$$\frac{d\mathbb{Q}^U}{d\mathbb{Q}^N} = \frac{U_T N_0}{U_0 N_T} \quad (1.29)$$

Univers risque-neutre :

Définition de l'univers risque-neutre : C'est l'univers dans lequel le numéraire est le compte bancaire $B(t)$ et on note la probabilité qui lui est associée \mathbb{Q} . Sous cette probabilité, les processus de prix actualisés sont des martingales et ont un drift égal au taux

sans risque r . Cela signifie que tout actif a un rendement moyen égal à celui du taux sans risque r .

En effet, en supposant que $(S_t)_{t \geq 0}$ est le prix d'un actif financier avec $b(t, S_t)$ le drift associé sous la probabilité \mathbb{Q} et en appliquant le lemme d'Itô à $f : (t, S_t) \rightarrow \frac{S_t}{B_t}$, nous avons :

$$df(t, S_t) = d(e^{-\int_0^t r_s ds} S_t) = S_t(-r_t e^{-\int_0^t r_s ds})dt + e^{-\int_0^t r_s ds} dS_t \quad (1.30)$$

$$= -r_t S_t e^{-\int_0^t r_s ds} dt + e^{-\int_0^t r_s ds} b(t, S_t) dt + (\dots) dW_t \quad (1.31)$$

$$= e^{-\int_0^t r_s ds} (b(t, S_t) - r_t S_t) dt + (\dots) dW_t \quad (1.32)$$

Où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien sous la probabilité \mathbb{Q} .

Sous \mathbb{Q} , le processus $(\frac{S_t}{B_t})_{t \geq 0}$ est une martingale, ce qui implique que le drift associé à $df(t, S_t)$ est nul, on obtient donc :

$$b(t, S_t) - r_t S_t = 0 \implies b(t, S_t) = r_t S_t \quad (1.33)$$

Univers forward-neutre :

On considère le prix du zéro-coupon $P(., S)$ comme numéraire. D'après le théorème du changement de numéraire énoncé précédemment, il existe une probabilité \mathbb{Q}^S tel que pour n'importe quel actif financier Y , $(\frac{Y_t}{P(t, S)})_{t \geq 0}$ est une martingale. En particulier pour $Y_t = P(t, T) - P(t, S)$:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} \left[\frac{P(t, T) - P(t, S)}{P(t, S)} \middle| \mathcal{F}_u \right] = \frac{P(u, T) - P(u, S)}{P(u, S)}, \text{ avec } 0 \leq u \leq t \leq T \leq S \quad (1.34)$$

d'où :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^S} [F(t, T, S) | \mathcal{F}_u] = F(u, T, S) \quad (1.35)$$

Ainsi sous la mesure \mathbb{Q}^S , le taux forward est une martingale. On appelle l'univers associé à la mesure \mathbb{Q}^S , l'univers S-forward neutre ou univers forward neutre.

1.3 Produits optionnels

Le calibrage monde réel du GSE impose que les paramètres des modèles soient paramétrés de façon à ce que les projections reflètent l'évolution des facteurs de risques dans le passé. Pour cela, on doit récupérer une quantité importante de données de dérivés d'actifs financiers du passé de façon à ce que nos modèles captent l'évolution des volatilités des produits dérivés du marché. Cela nous impose l'utilisation d'actifs financiers qui sont liquides. On introduit dans cette partie les produits optionnels sur les actions et les taux les plus traités sur le marché, respectivement les *call/put* et, *cap/floor* et les *swaption*. Ils serviront ensuite pour le calibrage de la nappe de volatilité de nos modèles en univers monde réel (précisé ultérieurement).

Pour rappel, une option est un contrat qui donne au porteur le droit et non l'obligation d'acheter ou de vendre un actif sous-jacent à un prix d'exercice fixé à l'avance (*strike price*) à une date donnée.

On distingue trois types d'options :

- Européenne si l'exercice se fait uniquement à maturité.
- Américaine si l'exercice peut se faire à tout moment jusqu'à maturité.
- Bermudienne si l'exercice est possible en plusieurs dates fixées avant maturité.

Dans la suite, on ne prendra en compte que les options et swaption européennes.

On caractérise également les options en fonction du sous-jacent et du strike en disant que :

- Une option est à la monnaie si le prix du sous-jacent est égal au prix d'exercice à l'échéance (ATM : At The Money).
- Une option est hors de la monnaie si l'exercice de l'option n'entraîne aucun gain pour l'acheteur (OTM : Out The Money).
- Une option est dans la monnaie si l'exercice de l'option entraîne un gain (ITM : In The Money).

Définition d'un call : *Le call ou l'option d'achat est une option contractuelle d'achat entre deux intervenants du marché sur un instrument financier. C'est un contrat qui permet à son souscripteur d'acquérir l'instrument concerné, appelé alors sous-jacent S , à un prix fixé à l'avance K (prix d'exercice, aussi appelé strike) et à une date déterminée appelée date de maturité T du call. Son payoff actualisé à l'instant t est :*

$$(S_t - K)^+ = \max(0, S_t - K) \quad (1.36)$$

Définition d'un put : *Le put ou l'option de vente est une option contractuelle de vente par laquelle deux parties s'accordent pour échanger un actif S (appelé sous-jacent) à un prix fixé K (appelé prix d'exercice ou strike) à une date prédéterminée T (appelé date de maturité). Une partie, l'acheteur du put, a le droit (non l'obligation) de vendre l'actif sous-jacent au prix d'exercice dans les délais spécifiés tandis que l'autre partie, le vendeur du put, a l'obligation de racheter cet actif au prix d'exercice si l'acheteur décide d'exercer l'option. Son payoff actualisé à l'instant t est :*

$$(K - S_t)^+ = \max(0, K - S_t) \quad (1.37)$$

Les call et les put sont des instruments de couverture contre le risque action. Les call sont ainsi utilisés pour se prémunir contre une hausse des cours actions et les put contre une baisse des cours actions.

Définition d'un cap : *Un cap est une séquence d'options d'achats (caplet : équivalent d'un call sur taux) de même strike K sur la réalisation future d'un taux Libor L sous-jacent aux dates $T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$. Il paie à chaque maturité la différence, si elle est positive, entre la réalisation du taux et le strike K . Son payoff actualisé à l'instant t est :*

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) \tau_i (L(T_{i-1}, T_i) - K)^+ \quad (1.38)$$

Définition d'un floor : *Un floor est une séquence d'options de vente (floorlet : équivalent d'un put sur taux) de même strike K sur la réalisation future d'un taux Libor sous-jacent L aux dates $T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$. Il paie à chaque à chaque maturité la différence, si elle est positive, entre la réalisation du taux et le strike K . Son payoff actualisé à l'instant t est :*

$$\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} D(t, T_i) \tau_i (K - L(T_{i-1}, T_i))^+ \quad (1.39)$$

Les *cap* et les *floor* sont des instruments de couverture contre le risque de taux. Les *cap* sont ainsi utilisés pour se prémunir contre une hausse des taux et les *floor* contre une baisse des taux.

Définition d'une swaption : Une *swaption* est une option d'entrer dans un contrat *swap* à une date future. Une *swaption payeuse* donne le droit à son détenteur de mettre en place un *swap payeur* à la date T_α , de durée (tenor) $T_\beta - T_\alpha$, au taux fixe K en échange du taux *Libor forward* L . Son *payoff actualisé* en t s'écrit :

$$D(t, T_\alpha) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K)^+ \quad (1.40)$$

Une *swaption receveuse* donne le droit à son détenteur de mettre en place un *swap receveur* à la date T_α , de tenor $T_\beta - T_\alpha$, au taux fixe K en échange du taux *Libor forward* L . Son *payoff actualisé* en t est :

$$D(t, T_\alpha) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(T_\alpha, T_i) \tau_i (K - F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i))^+ \quad (1.41)$$

Notons que le *payoff actualisé* de la *swaption payeuse* définie ci-dessus, peut également s'écrire en $t = 0$ sous la forme suivante :

$$D(0, T_\alpha) (F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) - K)^+ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i) \quad (1.42)$$

De la même manière, le *payoff actualisé* d'une *swaption receveuse* en $t = 0$ s'écrit :

$$D(0, T_\alpha) (K - F(T_\alpha, T_{i-1}, T_i))^+ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i) \quad (1.43)$$

En assurance les *swaption* permettent de modéliser un grand nombre d'options des contrats d'assurance vie, elles sont ainsi utilisées comme instruments de couverture.

On peut noter que les *call*, *put*, *cap*, *floor* et *swaption* sont généralement cotés sur le marché en volatilité par la formule de Black (modèle log normal) ou de Bachelier (modèle normal). Les formules de *pricing* de ces produits dérivés seront introduites dans les chapitres suivants.

Afin de développer un modèle ALM convenable, il est indispensable de savoir modéliser le risque lié au défaut de l'émetteur d'obligation : le risque de crédit. La section qui suit décrit donc ce risque et les modèles qui permettent de le modéliser.

1.4 Le risque de crédit

1.4.1 Introduction au risque de crédit

Le risque de crédit est le risque de subir une perte économique due au manquement des obligations contractuelles d'une contrepartie comme par exemple un emprunteur qui ne paierait pas les intérêts de sa dette ou le capital emprunté.

Pour comprendre le risque de défaut, ou risque de crédit, il est indispensable de s'intéresser aux intervenants sur les marchés financiers. Ces marchés financiers réunissent des acheteurs et des vendeurs, liés par un contrat qui stipule les conditions d'échange de flux financiers ou d'achat vente.

Le marché de la dette regroupe plusieurs types d'intervenants :

- les emprunteurs
- les prêteurs (investisseurs privés ou institutionnels)
- les agences de notation qui sont des organismes indépendants dont le métier est d'attribuer une note représentative du risque de crédit associé à n'importe quel type d'émission obligataire.

Ainsi, les composantes du risque de crédit peuvent être définies :

- la probabilité de défaut de l'émetteur (ex : émission d'une dette sous la forme d'obligation pour financer une opération de rachat d'une société concurrente) : le défaut survient avec une certaine probabilité
- la *Credit Exposure* (CE) : c'est la valeur économique (ou *market value*) de la créance que l'on a sur la contrepartie qui a fait défaut. On l'appelle *Exposure at Default* (EAD) au moment du défaut.
- le *Loss Given Default* (LGD) représente la perte subie après le défaut. Sur les 100 % de EAD, il est possible que 60 % de cette somme soit perdu en cas de défaut et 40 % récupérés. La LGD sera donc de 60 % et le *Recovery Rate* (w) de 40 %

Pour des prêts ou des obligations, la *Credit Exposure* est proche du notionnel (montant prêté). Par contre pour un contrat dérivé de gré à gré (OTC), la *Credit Exposure* est la valeur positive $CE_t = \max(V_t, 0)$. En d'autres termes, si la contrepartie du dérivé fait défaut et que valeur du dérivé nous est défavorable, nous sommes dans l'obligation de la régler. Par contre si la valeur du dérivé nous est favorable, la contrepartie qui a fait défaut ne nous paiera peut-être pas. La *Credit Exposure* (CE) est donc asymétrique.

Le risque de crédit présente des distributions de pertes fortement asymétriques : au mieux, le coupon est touché (une fraction du montant notionnel), au pire, le principal ou une fraction importante du principal est perdu.

Il existe deux façons d'appréhender le risque de défaut :

- analyse historique des taux de défauts passés (*Risk management*).
- extraction des probabilités de défaut des instruments cotés (obligations *corporate*, CDS) : méthode utilisée dans le présent mémoire sur l'ensemble de l'historique disponible en CDS et *Corporate* (*Asset pricing*)

1.4.2 Les dérivées de crédit

Au cours des dernières années, les dérivés de crédit ont commencé à se négocier activement sur les marchés financiers. De par leur nature, ces contrats novateurs offrent aux intervenants sur les marchés un moyen presque idéal de mesurer directement l'ampleur de la composante par défaut des spreads des entreprises. Les swaps sur défaillance de crédit ou plus communément appelé *CDS* (*Credit Default Swap*) sont les types de dérivés de crédit les plus courants.

Dans le cas d'un swap sur défaillance de crédit, l'acheteur de protection paie au vendeur une prime fixe à chaque période jusqu'à ce que le défaut se produise ou que le contrat de swap arrive à échéance. L'entreprise qui a émis le lien s'appelle l'entité de référence. En retour, si l'entreprise sous-jacente est en défaut sur sa dette, le vendeur de protection est dans l'obligation de racheter à l'acheteur l'obligation en défaut à sa valeur nominale. Le lien lui-même est désigné comme l'obligation de référence. Cette commission, généralement exprimée en points de base par tranche de 100 \$ de l'obligation de référence, est appelée prime de swap par défaut. En cas de défaut, le contrat est réglé (échange de l'obligation et de la valeur nominale) et l'acheteur de la protection interrompt le paiement périodique. Si un défaut ne se produit pas pendant la durée du contrat, le contrat expire à sa date d'échéance.

Ainsi, un swap sur défaillance de crédit est similaire à un contrat d'assurance qui compense l'acheteur pour les pertes résultant d'un défaut.

La section qui suit présente de manière succincte la modélisation du risque de crédit. Il existe deux grandes classes de modèle : les modèles structurels et les modèles à intensité de défaut (ou à forme réduite).

1.4.3 Modélisation du risque de crédit

Les modèles structurels

Les modèles structurels ont pour objectif d'expliquer l'événement de défaut à partir de variables économiques. Le modèle le plus célèbre est celui de Merton, développé au milieu des années 1970.

Les hypothèses du modèle de Merton sont :

- les actifs de l'entreprise sont des titres négociables sur un marché supposé parfait où s'échange également un actif sans risque de rendement instantané constant égal à r . L'évolution des actifs est gouvernée par la dynamique suivante sous la probabilité risque-neutre \mathbb{Q} où W_t est un mouvement brownien standard :

$$\frac{dV_t}{V_t} = rdt + \sigma dW_t \quad (1.44)$$

- la dette de l'entreprise est assimilable à une obligation zéro-coupon risquée (sujet au risque de défaut) de montant nominal égal à N et de maturité T .
- le défaut ne peut survenir qu'à la date T et correspond à l'événement $\{V_T < K\}$, cela signifie que les actifs sont de montant inférieur au montant nominal de la dette en T .
- en cas de défaut (si $V_T < K$), la valeur des fonds propres est nulle et la valeur de la dette est égale à la valeur des actifs. En d'autres termes, la taux de recouvrement du zéro-coupon est égal à $\frac{V_T}{K}$.
- la probabilité de défaut à l'horizon T est donnée par :

$$p(T) = \mathbb{Q}(V_T < K) = N \left(\frac{\ln(\frac{K}{V_0}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \quad (1.45)$$

- la dette et les fonds propres peuvent être évalués comme des options européennes dans le cadre Black & Scholes :

$$FP_T = \max(V_T - K; 0) \quad \text{et} \quad D_T = \min(V_T; K) \quad (1.46)$$

Un des principaux problèmes de cette modélisation est au niveau opérationnel : pour des maturités courtes, les spreads de crédit générés par le modèle sont souvent trop faibles par rapport à ceux observés sur les marchés, ce qui pose problème pour la calibration des paramètres. Puisque les spreads de crédit générés par le modèle sont souvent trop faibles par rapport à ceux observés sur les marchés, le modèle suppose une absence de saut dans le processus, cela se note mathématiquement avec :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{Q}(V_{t+\Delta t} < K | V_t > K) = 0 \quad (1.47)$$

Puisque le défaut d'une entreprise ne peut intervenir qu'à une seule date connue à l'avance, ce n'est pas très réaliste et il est donc impossible d'observer la valeur de marché des actifs de la firme. Remarquons que même avec des sauts prévisibles dans un modèle, on aurait encore la prévisibilité du défaut. Ainsi, pour palier à ce genre de problème, des modèles à intensité de défaut ou à forme réduite ont été développés à la fin des années 90. Ces modèles contournent la difficulté d'obtenir la valeur de marché des actifs en s'appuyant uniquement sur l'observation du *spread* de taux comme représentation du risque de crédit.

Les modèles à intensité de défaut (ou à forme réduite)

Contrairement aux modèles structurels, l'instant de défaut est décrit de manière exogène à partir d'un "processus" positif et au moyen d'un temps d'arrêt. Plus précisément, on considère un processus de Poisson, indépendant du mouvement brownien sous la probabilité risque neutre \mathbb{Q} , avec processus d'intensité λ \mathcal{G} -adapte, tel que $N_t - \int_0^t \lambda_s ds$, $t \geq 0$, est une $(\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ -martingale. Le temps d'arrêt τ est alors donné par :

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : N_t \geq 1\} \quad (1.48)$$

L'intensité de défaut λ peut être donc vue comme la probabilité instantanée de défaut sachant que l'entité a survécu. Formellement, cela se note :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{Q}(\tau \leq t + \Delta t \mid \tau > t) = \lambda_t \quad (1.49)$$

D'après l'équation précédente, λ est une fonction déterministe et cela permet de modéliser la probabilité de survie (probabilité de non défaut d'une entreprise) telle que :

$$\mathbb{Q}(\tau > T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T \lambda_t dt \right) \right] \quad (1.50)$$

Il est possible alors de définir le prix en $t = 0$ d'un zéro-coupon risqué de maturité T en supposant que le taux de recouvrement ω est nul et en considérant que le taux court est décrit par le processus $(r_t)_{t>0}$:

$$\widetilde{P}(0, T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) \mathcal{I}_{\{\tau > T\}} \right] \quad (1.51)$$

$$= \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T (r_t + \lambda_t) dt \right) \right] \quad (1.52)$$

L'intensité $(\lambda_t)_{t>0}$ représente bien ainsi un écart entre le prix d'un zéro-coupon sans défaut et avec défaut : l'intensité est assimilable à un spread de crédit instantané.

Dans le cas où r et λ sont indépendants, $\widetilde{P}(0, T) = B(0, T)\mathbb{Q}(\tau > T)$, où $B(0, T)$ est le prix du zéro-coupon sans risque correspondant.

Chapitre 2

Contexte de l'étude

Sommaire

2.1	Univers monde réel	20
2.2	Univers risque-neutre	20
2.3	Cohabitation de la probabilité monde-réel et risque-neutre . .	22

La littérature montre que la valorisation spot des actifs financiers est un sujet mature, malgré quelques points un peu en suspens comme le risque de crédit sur les dérivés de taux (en l'occurrence les taux variables). Il n'en demeure pas moins qu'il n'y a pas de « jurisprudence » technique sur les sujets de valorisation prospective et c'est assez compréhensible car cela rentre dans un cadre subjectif à l'appréciation de l'ingénieur quantitatif. En effet, il y a bien des propositions techniques concrètes comme la théorie des déflateurs dont l'application en assurance se retrouve brièvement dans SAUVEPLANE [2010] mais ce cadre est trop restrictif et cantonne à utiliser des processus bien trop simple pour refléter la réalité. A notre sens les formules fermées de *pricing* ne doivent pas dicter les dynamiques monde-réel des sous-jacents économiques. La tentative est pourtant séduisante car elle permet le passage de la probabilité risque neutre à la probabilité historique, un lien souvent problématique car les deux univers sont bien différents.

2.1 Univers monde réel

Dans cet univers, les scénarios sont projetés le plus fidèlement possible à la réalité économique. La calibration des modèles se base sur une analyse historique des données représentant l'économie actuelle et les quantiles des distributions obtenues sont étudiés contrairement à l'univers risque-neutre où sont étudiés davantage la moyenne des distributions. Ce type d'univers est généralement utilisé pour le pilotage et l'optimisation stratégique d'allocation d'actifs de la compagnie d'assurance : approche des études ALM.

L'univers monde réel est le cadre de projection traditionnel de la modélisation multivariée par série temporelle, univers très riche et très vaste pouvant découler sur des processus complexes défiant les hypothèses classiques d'homoscédasticité (modèles à changements de régime, modèles à volatilité stochastique). Ce cadre de modélisation est donc suffisamment étoffé d'un point de vue théorique pour décrire et projeter statistiquement tout un ensemble de variables aléatoires dont le comportement du résidu est plus ou moins homoscédastique.

2.2 Univers risque-neutre

Dans l'univers risque neutre, les agents économiques sont considérés tous comme neutres à l'égard du risque. Autrement dit, les primes de risque sont toutes nulles. La probabilité risque neutre repose sur deux hypothèses fondamentales, à savoir, l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) et la complétude des marchés financiers :

- l'absence d'opportunité d'arbitrage exprime l'impossibilité d'effectuer un gain strictement positif avec une probabilité strictement positive pour un investissement nul.
- la complétude des marchés est vérifiée si chaque flux financier peut être répliqué par un portefeuille auto-finançant composé d'actifs sans risque et d'actifs risqués qui génère à l'échéance le même flux de départ.

En effet, on peut montrer que sous l'absence d'opportunité d'arbitrage et l'hypothèse de complétude des marchés, il existe une unique mesure martingale sous laquelle le prix actualisé au taux sans risque des actifs financiers est une martingale. On nomme cette mesure la probabilité risque neutre que l'on définira plus tard dans la présente étude.

Dans l'univers risque-neutre, les modèles doivent être calibrés par rapport aux prix de marché les plus fiables (souvent les points les plus liquides). Les scénarios générés servent alors au pricing des produits dérivés ou à la valorisation des garanties et options financières dans les contrats d'assurance.

Définition d'une martingale

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. Une martingale M par rapport à la filtration \mathcal{F}_t est un processus stochastique adapté avec $\forall t \geq 0, M_t \in \mathbb{L}^1$. On dit que M est une \mathcal{F}_t -martingale si $M_t = E[M_{t+s} | \mathcal{F}_t]$ pour tout $t, s \geq 0$.

Ainsi, il est possible de définir la probabilité risque neutre : on appelle probabilité risque neutre toute probabilité équivalente à \mathbb{P} qui rend martingale toute stratégie auto-finançante simple actualisée.

Théorème de Girsanov de changement de probabilité

Soit un intervalle de temps borné : $t \in [0, T]$. Soit $W^\mathbb{P} = \{W_t^\mathbb{P} : t \in [0, T]\}$ représente un mouvement brownien construit sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ tel que la filtration \mathcal{F}_t est celle engendrée par le mouvement brownien, augmentée de tous les événements de probabilité nulle \mathcal{N} , c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{N} \text{ et } W_s^\mathbb{P} : 0 \leq s \leq t) \quad (2.1)$$

Le prochain théorème permettra de construire des mesures risque-neutre.

Théorème de Cameron-Martin-Girsanov : Soit $\gamma = \{\gamma_t : t \in [0, T]\}$, un processus \mathcal{F}_t -prévisible tel que :

$$\mathbb{E}^\mathbb{P} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right) \right] < \infty \quad (2.2)$$

Il existe une mesure \mathbb{Q} sur (Ω, \mathcal{F}) telle que :

- \mathbb{Q} est équivalente à \mathbb{P}
- $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp \left(- \int_0^T \gamma_t dW_t^\mathbb{P} - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right)$
- Le processus $W^\mathbb{Q} = \{W_t^\mathbb{Q} : t \in [0, T]\}$ défini par $W_t^\mathbb{Q} = W_t^\mathbb{P} + \int_0^t \gamma_s ds$ est un $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$ mouvement brownien.

La condition $\mathbb{E}^\mathbb{P} \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \gamma_t^2 dt \right) \right] < \infty$ est une condition suffisante mais non nécessaire. Elle est connue sous l'appellation de condition de Novikov.

Il est alors possible de lier la probabilité monde-réel et risque-neutre dans notre étude.

2.3 Cohabitation de la probabilité monde-réel et risque-neutre

La cohabitation de ces deux univers probabilistes n'est pas chose aisée et le choix par approche séparée est assez récurrente comme le montre les travaux de ROSSPOPOFF [2013]. La séparation entre le cadre de *pricing* (univers risque neutre) du cadre de projection des grandeurs économiques (univers monde réel) n'est pas l'idéal d'un point de vue théorique en raison d'un passage d'un univers probabiliste à un autre non explicité. Ceci étant, cela a le gros avantage d'utiliser notamment les modèles les plus performants relatifs aux deux univers probabilistes.

Outre ce constat, les approches par modèles séparés se cantonne assez fréquemment à un calibrage « spot » des paramètres implicites de *pricing*. Autrement dit, les prix futurs ne seront fidèles qu'à la filtration financière associée à la date de début de projection.

Nos travaux sont issues d'une volonté de faire évoluer dynamiquement cette filtration financière et donc de reproduire des prix avec des paramètres implicites cohérent avec l'information en vigueur à la date d'évaluation. Typiquement, l'évolution de la valeur d'un *call* va de pair avec l'évolution des volatilités implicites. C'est justement ce type de raisonnement qui nous a poussé à expliciter un cadre de valorisation dynamique qui induit une cohabitation entre les paramètres monde-réel et les paramètres implicites.

Le principe générique des travaux est donc finalement de diffuser en monde réel via une modélisation par série temporelle, non seulement les grandeurs économiques mais aussi les grandeurs implicites. Typiquement sur les dérivés actions, il s'agit de diffuser le S_0 (indice SX5E), le taux d'intérêt r , le taux de dividende q et la nappe de volatilité implicite. Ce raisonnement est étendu, aux dérivés de crédit, aux dérivés de taux et aux obligations risquées à taux fixe.

Deuxième partie

**Construction du générateur de
scénarios économiques**

Chapitre 3

Implémentation de modèles financiers

Le cadre de l'étude proposée s'inscrit dans la construction d'un GSE « monde réel » répondant à la fois aux problématiques de projections de grandeurs économiques et de pricing à horizon court et moyen terme. A ce titre, l'approche de modélisation doit s'intégrer dans la structure du modèle VAR (Vecteur Auto Régressif) et doit induire une cohérence entre les univers de projection (« monde réel ») et de pricing (« risque-neutre »). Le modèle VAR développé par Christopher Sims au début des années 80 permet de capturer les interdépendances entre plusieurs séries temporelles.

Dans un modèle VAR, les variables sont traitées symétriquement de manière à ce que chacune d'entre elles soient expliquée par ses propres valeurs passées et par les valeurs passées des autres variables. Nous détaillerons plus tard la théorie de ce modèle.

Dans le chapitre qui suit, les différentes modélisations des classes d'actifs composant le portefeuille seront présentées.

Modélisation des séries temporelles en représentation des facteurs de risque des classes d'actifs

Sommaire

3.1	La structure par terme des taux d'intérêt	26
3.2	Modélisation de l'Equity (Action) et des dérivés associés . . .	30
3.3	Calibration de la nappe de volatilité Equity	33
3.4	Calibration du cube de volatilité des swaption	81
3.5	Le risque de crédit des obligations : Govies et Corporate . . .	101
3.6	Calibration de l'intensité de défaut	117
3.7	Modélisation de la structure par terme des γ_0	134
3.8	L'indice Immobilier : Euronext IEIF REIT Europe	142
3.9	L'indice SXXT	143

3.1 La structure par terme des taux d'intérêt

3.1.1 Le modèle de taux d'intérêt

La structure par terme des taux d'intérêt est modélisée par le modèle de Nelson-Siegel-Svensson (NSS). Il est d'usage de projeter les facteurs de risque responsable de la structure par terme des taux d'intérêt au moyen de ce modèle. L'approche est la même que l'article Diebold and Li [2006], *Forecasting the term structure of government bond yields*. Le modèle NSS est décrit dans la partie **Théorie et socles financiers**, modèle caractérisant la structure par terme des taux d'intérêt selon l'équation :

$$R_t^{NSS}(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \left(\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_1})}{\frac{\tau}{\lambda_1}} \right) + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_1})}{\frac{\tau}{\lambda_1}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_1}) \right) + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_2})}{\frac{\tau}{\lambda_2}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_2}) \right) \quad (3.1)$$

Avec :

- β_0 représente le facteur de niveau correspondant au taux long.
- β_1 représente le facteur de rotation correspondant à l'écart entre le taux court et le taux long (spread).
- β_2 représente le facteur de courbure.
- β_3 représente le facteur améliorant la partie courte de la courbe.
- λ_1 représente le 1^{er} paramètre d'échelle.
- λ_2 représente le 2^{ème} paramètre d'échelle.

Les paramètres λ_1 et λ_2 ont été paramétrés simultanément de façon à minimiser la somme des écarts quadratiques entre les taux d'intérêt réels historiques et ceux estimés par le modèle. L'optimisation donne alors des paramètres de λ_1 et λ_2 permettant de reproduire de manière presque parfaite la structure par terme des taux d'intérêt :

- $\lambda_1 = 0.17190345$
- $\lambda_2 = 0.02714169$

Il est alors possible de reconstruire les séries chronologiques des β_i .

3.1.2 Reconstruction des séries chronologiques

La reconstruction des séries chronologiques des régresseurs est illustrée ci-dessous :

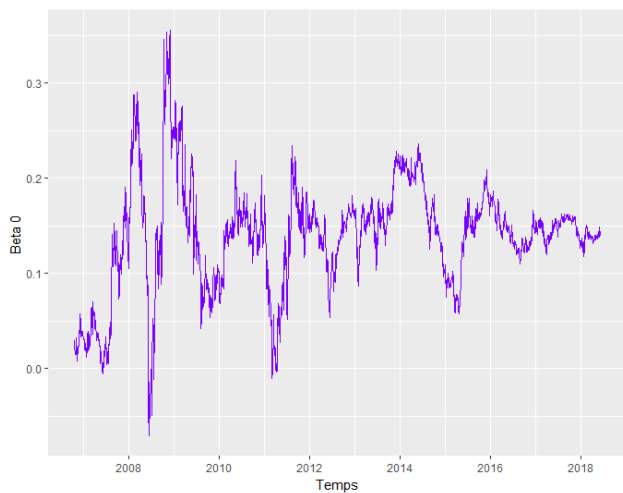


FIGURE 3.1 – Serie chronologie Beta0 STTI NSS

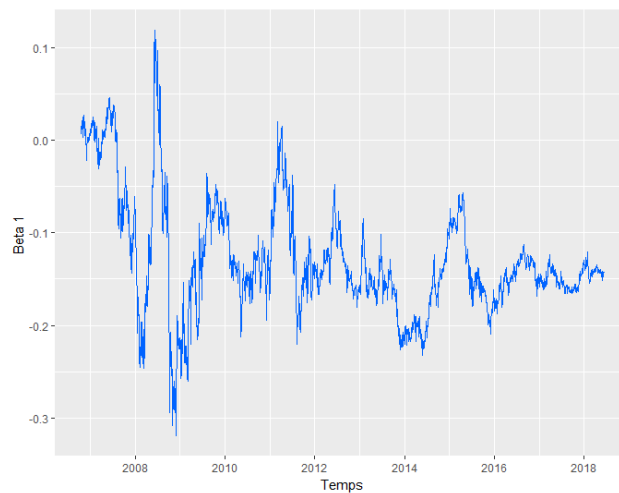


FIGURE 3.2 – Serie chronologie Beta1 STTI NSS

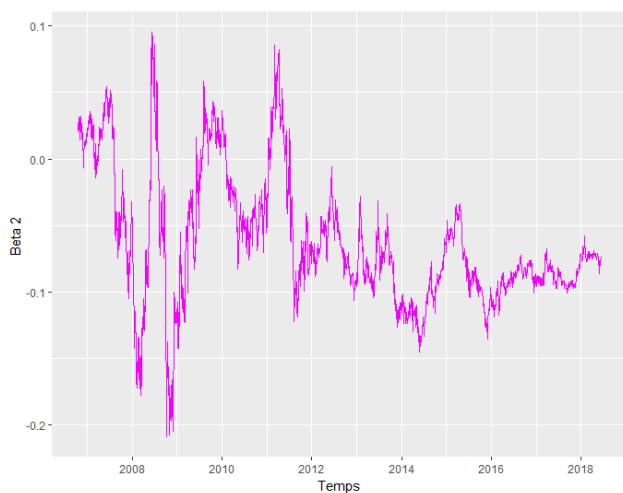


FIGURE 3.3 – Serie chronologie Beta2 STTI NSS

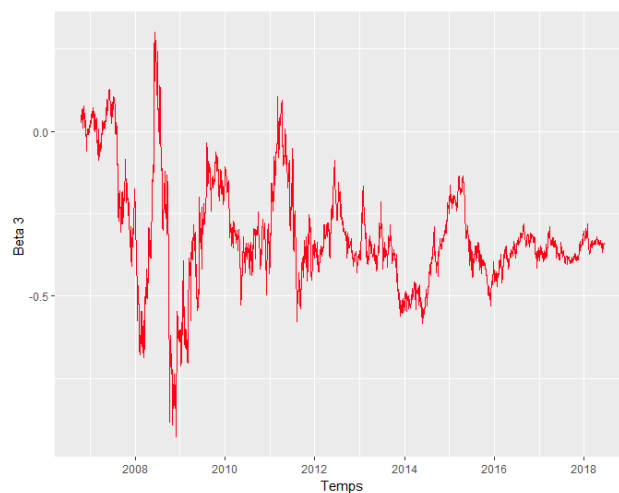


FIGURE 3.4 – Serie chronologie Beta3 STTI NSS

Il est alors possible de reconstruire l'historique de la structure par terme des taux d'intérêt sous la forme d'une surface.

3.1.3 Reconstruction de l'historique de la STTI par NSS

La reconstruction de l'historique de la structure par terme des taux d'intérêt reconstruit par NSS donne la surface suivante :

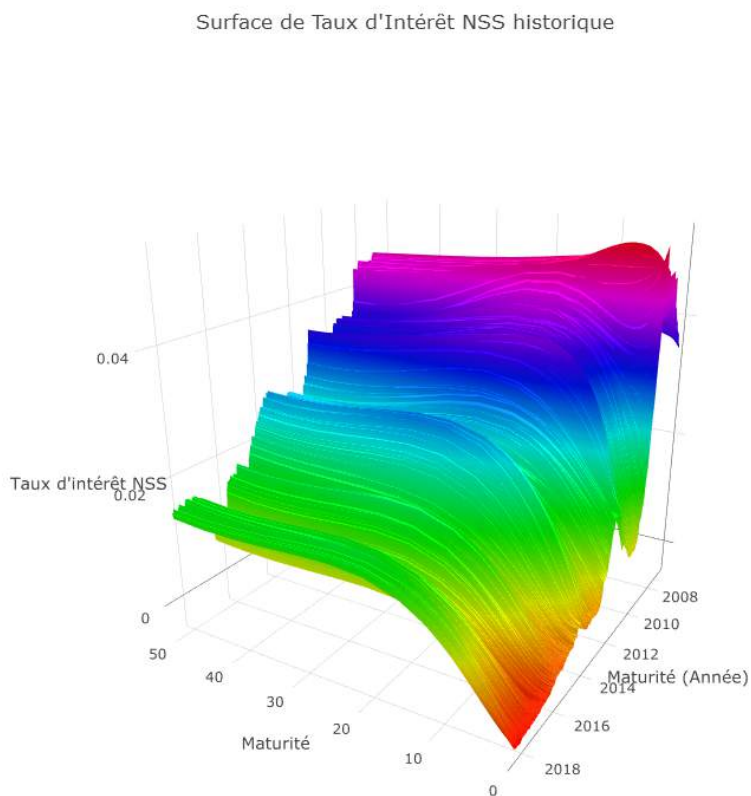


FIGURE 3.5 – Historique de la structure par terme des taux d'intérêt reconstruit par NSS

La surface précédente peut être comparée à la surface réelle de la structure par terme des taux d'intérêt suivante :

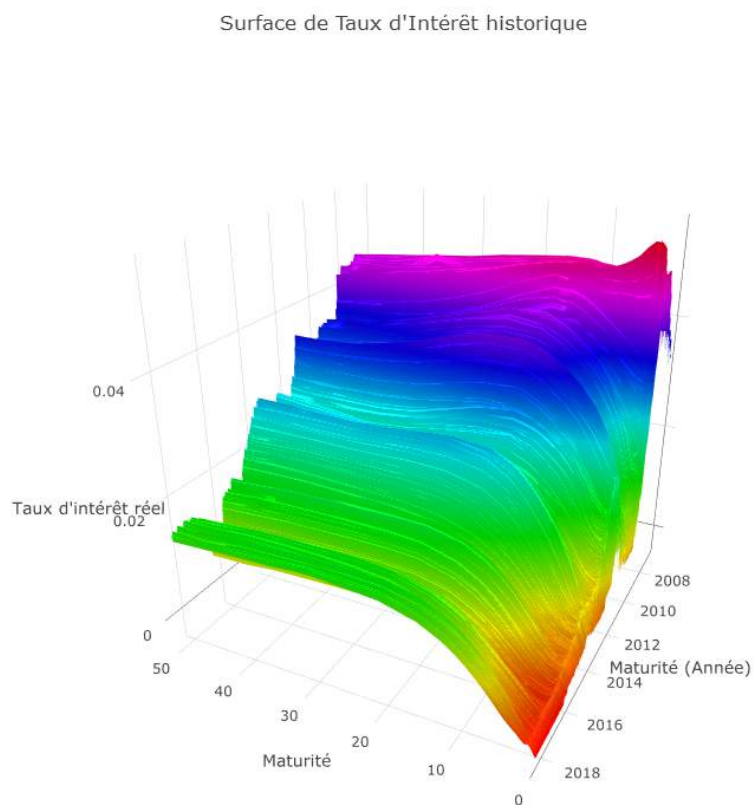


FIGURE 3.6 – Historique de la la structure par terme des taux d'intérêt réels

La surface *fittée* par NSS est de très bonne qualité et est davantage lisse surtout sur la partie courte de la courbe. La validation complète de ce modèle est faite dans l'article cité en début de partie.

Maintenant que la modélisation de la STTI est faite, il est possible d'en déduire l'historique de la structure par terme des dividendes implicites (surface de dividendes implicites) grâce à l'historique de la structure par terme des forward spot (surface de forward spot).

3.2 Modélisation de l'Equity (Action) et des dérivés associés

L'indice action utilisé dans le VAR sera le SX5E. L'EURO STOXX 50 est un indice boursier au niveau de la zone euro. Au même titre que le CAC 40 pour la France, l'EURO STOXX 50 regroupe 50 sociétés selon leur capitalisation boursière au sein de la zone euro et non pas au niveau de l'Europe ni de l'Union européenne. Notons également que cette indice ne comprend pas les dividendes (indice action sans les dividendes réinvestis). Cette indice a pour unique vocation d'être utilisé dans la calibration de la nappe de volatilité implicite : il sera notre niveau S_0 (spot) à chaque pas de temps. La série temporelle du SX5E est graphée ci-après :

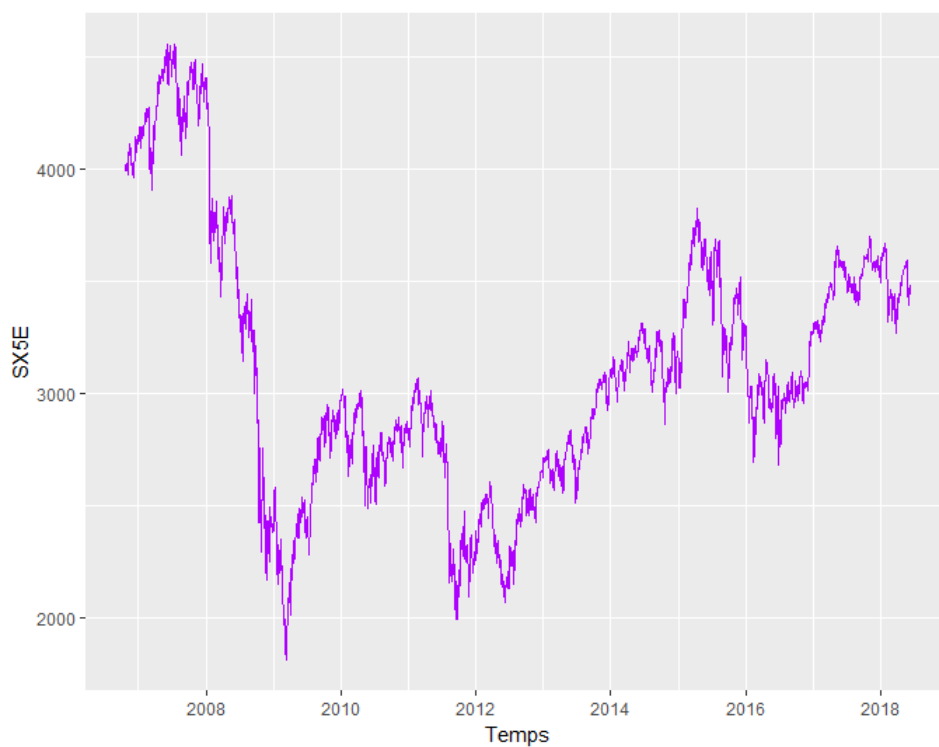


FIGURE 3.7 – L'Indice SX5E

La section suivante fait mention de la calibration de la nappe de volatilité implicite des produits dérivés action : *call* et *put*

Calibrage paramétrique de la volatilité implicite des produits dérivés Equity

Introduction

Le calibrage est une étape fondamentale dans l'implémentation de modèles financiers. Il permet d'ajuster les paramètres du modèle afin de rendre les résultats cohérents avec les données de marché.

Dans cette optique, le but de ce chapitre est de modéliser la volatilité implicite des produits dérivés disponibles sur le marché ainsi qu'identifier les facteurs de risques responsables de la plupart de l'aléatoire dans les surfaces de volatilité. L'intérêt de cette étude est de pouvoir *pricer* dans le futur les produits dérivés sur action et sur taux d'intérêt : caractériser leur surface de volatilité implicite et produire leur surface de *smile* de volatilité implicite.

L'estimation et l'obtention des surfaces de *smile* de volatilité implicite sont réalisées au moyen de modèles paramétriques intégrant les variables de maturité de l'option et du *smile* (volatilité en fonction du *strike*). En effet, une volatilité constante introduite dans les modèles de *pricing* ne permet pas d'expliquer efficacement les variations de surface de volatilité implicite.

Introduction à la modélisation et exploration de la dynamique de la volatilité des actifs financiers

La modélisation et l'exploration de la dynamique de la volatilité des actifs financiers a été la principale question et le point central des universitaires et des praticiens de la finance. La volatilité est fondamentale pour la gestion des risques, la tarification des options, la couverture des positions sur produits dérivés et l'élaboration des politiques financières des différentes institutions assurantielles et bancaires.

La plupart des recherches antérieures ont porté sur la volatilité historique, mais la volatilité implicite devient un enjeu essentiel en raison de certaines études novatrices, comme Christensen et Probhala [1998], Fleming [1998] et Dumas, Fleming et Whaley [1998]. En effet, ils montrent que l'information implicite, c'est-à-dire contenue par le marché, est supérieure à l'historique dans la prévision de la volatilité.

En revanche, la volatilité implicite est prospective, c'est-à-dire implicite par les prix des options sur le marché. Les prix des options sont alors un consensus commun entre les participants du marché sur la volatilité future attendue. Par conséquent, la volatilité implicite est l'information du marché quant à la volatilité future de l'actif sous-jacent sur la durée de vie restante d'une option. L'anticipation de volatilité des participants du marché peut être récupérée en inversant la formule de tarification d'option.

Toutefois, il est bien connu qu'après le krach boursier d'octobre 1987, la volatilité implicite calculée à partir des prix des options sur les indices boursiers semble être différente

selon les *strike* et la structure des échéances. Cela implique que les volatilités implicites présentent une surface bi-dimensionnelle :

- la dynamique à travers les *strike* (prix d'exercice des options),
- la dynamique dans le temps.

Ces dynamiques doivent donc être examinées afin de capter les différentes phases de marché pour ensuite les répliquer de manière optimale.

Il existe peu d'études qui permettent d'estimer et d'obtenir des surfaces de volatilité implicite lissées. Cependant, il existe d'abondantes recherches examinant le *Smile/Skew* ou "sourire/asymétrie" (en fonction du *strike*) ou la structure terminologique des volatilités. Une des fameuses études sur les surfaces de volatilité implicite a été menée par Cont et Fonseca [2002], qui ont examinés la dynamique des surfaces de volatilité implicite des options sur les indices S&P500¹ et FTSE100². L'étude ci-présente reproduira leur approche en considérant l'indice SX5E pour les options sur action. Cette étude s'étendra alors à la réplification de surface de volatilité implicite des options sur taux.

Les prix d'une option sur indice à une date donnée sont représentés par une surface de volatilité implicite correspondante, ayant des caractéristiques de structure de *Smile/Skew* et de terme (maturité). Il existe différentes méthodes pour obtenir des surfaces de volatilité implicite lissés. Néanmoins, les principales conclusions sont :

- premièrement, une surface de volatilité implicite a une forme non plate et affiche à la fois une structure du *strike* et une structure à terme (maturité).
- deuxièmement, la forme de la surface de volatilité implicite change avec le temps.
- troisièmement, les volatilités implicites ont une autocorrélation positive et possèdent un effet de retour à la moyenne.
- quatrièmement, la variance des variations quotidiennes des logarithmes de la volatilité implicite peut s'expliquer par deux ou trois composantes principales.

Alentorn [2004] a adapté une forme paramétrique de l'approche de Dumas, Fleming et Whaley [DFW] [1998] et a estimé les surfaces de volatilité implicite pour les options sur contrats à terme d'indice FTSE100. L'étude menée ci-présent diffère toutefois des deux précédentes puisqu'elle ne fait qu'estimer les surfaces de volatilité implicite, tandis que les deux autres étudient la dynamique des surfaces de volatilité implicite (une addition à l'estimation des surfaces implicites).

La volatilité implicite est très importante dans la pratique, car sur les marchés d'options, il existe généralement chaque jour un nombre limité d'options négociées, avec des *strike* et des échéances différentes. Quand un praticien doit citer des options avec des *strike* ou des échéances différentes, il est généralement trop restreint, ce qui pourrait être résolu par une surface de volatilité implicite. Avec interpolation et extrapolation des volatilités implicites observées sur le marché, il est alors possible de générer toute une surface de volatilité implicite :

- premièrement, il est facile de *pricer* de nouvelles options en prenant des estimations à partir des surfaces de volatilité implicite.

1. Indice boursier basé sur 500 grandes sociétés cotées sur les bourses américaines (NYSE ou NASDAQ).
2. Indice boursier des cent entreprises britanniques les mieux capitalisées cotées à la bourse de Londres.

- deuxièmement, la surface de volatilité implicite peut être utilisée pour gérer des positions de produits dérivés exotiques, qui peuvent être couvertes avec des options simples telles que les options européennes.
- troisièmement, l'indice de volatilité (VIX pour l'*Equity* mais pas d'équivalent pour les taux) peut facilement être construit à partir des surfaces de volatilité implicite, et par conséquent, les dérivés de volatilité peuvent être évalués.
- quatrièmement, le risque peut être géré pour les titres qui sous-tendent l'indice SX5E pour l'*Equity* en utilisant des facteurs de risque indépendants des surfaces de volatilité implicite.

L'objectif de cette étude est de proposer un cadre de travail pour valoriser dynamiquement des dérivés vanilles mais pour faire cela, il est indispensable de pouvoir estimer et obtenir des surfaces lisses au moyen de modèles paramétriques pour projeter les surfaces de volatilité liées aux facteurs de risque des modèles estimés. Cependant, notre étude est liée aux études de Dumas, Fleming et Whaley [DFW] [1998] en termes de formes fonctionnelles de leurs modèles estimés pour différentes surfaces de volatilité implicite. Néanmoins, notre étude diffère à certains égards des deux études citées :

- premièrement, nous évaluons les surfaces de volatilité implicite en utilisant toutes les options disponibles sur le marché mais en intégrant un impact sur la calibration des modèles avec une pondération sur les vega (variation du prix de l'option par rapport à la volatilité), qui ne sont pas comptabilisés dans DFW.
- deuxièmement, nous étudions les surfaces de volatilité implicite en terme de *money-ness* (prix d'exercice normalisé) et de temps de maturité (terme), alors que DFW incorpore le *strike* (prix d'exercice) à la place.

3.3 Calibration de la nappe de volatilité Equity

3.3.1 Contexte de l'étude

Le cadre de l'étude proposée s'inscrit dans la construction d'un GSE « monde réel » répondant à la fois aux problématiques de projections de grandeurs économiques et de *pricing* à horizon court et moyen terme. A ce titre, l'approche de modélisation doit s'intégrer dans la structure du modèle VAR et doit induire une cohérence entre les univers de projection (« monde réel ») et de *pricing* (« risque-neutre »).

La spécification proposée doit respecter une forme économétrique linéaire sur les paramètres, dans la continuité de notre approche inspirée de l'article de Diebold and Li [2006] pour la structure par terme des taux d'intérêts. Cette méthodologie a été privilégiée à celles impliquant une dynamique de facteurs inobservables (modèles à espace d'états). En effet, les facteurs inobservables sont rendus observables en construisant une série chronologique des paramètres économétriques par moindres carrés, permettant de rentrer de manière élégante dans un cadre d'étude de séries temporelles multivariées plus classique.

Dans un souci de cohérence entre les scénarios « monde réel » et « risque-neutre », le cadre de travail proposé est le recalibrage du modèle de valorisation selon les paramètres implicites projetés par le VAR, en l'occurrence la nappe de volatilité implicite. Bien moins chronophage qu'un modèle plus complet tel que le MSIAH-VAR, un modèle VAR répondra à la problématique de *repricing* dans un univers réel où les paramètres implicites sont

des séries chronologiques. A noter qu'un MSIAH-VAR serait plus adapté dans le cas de séries chronologiques très volatiles car il induit un changement de régime de volatilité contrairement au VAR où la volatilité est supposée constante au cours du temps. L'indice VSTOXX en est l'illustration parfaite :

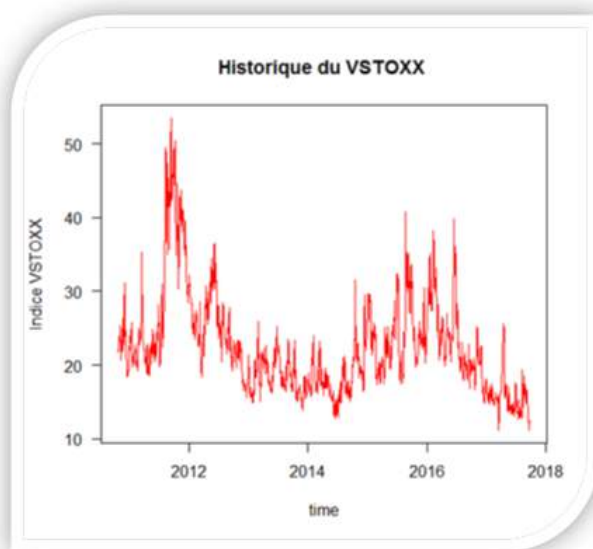


FIGURE 3.8 – Représentation de l'historique du VSTOXX

En outre les techniques traditionnelles de calibrage sur la base de l'information disponible à la date de projection induisent soit une constance des paramètres implicites (calibrage RN) soit une constance des prix du marché du risque (approche par déflateurs) alors même que la volatilité des évaluations « spots » est pointée du doigt par les assureurs. La question du recalibrage conditionnel apparaît dès lors assez naturelle pour des évaluations de stratégie de couverture action, de détermination de SCR marché liés à des produits structurés de maturité moyen terme.

La présente étude porte donc sur la projection de la nappe de volatilité implicite par une approche économétrique linéaire sur les paramètres et le raisonnement théorique et pratique autour du recalibrage de notre modèle de *pricing*.

3.3.2 Spécification du modèle paramétrique

Comme indiqué lors de l'introduction, le modèle doit s'inscrire dans un cadre économétrique linéaire sur les paramètres. DUMAS et AL. [1998] propose les premiers un cadre économétrique pour effectuer un lissage de la nappe de volatilité :

$$\begin{cases} \sigma = \max(0.01, a_0) + u, u \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \\ \sigma = \max(0.01, a_0 + a_1M + a_2M^2) + u, u \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \\ \sigma = \max(0.01, a_0 + a_1M + a_2M^2 + a_3T + a_4MT) + u, u \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \\ \sigma = \max(0.01, a_0 + a_1M + a_2M^2 + a_3T + a_4T^2 + a_5MT) + u, u \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \end{cases} \quad (3.2)$$

Avec T et M , respectivement la maturité restante et la « moneyness » pour laquelle plusieurs définitions apparaissent dans la littérature. Nous retenons l'expression, ajustée de la maturité, avec intégration des dividendes implicites futurs, de BERNALES et GUIDOLIN [2012] :

$$M = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0 e^{rT} - FVD(K, T, \sigma, S_0, r, q)}\right)}{\sqrt{T}} \quad (3.3)$$

La composante FVD, valeur actuelle des dividendes futurs, se détermine via la relation de parité call-put (avec sous-jacent versant un dividende unique à échéance) :

$$Call_0(K, T, \sigma, S_0, r, q) - Put_0(K, T, \sigma, S_0, r, q) = S_0 - FVD(K, T, \sigma, S_0, r, q) - Ke^{-rT} \quad (3.4)$$

Avec :

$$\begin{cases} Call_0(K, T, \sigma, S_0, r, q) = S_0 e^{-qT} N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) \\ Put_0(K, T, \sigma, S_0, r, q) = -S_0 e^{-qT} N(-d_1) + Ke^{-rT} N(-d_2) \end{cases} \quad (3.5)$$

Et :

- $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} [\ln \frac{S_0}{K} + T(r - q + \frac{\sigma^2}{2})]$
- $d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} [\ln \frac{S_0}{K} - T(r - q - \frac{\sigma^2}{2})]$
- $N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$, $N(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

D'où l'expression finale de la « moneyness » M , avec l'hypothèse d'un versement de dividende unique à échéance :

$$M = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0 [e^{qT} + e^{rT} - 1]}\right)}{\sqrt{T}} \quad (3.6)$$

Le premier modèle de fonction de la volatilité représente la volatilité constante du modèle de Black & Scholes et produit une volatilité constante sans prendre en compte le niveau de la moneyness et la maturité. Le deuxième modèle tente de capturer la courbure du smile de volatilité à travers la *moneyness*. Quant au troisième modèle, il capture de manière additionnelle la variation de la courbure du *smile* de volatilité en ajoutant la dimension du temps : la combinaison des effets de la maturité et de la *moneyness*. Enfin, le quatrième modèle cherche à capturer la courbure du *smile* de volatilité à travers un facteur supplémentaire : la maturité.

Pour une question de cohérence avec la courbe de taux sans risque projeté (issue d'un *bootstrap* de la courbe des taux swap lissé par NSS), la définition du « r » est établie comme suit :

$$r = -\frac{\ln(B(0, T))}{T} \quad (3.7)$$

En théorie, une fois « r » fixé, la structure par terme des taux de dividende implicites peut être déduite des prix de marché. En effet, en reprenant les notations précédentes, ALENTORN [2004] indique la possibilité de déduire le « q » implicite par l'expression du prix des futures :

$$Fwd(0, T) = S_0 e^{(r-q)T} \quad (3.8)$$

D'où :

$$q = r - \frac{\ln\left(\frac{Fwd(0, T)}{S_0}\right)}{T} \quad (3.9)$$

Notons que le "r" et "q" de Black & Scholes sont en pratique un r_T et q_T . Par abus de langage, nous resterons avec les notations de l'article original.

La spécification de Dumas et al. est quelque peu contraignante d'un point de vue estimation à cause de la fonction « max » qui ne permet pas de rentrer directement dans un cadre OLS (Ordinary Least Square). Nous retenons dès lors la spécification de GONCALVES et GUIDOLIN [2006] repris par BERNALES et GUIDOLIN [2014] avec sa transformation logarithmique sur le terme à expliquer, garantissant la positivité de la volatilité dans un cadre stochastique. Toutefois, la seule hypothèse sur la forme qui est adopté à ce stade est une spécification polynomiale en T et M d'un degré inférieur ou égal à 3. Cette modélisation plus générale que celles décrites dans la littérature permet d'inférer une spécification qui reflète le plus fidèlement les données :

$$\begin{cases} \ln(\sigma(M, T)) = \beta_0 + \beta_1 M + \beta_2 T + \beta_3 M^2 + \beta_4 T^2 + \beta_5 MT + \beta_6 M^3 \\ \quad + \beta_7 T^3 + \beta_8 M^2 T + \beta_9 T^2 M + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \end{cases} \quad (3.10)$$

Aussi, par cette première approche et une étude en profondeur de ce modèle, nous nous sommes permis de modifier une spécification : les volatilités des *call* issues des données Bloomberg étant comprise entre 0 et 1, nous avons trouvé cela pertinent de considérer la fonction logit comme transformation de la volatilité au lieu du logarithme. En effet, nous nous sommes rendu compte durant l'étude que les volatilités estimées par le modèle avec la transformation logarithmique avaient tendance à "exploser" dès lors que les volatilités observées des options cotées sur le marché action étaient élevées. Nous étudierons ainsi cette version du modèle précédent avec une transformation logit de la volatilité :

$$\begin{cases} \text{logit}(\sigma(M, T)) = \beta_0 + \beta_1 M + \beta_2 T + \beta_3 M^2 + \beta_4 T^2 + \beta_5 MT + \beta_6 M^3 \\ \quad + \beta_7 T^3 + \beta_8 M^2 T + \beta_9 T^2 M + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \end{cases} \quad (3.11)$$

On en profite pour rappeler la définition de la fonction logit :

$$\text{logit}(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right), \quad \text{où } p \in]0, 1[\quad (3.12)$$

3.3.3 Estimation des paramètres

La principale problématique d'estimation est l'utilisation qui est faite du lissage de la nappe de volatilité. En effet, cette surface implicite n'est pas exploitée de manière directe mais plutôt de façon indirecte par l'intermédiaire de la formule de transfert de Black & Scholes. En effet, in fine, l'objectif est de repasser à une matrice de prix afin de calibrer en « risque-neutre », un modèle de *pricing*.

CHRISTOFFERSEN et JACOBS [2002] propose deux métriques pour l'estimation :

$$\begin{aligned} - \text{MSE}(\theta) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (C_i - C_i(\theta))^2 \\ - \text{IVMSE}(\theta) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma_i - \sigma_i(\theta))^2 \end{aligned}$$

Cette métrique « implied volatility root mean squared error loss function » minimise l'écart entre les volatilités implicites des prix des options observées sur le marché et celles obtenues des prix donnés par le modèle.

où :

- n le nombre de prix d'options qui existent sur le marché.
- C_i les prix des n options sur le marché.
- $C_i(\theta)$ les prix de ces n options calculé à partir du modèle de BS, et qui dépendent d'un ensemble de paramètres θ .
- σ_i la volatilité implicite de Black & Scholes obtenue avec $C_{mkt} = C_{BS}(\sigma_i, K, T)$.
- $\sigma_i(\theta)$ la volatilité implicite de Black & Scholes estimée obtenue avec $C_{BS} = C_{BS}(\hat{\sigma}_i, K, T)$.

Ces métriques sont cohérentes avec les prix des options car elles fournissent des paramètres estimés qui, lorsque utilisés dans le modèle, génèrent des prix d'options très proches de ceux observés sur le marché.

L'idée sous-jacente de bi-objectif le problème d'optimisation est qu'une erreur absolue d'estimation sur la volatilité n'a pas le même effet sur le prix selon le *strike* et la maturité restante. Toutefois dans le cadre d'un modèle dynamique, une optimisation multi-objective ne peut pas être utilisée puisqu'elle découle sur un panel de solutions entraînant la production d'une fonction d'utilité et par suite une instabilité des paramètres dans le temps (par exemple construire une même série chronologique avec des optimums globaux et locaux).

Par ailleurs, l'estimation OLS classique ne permet pas de prendre en compte le lien entre le prix et la volatilité. Dès lors, la méthode d'estimation mono-objective qui apparaît la plus pertinente est la méthode des moindres carrés pondérés pour une matrice de poids judicieusement choisie. Ajouter à cela, l'estimateur des moindres carrés pondérés est explicite et garantit également l'homogénéité des minimums (globaux en l'occurrence). Nous avons donc imaginé faire intervenir le vega dans l'estimation :

$$v_{Call} = \frac{\partial Call(K, T)}{\partial \sigma} \quad (3.13)$$

Le vega représente la sensibilité du prix par rapport à la volatilité, il est donc le plus élevé lorsque l'erreur de prédiction sur la volatilité engendre l'erreur la plus forte sur le

prix du dérivé action. Cet indicateur de gestion financière a été choisi également pour son expression mathématique explicite découlant du modèle d'évaluation de Black & Scholes :

$$v_{Call} = S_0 e^{-qT} \sqrt{T} N'(d_1) \quad (3.14)$$

Avec,

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3.15)$$

Graphiquement, le vega est plus élevé sur les *call* ATM et en particulier sur les maturités élevées :

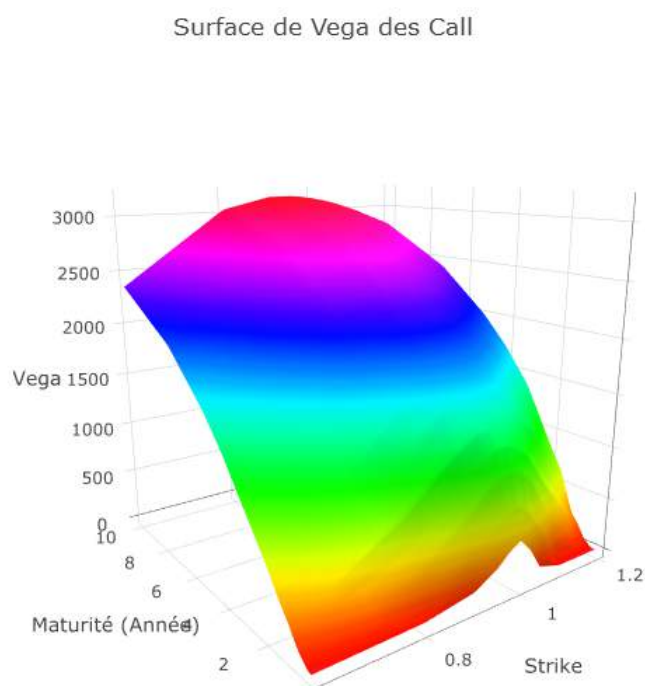


FIGURE 3.9 – Surface du vega en fonction de la maturité et du prix d'exercice (dividendes non nuls)

Le raisonnement précédent induit que la fonction objectif de calibrage doit tendre à réduire l'erreur d'estimation sur les options ATM. Ceci est d'ailleurs pertinent économiquement car ces options sont liquides sur le marché contrairement aux options OTM ou ITM dont les données proviennent dans la grande majorité des cas d'une extrapolation théorique (« Mark to Model »).

Aussi, la fonction de calibrage avec la pondération au moyen des vega doit prendre en considération la transformation appliquée aux volatilités pour ne pas introduire de biais dans les estimations. La pondération sera donc de la forme suivante avec P le prix de

l'option et f la fonction inverse du logit appliquée au prix de l'option :

$$f(P) = \frac{1}{1 + e^{-P}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(P)}{\partial \sigma} = \frac{\partial P}{\partial \sigma} \frac{e^{-P}}{(1 + e^{-P})^2} \quad (3.16)$$

$$= v \left(\frac{1}{1 + e^{-\ln(\frac{\sigma}{1-\sigma})}} \right) \frac{e^{-\ln(\frac{\sigma}{1-\sigma})}}{\left(1 + e^{-\ln(\frac{\sigma}{1-\sigma})}\right)^2} \quad (3.17)$$

$$= v(\sigma) \frac{e^{-\ln(\frac{\sigma}{1-\sigma})}}{\left(1 + e^{-\ln(\frac{\sigma}{1-\sigma})}\right)^2} \quad (3.18)$$

Ainsi, la transformation de vega utilisée dans la pondération vaut :

$$v = v_{Call} \frac{e^{-\ln(\frac{\sigma}{1-\sigma})}}{\left(1 + e^{-\ln(\frac{\sigma}{1-\sigma})}\right)^2} \quad (3.19)$$

La fonction de calibrage est alors définie comme suit pour rentrer dans le cadre d'estimation des moindres carrés pondérés :

$$F(\beta_0, \dots, \beta_9) = \sum_{i=1}^n \omega_i [\text{logit}(\sigma_i(M_i, T_i, S_0, r_i, q_i)) - \text{logit}(\sigma_i(\widehat{M}_i, \widehat{T}_i, S_0, r_i, q_i))]^2 \quad (3.20)$$

Avec :

$$\omega_i = \frac{v(S_0, M_i, T_i, \sigma_i, r_i, q_i)}{\sum_{k=1}^n v(S_0, M_k, T_k, \sigma_k, r_k, q_k)} \quad (3.21)$$

Pour plus de commodité pour l'expression de l'estimateur des moindres carrés pondérés, réécrivons le modèle linéaire sous forme matricielle :

$$Y = X\beta + U, U \sim \mathcal{N}(0, \sigma I) \quad (3.22)$$

Avec :

$$Y_{n,1} = \begin{bmatrix} \text{logit}(\sigma_1(M_1, T_1, S_0, r_i, q_i)) \\ \vdots \\ \text{logit}(\sigma_n(M_n, T_n, S_0, r_i, q_i)) \end{bmatrix} \quad I_{n,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta_{10,n} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_9 \end{bmatrix}$$

$$X_{n,10} = \begin{bmatrix} 1 & M_1 & T_1 & M_1^2 & T_1^2 & M_1 T_1 & M_1^3 & T_1^3 & M_1^2 T_1 & T_1^2 M_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & M_n & T_n & M_n^2 & T_n^2 & M_n T_n & M_n^3 & T_n^3 & M_n^2 T_n & T_n^2 M_n \end{bmatrix}$$

Introduisons la matrice de poids :

$$W_{n,n} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \omega_n \end{bmatrix}$$

L'estimateur des moindres carrés pondérés (MCP) découle du programme d'optimisation suivant :

$$\underset{\beta}{\text{Min}}(Y - X\beta)^T W(Y - X\beta) \quad (3.23)$$

Et permet d'avoir une expression explicite garantissant l'homogénéité des résultats obtenus (minimums globaux) :

$$\beta_{MCP} = (X^T W X)^{-1} X^T W Y \quad (3.24)$$

3.3.4 Reconstitution de la série chronologique

Présentation des données Bloomberg

Nous avons à notre disposition une plage de données du 19/10/2006 au 11/06/2018 (soit 2975 points du passé), dans laquelle 130 couples (T_i, K_i) sont disponibles :

$$T = \frac{1}{12} [1 \mid 2 \mid 3 \mid 6 \mid 9 \mid 12 \mid 18 \mid 24 \mid 36 \mid 48 \mid 60 \mid 84 \mid 120] \quad (3.25)$$

$$K = [0.60 \mid 0.80 \mid 0.90 \mid 0.95 \mid 0.975 \mid 1 \mid 1.025 \mid 1.05 \mid 1.10 \mid 1.20] \quad (3.26)$$

Graphiquement, la nappe de volatilité du 04/06/2018 est représentée comme suit :

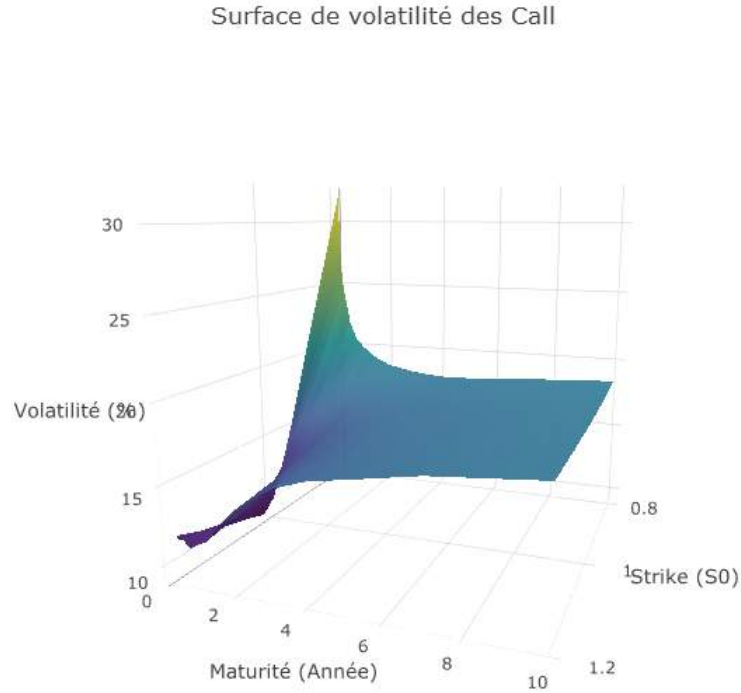


FIGURE 3.10 – Surface de volatilité (SX5E) en fonction de la maturité et du prix d'exercice

Modèle général

La partie précédente explique la construction des séries chronologiques supposées inobservables (i.e. dans un modèle dynamique à espace d'états), par la méthode des moindres carrés. Cette méthode en deux étapes, repris par DIEBOLD et LI [2006], et permettant de s'acquitter d'une dimension (la fameuse équation de mesure des modèles à espace d'états), donne cette forme à la dynamique de la nappe de volatilité implicite :

$$\begin{cases} \logit(\sigma_{i,t}(M, T)) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}M_{i,t} + \beta_{2,t}T_i + \beta_{3,t}M_{i,t}^2 + \beta_{4,t}T_i^2 + \beta_{5,t}M_{i,t}T_i + \beta_{6,t}M_{i,t}^3 \\ \quad + \beta_{7,t}T_i^3 + \beta_{8,t}M_{i,t}^2T_i + \beta_{9,t}T_i^2M_{i,t} + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \end{cases} \quad (3.27)$$

Pour la présente étude, nous retenons l'expression de la *moneyness* :

$$M_t = \frac{\ln\left(\frac{K_i}{S_{0,t}[e^{q_t, T_i} T_i + e^{r_t, T_i} T_i - 1]}\right)}{\sqrt{T_i}} \quad (3.28)$$

Avec :

$$r_{t, T_i} = -\frac{\ln(B_t(0, T_i))}{T_i} \quad (3.29)$$

$$q_{t,T_i} = r_{t,T_i} - \frac{\ln\left(\frac{Fwd_t(0,T_i)}{S_{0,t}}\right)}{T_i} \quad (3.30)$$

Etant en possession des données de marché des forward sur actions, la calibration de la structure par terme du taux de dividende implicite est possible. Nous ne considérons pas contrairement à GUIDOLIN et GONCALVES [2006] la nullité des taux de dividendes dans la calibration de la nappe de volatilité action (SX5E).

La représentation de l'historique de la structure par terme des *forward spot* qui permet de déduire l'historique de la structure par terme des taux de dividende est donnée ci-après :

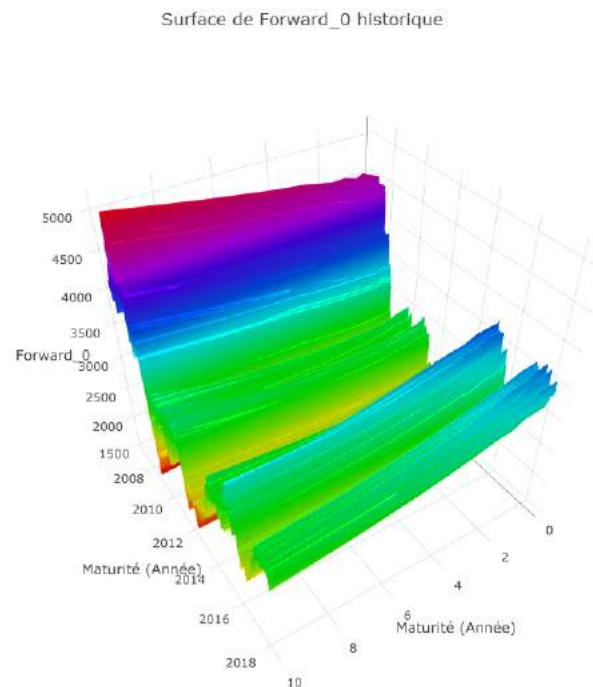


FIGURE 3.11 – Historique de la structure par terme des forward spot

Il est alors possible de déterminer une modélisation de la structure par terme des taux de dividende implicite.

La structure par terme des dividendes implicites

3.3.5 Analyse de l'historique de la structure par terme des taux de dividende

Pour savoir comment modéliser la structure par terme des taux de dividende, l'historique de celle-ci doit être étudié :

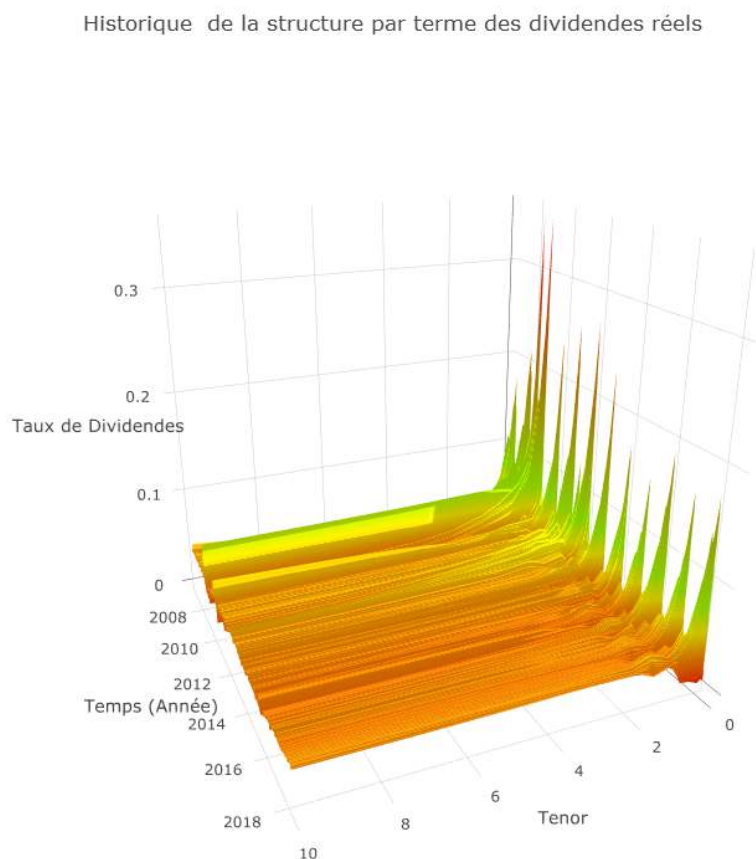


FIGURE 3.12 – Historique de la structure par terme des taux de dividende réelle

Après étude du *fitting* de la STT des dividendes (STTD) par pas de temps avec plusieurs modèles, le modèle sélectionné est la transformation logit du modèle NSS de façon à garantir la positivité de la structure par terme des taux de dividende. La représentation de plusieurs STTD sur plusieurs pas de temps affirment ce choix de modélisation :

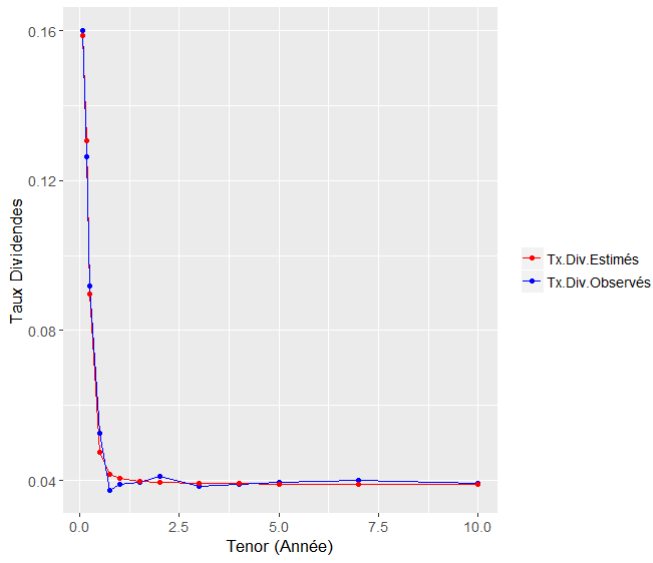


FIGURE 3.13 – STTD NSS logité VS STTD OBS. (1)

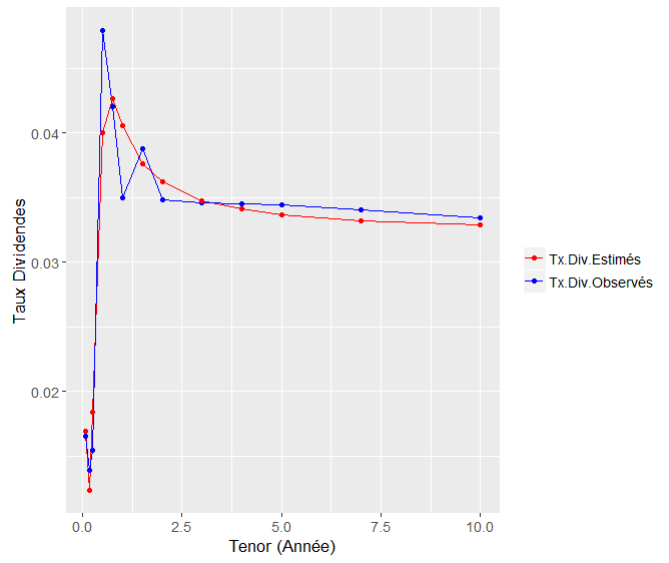


FIGURE 3.14 – STTD NSS logité VS STTD OBS. (2)

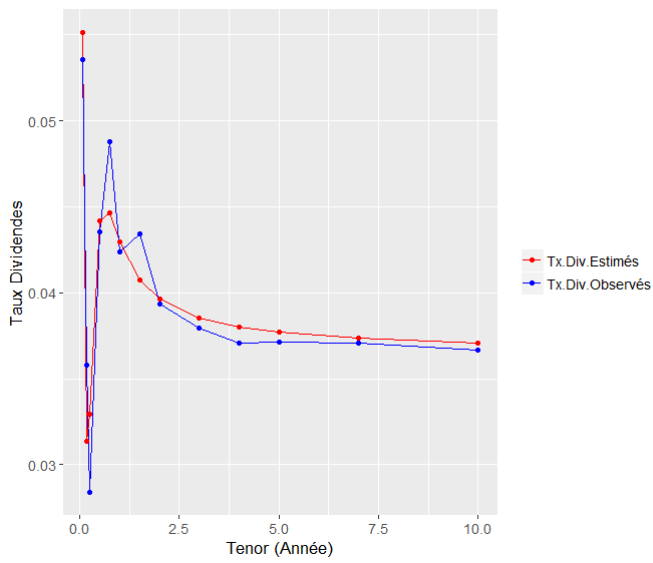


FIGURE 3.15 – STTD NSS logité VS STTD OBS. (3)

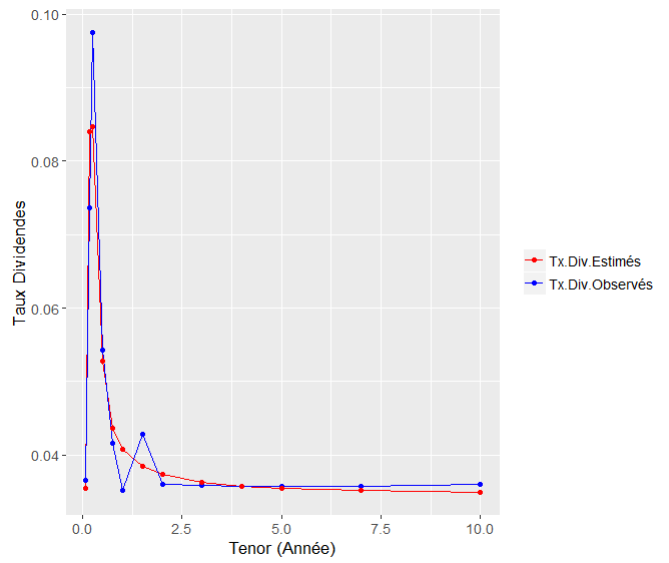


FIGURE 3.16 – STTD NSS logité VS STTD OBS. (4)

3.3.6 Le modèle de taux de dividende

La structure par terme de taux de dividende est modélisée par le logit du modèle de Nelson-Siegel-Svensson (NSS) caractérisée par l'équation :

$$\begin{aligned} \text{logit}(R_t^{NSS}(\tau)) = & \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \left(\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_1})}{\frac{\tau}{\lambda_1}} \right) + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_1})}{\frac{\tau}{\lambda_1}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_1}) \right) \\ & + \beta_{3,t} \left(\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_2})}{\frac{\tau}{\lambda_2}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda_2}) \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Avec :

- β_0 représente le facteur de niveau correspondant au taux long.
- β_1 représente le facteur de rotation correspondant à l'écart entre le taux court et le taux long (spread).
- β_2 représente le facteur de courbure.
- β_3 représente le facteur améliorant la partie courte de la courbe.
- λ_1 représente le 1^{er} paramètre d'échelle.
- λ_2 représente le 2^{ème} paramètre d'échelle.

Les paramètres λ_1 et λ_2 ont été paramétrés simultanément de façon à minimiser l'écart quadratique moyen totale entre les taux d'intérêt réels historiques et ceux estimés par le modèle. L'optimisation donne alors des paramètres de λ_1 et λ_2 permettant de reproduire de manière presque parfaite la STTD telles que les graphes du paragraphe précédent :

- $\lambda_1 = 9.730786$
- $\lambda_2 = 9.731445$

Il est alors possible de reconstruire les séries chronologiques des β_i .

3.3.7 Reconstruction des séries chronologiques

La reconstruction des séries chronologiques des régresseurs est illustrée ci-dessous :

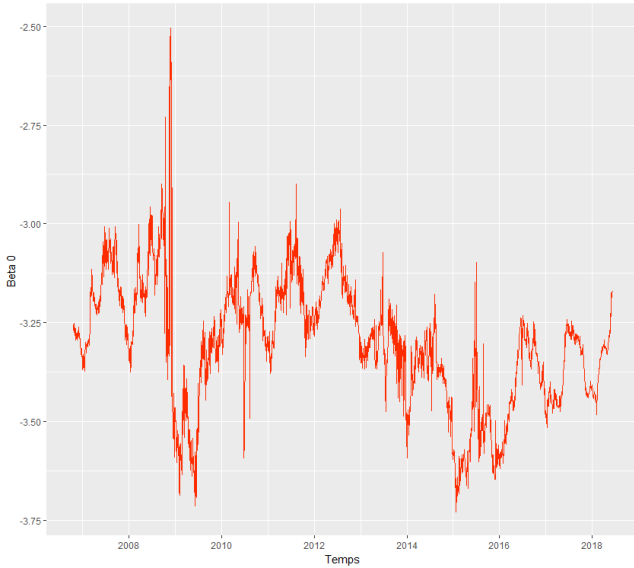


FIGURE 3.17 – Serie chronologie Beta0
STTD NSS logité

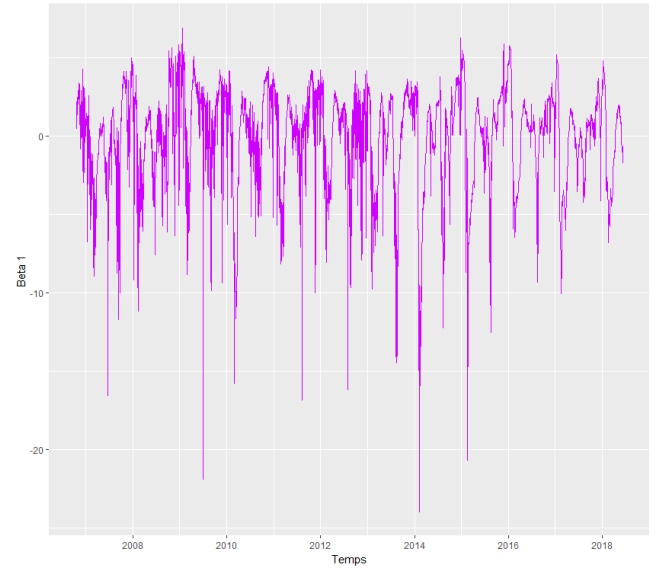


FIGURE 3.18 – Serie chronologie Beta1
STTD NSS logité

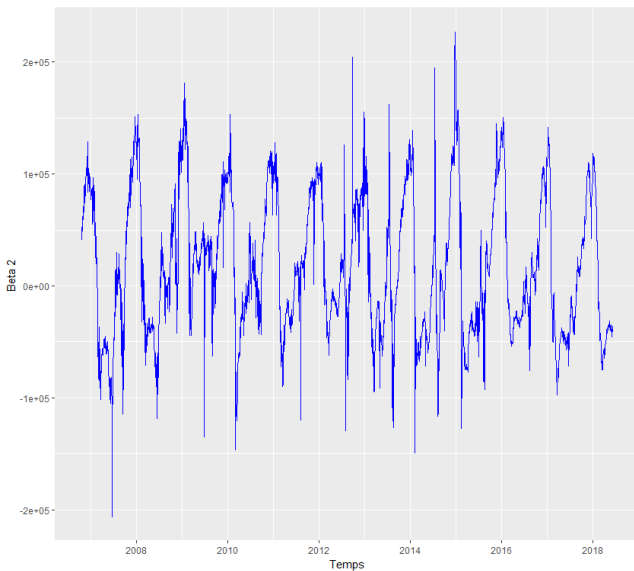


FIGURE 3.19 – Serie chronologie Beta2
STTD NSS logité

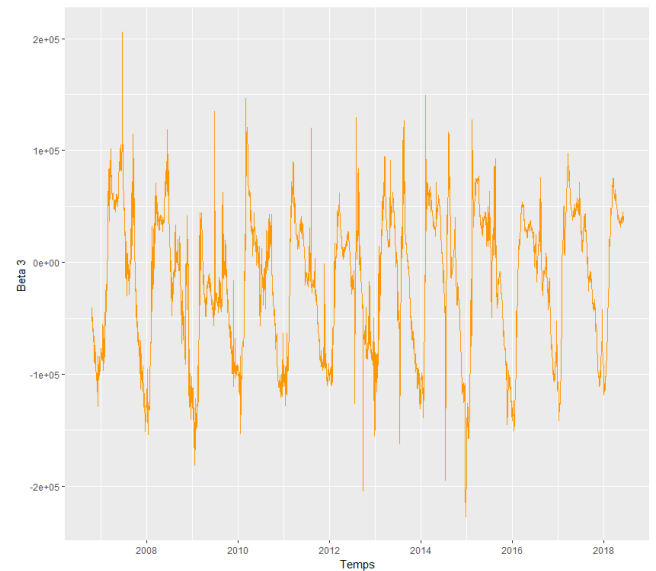


FIGURE 3.20 – Serie chronologie Beta3
STTD NSS logité

3.3.8 Reconstruction de l'historique de la STTI par NSS logité

La reconstruction de l'historique de la structure par terme des taux de dividende lissée par le modèle de NSS logité donne la surface suivante :

Historique de la structure par terme des dividendes par NSS logité

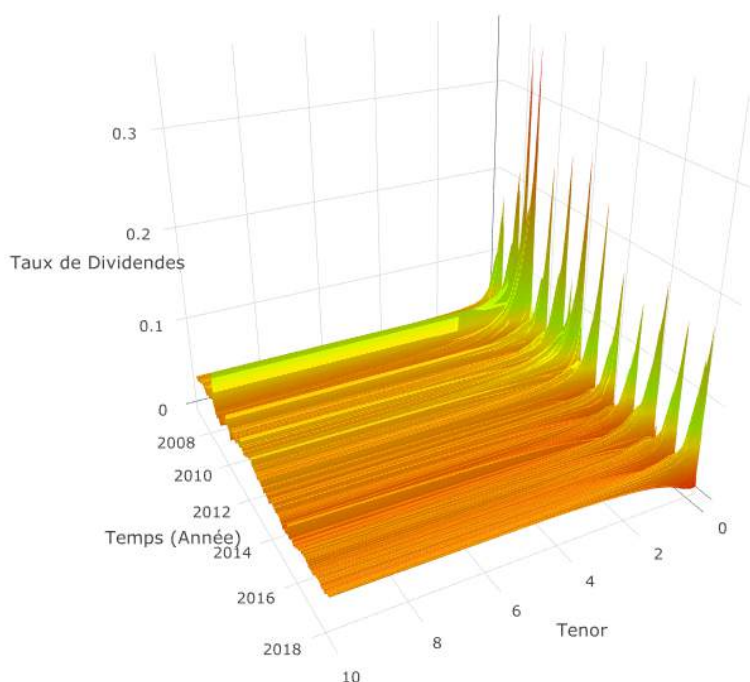


FIGURE 3.21 – Historique de la structure par terme des taux de dividende par le modèle de NSS logité

La surface de structure par terme des taux de dividende historique est répliquée de manière efficace avec le modèle de NSS logité comparée à la réelle.

La structure par terme des taux de dividende étant modélisée, l'étude de la nappe de volatilité implicite des dérivés action est reprise ci-après.

Modèle retenu

La sélection du modèle final s'effectue avec une méthode exhaustive pour définir une spécification inter-temporelle (2975 données ($N=2975$)) cohérente. En pratique, pour chaque jeu de données journalières, 1023 spécifications (modèles différents) sont testées

$$\left(\sum_{k=1}^{10} C_n^k = 2^{10} - 1 = 1023 \right).$$

Le problème s'y prêtant (données spatiales à t fixé), la notion de validation croisée est introduite dans le choix de spécification du modèle, à savoir la présence conjointe d'indicateurs explicatifs et prédictifs. Pour éviter le biais de sélection lié au choix des points à prédire, ceux-ci sont tirés aléatoirement selon l'importance des poids des vega. Il s'agit tout simplement de tirer au hasard des volatilités en fixant leur probabilité d'être tiré au sort selon leur vega (une volatilité associée à un vega élevé aura une probabilité d'être tiré au sort plus élevée).

De cette façon, le modèle sera calibré et plus fin davantage sur les volatilités dont les variations de prix sont les plus grandes. On cherche à être meilleur sur les volatilités engendrant des écarts de prix plus élevés. Pour cela, par pas de temps, la base est séparée en une base d'apprentissage constitué de 72 % des volatilités et d'une base de test constitué de 28 % des volatilités (36 points à prédire tirés aléatoirement sur les 10 *moneyness* ($p=10$)). La structure des poids vega étant d'une date à une autre du même ordre de grandeur, le tirage des volatilités pour chaque pas se fait de la même manière : les volatilités extraites selon le *strike* ou le *tenor* sont les mêmes par pas. Ainsi, l'étude permet d'être homogène pour chaque pas et permet la comparaison des modèles testés pour chaque base d'apprentissage. Ainsi, la procédure de sélection est effectuée par rééchantillonnage : répétée K fois. Cela permet de tester les modèles sur différentes base d'apprentissage et de test afin d'établir un modèle robuste et plus stable.

Formalisation de la procédure de calibrage

Soit $\{E_k\}$, l'ensemble des points sélectionnés pour l'estimation par moindres carrés.
 Soit $\{E\}$, l'ensemble des points à disposition pour l'étude.
 Soit $\{V_i\}$, l'ensemble des variables spécifiant le modèle i .

Fonctions objectifs de calibrage

Les fonctions objectifs de calibrage suivantes sont utilisées à la fois sur la base d'apprentissage et sur la base de test. En effet, le modèle doit être équilibré et performant tant sur la base d'apprentissage que sur la base de test.

$$Moy\ MSE_{i,K} = Moy\ Err_{i,K} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N MSE_{i,t,(\{E_K\},\{V_i\})} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Err_{i,t,(\{E_K\},\{V_i\})}$$

$$Tail\ VaR\ 0.95\ MSE_{i,K} = \mathbb{E}(-MSE | MSE < -VaR_{0.95}(MSE))_{i,K}$$

$$Nb\ Var_i = Card\ \{V_i\}$$

Avec :

$$Err_{i,t,K} = (100[e^{Y_{t,\{E \setminus E_K\}}} - e^{X_{t,\{V_i\}}\beta_{t,\{E_K\}}}]^T W (100[e^{Y_{t,\{E \setminus E_K\}}} - e^{X_{t,\{V_i\}}\beta_{t,\{E_K\}}}]])$$

$$VaR_{0.95}(MSE) = F^{-1}(0.95) = inf(x : F(x) > 0.95)$$

Indicateurs indicatifs

L'indicateur $Moy\ MSE_{i,K}$ représente la moyenne des MSE soit la moyenne de l'erreur quadratique de prédiction pondérée (par les Vega), sur tous les jeux de données passés

(2975) de la $i^{\text{ème}}$ spécification testée (rappelons qu'il y en a 1023 différentes), pour l'ensemble $\{E_k\}$ des données de calibrage sélectionnées lors du $K^{\text{ème}}$ tirage aléatoire.

L'indicateur *Tail VaR 0.95 MSE_{i,K}* représente la Tail VaR qui est une mesure de risque qui décrit la survenance des pertes sous réserve que le seuil soit franchi et il est calculé sur tous les jeux de données passés, de la $i^{\text{ème}}$ spécification, pour l'ensemble $\{E_k\}$ des données de calibrage sélectionnées lors du $K^{\text{ème}}$ tirage aléatoire. La Tail VaR est pertinente au lieu de la VaR car dans les cas où pour certains pas de temps, le modèle choisi serait moins bon, on aurait un modèle moyen global pour tous les pas de temps. Or, ce n'est pas l'intérêt ici, nous voulons que le modèle soit bon sur tous les pas de temps mais dans le cas où il est moins bon, nous voulons qu'il soit le moins mauvais par rapport à d'autres modèles. Ainsi, la focalisation se fait sur un certain seuil de performance et d'erreur.

Comme dans le cas où un assureur voudrait calculer sa probabilité de faire faillite à partir d'un certain seuil : la Tail VaR donne à la fois une estimation de la probabilité de ruine et étudie également la sévérité des pertes une fois le seuil franchi en tenant compte de la queue de la distribution.

L'indicateur *NbVar_i* renvoie le nombre de degrés de liberté de la $i^{\text{ème}}$ spécification.

En synthèse, les deux premiers indicateurs chacun appliqués sur la base d'apprentissage et sur la base de test (4 indicateurs) ainsi que l'indicateur "Nb Var" sont utilisés pour l'optimisation multi-objectif. Ensuite, en fonction du nombre de variables présents dans les modèles, cela permet d'orienter la décision finale en incarnant respectivement la robustesse statistique et la parcimonie.

Programme d'optimisation multi-objectif

$$(PMO)_K = \begin{cases} \min_{x=(x_1, \dots, x_{10})} F_K(x) = (f_{1,K}(x), \dots, f_{5,K}(x)) \\ x_{j=1, \dots, 10} = \begin{cases} 1 & \text{si selection} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad (3.32)$$

Choix de modèle

La dominance de pareto ($y \succ x \Leftrightarrow F(x) \leq F(y), \exists i = 1, \dots, 5 \text{ tq } f_i(x) < f_i(y)$), permet d'établir le front 1, trié sur la moyenne des erreurs de prédiction. Cette procédure d'optimisation multi-objectif donne dès lors un ensemble de spécifications possibles (163 dans l'exemple en annexe, issu d'un tirage aléatoire des points à prédire).

Dans l'étude, 10 tirages aléatoires ont été effectués (K=10), et les modèles qui ressortent, même très paramétrés ne semblent pas en surapprentissage. Toutefois, dans un souci de parcimonie et de robustesse, l'idéal est un modèle le moins paramétré possible. En effet, dans le cadre de l'intégration du modèle dans le VAR, un nombre limité de paramètres et qui plus est relatif à des régresseurs sans signification économique particulière est fortement conseillé. Par ailleurs, un modèle intégralement significatif est un bon point

mais qui peut s'avérer négatif si cela est trop souvent constaté (le pouvoir explicatif est quelque peu saturé et ne prend sans doute pas en compte certaines formes particulières).

Le lecteur trouvera en annexe les tableaux récapitulatifs de l'étude des résultats dans leur intégralité classés par ordre croissant en fonction de la métrique MSE.test (prédiction) : ces tableaux indiquent que les modèles à 7, 8 et 9 paramètres apparaissent systématiquement dans le front 1 des 10 tirages. Objectivement, ces modèles ne peuvent être rejetés que sur des considérations liées à la parcimonie. Les modèles à 5 et 6 paramètres sont intéressants également car moins paramétrés et apparaissant plusieurs fois dans le front 1 (respectivement 14 et 17 fois sur les 10 tirages).

Le jugement d'expert qui prédomine à ce stade (avant intégration dans le VAR) est la parcimonie. A ce titre, le modèle retenu est celui à 6 variables (identifiants : 138, 66, 25, 43, 122, 77, 93, 55, 108, 6) :

$$\begin{cases} \text{logit}(\sigma_{i,t}(M, T)) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}M_{i,t} + \beta_{2,t}T_i + \beta_{3,t}M_{i,t}T_i + \beta_{4,t}T_i^2 + \beta_{5,t}T_i^3 + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \end{cases} \quad (3.33)$$

Ce résultat est d'autant plus intéressant qu'il met à mal le modèle classique à 5 paramètres (qui ne ressort jamais dans le front 1 au sens des critères d'optimisation choisis) proposé dans la littérature (à nuancer toutefois à cause de l'hypothèse de nullité des taux de dividendes implicites) :

$$\begin{cases} \text{logit}(\sigma_{i,t}(M, T)) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}M_{i,t} + \beta_{2,t}M_{i,t}^2 + \beta_{3,t}T_i + \beta_{4,t}M_{i,t}T_i + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \end{cases} \quad (3.34)$$

Reconstruction des séries chronologiques

La reconstruction des séries chronologiques des régresseurs est illustrée ci-dessous :

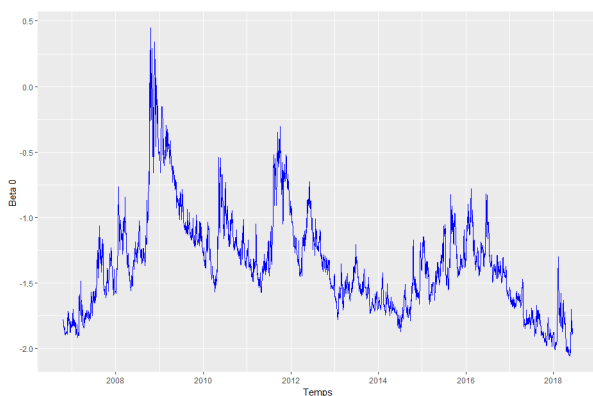


FIGURE 3.22 – Serie chronologie Beta0 Call

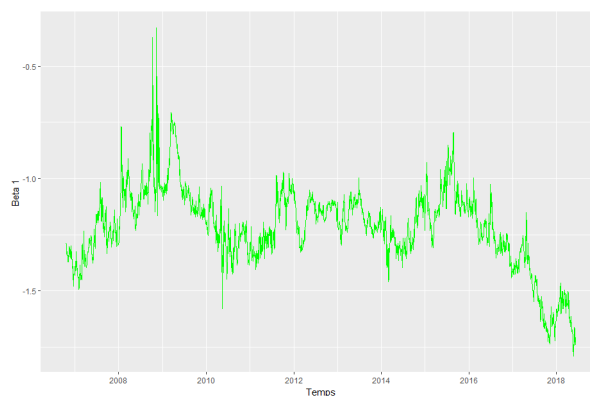


FIGURE 3.23 – Serie chronologie Beta1 Call

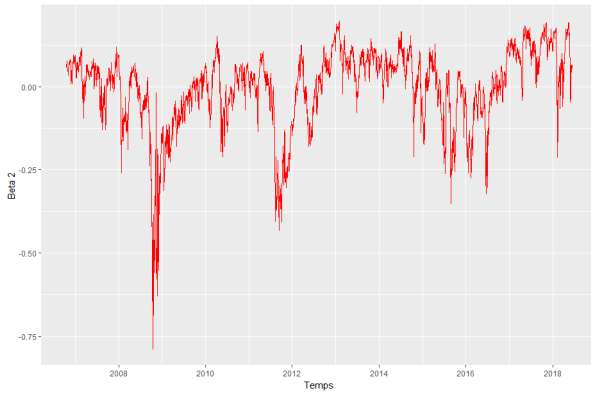


FIGURE 3.24 – Serie chronologie Beta2 Call

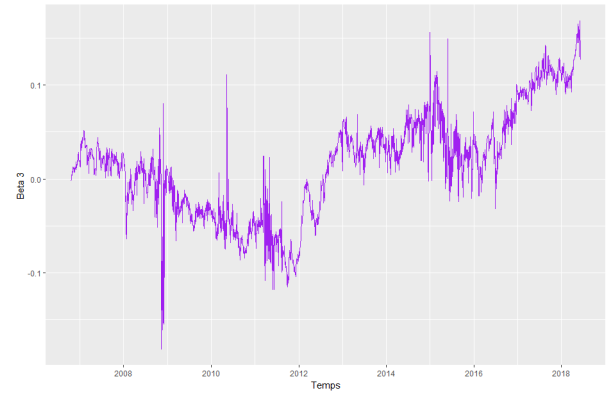


FIGURE 3.25 – Serie chronologie Beta3 Call

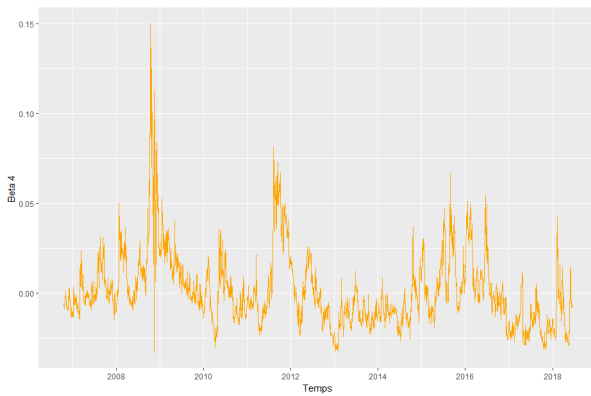


FIGURE 3.26 – Serie chronologie Beta4 Call

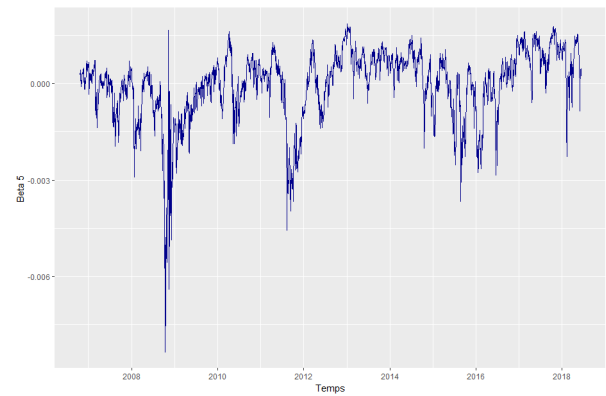


FIGURE 3.27 – Serie chronologie Beta5 Call

Ces graphiques montrent la présence de certains points quelque peu atypiques et à investiguer, notamment sur la période du 23/10/2008 au 18/11/2008 (cela peut s'expliquer en partie par la crise de 2008) où l'on remarque des variations élevées (β_0 par exemple). En effet, le lundi 15 septembre est annoncé comme le début de la crise bancaire (Lehman Brothers). Pour cela, l'étude de la qualité du *fitting* des surfaces de volatilité implicite des *call* semble indispensable pour valider le modèle choisi à 6 variables. Nous décidons de représenter quatre de ces surfaces de volatilité implicite avec les surfaces de prix associées sur la période du 23/10/2008 au 18/11/2008 où le *strike* est exprimé en unité de S_0 :

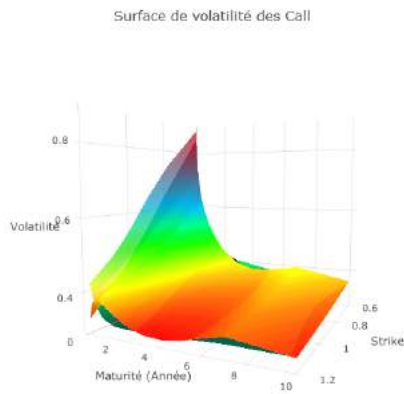


FIGURE 3.28 – Surface 23/10/2008

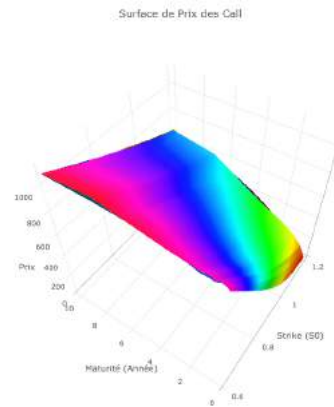


FIGURE 3.29 – Surface Prix 23/10/2008

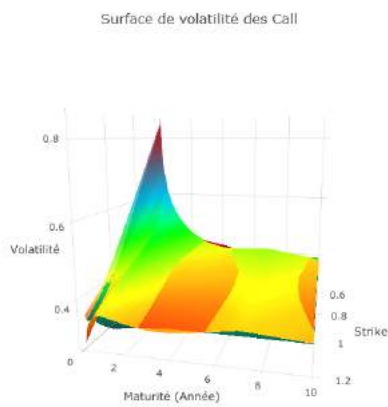


FIGURE 3.30 – Surface 03/11/2008

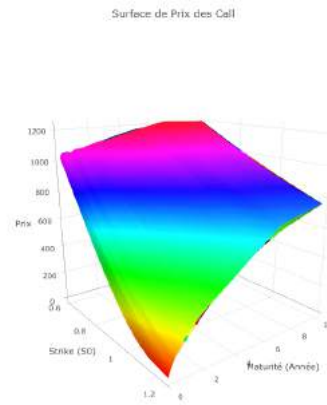


FIGURE 3.31 – Surface 03/11/2008

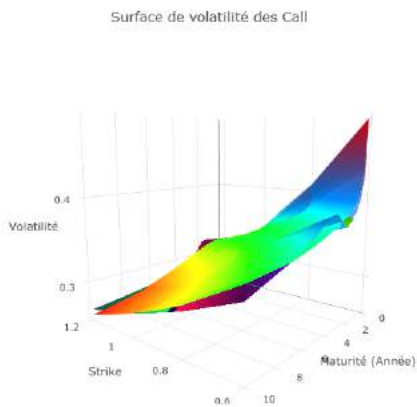


FIGURE 3.32 – Surface 11/11/2008

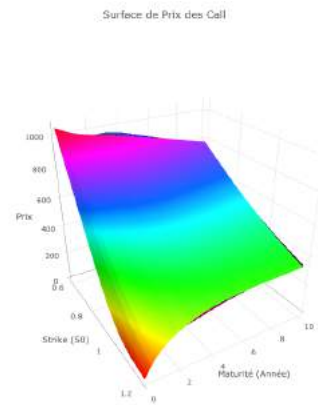


FIGURE 3.33 – Surface 11/11/2008

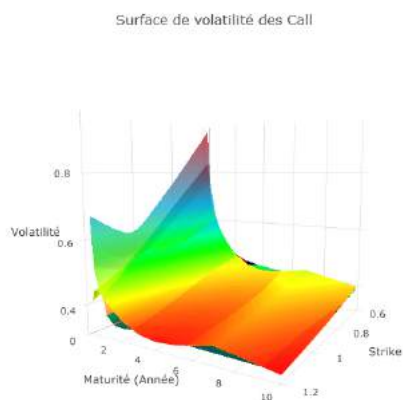


FIGURE 3.34 – Surface 18/11/2008

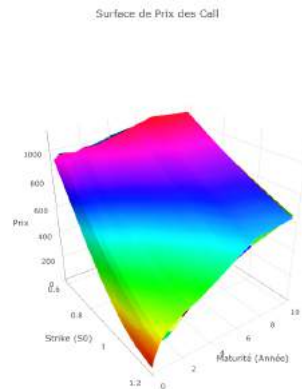


FIGURE 3.35 – Surface 18/11/2008

D'après les surfaces de volatilités, le *fitting* est de bonne qualité pour les périodes dont les points semblent atypiques. Dans l'étude, la réplique des prix est primordiale et les surfaces de *fitting* des prix sont remarquables ici.

Validations des régresseurs et du modèle linéaire

R^2 Ajusté		Test Student (significativité individuelle)	
Moyenne(R^2 Ajusté)	96,6 %	Proportion Beta0 significatif	99,8 %
Min(R^2 Ajusté)	68,0 %	Proportion Beta1 significatif	100,0 %
Max(R^2 Ajusté)	99,5 %	Proportion Beta2 significatif	91,0 %
Quantile.0.95(R^2 Ajusté)	98,9 %	Proportion Beta3 significatif	81,2 %
		Proportion Beta4 significatif	87,3 %
		Proportion Beta5 significatif	84,8 %

TABLE 3.1 – Tableaux récapitulatifs de validation du modèle [Equity] (1)

Test de Fisher (significativité globale)	p-value = 2,2e-16 (accepté pour tous les pas de temps)
Test de normalité des résidus	Rejeté (100 %) : 7,063719e-06 (p-value moyenne)
Test de Box-Pierce / Ljung-Box (Bruit Blanc)	Accepté pour 73 % des pas de temps
Test d'homoscédasticité des résidus	Rejeté pour 93 % des pas de temps

TABLE 3.2 – Tableau récapitulatif de validation du modèle [Equity] (2)

Erreur globale pour les prix des options (n = 386750)		
Erreur pondéré/Modèle pondéré	RMSE	0,3422 €
	TVaR.0.95.RMSE	1,5729 €
Erreur normal/WLS	RMSE	3,8901 €
	TVaR.0.95.RMSE	15,9791 €
Erreur normal/OLS	RMSE	6,5851 €
	TVaR.0.95.RMSE	29,7270 €

TABLE 3.3 – Tableau récapitulatif de validation du modèle [Equity] (3)

Chacun des régresseurs est hautement significatif, le R^2 ajusté quant à lui est très élevé, il y a donc une explication importante des volatilités par les variables mises en cause. Cependant, les résidus du modèle linéaire ne sont globalement ni gaussiens, ni homoscédastiques. En ce qui concerne l'erreur globale pondéré par les poids de vega sur tout l'historique, le modèle donne de très bons résultats avec un écart moyen de 0,34 € entre les prix estimés par le modèle et ceux du marché, et les 5% pires écarts de prix sont en moyenne de 1,57 €. Une remarque intéressante peut être faite lorsqu'on compare l'erreur des modèles calibrés OLS et WLS, le modèle calibré WLS donne de meilleurs résultats : cela valide donc l'utilisation des vega dans la calibration du modèle paramétrique. En ce qui concerne le modèle linéaire, dans la mesure où l'on cherche à estimer la quantité $E(Y|X\beta)$, puisque les résidus sont des bruits blancs, le modèle linéaire est validé en partie.

On obtient alors les surfaces de volatilité et de prix prédites suivantes VS les surfaces de volatilité et de prix observées pour deux dates choisies aléatoirement où le *strike* est exprimé en unité de S_0 :

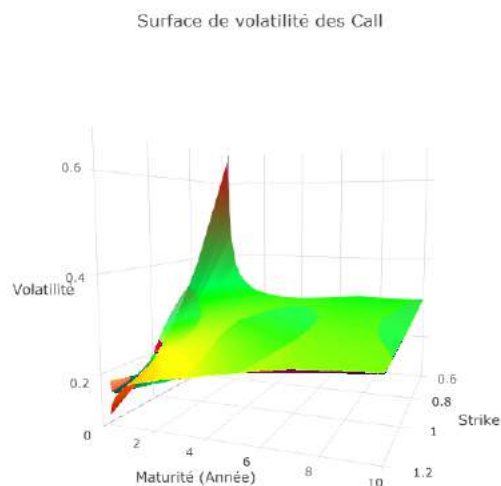


FIGURE 3.36 – Fitting 03/08/2007

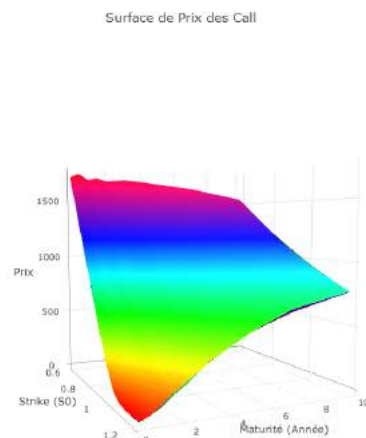


FIGURE 3.37 – Fitting Prix 03/08/2007

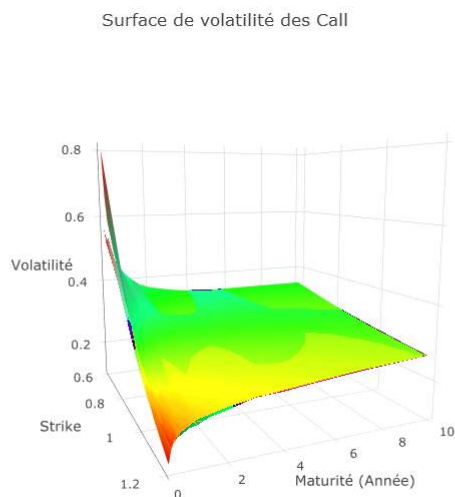


FIGURE 3.38 – Fitting 06/08/2010

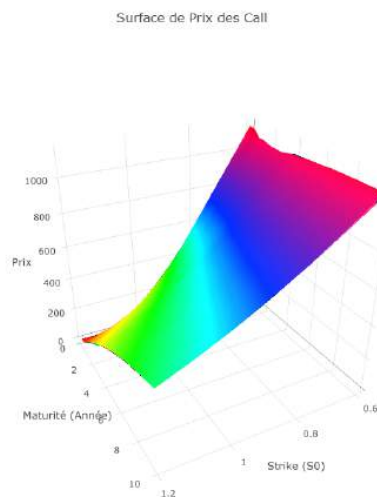


FIGURE 3.39 – Fitting Prix 06/08/2010

A ce stade, la validation du modèle choisi est sans appel. Le *fitting* de la nappe de volatilité implicite pour chaque pas de temps est de très bonne qualité même si on peut voir par exemple sur la figure précédente du 06/08/2010 une volatilité observée de 80 % contre une volatilité prédite d'un peu plus de 50 %. Cependant, dans notre modélisation, la calibration du modèle par moindres carrés ordinaires avec pondération sur les vega est responsable de ce décalage. Ce décalage au niveau du *fitting* de la surface de volatilité

permet d'être meilleur au niveau de la réplique des prix et est remarquable ici.

Au regard du vega associé à ce point qui est d'un poids de très faible envergure comparé aux autres points prédits de poids de vega beaucoup plus important, il est tout à fait acceptable et normal d'apercevoir ce type de *fitting*. D'ailleurs, ce vega est associé à un *strike* de 0.6 % de S_0 soit un *strike* très ITM avec une maturité d'un mois de l'option, cela explique donc son poids très faible (en vega) dans la calibration du modèle (cf. le graphique de la surface des vega en fonction du *strike* et de la maturité).

En ce qui concerne la figure du 03/08/2007, le même argument peut être utilisé pour le point prédit de *strike* 1.2 % de S_0 donc très OTM et pour une maturité d'un mois de l'option. Encore une fois, cette légère erreur au niveau des volatilités permet d'être meilleur sur les prix dans la calibration.

Pour la suite, nous continuons notre raisonnement et cherchons à reproduire les nappes/cubes de volatilité des produits optionnelles de taux pour les *cap* (nappe) et *swaption* (cube).

Calibration des nappes/cubes de volatilité des dérivés de taux

Contexte de l'étude

Le contexte de l'étude suivante est le même que la section précédente. Cependant, nous ne travaillons plus avec des options sur action mais sur taux soient des *cap*, *floor* et *swaption*. Dans cette optique, la présente étude porte donc sur la projection de la nappe de volatilité implicite ou cube de volatilité implicite par une approche économétrique linéaire sur les paramètres et le raisonnement théorique et pratique autour du recalibrage de notre modèle de *pricing*.

Cadre de travail

Comme dans la section précédente, le modèle doit s'inscrire dans un cadre économétrique linéaire sur les paramètres. Cependant, contrairement à la section précédente, il n'existe pas d'étude à ce jour qui propose un cadre économétrique pour effectuer un lissage de la nappe (ou cube) de la volatilité implicite sur les produits dérivés de taux. Ainsi, nous allons très fortement nous inspirer de l'étude de la calibration de la nappe de volatilité implicite des actions en l'adaptant à notre cas. Théoriquement, nous travaillons en dimension deux avec les *cap* et *floor* mais en dimension trois lorsqu'il s'agit de *swaption* puisque nous ajoutons la dimension du *tenor* des options sur taux. On ne parlera donc plus de nappe de volatilité mais plutôt de cube de volatilité (*Maturité*, *Tenor* et *Moneyness*) pour les *swaption*.

D'abord, nous disposons en entrée d'une matrice de volatilité de *cap/floor* et de *swaption* extraites de Bloomberg. Cependant, nous devons choisir de nous placer dans un contexte assez particulier de façon à pouvoir gérer les taux négatifs. En effet, à cause des taux négatifs, on ne peut pas travailler directement avec les formules de *pricing* classique de Black 76 pour les *cap*, *floor* et *swaption*. En effet, dans un modèle de Black, on considère que les taux sont log-normaux (impossibilité de traiter des taux négatifs).

Pour cela, les formules de Black 76 classiques sont adaptés en ajoutant un coefficient dit "discount displaced factor" ou facteur de déplacement afin de prendre en considération cet effet. Néanmoins, si on souhaite travailler avec ces formules intégrant ce facteur de déplacement, il est nécessaire de le calibrer. Ce n'est pas l'argument principal qui nous pousse à rejeter ce modèle dans notre modélisation mais davantage l'aspect de volume de données : dans notre modèle, nous possédons déjà un certain nombre de variables et travailler avec le modèle de Black 76 *shifté* nous force à travailler avec des prix et cela nous pousserait à devoir projeter des prix et complexifier notre modèle. Ainsi, pour éviter de complexifier le modèle et de calibrer ce facteur de déplacement, un modèle de taux avec une dynamique normale sera exploitée.

C'est pourquoi, le modèle de Bachelier considérant les taux comme normaux sera utilisé par la suite.

Le modèle de Bachelier (ou modèle normal)

On se place dans le cadre du modèle de Bachelier (ou modèle normal). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet.

Nous considérons un ensemble de date $\{T_0, T_1, \dots, T_{n-1}\}$. Par défaut, T_0 correspond à la première date de fixation. Nous nous basons sur les notations déjà utilisées dans les chapitres précédents auxquelles nous ajoutons :

- τ_i la mesure du temps séparant, T_{i-1} et T_i , $i > 0$.
- $F_i(t)$ le taux Libor forward pour la période $[T_{i-1}, T_i]$, $F_i(t) := F(t, T_{i-1}, T_i)$.
- $\sigma_{i,N}(t)$ la volatilité du processus déplacé $F_i(t)$.

Le modèle de Bachelier ou modèle normal suppose que les taux forward F suivent une distribution normale, ainsi nous avons :

$$dF_i(t) = \sigma_{i,N}(t)dW_i^{T_i}(t) \quad (3.35)$$

Avec :

- $\sigma_{i,N}(t)$ la volatilité du processus déplacé ou volatilité normale sur l'intervalle $[0, T_i]$ avec $\sigma_{i,N}(t) > 0$ et de carré intégrable.
- $W_i^{T_i}$ est un $(\mathbb{F}, \mathbb{Q}^{T_i})$ mouvement brownien avec $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_{T_i})$ la filtration associée au mouvement brownien $W_i^{T_i}$.

La solution de cette équation donne :

$$F_i(t) = F_i(0) + \int_0^t \sigma_{i,N}(s)dW(s) \text{ soit } F_i(t) \sim \mathcal{N}(F_i(0), \sigma_{i,N}^2 t) \text{ avec } \sigma_{i,N}(s) = \sigma_{i,N}, s \in [0, T_i] \quad (3.36)$$

Le prix par la formule de Bachelier du $i^{\text{ème}}$ caplet V_{caplet_i} de maturité T_i , de nominal $N = 1$ et de strike K en 0, est donné par la formule suivante :

$$V_{\text{caplet}_i}^{BACH}(0) = P(0, T_{i+1})(v_i d_i N(d_i) + v_i N'(d_i)) \quad (3.37)$$

Avec :

- $d_i = \frac{F_i(0) - K}{v_i}$
- $v_i = \sigma_{i,N} \sqrt{T_i}$

Le lecteur pourra se référer à la démonstration faite en annexe.

Notons que $\sigma_{i,N}$ est la volatilité normale des *caplet*. Pour les obtenir, nous disposons seulement des volatilités de *cap* et *floor* sur le marché donc il faudra les déduire via la méthode de *stripping* que nous décrirons ultérieurement.

Lorsqu'on est ATM, la formule précédente du prix d'un *caplet* (vrai aussi pour un *floorlet*) se simplifie et devient :

$$V_{\text{caplet}_i}^{BACH, ATM}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P(0, T_{i+1}) v_i \quad (3.38)$$

Un *cap* étant une séquence de *caplet* décalés dans le temps, on obtient via le résultat précédent : $\forall t \leq T_i$

$$V_{\text{Cap}_i}^{BACH}(t, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} V_{\text{caplet}_{i-1}}^{BACH}(t, K, \sigma_{\alpha, \beta}) \quad (3.39)$$

où :

- α est la date d'expiration du 1^{er} *caplet*.
- β est la date de réalisation du dernier *caplet*.
- $\sigma_{\alpha,\beta,N}$ est la volatilité normale auquel est côté le *cap* du marché : $\sigma_{\alpha,\beta,N} = \sqrt{T_i}\sigma_{i,N}$ où $\sigma_{i,N}$ est la volatilité normale des *caplet*.

De manière analogue, un *floor* étant une séquence de *floorlet* décalé dans le temps, on obtient via le résultat précédent : $\forall t \leq T_i$

$$V_{Floor_i}^{BACH}(t, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} V_{floorlet_{i-1}}^{BACH}(t, K, \sigma_{\alpha,\beta,N}) \quad (3.40)$$

où :

- α est la date d'expiration du 1^{er} *floorlet*.
- β est la date de réalisation du dernier *floorlet*.
- $\sigma_{\alpha,\beta,N}$ est la volatilité normale auquel est côté le *floor* du marché telle que $\sigma_{\alpha,\beta,N} = \sqrt{T_i}\sigma_{i,N}$ où $\sigma_{i,N}$ est la volatilité normale des *floorlet*.

Pour ce qui concerne le pricing des *swaption*, on se place dans le cadre du modèle de Bachelier (ou modèle normal). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet. Nous supposons également que le taux swap de maturité T_α et de tenor $T_\beta - T_\alpha$ suit une distribution normale d'écart-type $\sigma_{\alpha,\beta,N}$ ($S_{\alpha,\beta} \sim \mathcal{N}(S_{\alpha,\beta}(0), \sigma_{\alpha,\beta,N}^2 T_\alpha)$) et nous nous plaçons sous la mesure $\mathbb{Q}^{\alpha,\beta}$ dont le numéraire est : $C_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i)$.

Dans cet univers $(S_{\alpha,\beta})_{t>0}$ est une martingale.

Nous travaillons alors avec le modèle suivant :

$$dS_{\alpha,\beta}(t) = \sigma_{\alpha,\beta,N}(t)dW^{\alpha,\beta}(t), \quad t \leq T_\alpha \quad (3.41)$$

Avec :

- $\sigma_{\alpha,\beta,N}$ la volatilité normale du taux swap.
- $W^{\alpha,\beta}$ est un $(\mathbb{F}, \mathbb{Q}^{\alpha,\beta})$ mouvement brownien avec $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_{\alpha,\beta})$ la filtration associée au mouvement brownien $W^{\alpha,\beta}$.

La solution de cette équation donne :

$$S_{\alpha,\beta}(t) = S_{\alpha,\beta}(0) + \int_0^t \sigma_{\alpha,\beta,N}(s)dW^{\alpha,\beta}(s) \text{ soit } S_{\alpha,\beta}(t) \sim \mathcal{N}(S_{\alpha,\beta}(0), \sigma_{\alpha,\beta,N}^2 t) \quad (3.42)$$

avec $\sigma_{\alpha,\beta,N}(s) = \sigma_{\alpha,\beta,N}$, $s \leq T_\alpha$.

Le prix de Bachelier pour une *swaption* payeuse de maturité T_α , de tenor $T_\beta - T_\alpha$, de strike K et de nominal $N = 1$ en 0 est donné par la formule suivante :

$$PS_P^{BACH}(0, K) = C_{\alpha,\beta}(0)(v_{\alpha,\beta}d_{\alpha,\beta}N(d_{\alpha,\beta}) + v_{\alpha,\beta}N'(d_{\alpha,\beta})) \quad (3.43)$$

Et pour une *swaption* receveuse, par analogie, on obtient :

$$PS_R^{BACH}(0, K) = C_{\alpha,\beta}(0)(-v_{\alpha,\beta}d_{\alpha,\beta}N(-d_{\alpha,\beta}) + v_{\alpha,\beta}N'(-d_{\alpha,\beta})) \quad (3.44)$$

où :

$$\begin{aligned} d_{\alpha,\beta} &= \frac{S_{\alpha,\beta}(0) - K}{v_{\alpha,\beta}} \\ v_{\alpha,\beta} &= \sigma_{\alpha,\beta,N} \sqrt{T_\alpha} \end{aligned}$$

$\sigma_{\alpha,\beta,N}$ est la volatilité normale de la *swaption* (payeuse ou receveuse) du marché de maturité T_α et de tenor $T_\beta - T_\alpha$.

Le lecteur pourra se référer à l'annexe pour la démonstration.

A la monnaie (ATM), le prix de Bachelier pour cette *swaption* (payeuse et receveuse) en 0 devient :

$$PS_{ATM}^{BACH}(0) = \frac{C_{\alpha,\beta}(0)v_{\alpha,\beta}}{\sqrt{2\pi}} \quad (3.45)$$

La dernière expression permet de retrouver la volatilité implicite normale cotée sur le marché :

$$\sigma_{\alpha,\beta,N} = \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{T_\alpha}} PS_{ATM}^{BACH}(0)}{C_{\alpha,\beta}(0)} \quad (3.46)$$

3.3.9 Spécification du modèle paramétrique sur les volatilités des cap

Comme pour le lissage de la nappe de volatilité pour les produits dérivés action, le modèle suivant doit s'inscrire dans un cadre économétrique linéaire sur les paramètres. Nous proposons un cadre économétrique pour effectuer un lissage de la nappe de volatilité des *cap*.

Par analogie avec la nappe de volatilité implicite des instruments optionnels actions, nous définissons T et M comme respectivement la maturité restante ou *tenor* de l'option et la « moneyness » pour le produit dérivé de taux *cap* et *floor*. Afin de garantir l'existence de la *moneyness*, l'expression de celle-ci sera la suivante :

$$M = \frac{K - F_0}{\sqrt{T}} \quad (3.47)$$

Avec K représentant le taux d'exercice du *cap* ou du *floor* et F_0 le taux futur sur taux libor que l'on appelle plus communément le taux Libor forward dans notre modèle. Aussi, nous avons démontré dans la partie *Théorie et socles financiers* que le $i^{\text{ème}}$ taux forward $F_i(t)$ fixé en T_{i-1} est une martingale sous la mesure \mathbb{Q}^{T_i} :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_i}} [F(t, T_{i-1}, T_i) | \mathcal{F}_u] = F(u, T_{i-1}, T_i), \quad \text{avec } 0 \leq u \leq t \leq T_{i-1} \leq T_i \quad (3.48)$$

En effet, les produits dérivés de taux tels que les *cap* ont pour sous-jacent le taux Libor que nous rappelons :

$$dF_i(t) = \sigma_{i,N}(t) dW_i^{T_i}(t) \quad (3.49)$$

Avec :

- $\sigma_{i,N}$ la volatilité du processus déplacé ou volatilité normale, notée ensuite $\sigma_{i,N}$ dans les preuves, sur l'intervalle $[0, T_i]$ avec $\sigma_{i,N}(t) > 0$ et de carré intégrable.
- $W_i^{T_i}$ est un $(\mathbb{F}, \mathbb{Q}^{T_i})$ mouvement brownien avec $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_{T_i})$ la filtration associée au mouvement brownien $W_i^{T_i}$.

Le prix par la formule de Bachelier du $i^{\text{ème}}$ *caplet* V_{caplet_i} de maturité T_i , de nominal $N = 1$ et de *strike* K en 0, est donné par la formule suivante :

$$V_{\text{caplet}_i}^{BACH}(0) = P(0, T_{i+1})(v_i d_i N(d_i) + v_i N'(d_i)) \quad (3.50)$$

Avec :

- $d_i = \frac{F_i(0) - K}{v_i}$
- $v_i = \sigma_{i,N} \sqrt{T_i}$

Ainsi que le prix d'un *cap* : $\forall t \leq T_i$

$$V_{\text{Cap}_i}^{BACH}(t, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} V_{\text{caplet}_{i-1}}^{BACH}(t, K, \sigma_{\alpha,\beta,N}) \quad (3.51)$$

où :

- α est la date d'expiration du 1^{er} *caplet*.
- β est la date de réalisation du dernier *caplet*.
- $\sigma_{\alpha,\beta,N}$ est la volatilité normale auquel est côté le *cap* du marché : $\sigma_{\alpha,\beta,N} = \sqrt{T_i} \sigma_{i,N}$ où $\sigma_{i,N}$ est la volatilité normale des *caplet*.

Une des premières difficultés de cette étude est de déduire des volatilités des *cap* les volatilités des *caplet*.

Cette méthode aussi appelée "stripping" des volatilités des *cap* est indispensable pour déduire le vega des *cap*. En effet, comme précédemment, la calibration du modèle se fera à l'aide de la pondération des vega des *cap*. Or, un *cap* étant une succession de *caplet* pour son prix, il en est de même pour son vega. Autrement dit, le vega d'un *cap* est combinaison linéaire de vega de *caplet*.

Pour éviter toute confusion entre les volatilités des *cap* et celles des *caplet*, les notations suivantes seront utilisées dans la suite :

- ζ la volatilité des *cap*.
- γ la volatilité des *caplet*.

Avant de rentrer en détail dans l'étude, nous présentons les données sur lesquels la calibration se fait ainsi que la spécification du modèle.

Les différentes matrices de volatilités des *cap* sont extraites via Bloomberg. Les données extraites sont des matrices de volatilité des *cap* sur taux Euribor 6 mois : chaque *cap* est composé de *caplet* de maturité 6 mois se succédant à la suite des autres. Par exemple, un *cap* de maturité 2 ans et d'exercice K sera composé de 4 *caplet* de maturité chacun de 6 mois se succédant l'un après l'autre. La calibration se fait sur l'ensemble des données que nous avons récoltées à savoir de 01/07/2011 11/06/2018, en effet, l'intérêt de la calibration sur une grande plage de données permet de construire un modèle robuste intégrant plusieurs phases de marché que le modèle essaiera d'intégrer au moment de la calibration paramétrique. La surface de volatilité des *cap* pour l'ensemble des *strike* excepté celui ATM est représentée ci-après (le *strike* ATM n'étant pas fixe en fonction du *tenor* de l'option) :

La spécification du modèle ainsi faite, nous avons besoin des taux Libor Forward initiaux pour travailler et construire nos différentes variables qui permettront alors de tester la performance des différents modèles entre eux par régression OLS.

Calcul des taux forwards initiaux

Pour déterminer les taux Libor initiaux $F_i(0)$, la méthode utilisée fait intervenir soit la courbe des taux swap soit la courbe des taux sans risque réglementaire. Cependant, les taux swap fournis par le marché ou bien les taux réglementaires de l'EIOPA sont des données annuelles. Pour obtenir des données semestrielles coïncidant avec la maturité de chaque *caplet*, nous procédons par une interpolation avec le modèle de Nelson-Siegel-Svensson (Nelson-Siegel augmenté) de la courbe des taux. Une fois la série des prix zéro coupon obtenue par la méthode de *bootstrapping* déjà mentionnée précédemment. Le passage des taux zéro-coupon au taux forward se fait via la formule des taux forward en composition simple explicitée dans la partie *Théories et socles financiers*, formule que nous rappelons :

$$F(0, T_{i-1}, T_i) = F_i(0) = \frac{1}{\tau_i} \left(\frac{P(0, T_{i-1})}{P(0, T_i)} - 1 \right), \quad 1 \leq i \leq 30 \quad (3.54)$$

Dans notre modèle, $\forall i, \tau_i = 1/2$ et la courbe de marché est celle des taux swap sur Euribor 6 mois. Le graphique suivant représente la courbe des taux forward au 03/05/2018 :

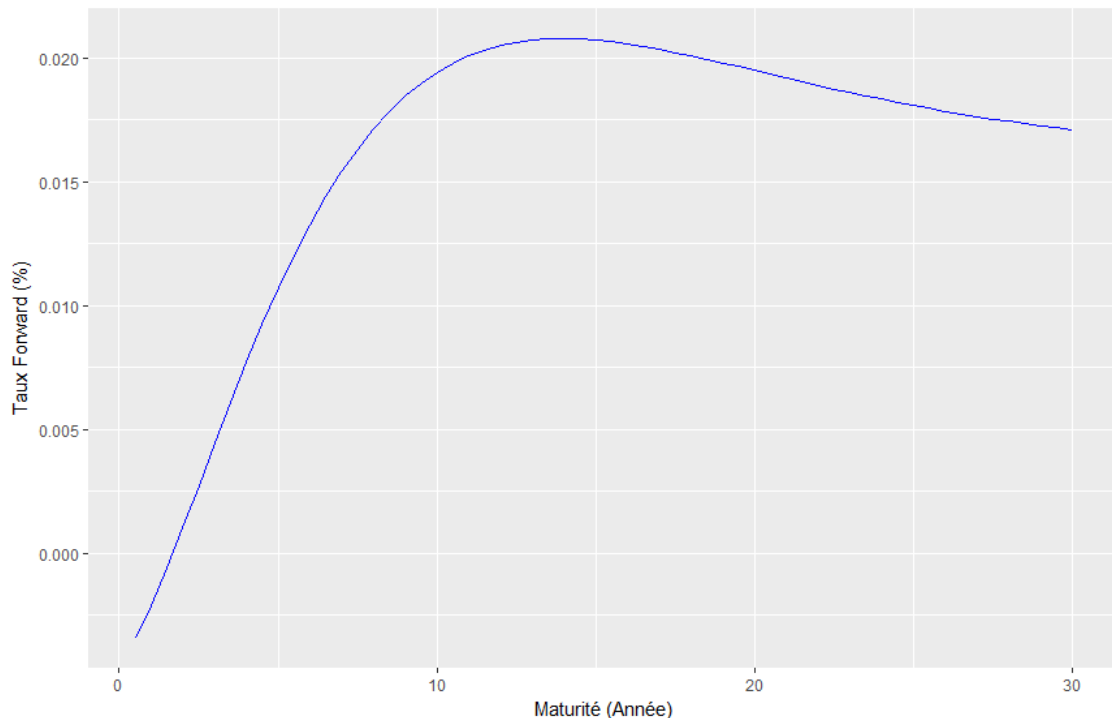


FIGURE 3.41 – Courbe des taux forward au 03/05/2018

Stripping des volatilités des caplet

Comme pour la nappe de volatilité implicite des dérivés actions, la régression par la méthode des moindres carrés pondérée par les vega sera utilisée également ici toujours dans le but d'ajuster un modèle sur les variations de prix les plus élevées. En effet, calibrer un modèle sur les volatilités ayant une pondération sur les vega permet de donner davantage d'importance aux points ayant plus de vega (on cherche à être meilleur sur l'estimation des volatilités engendrant une variation de prix plus élevée).

Le vega d'un *cap* étant une combinaison linéaire de vega de *caplet*, il est indispensable de calculer les volatilités de chaque *caplet* pour chaque maturité. Pour cela, la méthode de *stripping* permet d'extraire les volatilités des *caplet* par itération successive. Dans la formule du pricing d'un *cap*, on peut utiliser directement la volatilité inscrit dans la matrice de volatilité des *cap* et cette volatilité peut être vue comme une moyenne de volatilités de *caplet* (on prend dans la formule de *pricing* une volatilité constante à chaque pas). Mais quand on se réfère à la formule du *pricing* d'un *cap*, il s'agit bien de changer à chaque pas de 6 mois la volatilité utilisée (volatilité des *caplet*).

Cette méthode réside donc sur le fait qu'un *cap* est une séquence de *caplet* de même *strike* (sauf pour l'ATM) sur la réalisation des taux Libor à différentes maturités. Pour décrire cette méthode, les notations suivantes seront utilisées :

- $\mathcal{T} = \{0.5an, 1an, 1.5ans, 2ans, \dots, 29.5ans, 30ans\}$
- $V_{Cap_i}^{BACH}(\zeta_i, K)$ le prix du $i^{\text{ème}}$ *cap* de volatilité ζ_i et de *strike* K à $t = 0$.
- $V_{caplet_n}^{BACH}(\gamma_n, K)$ le prix du $n^{\text{ème}}$ *caplet* de volatilité γ_n et de *strike* K à $t = 0$.

Par définition $V_{Cap_i}^{BACH}$ est composé de i *caplet* et on peut écrire :

$$V_{Cap_i}^{BACH}(\zeta_i, K) = \sum_{n=1}^i V_{caplet_n}^{BACH}(\zeta_i, K), \quad i \in \mathcal{T} \quad (3.55)$$

Et la formule de *stripping* peut en être déduite :

$$V_{Cap_i}^{BACH}(\zeta_i, K) = V_{Cap_{i-1}}^{BACH}(\zeta_{i-1}, K) + V_{caplet_i}^{BACH}(\gamma_i, K), \quad i \in \mathcal{T} \quad (3.56)$$

De cette façon, il est possible de calculer $V_{caplet_i}^{BACH}(\gamma_i, K)$ le prix du $i^{\text{ème}}$ *caplet* et d'en déduire la volatilité implicite des *caplet* γ_i qui lui est associée par l'algorithme de Newton décrit dans les annexes.

Sur le plan pratique, les volatilités des *cap* disponibles sur le marché appartiennent à l'ensemble $\mathcal{A} = \{1, 1.5, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 20, 25, 30\}$. Ainsi, afin de réaliser le *stripping* des volatilités de *caplet* par pas de temps de 6 mois, l'utilisation de l'approximation des volatilités des *cap* par spline cubique pour chacun des *strike* est requise.

Remarque :

Rappelons qu'à la monnaie le *strike* d'un *cap* sur la réalisation des taux forwards aux dates $T_{\alpha+1}, \dots, T_{\beta}$ s'écrit :

$$K = K_{ATM} = S_{\alpha, \beta}(0) = \frac{P(0, T_{\alpha}) - P(0, T_{\beta})}{\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i)} \quad (3.57)$$

Ainsi, puisque les volatilités des cap dépendent du strike, il est plus compliqué d'appliquer le stripping des volatilités sur les caps ATM (dont le strike varie) mais il est aisé de l'appliquer à des caps à strike fixé. Ici, l'obtention des vega des cap et donc ceux des caplet pour chaque maturité et strike est obligatoire pour mener à bien la calibration de la nappe de volatilité des cap. Cela nous pousse à stripper l'ensemble des volatilités de caplet pour chaque strike, pour chaque maturité de cap et par pas de temps de 6 mois entre chaque caplet.

Le graphe suivant représente les volatilités des cap au strike $K = 1\%$ ainsi que les volatilités des caplet déduites à partir de la méthode de *stripping* :

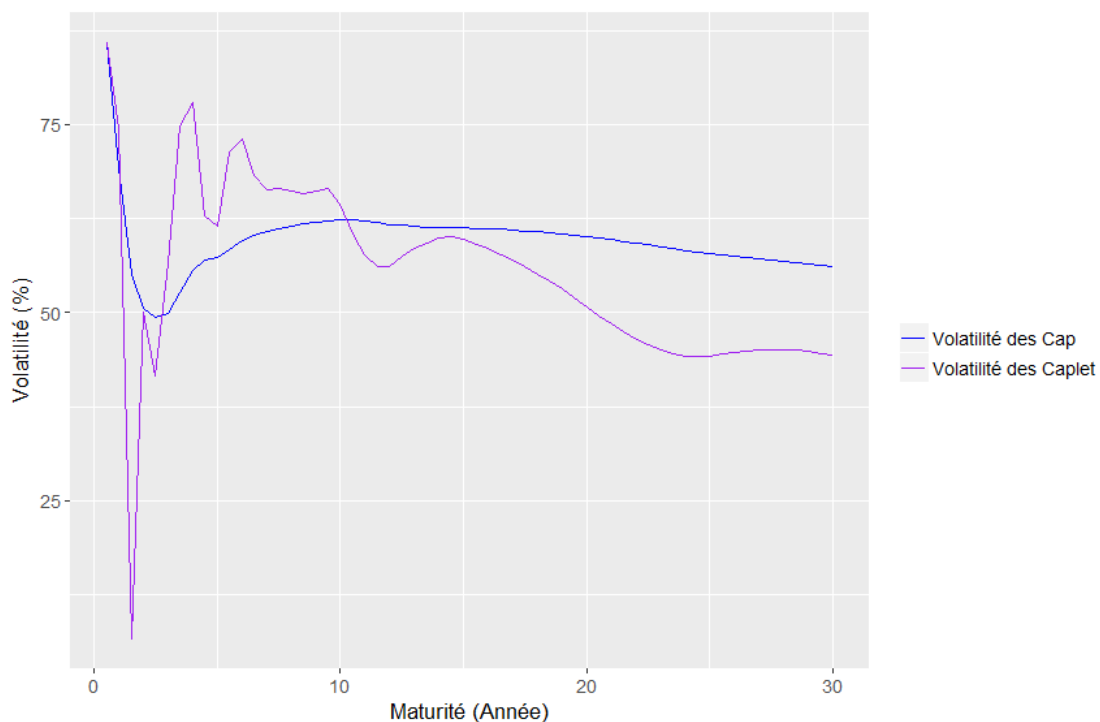


FIGURE 3.42 – Volatilité des caps et caplets avec strike $K = 1\%$ au 08/06/2018

Au premier abord, la courbe des volatilités de caplet peut sembler déconcertante. Afin de supprimer cette crainte, une vérification s'impose. Pour chaque cap de maturité différente est associé un nombre de volatilités de caplet valable entre chaque durée de 6 mois. Ainsi, le prix d'un cap avec une volatilité de cap (volatilité constante sur toute la durée du cap) pour un certain strike et maturité donnés doit être égal au prix d'un cap avec des volatilités de caplet différentes entre chaque pas de temps de 6 mois.

Le graphique suivant permet de se rendre bien compte de l'efficacité de la méthode de *stripping* et cela permet de valider les courbes de volatilités de *caplet* semblant déroutantes en premier lieu :

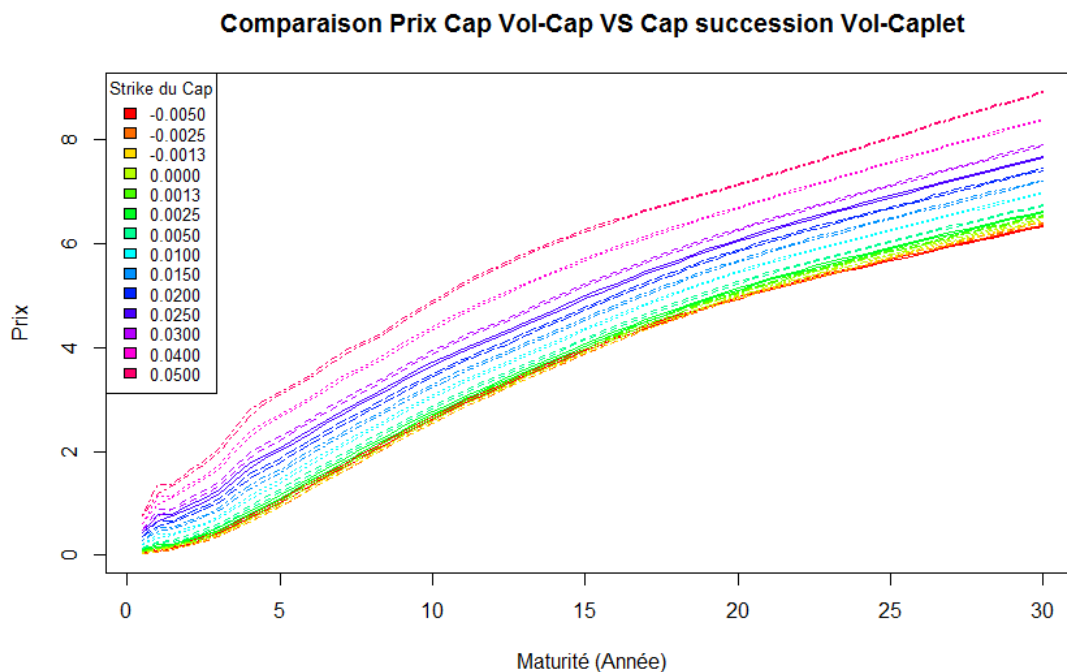


FIGURE 3.43 – Comparaison des prix des cap : Volatilité Cap VS Volatilités Caplet pour chaque strike sauf ATM

Le graphique précédant montre bien la superposition des courbes des prix des *cap* (en bps du nominal) *pricer* avec les volatilités des *cap* et celles avec les successions de volatilité des *caplet*.

Le graphique suivant représente les courbes de prix pour le *strike* ATM et valide encore l'approche de *stripping* des volatilités des *cap* :

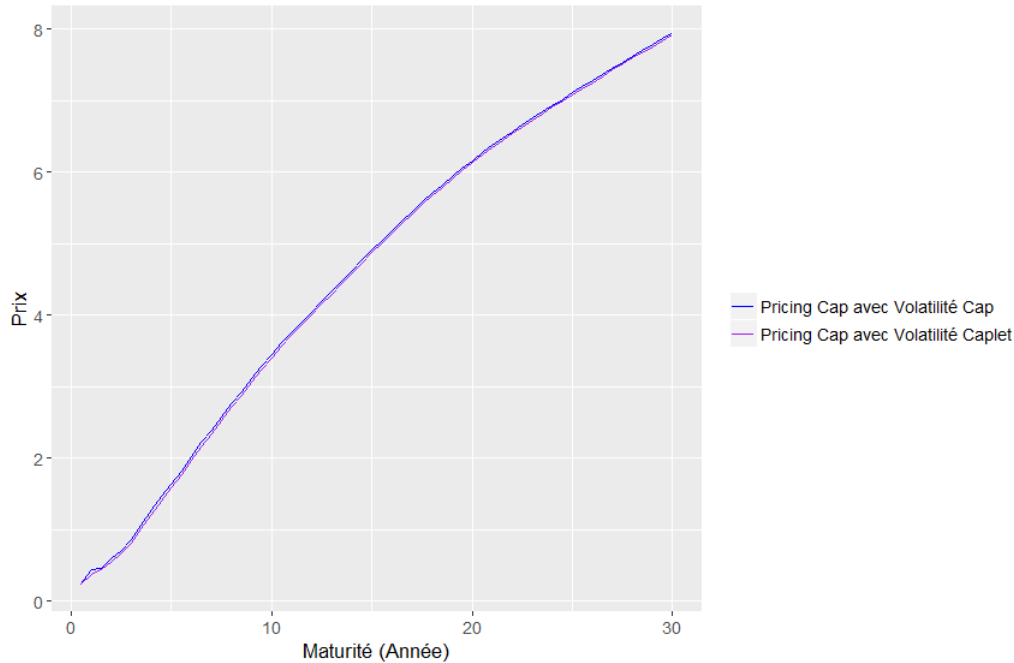


FIGURE 3.44 – Comparaison des prix des cap : Volatilité Cap VS Volatilités Caplet avec *strike* ATM

Maintenant que les volatilités de *caplet* sont extraites des volatilités de *cap*, il est possible de calculer les vega de tous les *caplet* et les vega des *cap* puis passer à l'estimation des paramètres du modèle.

Estimation des paramètres

La principale problématique d'estimation est l'utilisation qui est faite du lissage de la nappe de volatilité. En effet, cette surface implicite n'est pas exploitée de manière directe mais plutôt de façon indirecte par l'intermédiaire de la formule de transfert du modèle de Bachelier (ou modèle normal). En effet, in fine, l'objectif est de repasser à une matrice de prix afin de calibrer en « risque-neutre », un modèle de *pricing*.

Comme pour l'étude de la nappe de volatilité action, la métrique suivante sera utilisée :

$$MSE(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Cap_i - Cap_i(\theta))^2 \quad (3.58)$$

où :

- n = le nombre de prix d'options *cap* qui existent sur le marché.
- $Cap_i(\zeta_i)$ les prix des n options *cap* sur le marché, de volatilités normales ζ_i .

- $Cap_i(\theta, \hat{\zeta}_i)$ les prix de ces n options calculés à partir du modèle de Bachelier, et qui dépendent d'un ensemble de paramètres θ et des volatilités normales estimées des cap $\hat{\zeta}_i$.
- ζ_i la volatilité normale implicite de Bachelier des cap obtenue avec $Cap_{mkt} = Cap^{BACH}(\zeta_i, K, T_\alpha, T_\beta)$
- $\hat{\zeta}_i$ la volatilité normale implicite estimée de Bachelier des cap obtenue avec $Cap^{BACH} = Cap^{BACH}(\hat{\zeta}_i, K, T_\alpha, T_\beta)$

Cette métrique est cohérente avec les prix des options car elle fournit des paramètres estimés qui, lorsque utilisés dans le modèle, génèrent des prix d'options très proches de ceux observés sur le marché.

La méthode d'estimation mono-objective apparaît comme la plus pertinente avec la méthode des moindres carrés pondérés pour une matrice de poids judicieusement choisie. Ajouter à cela, l'estimateur des moindres carrés pondérés est explicite et garantit également l'homogénéité des minimums (globaux en l'occurrence). Comme précédemment, la pondération par les vega interviendra dans l'estimation notamment grâce au *stripping* qui ont permis l'extraction des volatilités de *caplet* noté γ_i :

$$v_{Cap} = \frac{\partial Cap(K, T_\alpha, T_\beta)}{\partial \zeta} \quad (3.59)$$

Le vega représente la sensibilité du prix par rapport à la volatilité, il est donc le plus élevé lorsque l'erreur de prédiction sur la volatilité engendre l'erreur la plus forte sur le prix du dérivé taux qu'est le cap . Cet indicateur de gestion financière a été choisi également pour son expression mathématique explicite découlant du modèle d'évaluation de Bachelier :

$$v_{Cap} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_{i+1}) \sqrt{T_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{F_i(0)-K}{\gamma_i \sqrt{T_i}}\right)^2 / 2} \quad (3.60)$$

où :

- α est la date d'expiration du 1^{er} *caplet*.
- β est la date de réalisation du dernier *caplet*.
- T_i est le tenor du $i^{\text{ème}}$ *caplet* (de 6 mois dans l'étude).
- $F_i(0)$ est le taux forward spot en composition simple de la $i^{\text{ème}}$ maturité de *caplet*.
- K est le taux d'exercice du cap (fixe entre chaque intervalle de temps sauf pour le cap ATM dont le *strike* bouge entre chaque intervalle de temps).
- γ_i est la volatilité normale du $i^{\text{ème}}$ *caplet*.

Le lecteur pourra se référer à la démonstration dans les annexes.

Graphiquement, le vega est plus élevé sur les *cap* à maturités élevées :

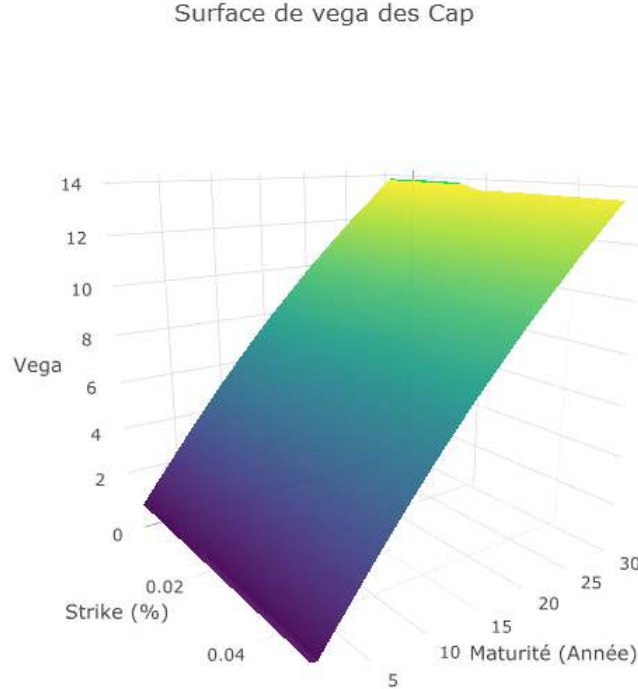


FIGURE 3.45 – Surface du vega de cap en fonction de la maturité du cap et du prix d'exercice

Le raisonnement précédent induit que la fonction objectif de calibrage doit tendre à réduire l'erreur d'estimation sur les *cap* à maturités élevées. Ceci est d'ailleurs pertinent économiquement car les *cap* sont par exemple utilisés pour rembourser des prêts dont la durée moyenne de remboursement est sur 20 à 25 ans.

Aussi, la fonction de calibrage avec la pondération au moyen des vega doit prendre en considération la transformation logit modifiée, appliquée aux volatilités pour ne pas introduire de biais dans les estimations. La pondération sera donc de la forme suivante avec P le prix de l'option et f la fonction inverse du logit appliquée au prix de l'option :

$$f(P) = \frac{\zeta_{max}^{CAP}}{1 + e^{-P}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(P)}{\partial \zeta} = \frac{\partial P}{\partial \zeta} \zeta_{max}^{CAP} \frac{e^{-P}}{(1 + e^{-P})^2} \quad (3.61)$$

$$= v \left(\frac{\zeta_{max}^{CAP}}{1 + e^{-\ln\left(\frac{\zeta}{\zeta_{max}^{CAP} - \zeta}\right)}} \right) \zeta_{max}^{CAP} \frac{e^{-\ln\left(\frac{\zeta}{\zeta_{max}^{CAP} - \zeta}\right)}}{\left(1 + e^{-\ln\left(\frac{\zeta}{\zeta_{max}^{CAP} - \zeta}\right)}\right)^2} \quad (3.62)$$

$$= v(\zeta) \zeta_{max}^{CAP} \frac{e^{-\ln\left(\frac{\zeta}{\zeta_{max}^{CAP} - \zeta}\right)}}{\left(1 + e^{-\ln\left(\frac{\zeta}{\zeta_{max}^{CAP} - \zeta}\right)}\right)^2} \quad (3.63)$$

Ainsi, la transformation de vega utilisée dans la pondération vaut :

$$v = \zeta_{max}^{CAP} v_{Cap} \frac{e^{-\ln(\frac{\zeta}{\zeta_{max}^{CAP} - \zeta})}}{\left(1 + e^{-\ln(\frac{\zeta}{\zeta_{max}^{CAP} - \zeta})}\right)^2} \quad (3.64)$$

La fonction de calibrage est alors définie comme suit pour rentrer dans le cadre d'estimation des moindres carrés pondérés :

$$F(\beta_0, \dots, \beta_9) = \sum_{i=1}^n \omega_i [TransCap(\zeta_i(M_i, T_i, F_i(0))) - TransCap(\zeta_i(\widehat{M}_i, \widehat{T}_i, \widehat{F}_i(0)))]^2 \quad (3.65)$$

Avec :

$$\omega_i = \frac{v(F_i(0), M_i, T_i, \zeta_i)}{\sum_{k=1}^n v(F_k(0), M_k, T_k, \zeta_k)} \quad (3.66)$$

Pour plus de commodité pour l'expression de l'estimateur des moindres carrés pondérés, réécrivons le modèle linéaire sous forme matricielle :

$$Y = X\beta + U, U \sim \mathcal{N}(0, \zeta I) \quad (3.67)$$

Avec :

$$Y_{n,1} = \begin{bmatrix} TransCap(\zeta_1(M_1, T_1, F_1(0))) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ TransCap(\zeta_n(M_n, T_n, F_n(0))) \end{bmatrix} \quad I_{n,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_{10,n} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_9 \end{bmatrix} \quad X_{n,10} = \begin{bmatrix} 1 & M_1 & T_1 & M_1^2 & T_1^2 & M_1 T_1 & M_1^3 & T_1^3 & M_1^2 T_1 & T_1^2 M_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & M_n & T_n & M_n^2 & T_n^2 & M_n T_n & M_n^3 & T_n^3 & M_n^2 T_n & T_n^2 M_n \end{bmatrix}$$

Introduisons la matrice de poids :

Pour la présente étude, nous retenons l'expression de la « moneyness » :

$$M_{i,t} = \frac{K_i - F_{i,t}(0)}{\sqrt{T_i}} \quad (3.73)$$

Modèle retenu

La sélection du modèle final s'effectue avec une méthode exhaustive pour définir une spécification inter-temporelle (1774 données (N=1774)) cohérente. En pratique, pour chaque jeu de données journalières, 1023 spécifications (modèles différents) sont testées ($\sum_{k=1}^{10} C_n^k = 2^{10} - 1 = 1023$).

Le problème s'y prêtant (données spatiales à t fixé), la notion de validation croisée est introduite dans le choix de spécification du modèle, à savoir la présence conjointe d'indicateurs explicatifs et prédictifs. Pour éviter le biais de sélection lié au choix des points à prédire, ceux-ci sont tirés aléatoirement selon l'importance des poids des vega. Il s'agit tout simplement de tirer au hasard des volatilités en fixant leur probabilité d'être tiré au sort selon leur vega (une volatilité associée à un vega élevé aura une probabilité d'être tiré au sort plus élevée).

De cette façon, le modèle sera calibré et plus fin davantage sur les volatilités dont les variations de prix sont les plus grandes. On cherche à être meilleur sur les volatilités engendrant des écarts de prix plus élevés. Pour cela, par pas de temps, la base est séparée en une base d'apprentissage constituée de 72 % des volatilités et d'une base de test constituée de 28 % des volatilités (tirage aléatoire sur les 15 moneyness (p=15)). Contrairement à l'étude sur la nappe de volatilité action, pour des raisons opérationnelles, nous utiliserons une base d'apprentissage par pas de temps car les matrices de volatilité des *cap* ne sont pas toujours pleines. En effet, avec l'apparition des taux négatifs, les données n'intègrent pas les *strike* négatifs avant le 17/05/2016. Aussi, cela permet de traiter le prix d'exercice ATM étant mobile en fonction du temps. Cette technique n'aura pas d'incidence sur le choix futur du modèle puisque la structure des poids de vega sont d'une date à une autre du même ordre de grandeur : les vega ont la même structure d'un pas à un autre. L'étude est donc bien dans le même référentiel.

La formalisation de la procédure de calibrage, les fonctions objectifs de calibrage, les indicateurs indicatifs et le programme d'optimisation multi-objectif sont les mêmes que l'étude faite sur la nappe de volatilité implicite Action mais appliqué au produit dérivé de taux *Cap*. Le lecteur pourra se référer à la section précédente pour se rappeler de ces formalisations.

Choix de modèle

Avec l'étude réalisée sur la nappe de volatilité implicite Action et pour des considérations au niveau du temps de calcul, les différents modèles testés seront les modèles compris entre 5 et 7 variables. En effet, certains modèles n'ont pas d'intérêt à être testés : les modèles très peu paramétrés inférieurs à 5 variables et trop paramétrés supérieurs à 7 variables. Le seul point qui diffère réside dans le rééchantillonnage qui est fait à chaque fois par pas de temps. Afin d'obtenir un modèle robuste et de qualité par rapport aux

différentes bases d'apprentissage, deux *run* sont menés : l'ensemble des modèles entre 5 et 7 paramètres sont testés deux fois sur l'historique totale.

La dominance de pareto ($y \succ x \Leftrightarrow F(x) \leq F(y), \exists i = 1, \dots, 5 \text{ tq } f_i(x) < f_i(y)$), permet d'établir le front 1, trié sur la moyenne des erreurs de prédiction. Cette procédure d'optimisation multi-objectif donne dès lors un ensemble de spécifications possibles (14 dans l'exemple en annexe, issu d'un tirage aléatoire (des points à prédire) unique à chaque pas respectant l'ordre de grandeur des poids de vega d'un pas à un autre).

L'étude des résultats présentés en annexe (cf. **Résultats des indicateurs de sélection de modèle (5 à 7 variables) [Cap]**) indique que les modèles à 7 paramètres performant à la fois en apprentissage et en prédiction. Objectivement, ces modèles ne peuvent être rejetés que sur des considérations liées à la parcimonie. Les modèles à 5 et 6 paramètres sont intéressants également car moins paramétrés.

Au travers de ces résultats, les modèles sortant en front 1 selon la dominance de Pareto sur lesquels nous nous attardons sont les modèles à 6 paramètres. En effet, ces modèles ressortent presque tous deux fois sur les deux *run*. Les modèles à 7 variables semblent en *over-fitting* et les modèles à 5 variables sont légèrement moins bon en apprentissage et aussi moins stable en apprentissage et en prédiction au regard de la TVaR.

Le jugement d'expert qui prédomine à ce stade (avant intégration dans le VAR) est la parcimonie. A ce titre, le modèle retenu est celui à 6 variables (identifiant 30 et 4) :

$$\begin{cases} TransCap(\zeta_{i,t}(M, T)) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}M_{i,t} + \beta_{2,t}T_i + \beta_{3,t}M_{i,t}T_i + \beta_{4,t}T_i^2 + \beta_{5,t}T_i^3 + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \zeta) \end{cases} \quad (3.74)$$

Ce modèle à 6 variables est le plus stable en prédiction [TVaR 0.95 MSE test]. Cependant, le lecteur pourra remarquer que le modèle précédent avec la variable $M * T$ remplacée par $M^2 * T$ (toute autre variable gardée par ailleurs) aurait pu être aussi choisi car il est meilleur pour les deux critères en apprentissage. Aussi, le but de cette étude est de projeter la nappe de volatilité implicite pour *pricer* des dérivés *cap* dans le futur donc davantage pour la prédiction. Ainsi, l'indicateur de prédiction est préféré à celui de l'apprentissage.

Reconstruction des séries chronologiques

La reconstruction des séries chronologiques des régresseurs est illustrée ci-dessous :

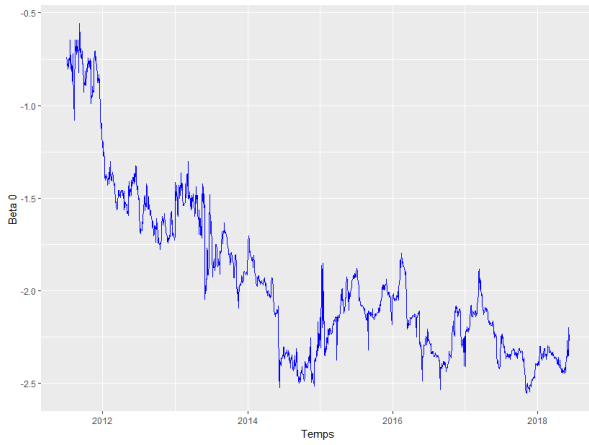


FIGURE 3.46 – Serie chronologie Beta0 Cap

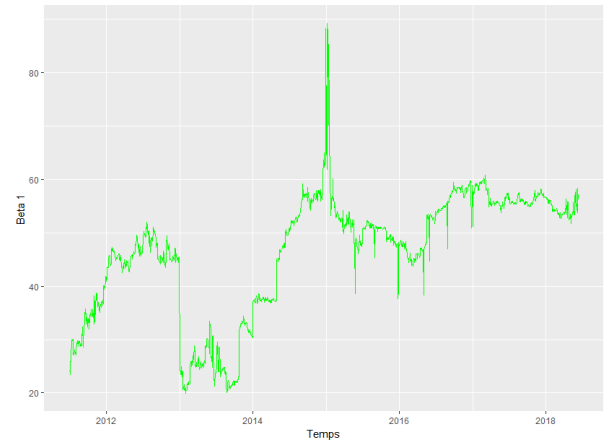


FIGURE 3.47 – Serie chronologie Beta1 Cap

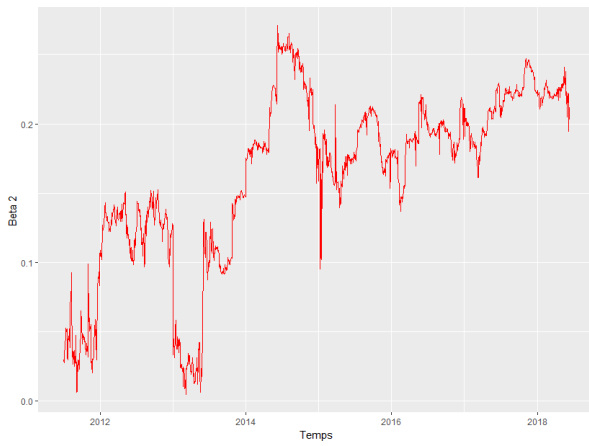


FIGURE 3.48 – Serie chronologie Beta2 Cap

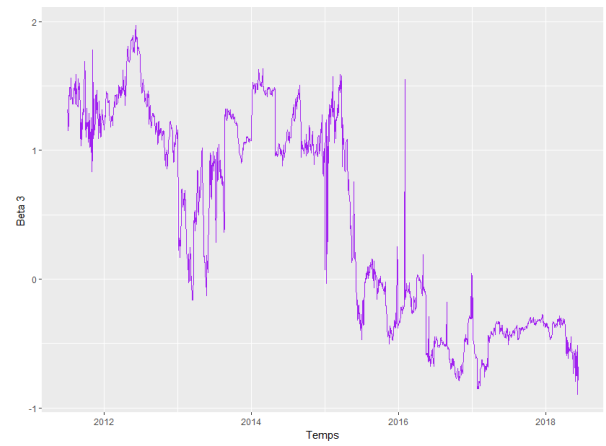


FIGURE 3.49 – Serie chronologie Beta3 Cap

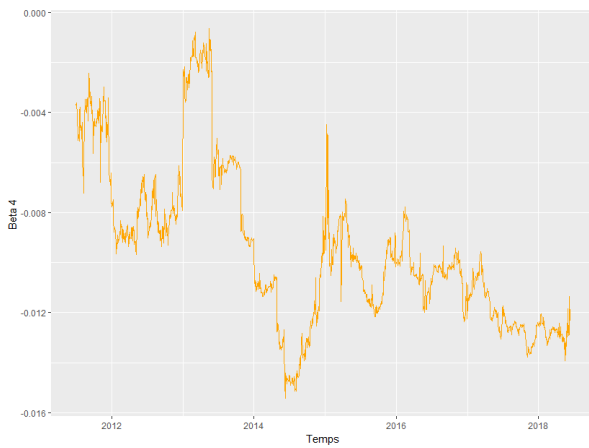


FIGURE 3.50 – Serie chronologie Beta4 Cap

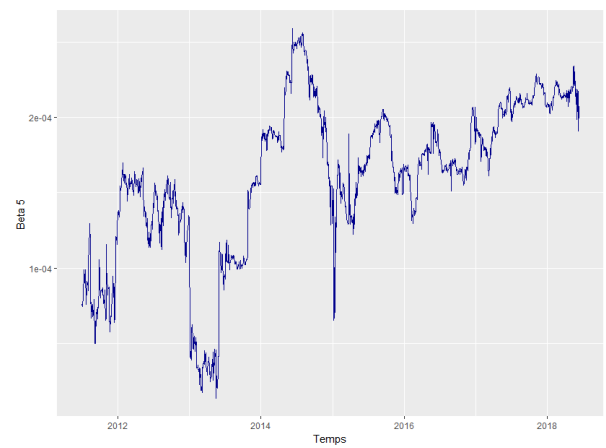


FIGURE 3.51 – Serie chronologie Beta5 Cap

Ces graphiques montrent la présence de certains points quelque peu atypiques et à investiguer au vue des sauts assez important, notamment sur la période du 02/01/2013 au 23/10/2013. Une des explications mise en avant serait la qualité des données fournies par Bloomberg sur cette période.

Pour cela, l'étude de la qualité du *fitting* des surfaces de volatilité implicite des *cap* semble indispensable pour valider le modèle choisi à 6 variables. Nous décidons de représenter une seule date associée à la surface de volatilité implicite (tous de même allure) de la période du 02/01/2013 au 23/10/2013.

Fitting Surface de Volatilité des Cap

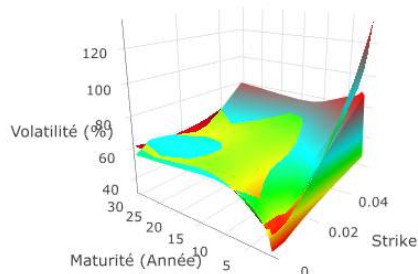


FIGURE 3.52 – Surface all

Fitting Surface de Volatilité des Cap

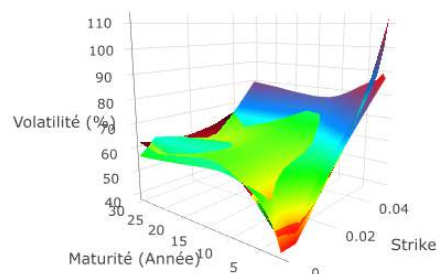


FIGURE 3.53 – Surface reduced

A gauche, la représentation de la surface associée à la matrice de volatilité des *cap* du 03/01/2013 pour tous les *tenor* et *strike*. A droite, la représentation de la surface associée à la matrice de volatilité des *cap* du 03/01/2013 où la maturité du swap 1 an (Terme) associé à tous ses *strike* a été supprimé. Au regard de cette surface de volatilité comparée à d'autres surfaces à différentes dates, la qualité des données fournies par Bloomberg est mise en cause.

Pour se faire une réelle idée de la qualité des données fournies par Bloomberg à cette date, la surface de prix au 03/01/2013 est représentée ci-après :

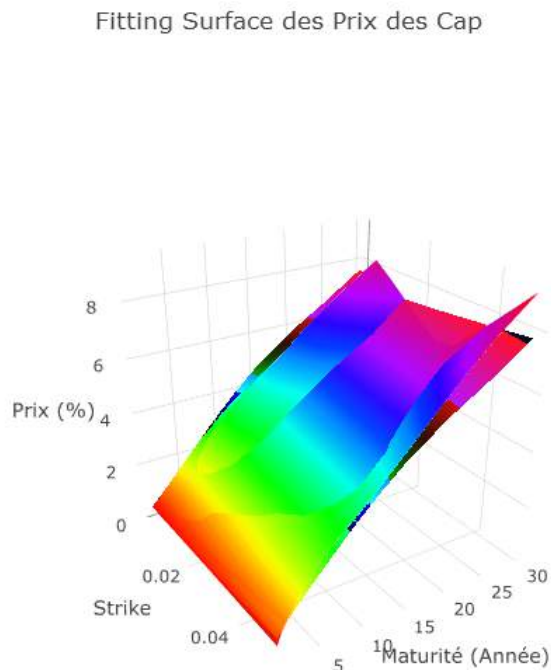


FIGURE 3.54 – Fitting de la surface de prix du 03/01/2013

La surface de prix fournie par Bloomberg n'est pas *smooth* (lisse) du tout (en dent de scie d'un *strike* à un autre comparée à toutes celles des autres dates). Il y a clairement à cette date des opportunités d'arbitrage sur les prix des cap. Par exemple, si on estime que le modèle délivre la vérité des prix, le prix du *cap* au *strike* 2 % est de plus en plus sous évalué plus la maturité de l'option augmente. Une possible explication serait que certaines volatilités sont calculées pour des maturités élevés par extrapolation avec le modèle SABR (calibration mauvaise ?).

Quelques points semblent atypiques également début 2015. Cependant, après étude des surfaces *fittés*, le *fitting* est de bonne qualité au niveau des volatilités et remarquable au niveau des prix :

Fitting Surface de Volatilité des Cap

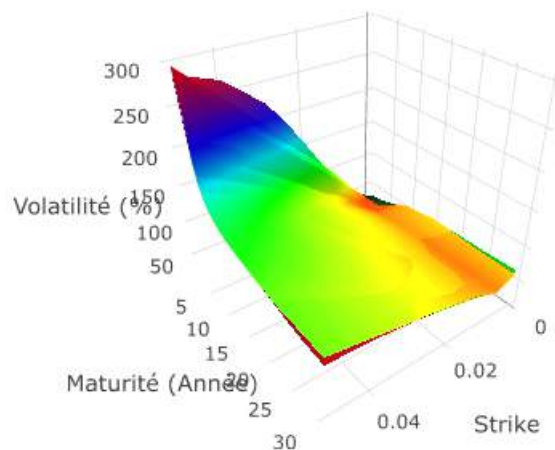


FIGURE 3.55 – Fitting 07/01/2015

Fitting Surface des Prix des Cap

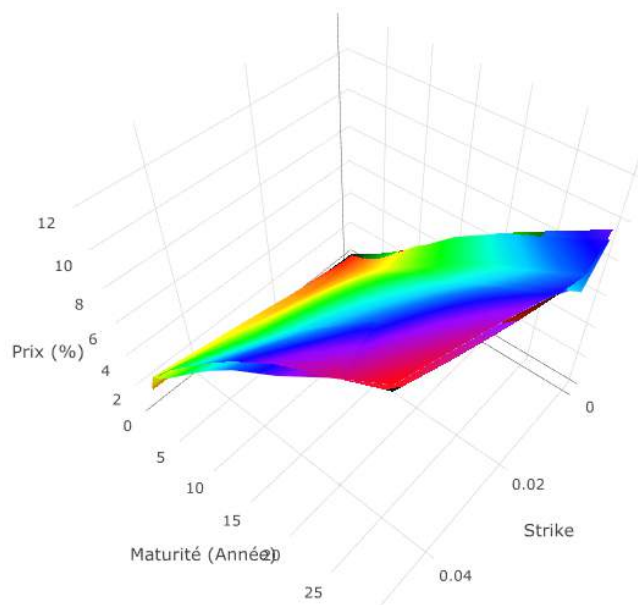


FIGURE 3.56 – Fitting Prix 07/01/2015

Validations des régresseurs et du modèle linéaire

R^2 Ajusté		Test Student (significativité individuelle)	
Moyenne(R^2 Ajusté)	90,3 %	Proportion Beta0 significatif	100,0 %
Min(R^2 Ajusté)	44,5 %	Proportion Beta1 significatif	100,0 %
Max(R^2 Ajusté)	97,2 %	Proportion Beta2 significatif	95,4 %
Quantile.0.95(R^2 Ajusté)	95,7 %	Proportion Beta3 significatif	84,1 %
		Proportion Beta4 significatif	95,7 %
		Proportion Beta5 significatif	95,4 %

TABLE 3.4 – Tableaux récapitulatifs de validation du modèle [Cap] (1)

Test de Fisher (significativité globale moyenne)	p-value = 2.2e-16 (accepté pour tous les pas de temps)
Test de normalité des résidus	Rejeté (100 %) : 2.751807e-06 (p-value)
Test de Box-Pierce / Ljung-Box (Bruit Blanc)	Rejeté pour 100 % des pas de temps
Test d'homoscédasticité des résidus	Rejeté pour 100 % des pas de temps

TABLE 3.5 – Tableau récapitulatif de validation du modèle [Cap] (2)

Erreur globale pour les prix des options (n = 306336)		
Erreur pondéré/Modèle pondéré	RMSE	0,01163 %
	TVaR.0.95.RMSE	0,06591 %
Erreur normal/WLS	RMSE	0,14164 %
	TVaR.0.95.RMSE	0,57260 %
Erreur normal/OLS	RMSE	0,20137 %
	TVaR.0.95.RMSE	0,92075 %

TABLE 3.6 – Tableau récapitulatif de validation du modèle [Cap] (3)

Chacun des régresseurs est hautement significatif, le R^2 ajusté quant à lui est très élevé, il y a donc une explication importante des volatilités par les variables mises en cause. Cependant, les résidus du modèle linéaire ne sont globalement ni gaussiens, ni homoscédastiques, ni blanc. En ce qui concerne l'erreur globale pondéré par les poids de vega sur tout l'historique, le modèle donne de très bons résultats avec un écart moyen de 0,01163 % entre les prix estimés par le modèle et ceux du marché, et les 5% pire écarts de prix sont en moyenne de 0,06591 %. Une remarque intéressante peut être faite quand on compare l'erreur des modèles calibrés OLS et WLS, le modèle calibré WLS donne de meilleurs résultats : cela valide donc l'utilisation des vega dans la calibration du modèle paramétrique. Cependant, le modèle linéaire n'est pas validé au vue des tests précédents. Dans la mesure où l'on cherche à estimer la quantité $E(Y|X\beta)$ et au vue des très bons résultats de *fitting* des surfaces de volatilité, le modèle est validé.

On obtient alors les surfaces de volatilité et de prix prédites suivantes VS les surfaces de volatilité et de prix observées pour deux dates choisies aléatoirement et celle qui a été exposé en début de la section :

Fitting Surface de Volatilité des Cap

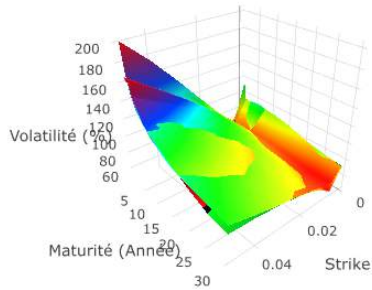


FIGURE 3.57 – Fitting 17/11/2011

Fitting Surface des Prix des Cap

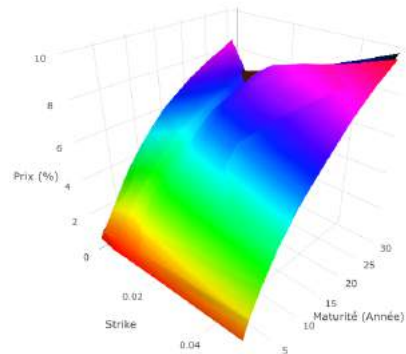


FIGURE 3.58 – Fitting Prix 17/11/2011

Fitting Surface de Volatilité des Cap

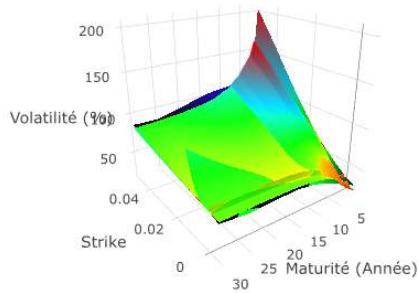


FIGURE 3.59 – Fitting 07/11/2016

Fitting Surface des Prix des Cap

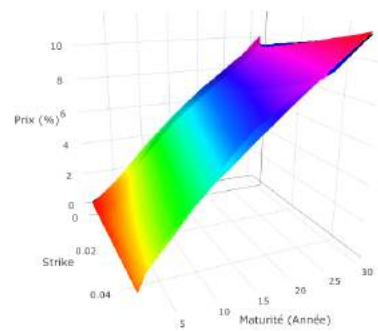


FIGURE 3.60 – Fitting Prix 07/11/2016

Fitting Surface de Volatilité des Cap

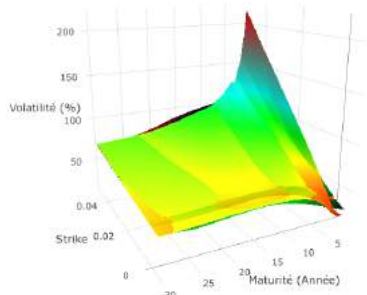


FIGURE 3.61 – Fitting 08/06/2018

Fitting Surface des Prix des Cap

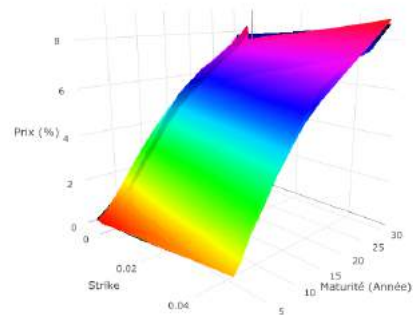


FIGURE 3.62 – Fitting Prix 08/06/2018

A ce stade, la validation du modèle choisi est satisfaisante. Le *fitting* de la nappe de volatilité implicite pour chaque pas de temps est de très bonne qualité même si on peut voir par exemple sur la figure précédente du 07/11/2016 une volatilité observée de plus de 200 % contre une volatilité prédite d'un peu plus de 150 %. Cependant, dans notre modélisation, la calibration du modèle par moindre carré ordinaire avec pondération sur les vega est responsable de ce décalage. Ce décalage au niveau du *fitting* de la surface de volatilité permet d'être meilleur au niveau de la réplication des prix et est remarquable ici.

Au regard du vega associé à ce point qui est d'un poids de très faible envergure comparé aux autres points prédits de poids de vega beaucoup plus important, il est tout à fait acceptable et normal d'apercevoir ce type de *fitting*. D'ailleurs, ce vega est associé à un strike de 4 % soit un strike très ITM avec une maturité d'un an de l'option (*tenor* existant le plus court), cela explique donc son poids très faible (en vega) dans la calibration du modèle (cf. le graphique de la surface des vega en fonction du *strike* et de la maturité).

Pour la suite, nous continuons notre raisonnement et cherchons à reproduire le cube de volatilité des *swaption*.

3.4 Calibration du cube de volatilité des swaption

3.4.1 Spécification du modèle paramétrique sur les volatilités des swaption

Comme pour le lissage de la nappe de volatilité pour les produits dérivés taux *cap*, le modèle suivant doit s'inscrire dans un cadre économétrique linéaire sur les paramètres. Nous proposons un cadre économétrique pour effectuer un lissage du cube de volatilité des *swaption*.

Définition du cube de volatilité des swaption : la volatilité implicite du marché s'organise autour des paramètres suivants :

- la maturité de l'option.
- le *tenor* de l'instrument sous-jacent.
- le *strike* (prix d'exercice) de l'option.

Cet objet tridimensionnel est appelé le cube de volatilité. Les marchés fournissent des informations pour certaines échéances de référence (1 mois, 3 mois, 6 mois, 1 an, ...), de sous-jacents (1 an, 2 ans, ...), et de *strike* (-100 bp, ATM, +100 bp, ...), et le processus de construction du cube de volatilité nécessite des interpolations intelligentes.

Par analogie avec la nappe de volatilité implicite des instruments optionnels *cap*, nous définissons Terme, Tenor et M comme respectivement la maturité du swap, le *tenor* de l'option et la « *moneyness* » pour le produit dérivé de taux *swaption* (payeuse et receveuse). Afin de garantir l'existence de la *moneyness*, l'expression de celle-ci sera la suivante :

$$M_{\alpha,\beta} = \frac{K - S_{\alpha,\beta}(0)}{\sqrt{\text{Terme}_\alpha + \text{Tenor}_\beta}} \quad (3.75)$$

Avec K représentant le taux d'exercice de la *swaption* et $S_{\alpha,\beta}(0)$ le taux swap futur qui par calcul donne le taux swap spot. La *moneyness* varie donc en fonction de la maturité du swap et du *tenor* de l'option. Pour la suite, au niveau des notations, afin de les alléger, on notera M au lieu de $M_{\alpha,\beta}$.

On se place dans le cadre du modèle de Bachelier (ou modèle normal). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet. Nous supposons également que le taux swap de maturité T_α (Terme) et de tenor $T_\beta - T_\alpha$ (Tenor) suit une distribution normale d'écart-type $\sigma_{\alpha,\beta,N}$ ($S_{\alpha,\beta} \sim \mathcal{N}(S_{\alpha,\beta}(0), \sigma_{\alpha,\beta,N}^2 T_\alpha)$) et nous nous plaçons sous la mesure $\mathbb{Q}^{\alpha,\beta}$ dont le numéraire est : $C_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i)$.

Dans cet univers $(S_{\alpha,\beta}(t))_{t>0}$ est une martingale.

Nous rappelons le modèle dans lequel nous travaillons :

$$dS_{\alpha,\beta}(t) = \sigma_{\alpha,\beta,N}(t) dW^{\alpha,\beta}(t), \quad t \leq T_\alpha \quad (3.76)$$

Avec :

- $\sigma_{\alpha,\beta,N}$ la volatilité normale du taux swap.
- $W^{\alpha,\beta}$ est un $(\mathbb{F}, \mathbb{Q}^{\alpha,\beta})$ mouvement brownien avec $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_{\alpha,\beta})$ la filtration associée au mouvement brownien $W^{\alpha,\beta}$.

On rappelle le prix de Bachelier pour une *swaption* payeuse de maturité T_α , de *tenor* $T_\beta - T_\alpha$, de *strike* K et de nominal $N = 1$ en 0 est donné par la formule suivante :

$$PS_P^{BACH}(0, K) = C_{\alpha, \beta}(0)(v_{\alpha, \beta} d_{\alpha, \beta} N(d_{\alpha, \beta}) + v_{\alpha, \beta} N'(d_{\alpha, \beta})) \quad (3.77)$$

où :

$$d_{\alpha, \beta} = \frac{S_{\alpha, \beta}(0) - K}{v_{\alpha, \beta}}$$

$$v_{\alpha, \beta} = \sigma_{\alpha, \beta, N} \sqrt{T_\alpha}$$

$\sigma_{\alpha, \beta, N}$ est la volatilité normale de la *swaption* (payeuse ou receveuse) du marché de maturité T_α et de *tenor* $T_\beta - T_\alpha$.

Les différentes matrices de volatilités des *swaption* sont extraites via Bloomberg. Les données extraites sont des matrices de volatilité des *swaption*. La calibration se fait sur l'ensemble des données que nous avons récoltées à savoir du 04/07/2011 au 11/06/2018, en effet, l'intérêt de la calibration sur une grande plage de données permet de construire un modèle robuste intégrant plusieurs phases de marché que le modèle essaiera d'intégrer au moment de la calibration paramétrique.

Puisque les *swaption* font intervenir la maturité du taux swap, le *strike* de l'option ainsi que le *tenor* de l'option, les surfaces de volatilité des *swaption* seront représentées par *strike* en fonction de la maturité, du *tenor* et du niveau de volatilité. Afin de se donner une idée des surfaces à *fitter*, les représentations des surfaces de volatilité des *swaption* à la date 08/06/2018 pour les *strike* -1.5% (très ITM), ATM et $+1.5\%$ (très OTM) sont données ci-après :

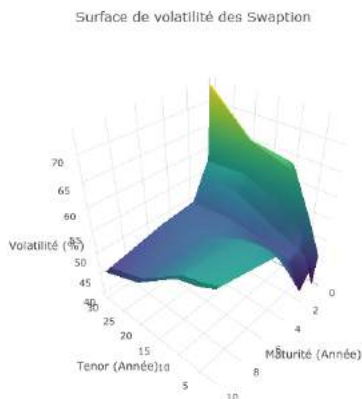


FIGURE 3.63 – Surface swaption à $K = -1.5\%$

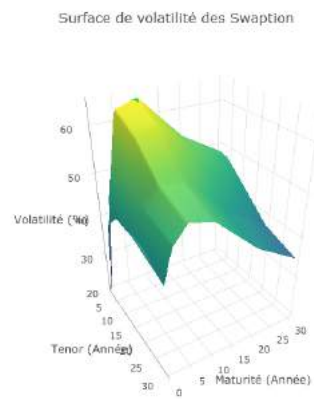
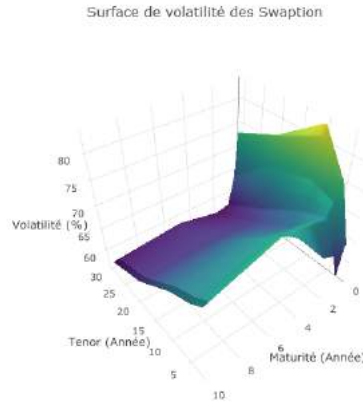


FIGURE 3.64 – Surface swaption à $K = \text{ATM}$

FIGURE 3.65 – Surface swaption à $K = 1.5 \%$

Les volatilités des matrices de volatilité de *swaption* atteignent sur plusieurs pas de temps plus de 100 %. Ainsi, contrairement à l'étude réalisée sur les produits dérivés actions, le modèle de la volatilité n'intégrera plus une transformation logit mais une transformation logarithmique bien choisi, inspiré de la fonction logit puisque les volatilités ne sont plus comprises dans l'intervalle $]0, 1[$.

Nous retenons dès lors la spécification avec une transformation logarithmique sur le terme à expliquer inspirée de la fonction logit, garantissant la positivité de la volatilité dans un cadre stochastique. Pour choisir judicieusement cette transformation et l'appliquer pour chaque pas de temps, comme pour l'étude sur les volatilités de *cap*, nous cherchons le maximum parmi les volatilités de toutes les matrices de volatilité des *swaption* sur l'historique utilisé. Sur tout l'historique de données, le maximum en volatilité est de 182.17 bps, donc nous fixons la borne de volatilité à $\sigma_{max}^{SW} = 182.171$ bps.

Ainsi, la transformation suivante sera appliquée :

$$TransSW(\sigma_{\alpha,\beta}(M, Terme, Tenor)) = \ln \left(\frac{\sigma_{\alpha,\beta}(M, Terme, Tenor)}{\sigma_{max}^{SW} - \sigma_{\alpha,\beta}(M, Terme, Tenor)} \right) \quad (3.78)$$

Comme les études précédentes, la seule hypothèse sur la forme qui est adopté à ce stade est une spécification polynomiale en Terme, Tenor et M d'un degré inférieur ou égal à 3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} TransSW(\sigma_{\alpha,\beta}(M, Terme, Tenor)) = \\ \beta_0 + \beta_1 * M + \beta_2 * Terme + \beta_3 * Tenor + \beta_4 * M * Terme + \beta_5 * M * Tenor \\ + \beta_6 * Terme * Tenor + \beta_7 * Terme^2 + \beta_8 * Tenor^2 + \beta_9 * M^2 + \beta_{10} * M^2 * Terme \\ + \beta_{11} * M^2 * Tenor + \beta_{12} * M * Terme * Tenor + \beta_{13} * Terme^2 * Tenor \\ + \beta_{14} * Terme^2 * M + \beta_{15} * Tenor^2 * Terme + \beta_{16} * Tenor^2 * M + \beta_{17} * Terme^3 \\ + \beta_{18} * Tenor^3 + \beta_{19} * M^3 + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\alpha,\beta}) \end{array} \right. \quad (3.79)$$

Estimation des paramètres

La principale problématique d'estimation est l'utilisation qui est faite du lissage du cube de volatilité. En effet, ce cube implicite n'est pas exploité de manière directe mais plutôt de façon indirecte par l'intermédiaire de la formule de transfert du modèle de Bachelier (ou modèle normal). En effet, in fine, l'objectif est de repasser à une matrice de prix afin de calibrer en « risque-neutre », un modèle de pricing.

Comme pour l'étude de la nappe de volatilité action, la métrique suivante sera utilisée :

$$MSE(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Swaption_i - Swaption_i(\theta))^2 \quad (3.80)$$

où :

- n = le nombre de prix de *swaption* qui existent sur le marché.
- $Swaption_i$ le prix de la $i^{\text{ème}}$ *swaption* sur le marché, de volatilité normale $\sigma_{\alpha_i, \beta_i}$.
- $Swaption_i(\theta)$ le prix de la $i^{\text{ème}}$ *swaption* calculé à partir du modèle de Bachelier, et qui dépendent d'un ensemble de paramètres θ et des volatilités normales estimées des *swaption* $\hat{\sigma}_{\alpha_i, \beta_i}$.
- $\sigma_{\alpha_i, \beta_i}$ la volatilité normale implicite de Bachelier des *swaption* obtenue avec $Swaption_{mkt} = PS^{BACH}(\sigma_{\alpha_i, \beta_i}, K, T_{\alpha_i}, T_{\beta_i})$
- $\hat{\sigma}_{\alpha_i, \beta_i}$ la volatilité normale implicite estimée de Bachelier des *swaption* obtenue avec $PS^{BACH} = PS^{BACH}(\hat{\sigma}_{\alpha_i, \beta_i}, K, T_{\alpha_i}, T_{\beta_i})$

Cette métrique est cohérente avec les prix des *swaption* car elle fournit des paramètres estimés qui, lorsque utilisés dans le modèle, génèrent des prix de *swaption* très proches de ceux observés sur le marché.

La méthode d'estimation mono-objective apparaît comme la plus pertinente avec la méthode des moindres carrés pondérés pour une matrice de poids judicieusement choisie. Ajouter à cela, l'estimateur des moindres carrés pondérés est explicite et garantie également l'homogénéité des minimums (globaux en l'occurrence). Comme précédemment, la pondération par les vega interviendra dans l'estimation :

$$v_{Swaption} = \frac{\partial Swaption(K, T_{\alpha}, T_{\beta})}{\partial \sigma_{\alpha, \beta}} \quad (3.81)$$

Le vega représente la sensibilité du prix par rapport à la volatilité, il est donc le plus élevé lorsque l'erreur de prédiction sur la volatilité engendre l'erreur la plus forte sur le prix du dérivé taux qu'est la *swaption*. Cet indicateur de gestion financière a été choisi également pour son expression mathématique explicite découlant du modèle d'évaluation de Bachelier :

$$v_{Swaption} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i) \sqrt{T_{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{(S_{\alpha, \beta}(0) - K)}{\sigma_{\alpha, \beta} \sqrt{T_{\alpha}}}\right)^2 / 2} \quad (3.82)$$

où :

- T_α est la date d'entrée dans un swap.
- $T_\beta - T_\alpha$ est le tenor de la *swaption*, c'est-à-dire la durée du swap.
- τ_i la durée entre T_i et T_{i-1} (durée entre deux *check* de taux).
- $S_{\alpha,\beta}(0)$ est le taux swap spot.
- K est le taux d'exercice de la *swaption*.
- $\sigma_{\alpha,\beta}$ est la volatilité normale de la *swaption* de maturité de swap T_α et de *tenor* $T_\beta - T_\alpha$.

Le lecteur pourra se référer à la démonstration dans les annexes.

Graphiquement, plusieurs remarques peuvent être faites sur le vega des *swaption* :

- le vega est plus élevé sur les *swaption* à maturités élevées (i).
- plus on est proche de l'ATM et plus le vega est élevé (ii).
- plus le *tenor* de l'option est élevé, plus le vega l'est aussi (iii).

Cela se justifie au moyen des surfaces de Vega suivantes respectivement à (i), (ii) et (iii). Puisque nous travaillons en dimension trois au niveau des variables (maturité du swap, *tenor* de l'option et *strike*) représentant la volatilité, à chaque fois, nous fixons une variable par rapport aux autres :

Surface de Vega des Swaption à maturité fixe

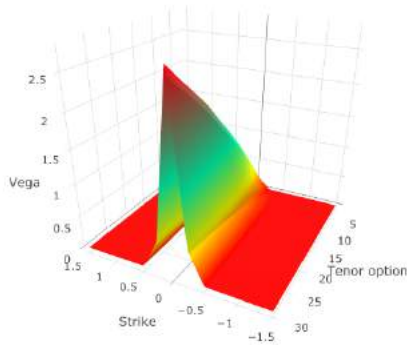


FIGURE 3.66 – Surface de Vega de maturité fixe 2 ans (i)

Surface de Vega des Swaption à maturité fixe

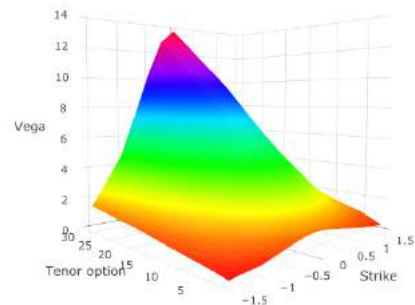


FIGURE 3.67 – Surface de Vega de maturité fixe 30 ans (i)

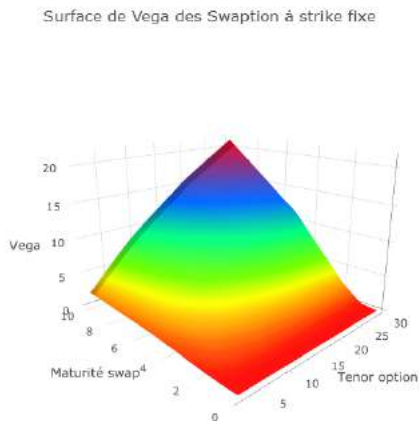


FIGURE 3.68 – Surface de Vega de strike 1.5 % (ii)

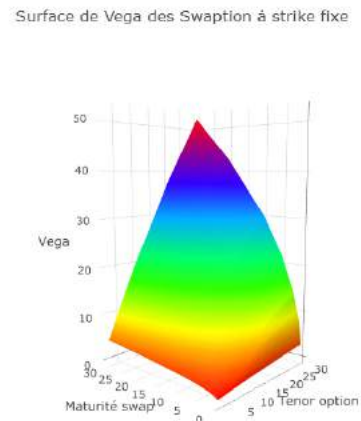


FIGURE 3.69 – Surface de Vega de strike ATM (ii)

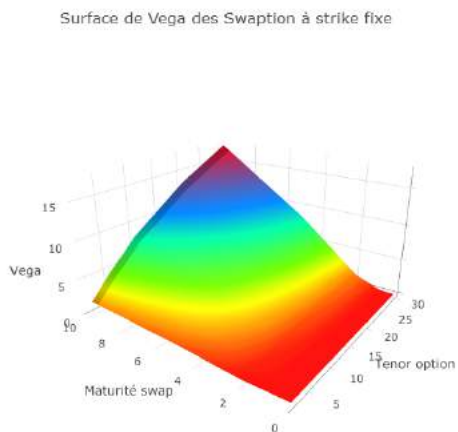


FIGURE 3.70 – Surface de Vega de strike - 1.5 % (ii)

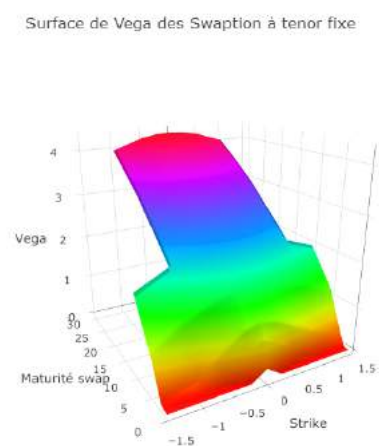


FIGURE 3.71 – Surface de Vega de tenor fixe 2 an (iii)

Le raisonnement précédent induit que la fonction objectif de calibrage doit tendre à réduire l'erreur d'estimation sur les *swaption* de maturité élevée, de *tenor* élevé se situant autour de l'ATM à savoir les points les plus liquides du marché.

Aussi, la fonction de calibrage avec la pondération au moyen des vega doit prendre en considération la transformation logit modifiée, appliquée aux volatilités pour ne pas introduire de biais dans les estimations. La pondération sera donc de la forme suivante avec P le prix de l'option et f la fonction inverse du logit appliquée au prix de l'option :

$$f(P) = \frac{\sigma_{max}^{SW}}{1 + e^{-P}} \Rightarrow \frac{\partial f(P)}{\partial \sigma_{\alpha,\beta}} = \frac{\partial P}{\partial \sigma_{\alpha,\beta}} \sigma_{max}^{SW} \frac{e^{-P}}{(1 + e^{-P})^2} \quad (3.83)$$

$$= v \left(\frac{\sigma_{max}^{SW}}{1 + e^{-\ln\left(\frac{\sigma_{\alpha,\beta}}{\sigma_{max}^{SW} - \sigma_{\alpha,\beta}}\right)}} \right) \sigma_{max}^{SW} \frac{e^{-\ln\left(\frac{\sigma_{\alpha,\beta}}{\sigma_{max}^{SW} - \sigma_{\alpha,\beta}}\right)}}{\left(1 + e^{-\ln\left(\frac{\sigma_{\alpha,\beta}}{\sigma_{max}^{SW} - \sigma_{\alpha,\beta}}\right)}\right)^2} \quad (3.84)$$

$$= v(\sigma_{\alpha,\beta}) \sigma_{max}^{SW} \frac{e^{-\ln\left(\frac{\sigma_{\alpha,\beta}}{\sigma_{max}^{SW} - \sigma_{\alpha,\beta}}\right)}}{\left(1 + e^{-\ln\left(\frac{\sigma_{\alpha,\beta}}{\sigma_{max}^{SW} - \sigma_{\alpha,\beta}}\right)}\right)^2} \quad (3.85)$$

Ainsi, la transformation de vega utilisée dans la pondération vaut :

$$v = \sigma_{max}^{SW} v_{Swaption} \frac{e^{-\ln\left(\frac{\sigma_{\alpha,\beta}}{\sigma_{max}^{SW} - \sigma_{\alpha,\beta}}\right)}}{\left(1 + e^{-\ln\left(\frac{\sigma_{\alpha,\beta}}{\sigma_{max}^{SW} - \sigma_{\alpha,\beta}}\right)}\right)^2} \quad (3.86)$$

La fonction de calibrage est alors définie comme suit pour rentrer dans le cadre d'estimation des moindres carrés pondérés :

$$F(\beta_0, \dots, \beta_{19}) = \sum_{i=1}^n \omega_{\alpha_i, \beta_i} [TransSW(\sigma_{\alpha_i, \beta_i}(M_i, Terme_{\alpha_i}, Tenor_{\beta_i})) - TransSW(\sigma_{\alpha_i, \beta_i}(M_i, \widehat{Terme_{\alpha_i}}, Tenor_{\beta_i}))]^2 \quad (3.87)$$

Avec :

$$\omega_{\alpha_i, \beta_i} = \frac{v(S_{\alpha_i, \beta_i}(0), M_i, Terme_{\alpha_i}, Tenor_{\beta_i}, \sigma_{\alpha_i, \beta_i})}{\sum_{k=1}^n v(S_{\alpha_k, \beta_k}(0), M_k, Terme_{\alpha_k}, Tenor_{\beta_k}, \sigma_{\alpha_k, \beta_k})} \quad (3.88)$$

Pour plus de commodité pour l'expression de l'estimateur des moindres carrés pondérés, réécrivons le modèle linéaire sous forme matricielle :

$$Y = XB + U, U \sim N(0, \sigma_{\alpha, \beta} I) \quad (3.89)$$

Avec :

$$Y_{n,1} = \begin{bmatrix} TransSW(\sigma_{\alpha_1, \beta_1}(M_1, Terme_{\alpha_1}, Tenor_{\beta_1})) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ TransSW(\sigma_{\alpha_n, \beta_n}(M_n, Terme_{\alpha_n}, Tenor_{\beta_n})) \end{bmatrix} \quad I_{n,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{20,n} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{19} \end{bmatrix}$$

Puis la matrice X composée des vecteurs suivants concaténés :

$$X_{1,20}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ M_1 \\ Terme_{\alpha_1} \\ Tenor_{\beta_1} \\ M_1 * Terme_{\alpha_1} \\ M_1 * Tenor_{\beta_1} \\ Terme_{\alpha_1} * Tenor_{\beta_1} \\ Terme_{\alpha_1}^2 \\ Tenor_{\beta_1}^2 \\ M_1^2 \\ M_1^2 * Terme_{\alpha_1} \\ M_1^2 * Tenor_{\beta_1} \\ M_1 * Terme_{\alpha_1} * Tenor_{\beta_1} \\ Terme_{\alpha_1}^2 * Tenor_{\beta_1} \\ Terme_{\alpha_1}^2 * M_1 \\ Tenor_{\beta_1}^2 * Terme_{\alpha_1} \\ Tenor_{\beta_1}^2 * M_1 \\ Terme_{\alpha_1}^3 \\ Tenor_{\beta_1}^3 \\ M_1^3 \end{bmatrix}, \dots, X_{n,20}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ M_n \\ Terme_{\alpha_n} \\ Tenor_{\beta_n} \\ M_n * Terme_{\alpha_n} \\ M_n * Tenor_{\beta_n} \\ Terme_{\alpha_n} * Tenor_{\beta_n} \\ Terme_{\alpha_n}^2 \\ Tenor_{\beta_n}^2 \\ M_n^2 \\ M_n^2 * Terme_{\alpha_n} \\ M_n^2 * Tenor_{\beta_n} \\ M_n * Terme_{\alpha_n} * Tenor_{\beta_n} \\ Terme_{\alpha_n}^2 * Tenor_{\beta_n} \\ Terme_{\alpha_n}^2 * M_n \\ Tenor_{\beta_n}^2 * Terme_{\alpha_n} \\ Tenor_{\beta_n}^2 * M_n \\ Terme_{\alpha_n}^3 \\ Tenor_{\beta_n}^3 \\ M_n^3 \end{bmatrix}$$

Introduisons la matrice de poids :

$$W_{n,n} = \begin{bmatrix} \omega_{\alpha,\beta,1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \omega_{\alpha,\beta,n} \end{bmatrix}$$

L'estimateur des moindres carrés pondérés (MCP) découle du programme d'optimisation suivant :

$$\text{Min}_B (Y - XB)^T W (Y - XB) \quad (3.90)$$

Et permet d'avoir une expression explicite garantissant l'homogénéité des résultats obtenus (minimums globaux) :

$$B_{MCP} = (X^T W X)^{-1} X^T W Y \quad (3.91)$$

Reconstitution des séries chronologiques

Présentation des données Bloomberg

Nous avons à notre disposition une plage de données du 04/07/2011 au 11/06/2018 (soit 1774 points du passé), dans laquelle les triplets $(Terme_i, Tenor_i, K_i)$ sont disponibles :

$$Terme = \frac{1}{12} [1 \mid 3 \mid 6 \mid 9 \mid 12 \mid 24 \mid 60 \mid 120 \mid 240 \mid 360] \quad (3.92)$$

$$Tenor = [2 \mid 5 \mid 10 \mid 20 \mid 30] \quad (3.93)$$

$$K = \frac{1}{100} [-1.50 \mid -1 \mid -0.50 \mid -0.25 \mid ATM \mid 0.25 \mid 0.50 \mid 1 \mid 1.50] \quad (3.94)$$

Modèle général

La partie précédente explique la construction des séries chronologiques supposées inobservables (i.e. dans un modèle dynamique à espace d'états), par la méthode des moindres carrés. Cette méthode en deux étapes de s'acquitter d'une dimension (la fameuse équation de mesure des modèles à espace d'états), donne cette forme à la dynamique du cube de volatilité implicite :

$$\left\{ \begin{array}{l} TransSW(\sigma_{\alpha,\beta}(M, Terme, Tenor)) = \\ \beta_{0,t} + \beta_{1,t} * M_{\alpha,\beta,t} + \beta_{2,t} * Terme_{\alpha} + \beta_{3,t} * Tenor_{\beta} + \beta_{4,t} * M_{\alpha,\beta,t} * Terme_{\alpha} \\ + \beta_{5,t} * M_{\alpha,\beta,t} * Tenor_{\alpha} + \beta_{6,t} * Terme_{\alpha} * Tenor_{\beta} + \beta_{7,t} * Terme_{\alpha}^2 + \beta_{8,t} * Tenor_{\beta}^2 \\ + \beta_{9,t} * M_{\alpha,\beta,t}^2 + \beta_{10,t} * M_{\alpha,\beta,t}^2 * Terme_{\alpha} + \beta_{11,t} * M_{\alpha,\beta,t}^2 * Tenor_{\beta} \\ + \beta_{12,t} * M_{\alpha,\beta,t} * Terme_{\alpha} * Tenor_{\beta} + \beta_{13,t} * Terme_{\alpha}^2 * Tenor_{\beta} \\ + \beta_{14,t} * Terme_{\alpha}^2 * M_{\alpha,\beta,t} + \beta_{15,t} * Tenor_{\beta}^2 * Terme_{\alpha} + \beta_{16,t} * Tenor_{\beta}^2 * M_{\alpha,\beta,t} \\ + \beta_{17,t} * Terme_{\alpha}^3 + \beta_{18,t} * Tenor_{\beta}^3 + \beta_{19,t} * M_{\alpha,\beta,t}^3 + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\alpha,\beta}) \end{array} \right. \quad (3.95)$$

Pour la présente étude, nous retenons l'expression de la « moneyness » :

$$M_{\alpha,\beta,t} = \frac{K_{\alpha,\beta} - S_{\alpha,\beta,t}(0)}{\sqrt{Terme_{\alpha} + Tenor_{\beta}}} \quad (3.96)$$

Modèle retenu

La sélection du modèle final ne peut pas s'effectuer avec une méthode exhaustive pour définir une spécification inter-temporelle (1774 données (N=1774)) cohérente. En pratique, pour chaque jeu de données journalières, il existe 1 048 575 spécifications (modèles différents) à tester ($\sum_{k=1}^{20} C_n^k = 2^{20} - 1 = 1048575$).

Le problème s'y prêtant (données spatiales à t fixé), la notion de validation croisée est introduite dans le choix de spécification du modèle, à savoir la présence conjointe d'indicateurs explicatifs et prédictifs. Pour éviter le biais de sélection lié au choix des points à prédire, ceux-ci sont tirés aléatoirement selon l'importance des poids des vega. Il s'agit tout simplement de tirer au hasard des volatilités en fixant leur probabilité d'être tiré au sort selon leur vega (une volatilité associée à un vega élevé aura une probabilité d'être tiré au sort plus élevée).

De cette façon, le modèle sera calibré et plus fin davantage sur les volatilités dont les variations de prix sont les plus grandes. L'intérêt est d'être meilleur sur les volatilités engendrant des écarts de prix plus élevés. Pour cela, par pas de temps, la base est séparée en une base d'apprentissage constitué de 72 % des volatilités et d'une base de test constitué de 28 % des volatilités (tirage aléatoire sur les 9 moneyness (p=9)).

Afin de limiter le nombre de modèle testé sur l'ensemble des pas de temps, l'étude des modèles s'est limitée à ceux compris entre 6 et 13 paramètres. L'étude a été menée au préalable sur plusieurs pas de temps (3 par année) mais pas sur la totalité des pas de temps : le but est de se donner une première idée des variables impactant le plus la paramétrisation ainsi que le nombre de variables optimales à tester dans les différents modèles.

A chaque fois, tous les modèles avec un nombre de paramètre fixe sont testés. Ensuite, une domination de Pareto s'effectue entre ces modèles dont le nombre de paramètre est le même : le critère de minimisation sur le nombre de paramètre n'est donc plus pris en compte dans la domination de Pareto (minimisation de quatre métriques). Seul les modèles sortant en front 1 sont conservés pour l'étude finale sur tous les pas de temps. Afin de ne pas passer à côté de certains modèles qui auraient pu être intéressants sur tous les pas de temps, un *bootstrapping* a été réalisé avec les modèles en premier lieu de 6 à 12 paramètres puis en second lieu avec des modèles plus paramétrés pour jauger les différences de performance sur le nombre de variables. En conclusion, environ 3000 modèles sortis en front 1 sont testés sur tous les pas de temps.

La formalisation de la procédure de calibrage, les fonctions objectifs de calibrage, les indicateurs indicatifs sont les mêmes que l'étude faite sur la nappe de volatilité implicite du produit dérivé de taux *Cap*. Le lecteur pourra se référer à la section précédente pour se rappeler de ces formalisations.

Programme d'optimisation multi-objectif

$$(PMO) = \begin{cases} \min_{x=(x_1, \dots, x_{20})} F(x) = (f_1(x), \dots, f_5(x)) \\ x_{j=1, \dots, 20} = \begin{cases} 1 & \text{si selection} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad (3.97)$$

Choix de modèle

Avec ce qui précède, environ 3000 modèles sont testés sur tous les pas de temps.

La dominance de pareto ($y \propto x \Leftrightarrow F(x) \leq F(y), \exists i = 1, \dots, 5 \text{ tq } f_i(x) < f_i(y)$), permet d'établir le front 1, trié sur la moyenne des erreurs de prédiction. Cette procédure d'optimisation multi-objectif donne dès lors un ensemble de spécifications possibles (60 dans l'exemple en annexe, issu d'un tirage aléatoire (des points à prédire) unique à chaque pas respectant l'ordre de grandeur des poids de vega d'un pas à un autre).

L'étude des résultats présentés en annexe (cf. **Résultats des indicateurs de sélection de modèle [Swaption]**) indique que les modèles à 9 paramètres sont compétitifs face à des modèles plus paramétrés. A la recherche d'un modèle le moins paramétré possible pour intégration futur dans le VAR mais avec un pouvoir prédictif important, le choix final se porte donc sur le modèle à 9 paramètres (identifiant 128). En effet, parmi les modèles à 9 paramètres, il prédit mieux et est le plus stable.

A ce titre, le modèle retenu est celui à 9 paramètres :

$$\left\{ \begin{array}{l} TransSW(\sigma_{\alpha,\beta}(M, Terme, Tenor)) = \\ \beta_{0,t} + \beta_{1,t} * M_{\alpha,\beta,t} + \beta_{2,t} * Terme_{\alpha} + \beta_{3,t} * Tenor_{\beta} + \beta_{4,t} * M_{\alpha,\beta,t} * Tenor_{\beta} \\ + \beta_{5,t} * Terme_{\alpha} * Tenor_{\beta} + \beta_{6,t} * Terme_{\alpha}^2 + \beta_{7,t} * Terme_{\alpha}^3 \\ + \beta_{8,t} * Terme_{\alpha}^2 * Tenor_{\beta} + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\alpha,\beta}) \end{array} \right. \quad (3.98)$$

Reconstruction des séries chronologiques

La reconstruction des séries chronologiques des régresseurs est illustrée ci-dessous :

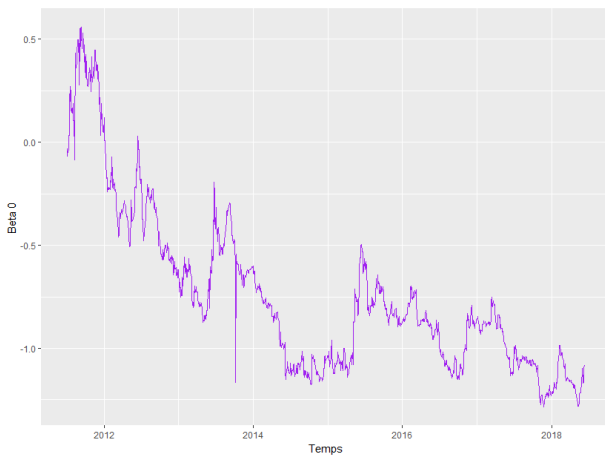


FIGURE 3.72 – Serie chronologie Beta0 Swaption

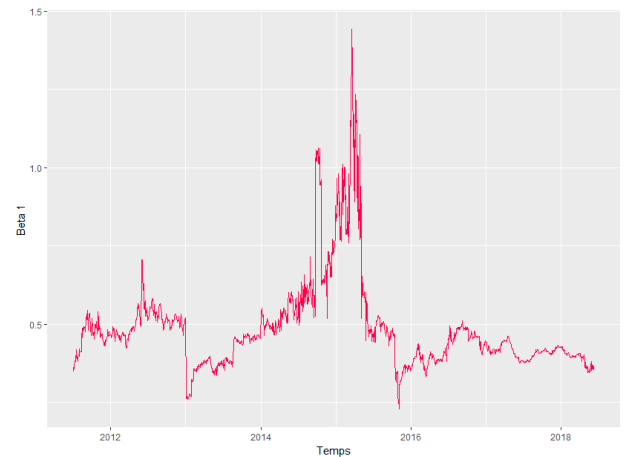


FIGURE 3.73 – Serie chronologie Beta1 Swaption

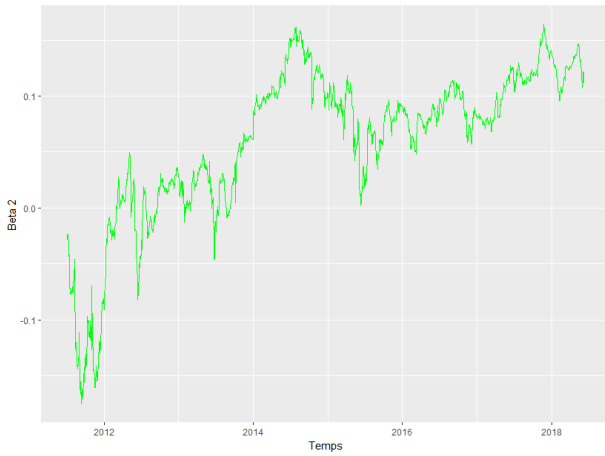


FIGURE 3.74 – Serie chronologie Beta2 Swaption



FIGURE 3.75 – Serie chronologie Beta3 Swaption

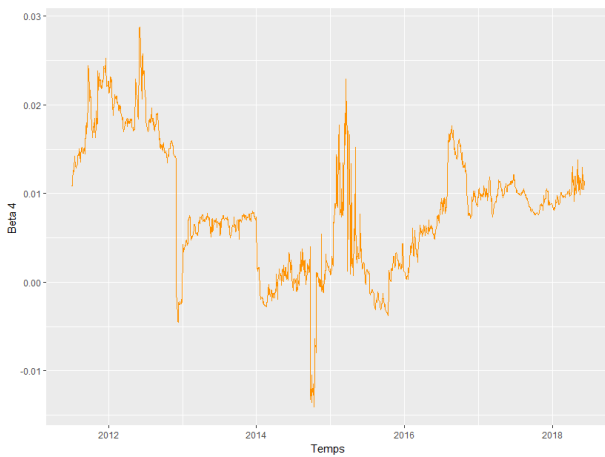


FIGURE 3.76 – Serie chronologie Beta4 Swaption

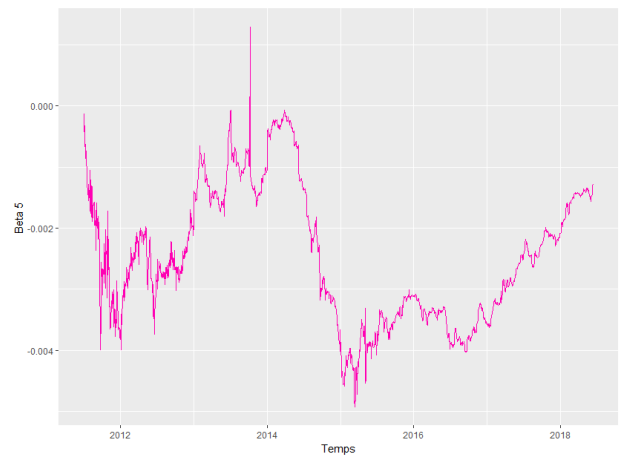


FIGURE 3.77 – Serie chronologie Beta5 Swaption

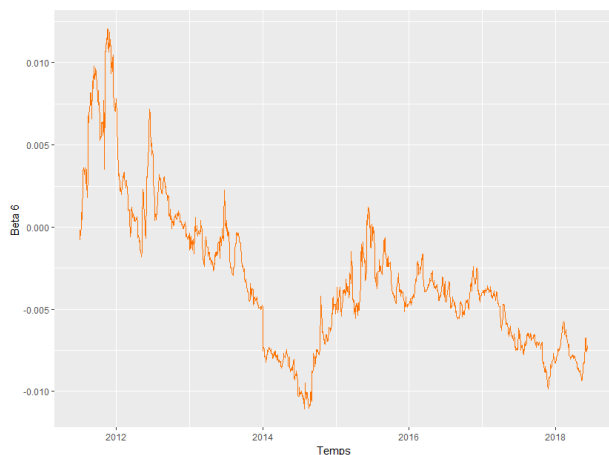


FIGURE 3.78 – Serie chronologie Beta6 Swaption

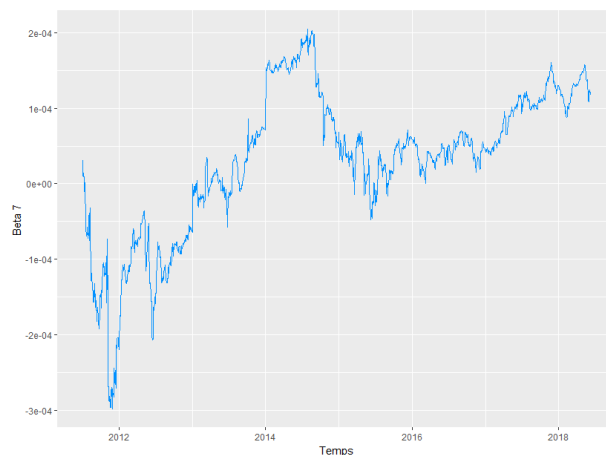


FIGURE 3.79 – Serie chronologie Beta7 Swaption

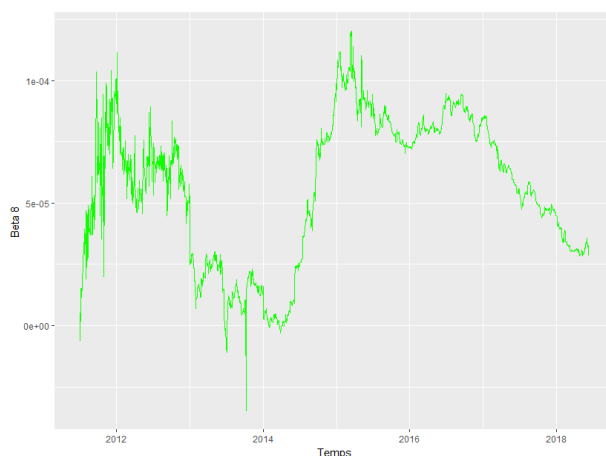


FIGURE 3.80 – Serie chronologie Beta8 Swaption

Ces graphiques montrent la présence de certains points quelque peu atypiques et à investiguer au vue des sauts assez important, notamment sur la période du 02/01/2013 au 28/01/2013 (environ les mêmes dates identifiées pour les points aberrants des séries temporelles du modèle des *cap*). Une des explications mise en avant serait la qualité des données fournies par Bloomberg sur cette période. Pour cela, l'étude de la qualité du *fitting* des surfaces de volatilité implicite et celles des prix des *swaption* semble indispensable pour valider le modèle choisi à 9 variables.

Ci-dessous, la représentation des surfaces de volatilité implicite et de prix (en bps du nominal) pour la date du 11/01/2013 pour tous les *strike* :

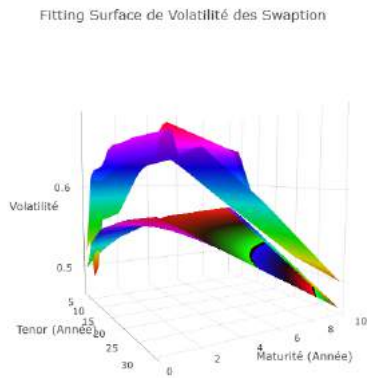


FIGURE 3.81 – Surfaces de Volatilité des swaption à $K = -150$ bps

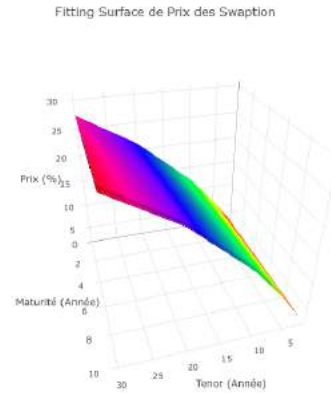


FIGURE 3.82 – Surfaces de Prix des swaption à $K = -150$ bps

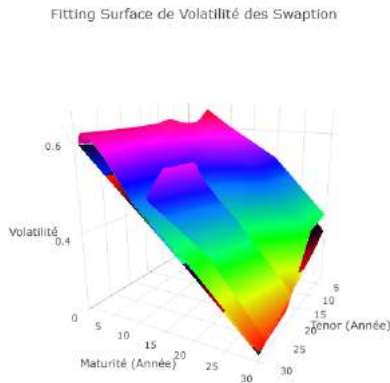


FIGURE 3.83 – Surfaces de Volatilité des swaption à $K = -100$ bps

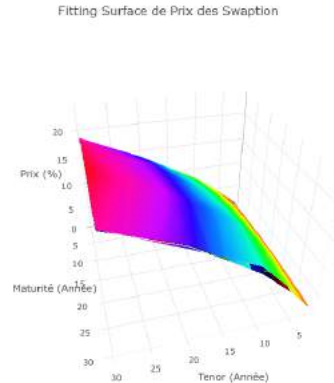


FIGURE 3.84 – Surfaces de Prix des swaption à $K = -100$ bps

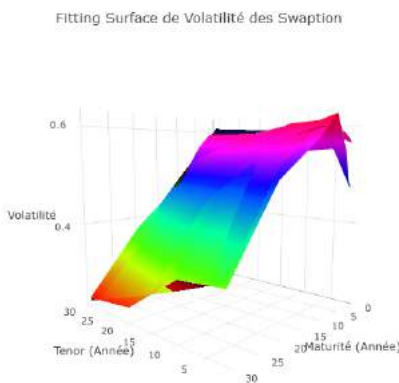


FIGURE 3.85 – Surfaces de Volatilité des swaption à $K = -50$ bps

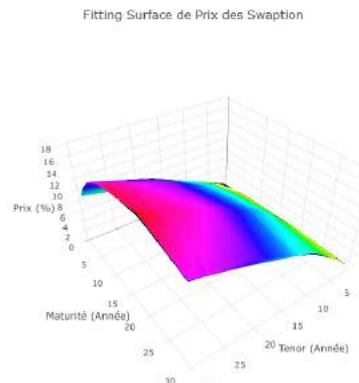


FIGURE 3.86 – Surfaces de Prix des swaption à $K = -50$ bps

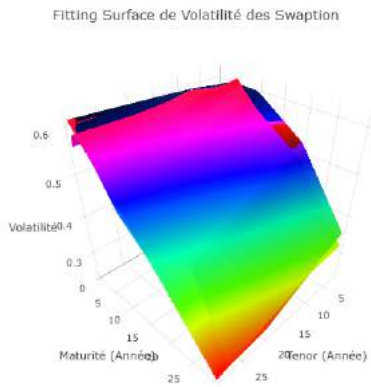


FIGURE 3.87 – Surfaces de Volatilité des swaption à $K = -25$ bps

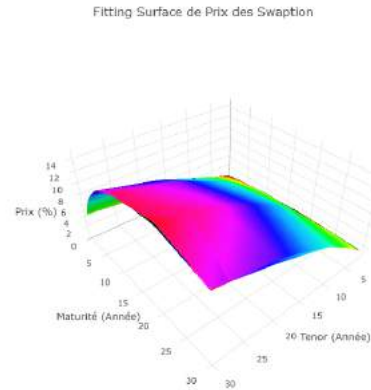


FIGURE 3.88 – Surfaces de Prix des swaption à $K = -25$ bps

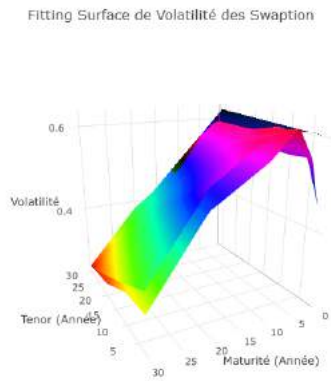


FIGURE 3.89 – Surfaces de Volatilité des swaption à $K = \text{ATM}$ bps

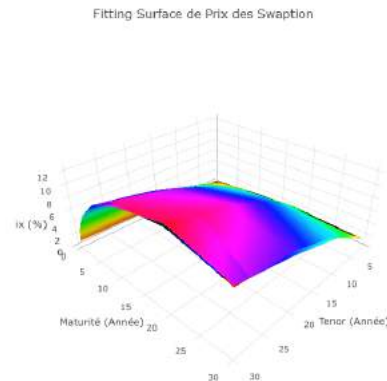


FIGURE 3.90 – Surfaces de Prix des swaption à $K = \text{ATM}$

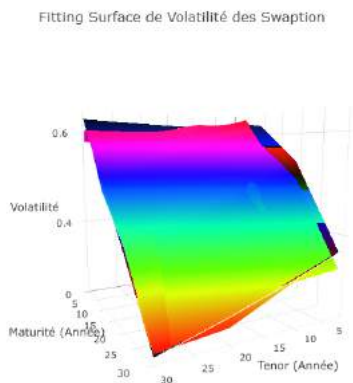


FIGURE 3.91 – Surfaces de Volatilité des swaption à $K = 25$ bps

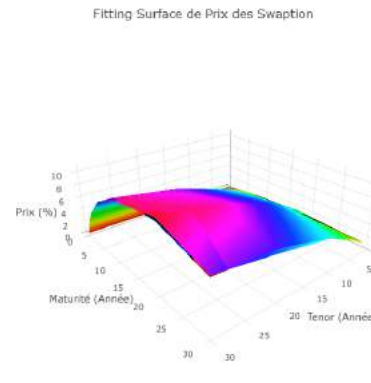


FIGURE 3.92 – Surfaces de Prix des swaption à $K = 25$ bps

Fitting Surface de Volatilité des Swaption

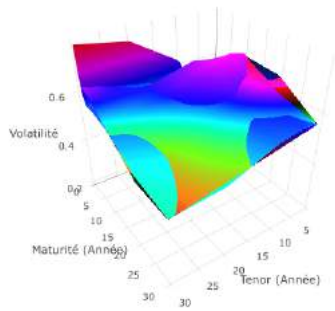


FIGURE 3.93 – Surfaces de Volatilité des swaption à $K = 50$ bps

Fitting Surface de Prix des Swaption

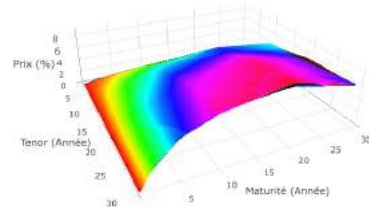


FIGURE 3.94 – Surfaces de Prix des swaption à $K = 50$ bps

Fitting Surface de Volatilité des Swaption

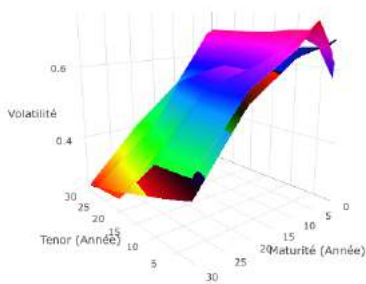


FIGURE 3.95 – Surfaces de Volatilité des swaption à $K = 100$ bps

Fitting Surface de Prix des Swaption

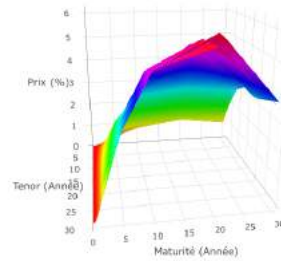


FIGURE 3.96 – Surfaces de Prix des swaption à $K = 100$ bps

Fitting Surface de Volatilité des Swaption

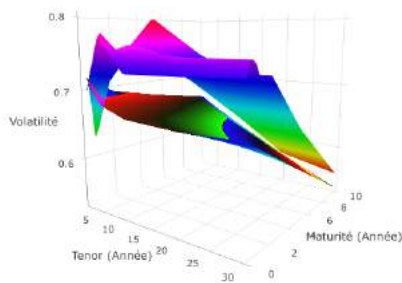


FIGURE 3.97 – Surfaces de Volatilité des swaption à $K = 150$ bps

Fitting Surface de Prix des Swaption

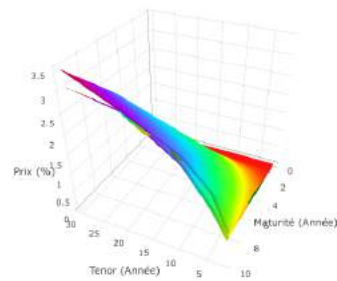


FIGURE 3.98 – Surfaces de Prix des swaption à $K = 150$ bps

Les surfaces liées à ces dates révèlent un *fitting* de bonne qualité, seul le *fitting* des surfaces max OTM et max ITM sont très mauvaises : le modèle n'arrive pas à capter les volatilités élevées et la forme de la surface de volatilité : cela s'explique par un modèle dont la calibration est pondérée par les Vega donc il est normal d'apercevoir cela. En effet, les vega associés à ces *strike* sont les plus faibles de la matrice de volatilité des *swaption* (cf. graphique des vega de *swaption*). Ce décalage au niveau du *fitting* de la surface de volatilité permet d'être meilleur au niveau de la réplication des prix (en bps du nominal), qui est remarquable ici pour chacun des *strike* (y compris pour les *strike* les plus ITM et OTM).

D'après les surfaces précédentes, le *fitting* est de bonne qualité pour les périodes dont les points semblent atypiques.

Validations des régresseurs et du modèle linéaire

R^2 Ajusté		Test Student (significativité individuelle)	
Moyenne(R^2 Ajusté)	89,5 %	Proportion Beta0 significatif	99,4%
Min(R^2 Ajusté)	48,3 %	Proportion Beta1 significatif	99,9%
Max(R^2 Ajusté)	99,2 %	Proportion Beta2 significatif	93,0%
Quantile.0.95(R^2 Ajusté)	98,4 %	Proportion Beta3 significatif	87,0%
		Proportion Beta4 significatif	63,9%
		Proportion Beta5 significatif	93,6%
		Proportion Beta6 significatif	91,0%
		Proportion Beta7 significatif	90,5%
		Proportion Beta8 significatif	89,9%

TABLE 3.7 – Tableaux récapitulatifs de validation du modèle [Swaption] (1)

Test de Fisher (significativité globale)	p-value = 2.2e-16 (accepté pour tous les pas de temps)
Test de normalité des résidus	Rejeté (99 %) : 1,564631e-4 (p-value)
Test de Box-Pierce / Ljung-Box (Bruit Blanc)	Accepté pour 48 % des pas de temps
Test d'homoscédasticité des résidus	Rejeté pour 97 % des pas de temps

TABLE 3.8 – Tableau récapitulatif de validation du modèle [Swaption] (2)

Erreur globale pour les prix des options (n = 751651)		
Erreur pondéré/Modèle pondéré	RMSE	1,009 bps
	TVaR.0.95.RMSE	9,718 bps
Erreur normal/WLS	RMSE	14,557 bps
	TVaR.0.95.RMSE	103,288 bps
Erreur normal/OLS	RMSE	21,926 bps
	TVaR.0.95.RMSE	162,929 bps

TABLE 3.9 – Tableau récapitulatif de validation du modèle [Swaption] (3)

Chacun des régresseurs est hautement significatif, le R^2 ajusté quant à lui est très élevé, il y a donc une explication importante des volatilités par les variables mises en cause. Cependant, les résidus du modèle linéaire ne sont globalement ni gaussiens, ni homoscédastiques. En ce qui concerne l'erreur globale pondéré par les poids de vega sur tout l'historique, le modèle donne de très bons résultats avec un écart moyen de 1,009 bps entre les prix estimés par le modèle et ceux du marché, et les 5% pire écarts de prix sont en moyenne de 9,718 bps. Une remarque intéressante peut être faite quand on compare l'erreur des modèles calibrés OLS et WLS, le modèle calibré WLS donne de meilleurs résultats : cela valide donc l'utilisation des vega dans la calibration du modèle paramétrique. En ce qui concerne le modèle linéaire, dans la mesure où l'on cherche à estimer la quantité $E(Y|XB)$, puisque les résidus sont des bruits blancs, le modèle linéaire est validé en partie.

On obtient alors les surfaces de volatilité et de prix (en bps du nominal) prédites suivantes VS les surfaces de volatilité et de prix (en bps du nominal) observées pour deux dates et des *strike* choisis aléatoirement et celles présentée en début de section :

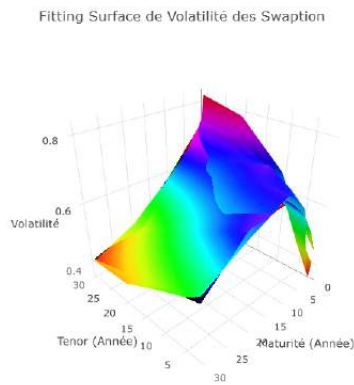


FIGURE 3.99 – Surfaces de Vol. des swaption à $K = -100$ bps 04/02/2016

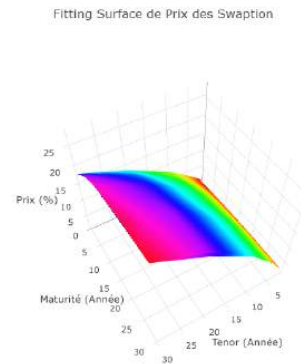


FIGURE 3.100 – Surfaces de Prix des swaption à $K = -100$ bps au 04/02/2016

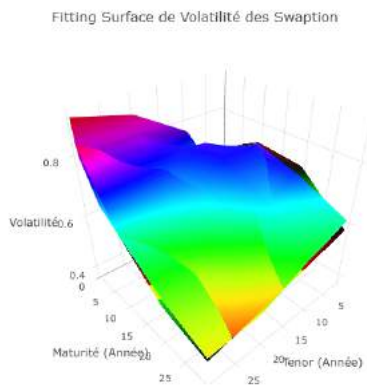


FIGURE 3.101 – Surfaces de Vol. des swaption à $K = 50$ bps au 08/03/2016

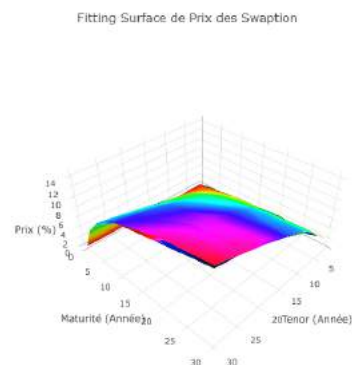


FIGURE 3.102 – Surfaces de Prix des swaption à $K = 50$ bps au 08/03/2016

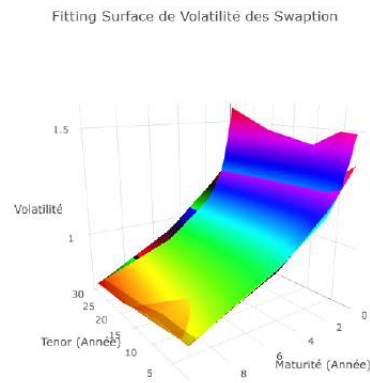


FIGURE 3.103 – Surfaces de Vol. des swaption à $K = 150$ bps 05/09/2011

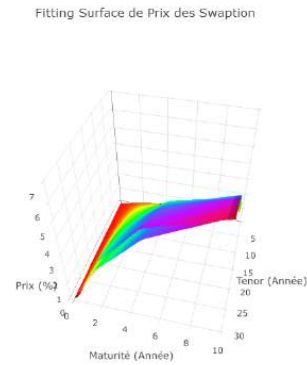


FIGURE 3.104 – Surfaces de Prix des swaption à $K = 150$ bps au 05/09/2011

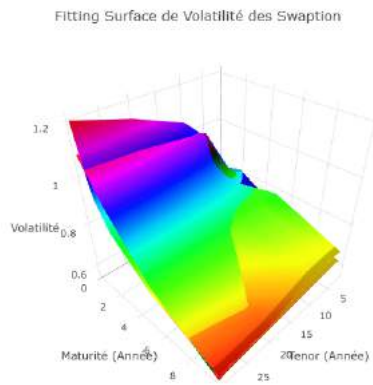


FIGURE 3.105 – Surfaces de Vol. des swaption à $K = -150$ bps 05/09/2011

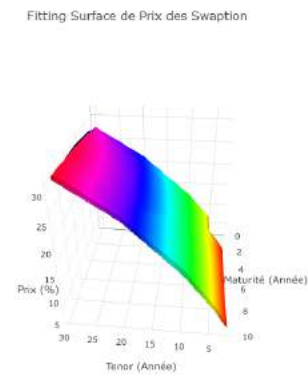


FIGURE 3.106 – Surfaces de Prix des swaption à $K = -150$ bps au 05/09/2011

A ce stade, le modèle choisi est validé. Le *fitting* de la nappe de volatilité implicite pour chaque pas de temps est de très bonne qualité quand on considère que l'on prédit 450 volatilités au moyen d'un modèle à 9 paramètres. Dans l'étude, ce qui est primordiale est la réplique des prix, et l'utilisation de la pondération par les vega permet d'améliorer l'ajustement au niveau des prix qui est remarquable pour chacun des *strike*. Avec les surfaces de volatilités présentes, on remarque que le modèle peut être performant même pour certains *strike* très ITM et OTM.

Le prochain paragraphe s'intéresse à la modélisation des facteurs de risque du crédit.

3.5 Le risque de crédit des obligations : Govies et Corporate

Cette section permet d'intégrer le risque de crédit dans le prix des obligations cotées sur le marché. A terme, l'intérêt est de projeter les facteurs de risque responsables du risque de crédit dans la structure par terme de prix des obligations *Govies* et *Corporate*, respectivement les Obligations émises par les Etats (dettes souveraines) appelé OAT (Obligation Assimilable du Trésor) et les Obligations émises par les grandes entreprises cotées sur le marché. Ce risque de crédit aussi appelé risque de défaut ou de défaillance est capté au travers d'instruments financiers cotés sur le marché tels que les CDS associés aux pays et aux rating ainsi que le *spread* entre le prix d'une obligation sans risque (OAT AAA) et les prix d'obligation *Corporate* (intégrant le risque de crédit de manière implicite au travers de son prix).

3.5.1 Théorie du modèle LMN (à intensité de défaut)

Le modèle LMN (LONGSTAFF, MITHAL, and NEIS) sera utilisée pour modéliser le risque de crédit des obligations : comme les autres modèles à intensité, le LMN n'explique pas directement la cause du défaut mais s'intéresse davantage à la modélisation de la probabilité de défaut des entreprises (lié à des obligations : les *Corporate*). Contrairement aux modèles structurels où le défaut est prévisible, le défaut dans une modélisation à intensité de défaut peut arriver à n'importe quel moment (aucun élément ne peut le prédire).

Pour la suite, le *spread* de rendement des obligations *Corporate* est calculé comme la différence entre le rendement d'une obligation *Corporate* et le rendement d'une obligation sans risque à taux de coupon et maturité identiques. Ainsi, les rendements des obligations risquées et sans risque sont comparés avec des flux de trésorerie promis identiques.

Soit r_t le taux sans risque, λ_t l'intensité du processus de Poisson qui gouverne le défaut, et γ_t un processus de liquidité qui sera utilisé pour capter le rendement supplémentaire que les investisseurs peuvent exiger comme compensation du risque de crédit par rapport aux titres sans risque. Chacun des processus r_t , λ_t et γ_t est stochastique et nous supposons qu'ils évoluent indépendamment les uns des autres. Cette hypothèse simplifie grandement le modèle, mais a peu d'effet sur les résultats empiriques.

Comme dans Lando [1998], nous faisons l'hypothèse qu'un obligataire récupère une fraction de $(1 - w)$ de la valeur nominale de l'obligation en cas de défaillance (w : taux de recouvrement). Compte tenu de l'hypothèse d'indépendance, il n'est pas utile de spécifier la dynamique risque-neutre du taux sans-risque pour résoudre les primes de CDS et les prix des obligations *Corporate*. Cependant, les dynamiques doivent être définis telles que la valeur d'une obligation sans risque $D(0,T)$ à maturité T soit donnée par l'expression usuelle :

$$D(0, T) = \mathbb{E} \left[\exp \left(- \int_0^T r_t dt \right) \right] \quad (3.99)$$

La dynamique du prix des obligations zéro-coupon *Corporate* est modélisée par un taux instantané décomposé en taux sans risque (r_t), spread de crédit (λ_t) et spread de

liquidité (γ_t). Le taux d'actualisation *Corporate* (rc_t) est défini comme suit :

$$rc_t = r_t + \lambda_t + \gamma_t \quad (3.100)$$

Le modèle LMN n'impose pas de modèle de taux sans risque particulier. De cette façon, le modèle de Nelson Siegel Svensson (Nelson Siegel augmenté) sera utilisé.

Pour spécifier la dynamique du taux d'intensité de défaut λ_t , le modèle du type CIR sera appliqué :

$$d\lambda_t = (\alpha - \beta\lambda_t)dt + \sigma\sqrt{\lambda_t}dZ_{\lambda_t} \quad (3.101)$$

Où α , β et σ sont des constantes positives tels que $\sigma^2 < 2\alpha$ et $\lambda_0 > 0$ avec Z_{λ_t} un mouvement brownien standard. Le paramètre α donne la moyenne à long terme, et $\beta > 0$ donne la vitesse à laquelle le processus va converger vers cet équilibre. Cette dynamique permet à la fois un retour à la moyenne et l'hétéroscédasticité conditionnelle du taux *Corporate*, et de garantir que le processus de l'intensité est toujours positive ou nulle.

En ce qui concerne la dynamique du processus de la prime de liquidité γ_t , la dynamique suivante est considérée :

$$d\gamma_t = \eta dZ_{\gamma_t} \quad (3.102)$$

Où η est une constante positive et Z_{γ_t} est un mouvement brownien standard. Cette dynamique pour la prime de liquidité lui permet d'atteindre des valeurs à la fois positives et négatives.

D'après les articles de Duffie [1998], Lando [1998], Duffie et Singleton [1999], la valeur d'une obligation *Corporate* noté CB est représentée sous la probabilité risque-neutre comme somme de simples espérances :

$$CB(0, c, w, t) = \mathbb{E} \left(c \int_0^T \exp \left(- \int_0^t (r_s + \lambda_s + \gamma_s) ds \right) dt \right) \quad (3.103)$$

$$+ \mathbb{E} \left(\exp \left(- \int_0^T (r_t + \lambda_t + \gamma_t) dt \right) \right) \quad (3.104)$$

$$+ \mathbb{E} \left((1 - w) \int_0^T \lambda_t \exp \left(- \int_0^t (r_s + \lambda_s + \gamma_s) ds \right) dt \right) \quad (3.105)$$

Avec c le taux nominal du coupon de l'obligation *Corporate*, supposé payé en permanence tant qu'il n'y a pas de défaut.

Chacune des trois composantes représentent respectivement la valeur actuelle des coupons promis, la valeur actualisée du remboursement principal promis et la valeur actualisée des paiements versés en cas de défaut. A noter également que dans chaque terme, les flux de trésorerie de l'obligation sont actualisés au taux d'actualisation ajusté rc_t .

En ce qui concerne l'évaluation du CDS, rappelons que les swaps sont des contrats, pas des titres. Cette distinction est importante car la nature contractuelle des CDS les rend beaucoup moins sensibles aux effets de liquidité. Plusieurs remarques peuvent être faites sur les CDS :

- les titres sont en offre fixe.
- le montant notionnel des CDS peut être arbitrairement élevé : les pressions exercées par l'offre et la demande susceptibles d'avoir une incidence sur les obligations de sociétés sont beaucoup moins susceptibles d'influer sur les CDS.
- la nature générique ou fongible des flux de trésorerie contractuels signifie que les CDS ne peuvent pas devenir «spéciaux» de la même manière que des titres tels que des bons du Trésor ou des actions populaires.
- dans la mesure où de nouveaux CDS peuvent toujours être créés, ces contrats sont beaucoup moins susceptibles d'être «comprimés» que les obligations de sociétés sous-jacentes.
- étant donné que les swaps sur défaillance de crédit ressemblent à des contrats d'assurance, de nombreux investisseurs qui souscrivent une protection de crédit peuvent avoir l'intention de le faire pour un horizon fixe et, par conséquent, ne prévoient généralement pas de rompre leur position.
- même si un investisseur veut liquider une position de swap sur défaillance de crédit, il peut être moins coûteux de simplement entrer dans un nouveau swap dans la direction opposée que d'essayer de vendre sa position actuelle. Ainsi, la liquidité de sa position actuelle est moins pertinente compte tenu de sa capacité à répliquer les flux de trésorerie des swaps au moyen d'autres contrats.
- il peut parfois être difficile et coûteux d'obtenir des obligations *Corporate* à découvert. Cependant, il est généralement plus facile de vendre une protection que d'acheter une protection sur les marchés de CDS (exemple : le film *The Big Short : le casse du siècle*).

Enfin, Blanco, Brennan et Marsh [2003] montrent que les marchés des dérivés de crédit sont plus liquides que les marchés des obligations *Corporate* dans le sens où de nouvelles informations sont saisies par les primes de CDS plus rapidement que dans les prix des obligations *Corporate*. De cette manière, nous supposons que le processus de liquidité est applicable aux flux de trésorerie provenant des obligations de sociétés, mais non aux flux de trésorerie provenant des CDS. Ainsi, dans la suite, le processus de liquidité γ_t est ignoré dans l'évaluation des primes de CDS.

En supposant que la prime de CDS est payée en continu, la valeur actuelle de la jambe payeuse d'un CDS notée $PA(s,T)$ peut maintenant être exprimée comme suit avec s la prime payée par l'acheteur de la protection :

$$PA(s, T) = \mathbb{E} \left(s \int_0^T \exp \left(- \int_0^t (r_u + \lambda_u) du \right) dt \right) \quad (3.106)$$

De même, la valeur de la jambe vendeuse de protection donne :

$$PR(w, T) = \mathbb{E} \left(w \int_0^T \lambda_t \exp \left(- \int_0^t (r_u + \lambda_u) du \right) dt \right) \quad (3.107)$$

Enfin, en égalisant les deux jambes du CDS, on obtient la formule de la prime de CDS suivante :

$$s = \frac{\mathbb{E} \left(w \int_0^T \lambda_t \exp \left(- \int_0^t (r_u + \lambda_u) du \right) dt \right)}{\mathbb{E} \left(\int_0^T \exp \left(- \int_0^t (r_u + \lambda_u) du \right) dt \right)} \quad (3.108)$$

Compte tenu de l'équation du processus de l'intensité et celle du processus de liquidité, il est possible de déterminer des formules fermées tels que ceux de Duffie, Pan et Singleton

[2000] notamment pour le prix d'une obligation *Corporate* et pour la prime de CDS.

Cela donne donc pour le prix d'une obligation *Corporate* la formule fermée suivante :

$$CB_{théorique}(0, c, w, t) = c \int_0^T \exp(B(t)\lambda_0)C(t)D(0, t)\exp(-\gamma_0 t)dt \quad (3.109)$$

$$+ A(T)\exp(B(T)\lambda_0)C(T)D(0, T)\exp(-\gamma_0 T) \quad (3.110)$$

$$+ (1 - w) \int_0^T \exp(B(t)\lambda_0)C(t)D(0, t)(G(t) + H(t)\lambda_0)\exp(-\gamma_0 t)dt \quad (3.111)$$

Où λ_0 et γ_0 sont les valeurs initiales respectives des processus d'intensité de défaut et de liquidité et :

$$A(t) = \exp\left(\frac{\alpha(\beta + \psi)}{\sigma^2}t\right) \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\psi t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}} \quad (3.112)$$

$$B(t) = \frac{\beta - \psi}{\sigma^2} + \frac{2\psi}{\sigma^2(1 - \kappa e^{\psi t})} \quad (3.113)$$

$$C(t) = \exp\left(\frac{\eta^2 t^3}{6}\right) \quad (3.114)$$

$$G(t) = \frac{\alpha}{\psi}(e^{\psi t} - 1)\exp\left(\frac{\alpha(\beta + \psi)}{\sigma^2}t\right) \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\psi t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}+1} \quad (3.115)$$

$$H(t) = \exp\left(\frac{\alpha(\beta + \psi) + \psi\sigma^2}{\sigma^2}t\right) \left(\frac{1 - \kappa}{1 - \kappa e^{\psi t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}+2} \quad (3.116)$$

$$\psi = \sqrt{2\sigma^2 + \beta^2} \quad (3.117)$$

$$\kappa = \frac{\beta + \psi}{\beta - \psi} \quad (3.118)$$

Et pour la prime du CDS la formule fermée suivante :

$$S_{théorique} = \frac{w \int_0^T \exp(B(t)\lambda_0)D(0, t)(G(t) + H(t)\lambda_0)dt}{\int_0^T A(t)\exp(B(t)\lambda_0)D(0, t)dt} \quad (3.119)$$

Avec ces formules fermées, la calibration monde-réel sur tous les pas de temps consistera à adapter le modèle pour qu'il corresponde simultanément aux primes de CDS et aux prix des obligations *Corporate* pour chaque pas de temps.

Une fois ajusté aux données, le modèle peut ensuite être utilisé pour fournir des estimations directes de la composante par défaut du *spread* implicite grâce aux primes de CDS.

Ce modèle est calibré uniquement à partir des prix de marché des obligations *Corporate* et des dérivées de crédit (CDS dans notre cas). Cela permet d'obtenir des scénarios *Market-Consistent*.

3.5.2 Calibration du modèle LMN (à intensité de défaut)

Revue de la littérature et critiques de la calibration du LMN

D'après l'article « *Calibrating LMN model to compute best estimates in life insurance* » publié par Laïdi & Planchet [2015], Longstaff, Mithal and Neis [2004] ainsi que le mémoire de Ouajjou [2010], il est d'usage de calibrer en considérant les paramètres α , β et σ^2 constants selon les pas de temps et λ_0 latent sur les différents *tenor* disponibles. En l'occurrence, dans l'article de Planchet & Laïdi, la calibration se fait uniquement sur le *tenor* 5 ans.

En conclusion, la structure par terme des prix n'est pas reproduite avec un calibrage défini sur le *tenor* 5 ans. Dans un souci de pertinence par rapport à la structure par terme des prix de CDS, nous proposons de rester dans le cadre de Planchet & Laïdi et d'étendre le raisonnement à plusieurs *tenor*.

Calibration sur plusieurs *tenor*

Grâce à Bloomberg, un vaste ensemble de données sur les primes de CDS et sur les prix des obligations de sociétés (*corporate*) est disponible pour calibrer ce modèle.

Pour ce qui concerne les primes de CDS, elles sont disponibles pour 14 pays : Italie, France, Allemagne, Autriche, Norvège, Espagne, Portugal, Royaume-Uni, Irlande, Belgique, Suède, Finlande, Danemark et les Pays-Bas. Ces données de CDS sont des cotations journalières sur le marché du 10/10/2006 au 14/06/2018 (2351 pas de temps) et celles des *Corporate* sont sur la même période avec un large éventail de sociétés activement négociées sur le marché des dérivés de crédit. Toujours dans une optique de calibration en monde réel, l'approche de calibration se fera de manière emboîtée l'une après l'autre de la manière suivante :

- pour chacun des pays et pour l'ensemble des pas de temps, nous déterminerons les paramètres du processus CIR α , β , σ^2 et λ_0 ; il s'agit d'une optimisation globale donnant des paramètres globaux pour les paramètres α , β , σ^2 et d'une optimisation locale pour les λ_0 .
- pour chacun des pays et par pas de temps, nous déterminerons le paramètre d'intensité de défaut λ_0 ; il s'agit donc d'une optimisation locale (à chaque pas de temps) donnant pour chaque *tenor* l'intensité de défaut du pays considéré sachant les paramètres α , β , σ^2 calibrés de manière globale.
- vient alors la calibration des paramètres du processus de liquidité η (calibration globale) et γ_0 (calibration locale). Pour le γ_0 , il s'agit d'une optimisation locale (à chaque pas de temps) donnant pour chaque *tenor* la liquidité des dérivés du pays considéré.

Sans ignorer le fait que le taux de recouvrement est lié au type d'activité de la *Corporate* et aussi du niveau de levier (la dette de la *Corporate*, titre subordonné ou non), il sera fixé à 40 %.

Les paramètres α , β , σ^2 , λ_0 , γ_0 et η sont les paramètres de calibration. Ils sont estimés par la méthode OLS à partir des prix de marché des obligations *Corporate* et des CDS.

Grâce à aux formules fermées précédentes, l'objectif sera de calibrer le modèle pour correspondre à la fois la prime CDS et le prix des obligations *Corporate* dont l'échéance varie entre 6 mois et 30 ans.

Il peut être déjà intéressant de caractériser l'importance de ce calibrage et son utilisation dans la suite de l'étude. Comme mentionné précédemment, les paramètres α , β , σ^2 et η seront calibrés de manière globale par pays : on cherche les paramètres tels que l'erreur sur tous les prix de tous les pas de temps soit minimisée pour chacun des pays. Il existera donc autant de jeux de paramètres α , β , σ^2 qu'il y a de pays à savoir 14 (issue des primes de CDS) ainsi que pour les paniers de *Corporate* classés par *rating* et autant de η qu'il y a de pays et de *rating*. En ce qui concerne les λ_0 et les γ_0 , on minimise l'erreur par pas de temps de façon à obtenir autant de série de λ_0 et de γ_0 en fonction du tenor qu'il y a de pas de temps : structure par terme de λ_0 par pas de temps. Les λ_0 et les γ_0 seront donc des séries temporelles et de cette façon, nous chercherons à modéliser ces paramètres à l'aide d'un modèle paramétrique tout comme les nappes de volatilité implicite des produits dérivés Action et Taux. La spécification des modèles paramétriques et leur calibration pour λ_0 et γ_0 seront menés plus tard. Chacun des modèles paramétriques intègrera des facteurs de risque (les β du modèle linéaire) qui seront intégrés dans le VAR.

Mais pour l'instant, l'objectif est de calibrer les paramètres du modèle LMN afin de reproduire les prix des primes des CDS et les prix des *Corporate* sur tout l'historique toujours dans l'optique d'un modèle calibré en monde-réel. Ce calibrage sera effectué sous les conditions $\sigma^2 < 2\alpha$ (condition de Feller) et $\lambda_0 > 0$, pour garantir la positivité des solutions de l'équation CIR qui modélise l'intensité de défaut.

$$Tenor_{CDS} = [0.5 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 7 \mid 10] \quad (3.120)$$

$$Tenor_{Corporate} = Tenor_{résiduel} \in [0.5, 30] \quad (3.121)$$

Dans un premier temps, les paramètres α , β , σ^2 du processus d'intensité de défaut sont calibrés en optimisation globale (minimisation sur tous les pas de temps) et par pays. Formellement, avec s la prime de CDS, la procédure d'optimisation est donnée par :

$$\forall i \in \{1, \dots, 14\} \text{ et } T = 2351,$$

$$(\alpha_i^*, \beta_i^*, \sigma_i^{2*}) = ArgMin_{\alpha_i, \beta_i, \sigma_i^2} \sum_{t=1}^T (s_{t,i}^{théorique} - s_{t,i}^{marché})^2 \quad (3.122)$$

Une fois les paramètres α , β , σ^2 obtenus, il est possible de calibrer de manière locale (par pas de temps) les λ_0 en fonction des différents Tenor de CDS et par pays. Formellement, la procédure d'optimisation est donnée par :

$$\forall t \in \{1, \dots, 2351\}, \forall i \in \{1, \dots, 14\} \text{ et } \forall k \in \{1, \dots, 8\},$$

$$\lambda_{0,t,i,Tenor_{CDS_k}}^* = ArgMin_{\lambda_{0,t,i,Tenor_{CDS_k}}} (s_{t,i,Tenor_{CDS_k}}^{théorique} - s_{t,i,Tenor_{CDS_k}}^{marché})^2 \quad (3.123)$$

Dans un deuxième temps, le paramètre η du processus de liquidité est calibré en optimisation globale (minimisation sur tous les pas de temps) et par rating (HY, BBB, A, AA). Formellement, avec CB le prix d'une obligation *Corporate*, la procédure d'optimisation est donnée par :

$$\forall j \in \{1, \dots, 5\} \text{ et } T = 2351,$$

$$\eta_j^* = \text{ArgMin}_{\eta_j} \sum_{t=1}^T (CB_{t,j}^{\text{théorique}} - CB_{t,j}^{\text{marché}})^2 \quad (3.124)$$

Une fois le paramètre η obtenu, il est possible de calibrer de manière locale (par pas de temps) les γ_0 en fonction des différents *tenor* des *Corporate* et par *rating* (HY, BBB, A, AA). Formellement, la procédure d'optimisation est donnée par :

$$\forall t \in \{1, \dots, 2351\}, \forall j \in \{1, \dots, 5\} \text{ et } \forall k \in \text{Card}(\text{Tenor}_{\text{Corporate}}),$$

$$\gamma_{0,t,j,\text{Tenor}_{\text{Corporate}_k}}^* = \text{ArgMin}_{\gamma_{0,t,j,\text{Tenor}_{\text{Corporate}_k}}} (CB_{t,j,\text{Tenor}_{\text{Corporate}_k}}^{\text{théorique}} - CB_{t,j,\text{Tenor}_{\text{Corporate}_k}}^{\text{marché}})^2 \quad (3.125)$$

Il est alors possible de dégager la structure par terme des λ_0 et γ_0 engendrée par ce type de calibrage ainsi que les prix des CDS associés à ces structures par terme et les paramètres globaux α , β et σ^2 calibrés précédemment :

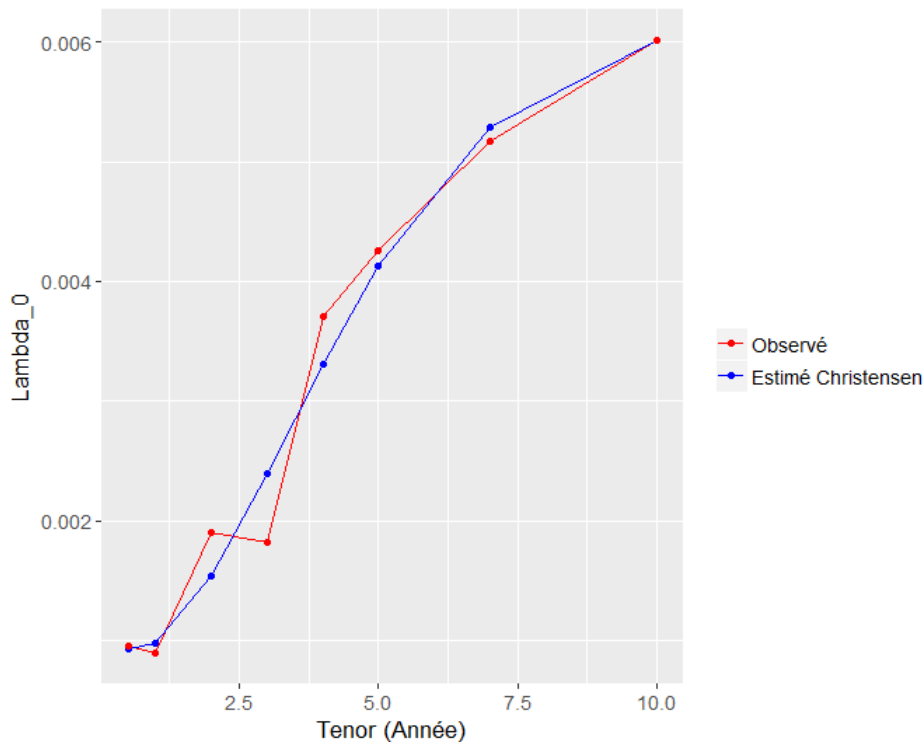


FIGURE 3.107 – Structure par terme de lambda0 de la Finlande au 06/11/2009

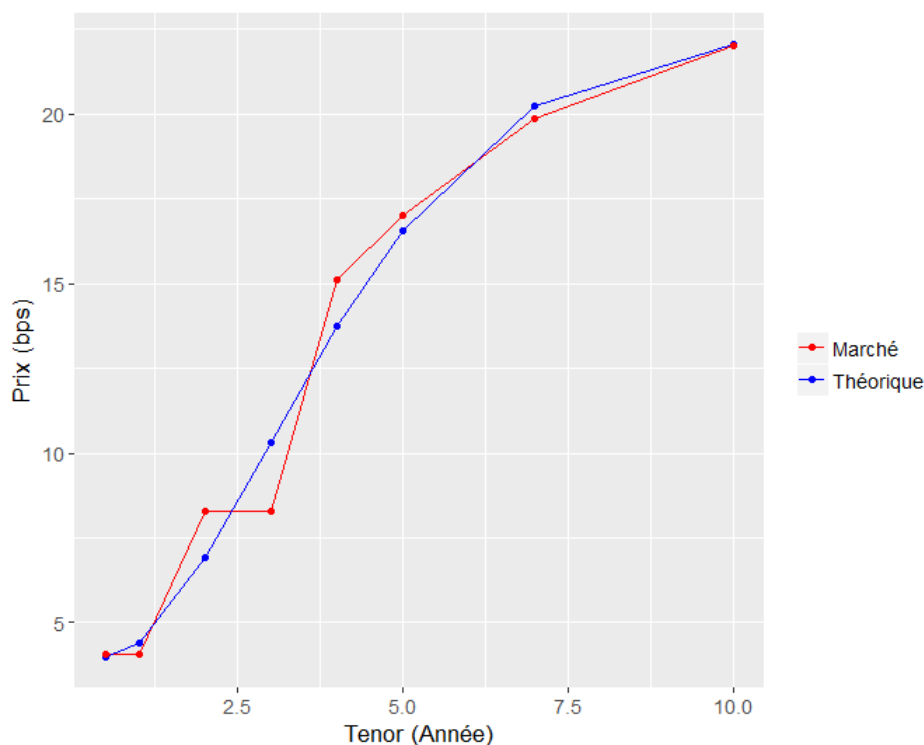


FIGURE 3.108 – Structure par terme des Prix des CDS de la Finlande au 06/11/2009

Le calibrage dégage un *fitting* de très bonne qualité. Le modèle reproduit bien la structure par terme des prix.

Une fois avoir calibré le modèle LMN et les structures par terme de λ_0 et γ_0 obtenues, l'objectif est de modéliser ces deux structures par terme afin de les caractériser par des facteurs de risque qui seront insérés dans le VAR. Cependant, un test rapide de projection de la structure par terme des λ_0 grâce à un modèle Christensen montre qu'au-delà de 10 ans (extrapolation), la structure par terme des prix s'écrase et tend vers 0 pour certains pays et *rating*; ce qui est incohérent avec la monotonie de la structure par terme des λ_0 qui devrait être croissante. En effet, l'incertitude sur la défaillance d'un Etat ou d'une obligation *Corporate* d'un certain *rating* est une fonction croissante du temps (cf. la formule de calcul de la probabilité de défaut).

Cette approche de calibration sur les 8 *tenor* (de 6 mois à 10 ans) ne suffit donc pas ici pour mener à bien des projection de long terme, cela est illustrée au moyen des deux courbes ci-après : une montrant la robustesse des paramètres globaux calibrés permettant de dégager une structure par terme strictement croissante tendant vers un λ_0 limite, associé à un prix limite (cas intéressant) et une montrant une incohérence dans la structure des λ_0 qui tend vers 0 quand la maturité du CDS croît, associé à un prix limite aberrant et donc des paramètres globaux ne permettant pas une convergence cohérente de la structure par terme des λ_0 et des prix de CDS (le prix étant croissant en fonction de la maturité du CDS)(cas problématique) :

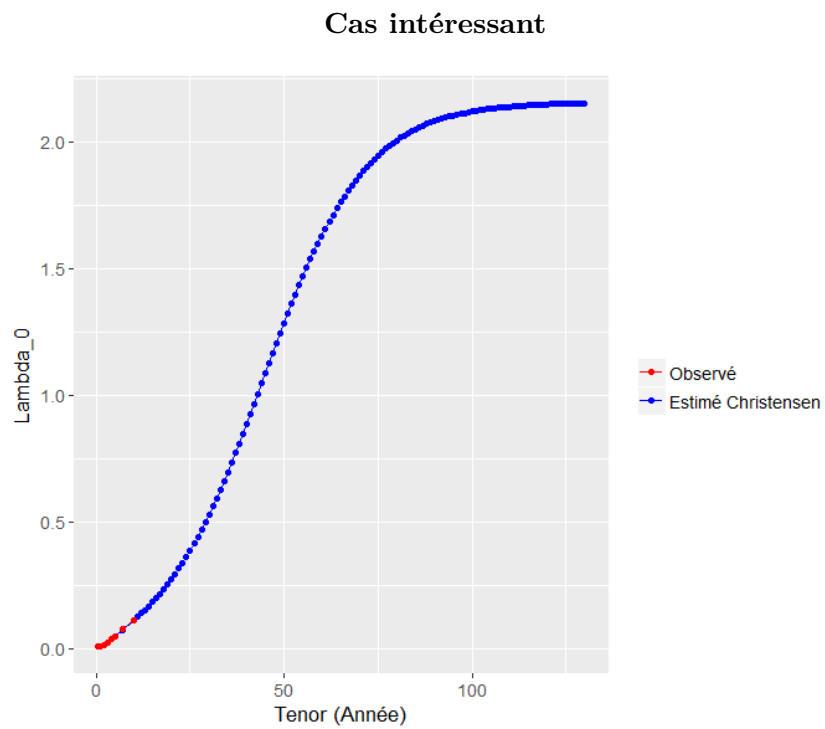


FIGURE 3.109 – Structure par terme de λ_0 extrapolée par Christensen de l’Autriche au 14/02/2014

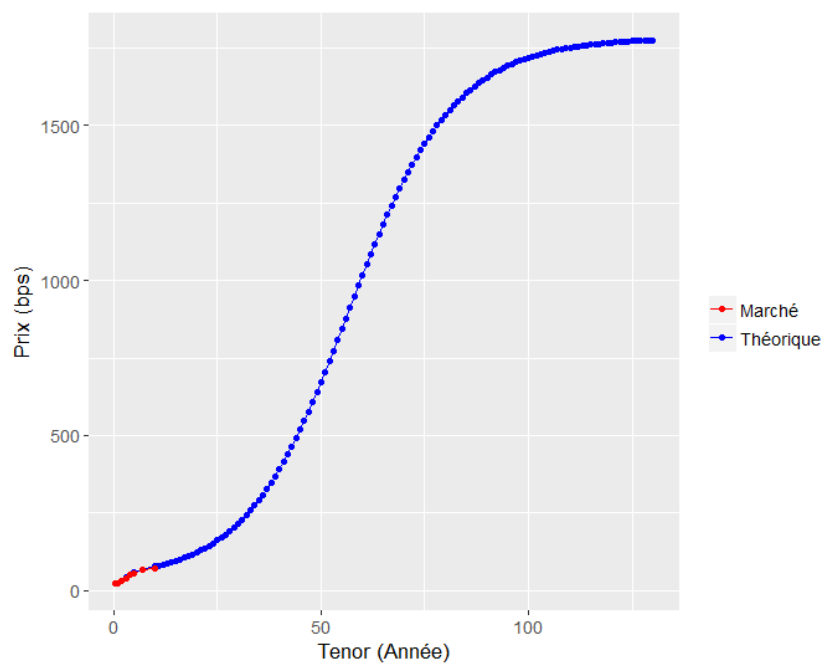


FIGURE 3.110 – Structure par terme des Prix extrapolée par Christensen des CDS de l’Autriche au 14/02/2014

Cas problématique

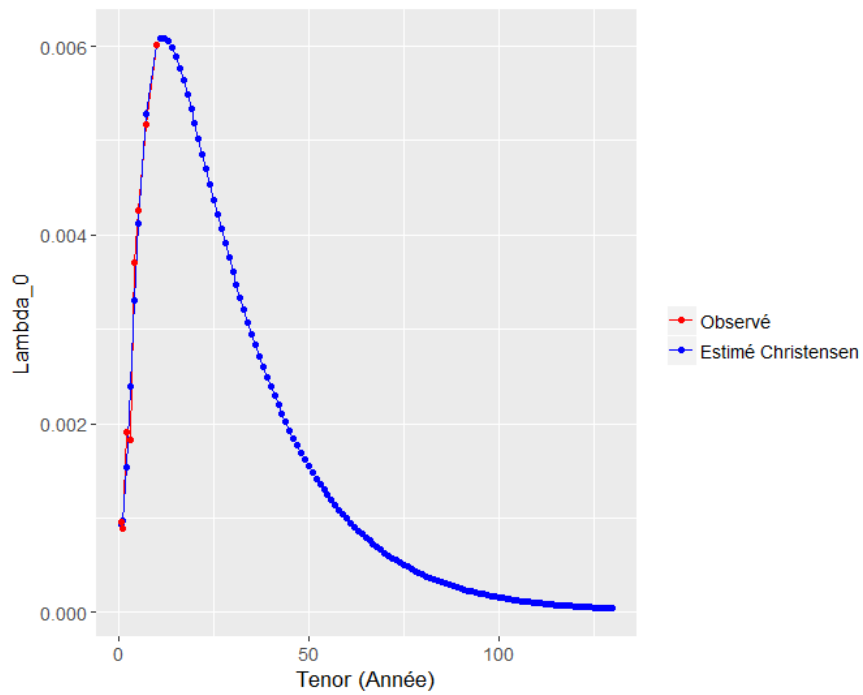


FIGURE 3.111 – Structure par terme de lambda0 extrapolée par Christensen de la Finlande au 06/11/2009

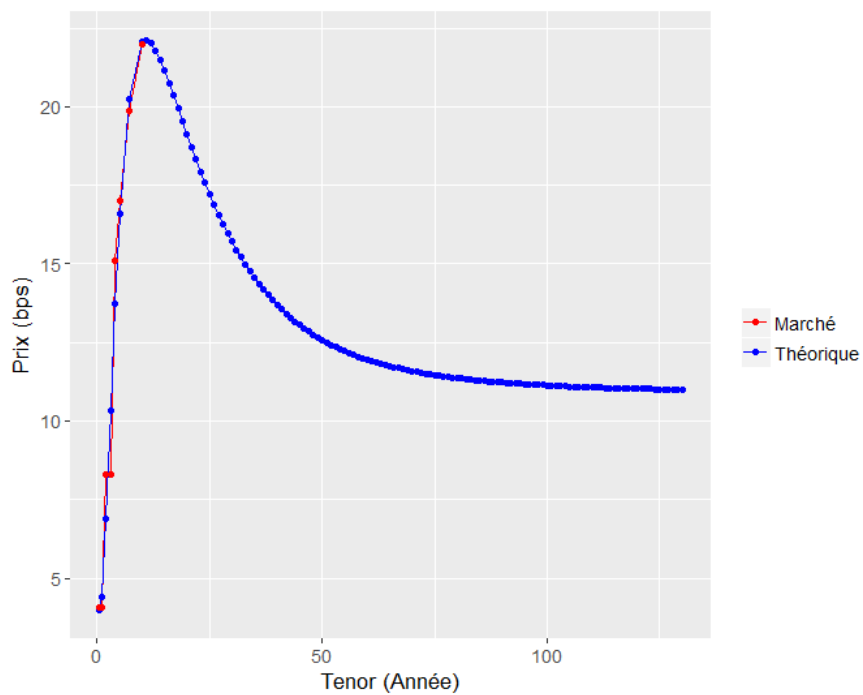


FIGURE 3.112 – Structure par terme des Prix extrapolée par Christensen des CDS de la Finlande au 06/11/2009

Sur cette base de calibrage, en extrapolant avec le modèle de Christensen les λ_0 , le prix est décroissant en fonction du *tenor*, ce qui est incohérent avec la structure par terme des λ_0 .

Pour contrecarrer ce problème, la notion de prix limite est introduite. La partie suivante mentionne cette nouvelle approche dans la calibration.

Calibration sur plusieurs *tenor* et introduction d'un *tenor* limite

La calibration de la partie précédente avait pour objectif d'être « Mark To Market », cependant, ce n'est pas suffisant pour mener à bien une calibration robuste et cohérente, et générer des projections de long terme de prix convenables. Ainsi, nous faisons intervenir la notion de prix limite et donc nous entrons dans le « Mark To Model ».

Procédure prix limites :

L'objet de cette procédure est d'obtenir des données de prix CDS associés à un *tenor* élevé (100 ans) afin de créer une structure par terme des λ_0 sur un horizon long terme. En effet, en calibrant le modèle LMN sur les 8 *tenor*, la structure projetée via un Christensen peut avoir une structure décroissante à partir de *tenor* élevés. Ceci constitue un problème significatif étant donné la disparité importante des *tenor* associés aux obligations *Govies* et *Corporate*. En gardant une calibration sur des *tenor* faibles, des valeurs erronées pour les λ_0 dont les *tenor* sont élevés seraient obtenues. Une fois que les prix limites sont obtenus, le modèle LMN peut être calibré sur un *tenor* de plus (100 ans) et une structure par terme satisfaisante des λ_0 est obtenue.

La calibration se fait tout d'abord sur les prix des CDS sur chaque pas de temps, en choisissant pour globaux les 4 paramètres α , β , σ^2 et λ_0 sur chaque pas de temps pour les deux *tenor* extrêmes existants (les *tenor* 6 mois et 10 ans). De cette façon, on force la courbe des prix à avoir une forme strictement croissante et une convergence du prix vers un prix asymptotique/limite. Il existe donc « Nombre de pas de temps » (2351) jeux de paramètres globaux. De cette manière, la structure par terme des λ_0 est représentée efficacement à chaque pas de temps, paramétrée par les globaux du pas concerné. Pour calculer les prix limites, c'est-à-dire la limite lorsque le *tenor* tend vers l'infini, un *tenor* suffisamment élevé est choisi de manière à s'assurer que la courbe des prix des CDS en fonction du *tenor* est proche de son asymptote. Ainsi, dans le but de choisir une valeur de *tenor* suffisante pour une approximation efficace du prix limite, l'allure de la courbe des prix des CDS en fonction du *tenor* est étudiée, les paramètres choisis étant ceux évoqués précédemment.

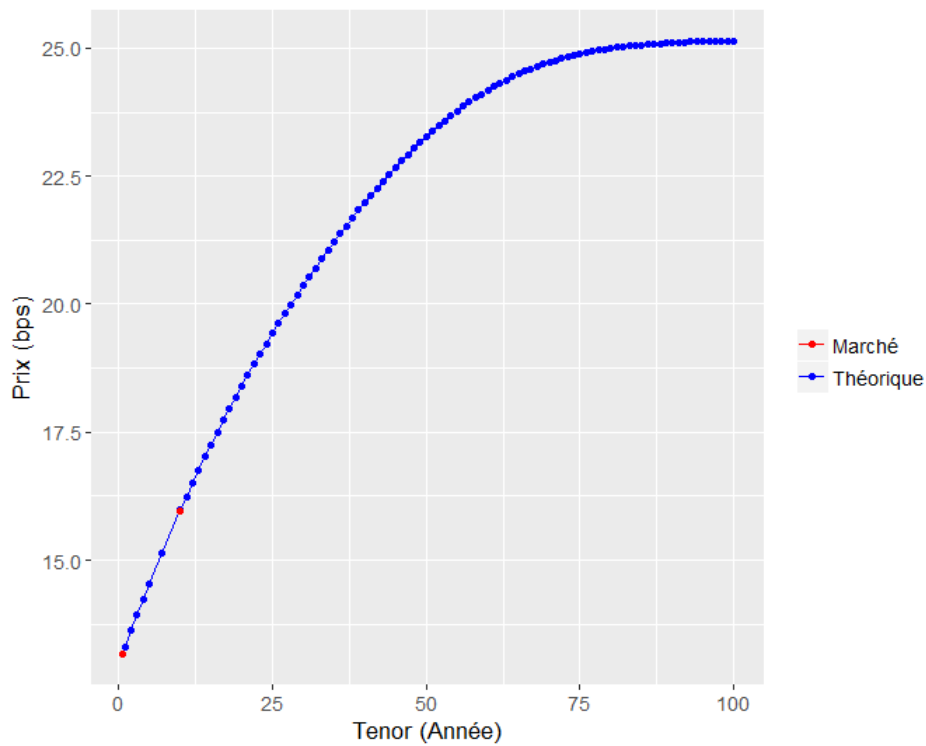


FIGURE 3.113 – Structure par terme des prix CDS extrapolée par Christensen de la Finlande calibrée avec les deux tenor extrêmes (1)

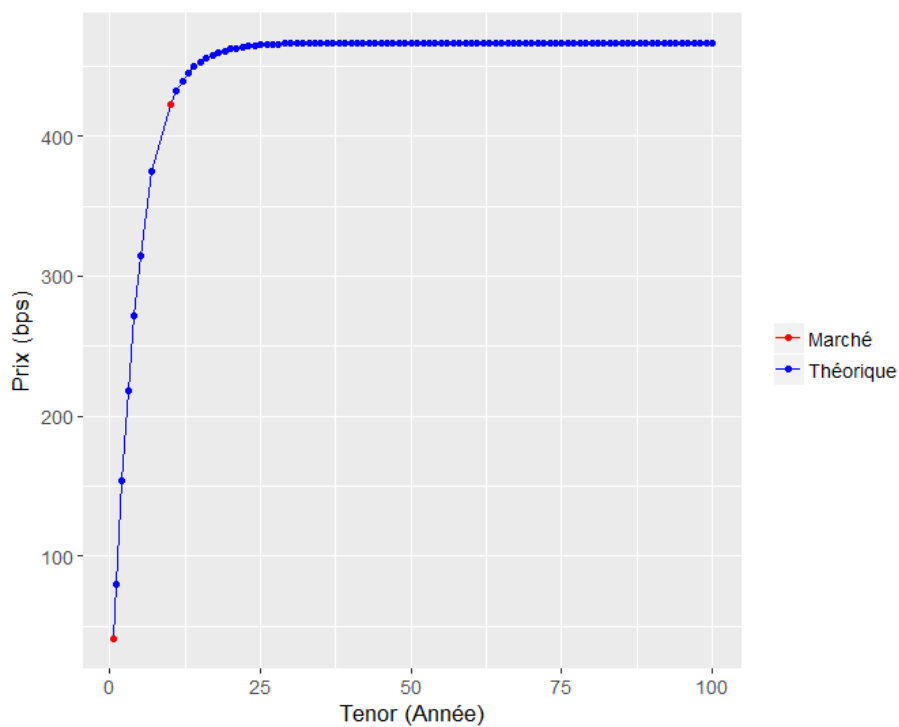


FIGURE 3.114 – Structure par terme des prix CDS extrapolée par Christensen de la Finlande calibrée avec les deux tenor extrêmes (2)

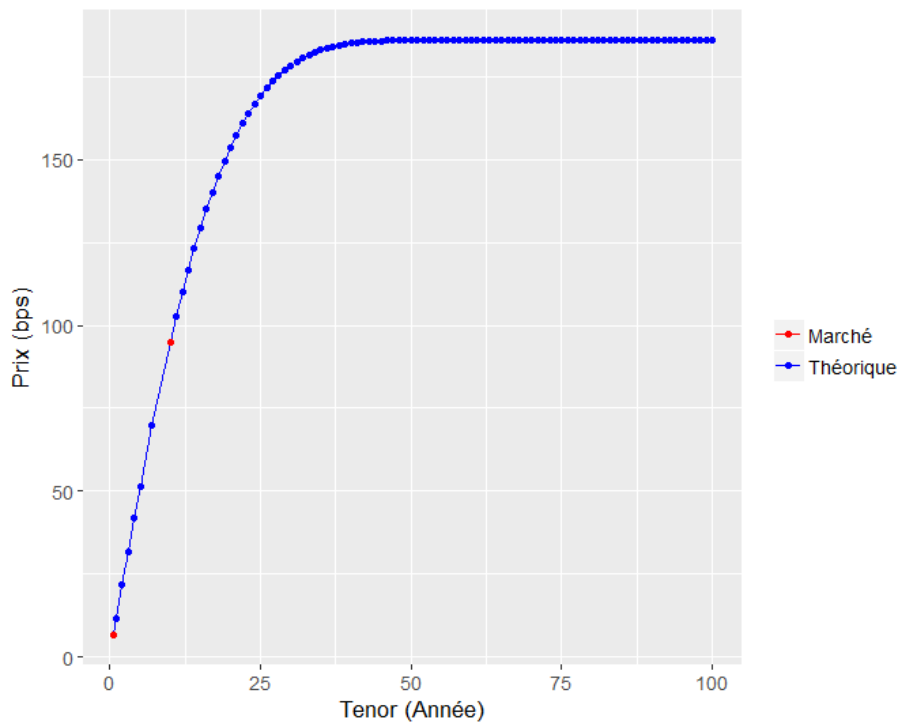


FIGURE 3.115 – Structure par terme des prix CDS extrapolée par Christensen de la Finlande calibrée avec les deux tenor extrêmes (3)

Pour chaque pas de temps, une fois les prix limites déterminés par pays et *rating* pour les CDS, une structure par terme de λ_0 par *tenor* est recalibrée avec le *tenor* limite/asymptotique (100 ans) déterminé grâce au prix limite, et avec trois nouveaux paramètres globaux α , β et σ^2 propre au pays concerné.

Finalement, les paramètres globaux par pays sont :

Pays	alpha	beta	sigma ²
France	0,002047385	0,45651081	0,000959363
Portugal	2,70E-07	0,141360447	1,03E-09
Royaume-Uni	0,002973913	0,287231198	0,004075869
Norvège	0,001949805	0,481925161	0,001434754
Irlande	2,87E-07	0,090770791	4,94E-11
Espagne	0,002361578	0,501701622	0,001577595
Autriche	0,003029378	0,658018022	0,004808295
Belgique	0,002589723	0,663054803	0,005177265
Suède	0,00294082	0,449398291	0,005817926
Finlande	0,00291579	0,51298365	0,005586164
Allemagne	0,001790667	0,891623059	0,001942107
Danemark	0,002961809	0,372542477	0,003392129
Pays-Bas	0,002335078	1,016268402	2,04E-08
Italie	0,009166559	0,625637366	0,011235215

FIGURE 3.116 – Paramètres globaux LMN Govies par pays

Finalement, les paramètres globaux par *rating* sont :

Rating	alpha	beta	sigma ²
HY	0,00775198	0,6898432	0,0083663
BBB	0,00338328	0,91050305	1,80E-05
A	0,00291326	0,95061259	0,00138999
AA	0,00381332	0,95872195	1,77E-11

FIGURE 3.117 – Paramètres globaux LMN Govies par rating

Ainsi, pour chaque pas de temps, une structure par terme de λ_0 est dégagée avec 3 nouveaux paramètres globaux α , β et σ^2 (constant sur tout l'historique et propre à chaque pays et *rating*). De cette façon, une interpolation cohérente du prix du *tenor* le plus court au *tenor* limite est garantie.

Les nouvelles structures par terme de prix avec les prix limites *fitte* efficacement la courbe des prix des CDS observés. Aussi, les nouvelles structures par terme des λ_0 montrent qu'il existe une structure par terme des λ_0 par pas de temps pour des α , β et σ^2 constant par pas de temps qui *fitte* remarquablement les prix des CDS.

Une fois les structures par terme de λ_0 et les paramètres globaux obtenus, il est possible de calibrer les γ_0 sur les prix des obligations. De la même manière que les λ_0 , le calibrage intègrera des prix limites par pas de temps : les *tenor* limites sont en fonction du pas de temps fixé à 30, 40 ou 50 ans. L'intérêt est de trouver un paramètre η^2 permettant de reproduire les prix des *Corporate* avec les mêmes paramètres globaux α , β et σ^2 calibrés précédemment.

Puisque le calibrage se fait sur des *tenor* résiduels, l'ensemble des structures par terme des λ_0 par pas de temps sera lissé en fonction des *tenor* résiduels propre à chaque pas de temps, avec un modèle de Christensen calibré sur chacune des structures par terme de λ_0 , le paramètre λ^{Christ} vaut alors par pays :

Pays	lambda Christansen
France	0,652001739
Portugal	1,565702115
Royaume-Uni	0,762219904
Norvège	0,667776057
Irlande	1,288039272
Espagne	0,58322892
Autriche	4,462367281
Belgique	4,176628172
Suède	0,619843478
Finlande	5,191972932
Allemagne	4,122047608
Danemark	1,018294365
Pays-Bas	4,54437213
Italie	0,596957718

FIGURE 3.118 – Paramètres lambda Christensen Govies par pays

De la même façon, le paramètre λ^{Christ} vaut alors par rating :

Rating	lambda Christansen
HY	1,048401927
BBB	0,892057008
A	0,837175707
AA	2,980601125

FIGURE 3.119 – Paramètres lambda Christensen Govies par rating

Une fois calibré, les η^2 par pays donnent :

Pays	eta ²
Autriche	0,00197689
Belgique	0,00206727
Danemark	0,00107507
Espagne	0,00199828
Finlande	0,00200277
France	0,00208057
Irlande	0,00201248
Italie	0,00208514
Pays-Bas	0,00211293
Portugal	0,00200277
Suède	0,00208514

FIGURE 3.120 – Paramètre global Corporate par pays

Une fois calibré, les η^2 par *rating* donnent :

Rating	eta ²
HY	0,000598368
BBB	0,000609906
A	0,000612866
AA	0,000569052

FIGURE 3.121 – Paramètre global Corporate par rating

Le lecteur pourra remarquer que les 14 pays de départ ne sont pas présents, dans la mesure où nous ne possédons pas des obligations *Corporate* de tous les pays en portefeuille, il est inutile d'alourdir les calibrations avec des paramètres que nous n'utiliserons pas.

La partie suivante vise à trouver un modèle paramétrique permettant de projeter les surfaces de λ_0 . Cette étude est réalisée ci-après.

Calibrage paramétrique de l'intensité de défaut

Introduction

Le calibrage est une étape fondamentale dans l'implémentation de modèles financiers. Il permet d'ajuster les paramètres du modèle afin de rendre les résultats cohérents avec les données de marché. En effet, malgré des modèles très performants, si on entre en input des données éloignées de la réalité, les résultats obtenus n'auront aucun sens.

Dans cette optique, le but de ce chapitre est de :

- modéliser l'intensité de défaut du modèle LMN calibré précédemment avec les CDS disponibles sur le marché ainsi qu'identifier les facteurs de risque responsables de la plupart de l'aléatoire dans les surfaces d'intensité de défaut λ_0 .
- modéliser le paramètre de liquidité du modèle LMN calibré précédemment avec les obligations *Corporate* disponibles sur le marché ainsi qu'identifier les facteurs de risque responsables de la plupart de l'aléatoire dans les surfaces du paramètre de liquidité γ_0 .

L'intérêt de cette étude est de pouvoir incorporer le risque de crédit dû à la détention d'obligations : caractériser les surfaces d'intensité de défaut et du paramètre de liquidité, et projeter les facteurs de risque responsables de l'aléatoire de ces deux surfaces dans le but de valoriser de manière prospective des dérivés de crédit.

L'estimation et l'obtention des paramètres λ_0 et γ_0 sont réalisées au moyen de modèles paramétriques intégrant respectivement les variables de *tenor* des CDS/*tenor* des *Corporate* et respectivement les λ_0 et γ_0 du pas précédent. En effet, un λ_0 et un γ_0 dynamiques dans les modèles de *pricing* permettent d'expliquer efficacement les variations d'intensité de défaut et du paramètre de liquidité et donc de mieux caractériser le risque de crédit associé aux obligations détenues en portefeuille.

Le cadre de l'étude proposée s'inscrit dans la construction d'un GSE « monde réel » répondant à la fois aux problématiques de projections de grandeurs économiques et de *pricing* à horizon court et moyen terme. A ce titre, l'approche de modélisation doit s'intégrer dans la structure du modèle VAR et doit induire une cohérence entre les univers de projection (« monde réel ») et de *pricing* (« risque-neutre »).

La spécification proposée doit respecter une forme économétrique linéaire sur les paramètres, dans la continuité de notre approche inspirée de l'article de Diebold and Li [2006] pour la structure par terme des taux d'intérêts. Cette méthodologie a été privilégiée à celles impliquant une dynamique de facteurs inobservables (modèles à espace d'états). En effet, les facteurs inobservables sont rendus observables en construisant une série chronologique des paramètres économétriques par moindres carrés, permettant de rentrer de manière élégante dans un cadre d'étude de séries temporelles multivariées plus classique.

Par ailleurs, dans un souci de cohérence entre les scénarios « monde réel » et « risque-neutre », le cadre de travail proposé est le recalibrage du modèle de valorisation selon les paramètres implicites projetés par le VAR, en l'occurrence dans ce chapitre les paramètres d'intensité de défaut et de liquidité.

En outre les techniques traditionnelles de calibrage sur la base de l'information disponible à la date de projection induisent soit une constance des paramètres implicites (calibrage RN) soit une constance des prix du marché du risque (approche par déflateurs) alors même que la volatilité des évaluations « spots » est pointée du doigt par les assureurs. La question du recalibrage conditionnel apparaît dès lors assez naturelle pour des évaluations de stratégie de couverture hybride, de détermination de SCR marché liés à des produits structurés de maturité moyen terme.

La présente étude porte donc sur la projection des surfaces des processus d'intensité de défaut et du paramètre de liquidité par une approche économétrique linéaire sur les paramètres et le raisonnement théorique et pratique autour du recalibrage de notre modèle de *pricing*.

3.6 Calibration de l'intensité de défaut

3.6.1 Spécification du modèle paramétrique

Le modèle suivant doit s'inscrire dans un cadre économétrique linéaire sur les paramètres. Nous proposons un cadre économétrique pour effectuer un lissage du processus d'intensité de défaut λ_0 .

Les variables utilisées sont les *tenor* des CDS des pays et les *tenor* résiduels des CDS par *rating* (panier de CDS de sociétés cotées dont les prix ont été médianisés) notés *Tenor* et les transformations logit adaptées de l'intensité de défaut du pas précédent.

Comme pour les études de calibration de surface menées jusqu'ici, la spécification avec une transformation logit sur le terme à expliquer sera appliquée, garantissant la positivité du processus d'intensité de défaut dans un cadre stochastique. Pour choisir judicieusement une transformation de λ_0 garantissant la définition de la fonction logit, le maximum de la structure par terme des λ_0 calibrés sur tous les pas de temps tout pays confondus pour l'intensité de défaut liée aux pays et tout *rating* confondus pour l'intensité de défaut liée aux *rating* sera appliqué, noté λ_0^{MAX} .

Il existe alors deux modèles d'intensité de défaut :

- la structure par terme pour l'intensité de défaut des pays
- la structure par terme pour l'intensité de défaut des sociétés cotées groupées en fonction de leur rating (*High Yield Bonds*, BBB, A, AA)

Ainsi, les λ_0^{MAX} utilisés seront :

$$\begin{aligned} &— (\lambda_0^{MAX})_{Pays} = 1.089955 \\ &— (\lambda_0^{MAX})_{Rating} = 0.9998461 \end{aligned}$$

Ainsi, la transformation suivante sera appliquée : chaque pays et *rating* dispose de sa propre structure par terme de λ_0 caractérisée de manière implicite au travers des paramètres globaux calibrés α , β et σ^2 propre à chacun des pays et *rating*. $i \in \{1, \dots, 14\}$ pour les pays et $i \in \{1, \dots, 4\}$ pour les *rating*.

$$TransLambda(\lambda_0(Tenor, i)) = \ln \left(\frac{\lambda_0(Tenor, i)}{\lambda_0^{MAX} - \lambda_0(Tenor, i)} \right) \quad (3.126)$$

L'hypothèse sur la forme adoptée à ce stade après plusieurs recherches est une spécification en *Tenor* et $\frac{TransLambda(\lambda_0(Tenor,i))}{\sqrt{Tenor}}$ noté Λ_{T,i,λ_0} . L'intérêt du terme \sqrt{Tenor} est de normaliser la structure par terme des λ_0 pour chaque pays et chaque *rating* pour faciliter le *fitting*. Globalement, leurs structures est la même mais à des échelles différentes. D'ailleurs, les pays et les *rating* les plus à mêmes de faire défaut sont les plus dures à *fitter*. Au vue de la complexité des structures de λ_0 d'un pays/*rating* à l'autre, le modèle s'exprimera en fonction du pas précédent, un modèle auto-régressif avec ajout de variables complémentaires où on note T le pas de temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda_{T,i,\lambda_0} = \beta_0 + \beta_1 * Tenor + \beta_2 * \Lambda_{T-1,i,\lambda_0} + \beta_3 * Tenor * \Lambda_{T-1,i,\lambda_0} + \beta_4 * Tenor^2 \\ \quad + \beta_5 * \Lambda_{T-1,i,\lambda_0}^2 + \beta_6 * Tenor^2 * \Lambda_{T-1,i,\lambda_0} + \beta_7 * Tenor * \Lambda_{T-1,i,\lambda_0}^2 \\ \quad + \beta_8 * Tenor^3 + \beta_9 * \Lambda_{T-1,i,\lambda_0}^3 + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \lambda_0) \end{array} \right. \quad (3.127)$$

Dans le cadre de la projection des processus d'intensité de défaut de chaque pays et de chaque *rating*, le modèle précédent doit permettre à l'utilisateur d'identifier dans le futur le λ_0 associé au bon pays ou au bon *rating* à n'importe quel moment dans le future. Ainsi, dans le modèle, les quantités Λ_{T,i,λ_0} à estimer sont pures mais les quantités Λ_{T,i,λ_0} qui permettent l'estimation sont issues de λ_0 lissés avec le modèle de Christensen. La calibration et le choix du modèle sur les λ_0 calibrés doivent intégrer cette dimension complexe puisque la projection de la surface d'intensité de défaut se fera de cette manière.

Estimation des paramètres

La principale problématique d'estimation est l'utilisation qui est faite du lissage de l'intensité de défaut. En effet, ce paramètre implicite n'est pas exploité de manière directe mais plutôt de façon indirecte par l'intermédiaire de la formule fermée des CDS. En effet, in fine, l'objectif est de repasser à une matrice de prix afin de calibrer en « risque-neutre », un modèle de *pricing*.

Comme pour les études précédentes, la métrique suivante sera utilisée :

$$MSE(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (CDS_i - CDS_i(\theta))^2 \quad (3.128)$$

où :

- n = le nombre de prix de CDS qui existent sur le marché.
- CDS_i le prix du $i^{ème}$ CDS sur le marché, dont l'intensité de défaut est λ_{0_i} .
- $CDS_i(\theta)$ le prix du $i^{ème}$ CDS calculé à partir de la formule fermée du LMN, et qui dépendent d'un ensemble de paramètres θ et des intensités de défaut estimées des CDS $\hat{\lambda}_{0_i}$.
- λ_{0_i} l'intensité de défaut implicite du modèle LMN des CDS obtenue $CDS_{mkt} = CDS^{LMN}(\lambda_{0_i}, \alpha_i, \beta_i, \sigma_i^2)$
- $\hat{\lambda}_{0_i}$ l'intensité de défaut implicite estimée du modèle LMN des CDS obtenue avec $CDS^{LMN} = CDS^{LMN}(\hat{\lambda}_{0_i}, \alpha_i, \beta_i, \sigma_i^2)$

Cette métrique est cohérente avec les prix des CDS car elle fournit des paramètres estimés qui, lorsque utilisés dans le modèle, génèrent des prix de CDS très proches de ceux observés sur le marché.

La méthode d'estimation mono-objective apparaît comme la plus pertinente avec la méthode des moindres carrés pondérés pour une matrice de poids judicieusement choisie. Ajouter à cela, l'estimateur des moindres carrés pondérés est explicite et garantit également l'homogénéité des minimums. Par analogie aux études précédentes, la pondération par la dérivée du prix du CDS par rapport à l'intensité de défaut interviendra dans l'estimation. En effet, comme pour les vega, nous cherchons à modéliser de manière plus fine davantage les λ_0 qui produisent des écarts de prix importants, donc lorsque l'entité de référence à une probabilité de défaut importante. Par abus de langage et par analogie à ce qui a été fait précédemment sur les nappes de volatilité, nous notons comme étant la dérivée du prix par rapport à λ_0 :

$$v_{CDS} = \frac{\partial CDS^{LMN}(\lambda_0, \alpha, \beta, \sigma^2)}{\partial \lambda_0} \quad (3.129)$$

Le v_{CDS} représente la sensibilité du prix par rapport à l'intensité de défaut, il est donc le plus élevé lorsque l'erreur de prédiction sur l'intensité de défaut engendre l'erreur la plus forte sur le prix des CDS. Cet indicateur de gestion financière a été choisi également pour son expression mathématique explicite découlant du modèle d'évaluation LMN :

$$v_{CDS} = \frac{\int_0^T e^{\lambda_0 B(t)} D(0, t) (w(B(t)[G(t) + H(t)\lambda_0] + H(t)) - sA(t)B(t)) dt}{\int_0^T A(t)e^{\lambda_0 B(t)} D(0, t) dt} \quad (3.130)$$

où :

- λ_0 le taux d'intensité de défaut.
- w le taux de recouvrement.
- s le prix de la prime de CDS.
- $D(0, t)$ le facteur d'actualisation, $t \in [0, T]$.
- T la maturité de l'obligation associée à la prime de CDS.
- $B(t)$, $G(t)$, $H(t)$, $A(t)$ les fonctions du LMN introduites précédemment.

Le lecteur pourra se référer à la démonstration dans les annexes.

Le raisonnement précédent induit que la fonction objectif de calibrage doit tendre à réduire l'erreur d'estimation sur les CDS de tenor faible. v_{CDS} est décroissante en fonction du *tenor* du CDS.

Aussi, la fonction de calibrage avec la pondération au moyen des vega des CDS doit prendre en considération la transformation logit modifiée, appliquée aux intensités de défaut pour ne pas introduire de biais dans les estimations. La pondération sera donc de la forme suivante avec CDS le prix de la prime de CDS et f la fonction inverse du logit appliquée au prix de l'option :

$$f(CDS) = \frac{\lambda_0^{MAX}}{1 + e^{-CDS}} \Rightarrow \frac{\partial f(CDS)}{\partial \lambda_0} = \frac{\partial CDS}{\partial \lambda_0} \lambda_0^{MAX} \frac{e^{-CDS}}{(1 + e^{-CDS})^2} \quad (3.131)$$

$$= v \left(\frac{\lambda_0^{MAX}}{1 + e^{-\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0^{MAX} - \lambda_0}\right)}} \right) \lambda_0^{MAX} \frac{e^{-\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0^{MAX} - \lambda_0}\right)}}{\left(1 + e^{-\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0^{MAX} - \lambda_0}\right)}\right)^2} \quad (3.132)$$

$$= v(\lambda_0) \lambda_0^{MAX} \frac{e^{-\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0^{MAX} - \lambda_0}\right)}}{\left(1 + e^{-\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0^{MAX} - \lambda_0}\right)}\right)^2} \quad (3.133)$$

Ainsi, la transformation de vega utilisée dans la pondération vaut :

$$v = \lambda_0^{MAX} v_{CDS} \frac{e^{-\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0^{MAX} - \lambda_0}\right)}}{\left(1 + e^{-\ln\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0^{MAX} - \lambda_0}\right)}\right)^2} \quad (3.134)$$

Les surfaces de vega "ajustées" des CDS sont représentées ci-après :

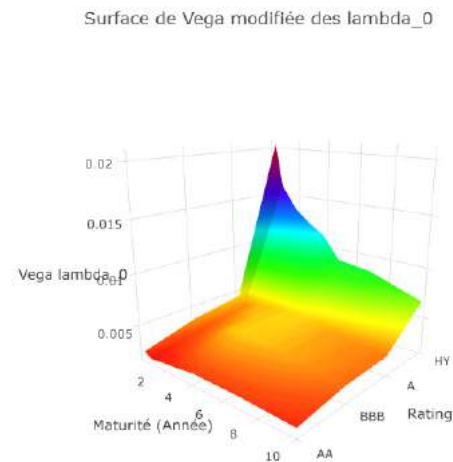
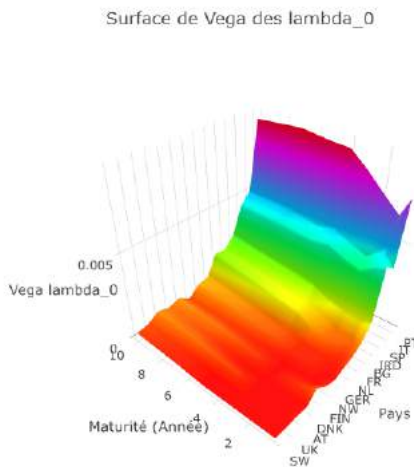


FIGURE 3.122 – Surface de Vega ajusté des CDS par pays

FIGURE 3.123 – Surface de Vega ajusté des CDS par rating

La fonction de calibrage est alors définie comme suit pour rentrer dans le cadre d'estimation des moindres carrés pondérés :

$$F(\beta_0, \dots, \beta_9) = \sum_{i=1}^n \omega_i [\Lambda_{T, \lambda_i} - \Lambda_{T, \hat{\lambda}_i}]^2 \quad (3.135)$$

Avec :

$$\omega_i = \frac{v(\alpha_i, \beta_i, \sigma_i^2, \Lambda_i, Tenor_i, \lambda_i)}{\sum_{k=1}^n v(\alpha_k, \beta_k, \sigma_k^2, \Lambda_k, Tenor_k, \lambda_k)} \quad (3.136)$$

Pour plus de commodité pour l'expression de l'estimateur des moindres carrés pondérés, réécrivons le modèle linéaire sous forme matricielle :

$$Y = X\beta + U, U \sim N(0, \lambda_0 I) \quad (3.137)$$

Avec :

$$Y_{n,1} = \begin{bmatrix} \Lambda_{T, \lambda_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Lambda_{T, \lambda_n} \end{bmatrix} \quad I_{n,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta_{10,n} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_9 \end{bmatrix}$$

$$X_{n,10} = \begin{bmatrix} 1 & Tenor_1 & \Lambda_{T-1, \lambda_1} & Tenor_1^2 & \Lambda_{T-1, \lambda_1}^2 & \Lambda_{T-1, \lambda_1} Tenor_1 & \Lambda_{T-1, \lambda_1}^3 & Tenor_1^3 & \Lambda_{T-1, \lambda_1}^2 Tenor_1 & Tenor_1^2 \Lambda_{T-1, \lambda_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Tenor_n & \Lambda_{T-1, \lambda_n} & Tenor_n^2 & \Lambda_{T-1, \lambda_n}^2 & \Lambda_{T-1, \lambda_n} Tenor_n & \Lambda_{T-1, \lambda_n}^3 & Tenor_n^3 & \Lambda_{T-1, \lambda_n}^2 Tenor_n & Tenor_n^2 \Lambda_{T-1, \lambda_n} \end{bmatrix}$$

Introduisons la matrice de poids :

$$W_{n,n} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \omega_n \end{bmatrix}$$

L'estimateur des moindres carrés pondérés (MCP) découle du programme d'optimisation suivant :

$$\text{Min}_{\beta} (Y - X\beta)^T W (Y - X\beta) \quad (3.138)$$

Et permet d'avoir une expression explicite garantissant l'homogénéité des résultats obtenus (minimums globaux) :

$$\beta_{MCP} = (X^T W X)^{-1} X^T W Y \quad (3.139)$$

Formalisation de la procédure de calibrage

Soit $\{E\}$, l'ensemble des points pour l'estimation par moindres carrés (ensemble des points à disposition pour l'étude).

Soit $\{V_i\}$, l'ensemble des variables spécifiant le modèle i .

Fonctions objectifs de calibrage

Contrairement aux autres études sur les nappes de volatilités, les fonctions objectifs de calibrage suivantes ne sont pas utilisées à la fois sur la base d'apprentissage et sur la base de test. Dans la mesure où le modèle s'exprime en fonction du pas précédent, l'utilisation d'une base d'apprentissage et d'une base de test n'est pas adaptée. Les métriques utilisées sont les suivantes :

$$Moy\ MSE_i = Moy\ Err_i = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N MSE_{i,t,(\{E\},\{V_i\})} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Err_{i,t,(\{E\},\{V_i\})}$$

$$Tail\ VaR\ 0.95\ MSE_i = \mathbb{E}(-MSE | MSE < -VaR_{0.95}(MSE))_i$$

$$Nb\ Var_i = Card\ \{V_i\}$$

Avec :

$$Err_{i,t} = (100[e^{Y_{t,\{E\}}} - e^{X_{t,\{V_i\}}\beta_{t,\{E\}}}]^T W (100[e^{Y_{t,\{E\}}} - e^{X_{t,\{V_i\}}\beta_{t,\{E\}}}]$$

$$VaR_{0.95}(MSE) = F^{-1}(0.95) = \inf(x : F(x) > 0.95)$$

Indicateurs indicatifs

L'indicateur $Moy\ MSE_i$ représente la moyenne des MSE soit la moyenne de l'erreur quadratique de prédiction pondérée (par les Vega des CDS), sur tous les jeux de données passés (2303 pour les pays et 2279 pour les *rating*) de la $i^{ème}$ spécification testée (rappelons qu'il y en a 1023 différentes), pour l'ensemble $\{E\}$ des données de calibrage.

L'indicateur $Tail\ VaR\ 0.95\ MSE_i$ représente la Tail VaR qui est calculée sur tous les jeux de données passés, de la $i^{ème}$ spécification, pour l'ensemble $\{E\}$ des données de calibrage.

L'indicateur $NbVar_i$ renvoie le nombre de degrés de liberté de la $i^{ème}$ spécification.

En synthèse, les deux premiers indicateurs ainsi que l'indicateur "Nb Var" sont utilisés pour l'optimisation multi-objectif. Ensuite, en fonction du nombre de variables présents dans les modèles, cela permet d'orienter la décision finale en incarnant respectivement la robustesse statistique et la parcimonie.

Programme d'optimisation multi-objectif

$$(PMO) = \begin{cases} \min_{x=(x_1, \dots, x_{10})} F(x) = (f_1(x), \dots, f_3(x)) \\ x_{j=1, \dots, 10} = \begin{cases} 1 & \text{si selection} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad (3.140)$$

Choix de modèle pour les pays

La dominance de pareto ($y \propto x \Leftrightarrow F(x) \leq F(y), \exists i = 1, \dots, 3 \text{ tq } f_i(x) < f_i(y)$), permet d'établir le front 1, trié sur la moyenne des erreurs. Cette procédure d'optimisation multi-objectif donne dès lors un ensemble de spécifications possibles.

L'étude des résultats présentés en annexe (cf. **Résultats des indicateurs de sélection de modèle [CDS Pays]**) indique que des modèles très peu paramétrés sont compétitifs face à des modèles plus paramétrés. A la recherche d'un modèle le moins paramétré possible pour intégration futur dans le VAR, le choix final se porte donc sur le modèle à 1 paramètre (identifiant 2). En effet, complexifier le modèle avec plusieurs variables n'apporte pas suffisamment d'amélioration dans la minimisation des erreurs au niveau des prix de CDS par pays. Les erreurs ont été retransformées en bps : unité utilisée sur le marché de crédit pour caractériser la prime de CDS (facteur multiplicatif de 10000).

Le modèle choisi caractérisant les structures par terme des λ_0 pour les pays est tout simplement un modèle auto-régressif (AR(1)) : $\forall i \in \{1, \dots, 14\}$

$$\begin{cases} \Lambda_{T,i,\lambda_0} = \beta_0 * \Lambda_{T-1,i,\lambda_0} + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \lambda_0) \end{cases} \quad (3.141)$$

De cette équation, on déduit par récurrence la structure par terme des λ_0 pour les *rating* : $\forall T > 0, \forall i \in \{1, \dots, 14\}$

$$\begin{cases} \Lambda_{T,i,\lambda_0} = \prod_{t=0}^{T-1} \beta_t * \Lambda_{0,i,\lambda_0} + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \lambda_0) \end{cases} \quad (3.142)$$

Reconstruction de la série chronologique : λ_0 des pays

La reconstruction de la série chronologique du régresseur est illustrée ci-dessous :

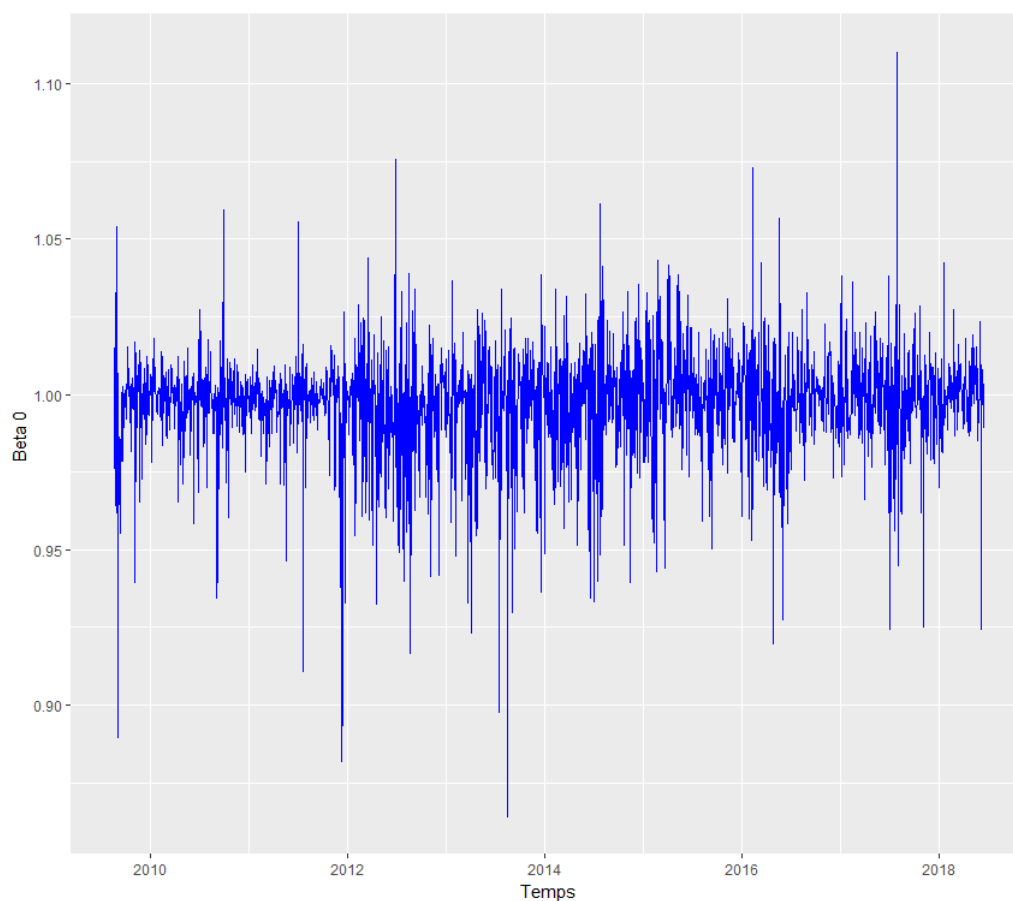


FIGURE 3.124 – Serie chronologie Beta0 Intensite de Defaut des Pays

Validations du régresseur et du modèle linéaire : λ_0 des pays

R^2 Ajusté	
Moyenne(R^2 Ajusté)	99,9 %
Min(R^2 Ajusté)	95,6 %
Max(R^2 Ajusté)	100,0 %
Quantile.0.95(R^2 Ajusté)	100,0 %

Test Student (significativité individuelle)	
Proportion Beta0 significatif	100,0 %

TABLE 3.10 – Tableaux récapitulatifs de validation du modèle [Intensité de Défaut des Pays] (1)

Test de Fisher (significativité globale)	p-value = 2.2e-16 (accepté pour tous les pas de temps)
Test de normalité des résidus	Rejeté (100 %) : 3.700000e-24 (p-value)
Test de Box-Pierce / Ljung-Box (Bruit Blanc)	Accepté pour 32 % des pas de temps
Test d'homoscédasticité des résidus	Accepté pour 24 % des pas de temps
Test de Durbin-Watson (abs.auto-cor.ordre.1)	Accepté pour 100 % des pas de temps

TABLE 3.11 – Tableau récapitulatif de validation du modèle [Intensité de Défaut des Pays] (2)

Erreur globale pour les prix des CDS (n = 290052)		
Erreur pondéré/Modèle pondéré	RMSE	0,35 bps
	TVaR.0.95.RMSE	3,88 bps
Erreur normal/WLS	RMSE	3,45 bps
	TVaR.0.95.RMSE	30,51 bps
Erreur normal/OLS	RMSE	4,09 bps
	TVaR.0.95.RMSE	35,23 bps

TABLE 3.12 – Tableau récapitulatif de validation du modèle [Intensité de Défaut des Pays] (3)

Le régresseur est hautement significatif, le R^2 ajusté quant à lui est très élevé, il y a donc une explication importante des intensités de défaut des pays par la variable d'intensité de défaut du pas précédent : la structure des λ_0 des pays est assez similaire d'un pas à l'autre. Cependant, les résidus du modèle linéaire ne sont globalement pas gaussiens. En ce qui concerne l'erreur globale pondéré par les poids de vega sur tout l'historique, le modèle donne de très bons résultats avec un écart moyen de 0,35 bps entre les prix estimés par le modèle et ceux du marché, et les 5 % pire écarts de prix sont en moyenne de 3,88 bps. Une remarque intéressante peut être faite quand on compare l'erreur des modèles calibrés OLS et WLS, le modèle calibré WLS donne de meilleurs résultats : cela valide donc l'utilisation des vega dans la calibration du modèle paramétrique. En ce qui concerne le modèle linéaire, dans la mesure où l'on cherche à estimer la quantité $E(Y|X\beta)$, puisque les résidus sont des bruits blancs, le modèle linéaire est validé en partie.

On obtient alors les surfaces d'intensité de défaut et de prix prédites des pays VS les surfaces d'intensité de défaut et de prix observées des pays pour deux dates choisies

aléatoirement. Il est intéressant d'étudier ces surfaces jusqu'au tenor limite avec la notion de prix limite introduit précédemment dans la calibration des λ_0 du LMN qui ont ensuite été utilisés pour calibrer un modèle de projection de la surface de λ_0 . Pour plus de clarté et de visibilité au niveau des surfaces, nous distinguons deux surfaces : celle du *tenor* 6 mois au *tenor* 10 ans puis celle du *tenor* 6 mois au *tenor* limite 100 ans :

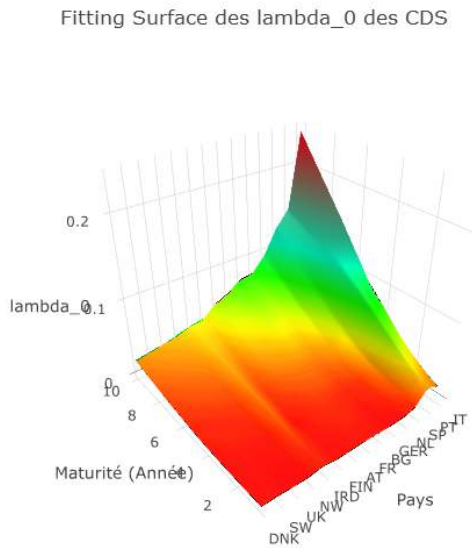


FIGURE 3.125 – Fitting réduit lambda0 10/01/2017

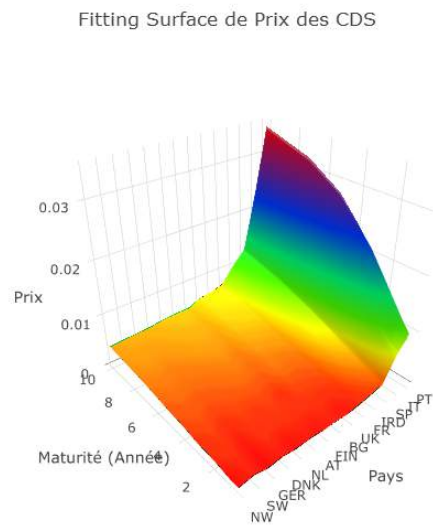


FIGURE 3.126 – Fitting réduit Prix CDS 10/01/2017

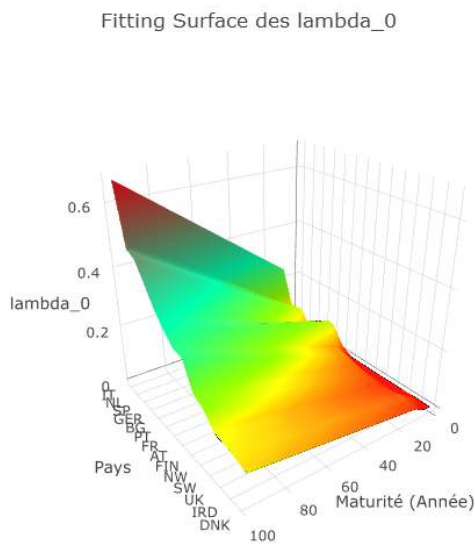


FIGURE 3.127 – Fitting complet lambda0 10/01/2017

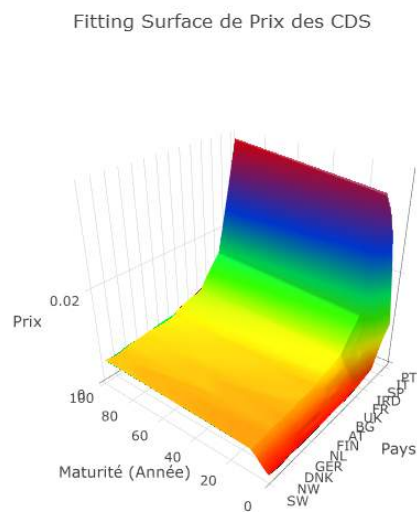


FIGURE 3.128 – Fitting complet Prix CDS 10/01/2017

Fitting Surface des lambda_0 des CDS

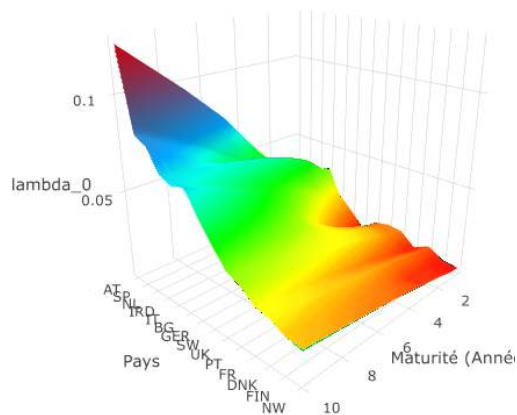


FIGURE 3.129 – Fitting réduit lambda0 14/09/2009

Fitting Surface de Prix des CDS

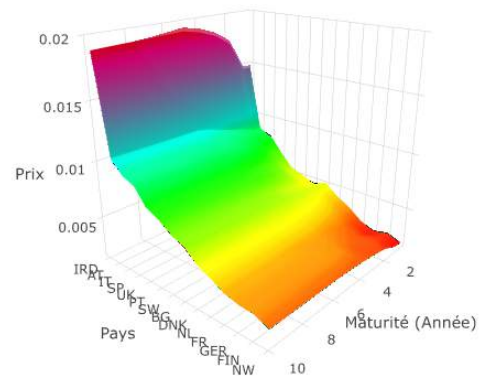


FIGURE 3.130 – Fitting réduit Prix CDS 14/09/2009

Fitting Surface des lambda_0

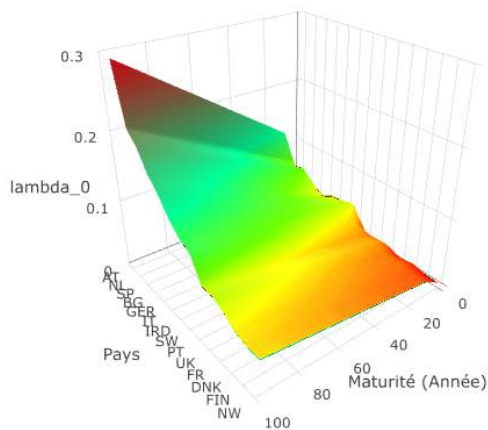


FIGURE 3.131 – Fitting complet lambda0 14/09/2009

Fitting Surface de Prix des CDS

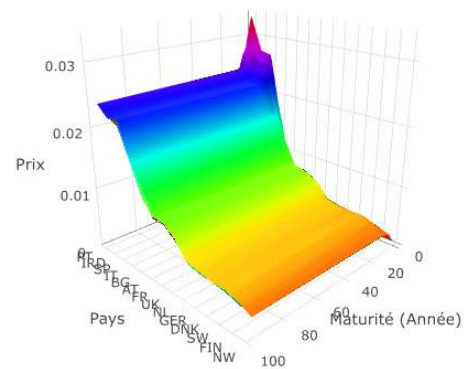


FIGURE 3.132 – Fitting complet Prix CDS 14/09/2009

A ce stade, le modèle choisi peut être validé. Le *fitting* des surfaces d'intensité de défaut des pays pour chaque pas de temps est remarquable. Dans l'étude, ce qui est primordiale est la réplique des prix, et l'utilisation de la pondération par les vega permet d'améliorer l'ajustement au niveau des prix qui est remarquable.

Choix de modèle pour les rating

La dominance de pareto ($y \succ x \Leftrightarrow F(x) \leq F(y), \exists i = 1, \dots, 3 \text{ tq } f_i(x) < f_i(y)$), permet d'établir le front 1, trié sur la moyenne des erreurs. Cette procédure d'optimisation multi-objectif donne dès lors un ensemble de spécifications possibles.

L'étude des résultats présentés en annexe (cf. **Résultats des indicateurs de sélection de modèle [CDS Rating]**) indique que des modèles très peu paramétrés sont compétitifs face à des modèles plus paramétrés. A la recherche d'un modèle le moins paramétré possible pour intégration futur dans le VAR, le choix final se porte donc sur le modèle à 1 paramètre (identifiant 2). En effet, complexifier le modèle avec plusieurs variables n'apporte pas suffisamment d'amélioration dans la minimisation des erreurs au niveau des prix de CDS par *rating*. Les erreurs ont été retransformées en bps : unité utilisée sur le marché de crédit pour caractériser la prime de CDS (facteur multiplicatif de 10000).

Le modèle choisi caractérisant les structures par terme des λ_0 pour les *rating* est tout simplement un modèle auto-régressif (AR(1)) : $\forall i \in \{1, \dots, 4\}$

$$\begin{cases} \Lambda_{T,i,\lambda_0} = \beta_0 * \Lambda_{T-1,i,\lambda_0} + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \lambda_0) \end{cases} \quad (3.143)$$

De cette équation, on déduit par récurrence la structure par terme des λ_0 pour les *rating* : $\forall T > 0, \forall i \in \{1, \dots, 4\}$

$$\begin{cases} \Lambda_{T,i,\lambda_0} = \prod_{t=0}^{T-1} \beta_t * \Lambda_{0,i,\lambda_0} + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \lambda_0) \end{cases} \quad (3.144)$$

Reconstruction de la série chronologique : λ_0 des rating

La reconstruction de la série chronologique du régresseur est illustrée ci-dessous :

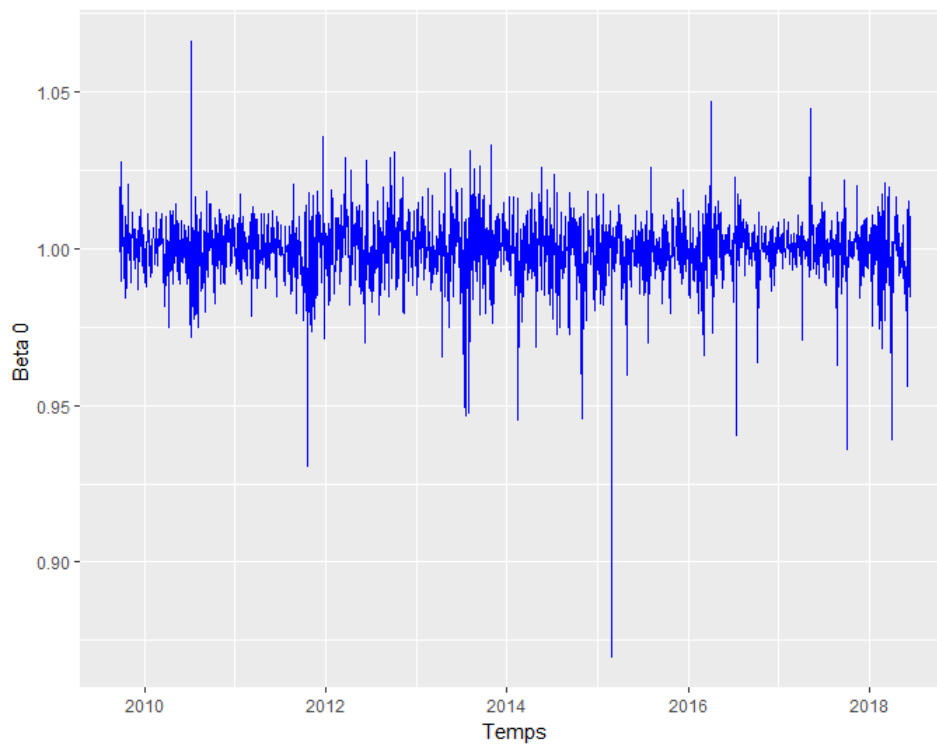


FIGURE 3.133 – Serie chronologie Beta0 Intensite de Defaut des Rating

Validations du régresseur et du modèle linéaire : λ_0 des rating

R^2 Ajusté	
Moyenne(R^2 Ajusté)	98,9 %
Min(R^2 Ajusté)	97,9 %
Max(R^2 Ajusté)	100,0 %
Quantile.0.95(R^2 Ajusté)	100,0 %

Test Student (significativité individuelle)	
Proportion Beta0 significatif	100,0 %

TABLE 3.13 – Tableaux récapitulatifs de validation du modèle [Intensité de Défaut des Rating] (1)

Test de Fisher (significativité globale)	p-value = 2.2e-16 (accepté pour tous les pas de temps)
Test de normalité des résidus	Rejeté (98 %) : 3.700000e-24 (p-value)
Test de Box-Pierce / Ljung-Box (Bruit Blanc)	Accepté pour 32 % des pas de temps
Test d'homoscédasticité des résidus	Accepté pour 30 % des pas de temps
Test de Durbin-Watson (abs.auto-cor.ordre.1)	Accepté pour 100 % des pas de temps

TABLE 3.14 – Tableau récapitulatif de validation du modèle [Intensité de Défaut des Rating] (2)

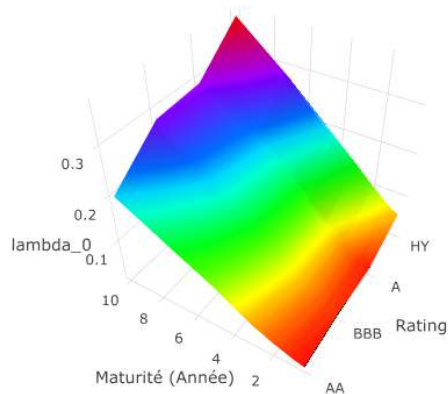
Erreur globale pour les prix des CDS (n = 82044)		
Erreur pondéré/Modèle pondéré	RMSE	0,35 bps
	TVaR.0.95.RMSE	3,88 bps
Erreur normal/WLS	RMSE	3,45 bps
	TVaR.0.95.RMSE	30,51 bps
Erreur normal/OLS	RMSE	4,09 bps
	TVaR.0.95.RMSE	35,23 bps

TABLE 3.15 – Tableau récapitulatif de validation du modèle [Intensité de Défaut des Rating] (3)

Le régresseur est hautement significatif, le R^2 ajusté quant à lui est très élevé, il y a donc une explication importante des intensités de défaut des *rating* par la variable d'intensité de défaut du pas précédent : la structure des λ_0 des *rating* est assez similaire d'un pas à l'autre. Cependant, les résidus du modèle linéaire ne sont globalement pas gaussiens. En ce qui concerne l'erreur globale pondéré par les poids de vega sur tout l'historique, le modèle donne de très bons résultats avec un écart moyen de 0,35 bps entre les prix estimés par le modèle et ceux du marché, et les 5% pire écarts de prix sont en moyenne de 3,88 bps. Une remarque intéressante peut être faite quand on compare l'erreur des modèles calibrés OLS et WLS, le modèle calibré WLS donne de meilleurs résultats : cela valide donc l'utilisation des vega dans la calibration du modèle paramétrique. En ce qui concerne le modèle linéaire, dans la mesure où l'on cherche à estimer la quantité $E(Y|X\beta)$, puisque les résidus sont des bruits blancs sans auto-corrélation d'ordre 1, le modèle linéaire est validé en partie.

On obtient alors les surfaces d'intensité de défaut et de prix prédites des *rating* VS les surfaces d'intensité de défaut et de prix observées des *rating* pour deux dates choisies aléatoirement. Il est intéressant d'étudier ces surfaces jusqu'au tenor limite avec la notion de prix limite introduit précédemment dans la calibration des λ_0 du LMN qui ont ensuite été utilisés pour calibrer un modèle de projection de la surface de λ_0 . Pour plus de clarté et de visibilité au niveau des surfaces, nous distinguons deux surfaces : celle du *tenor* 6 mois au *tenor* 10 ans puis celle du *tenor* 6 mois au *tenor* limite 100 ans :

Fitting Surface des lambda_0 des CDS



Fitting Surface de Prix des CDS

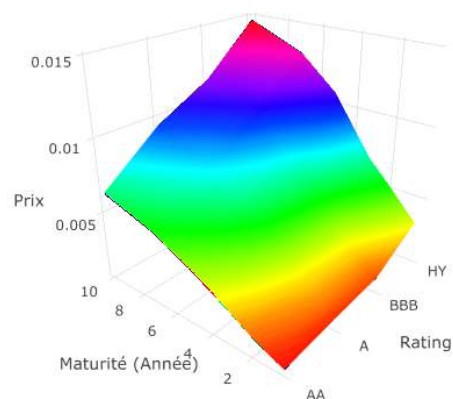
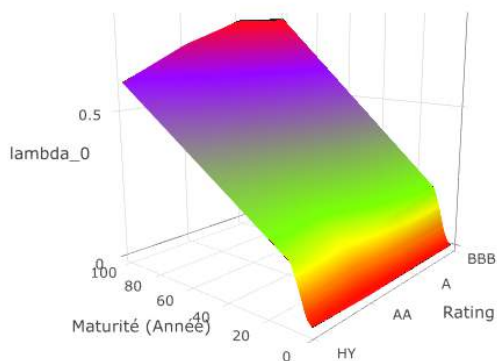


FIGURE 3.134 – Fitting réduit lambda0 18/12/2015

FIGURE 3.135 – Fitting réduit Prix CDS 18/12/2015

Fitting Surface des lambda_0 des CDS



Fitting Surface de Prix des CDS

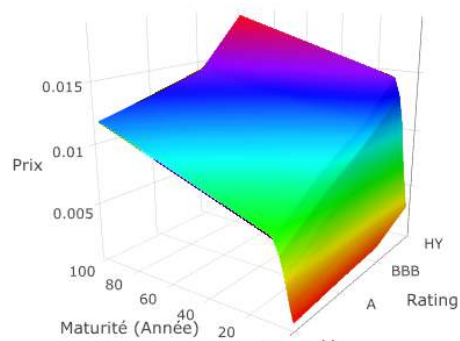


FIGURE 3.136 – Fitting complet lambda0 18/12/2015

FIGURE 3.137 – Fitting complet Prix CDS 18/12/2015

Fitting Surface des lambda_0 des CDS

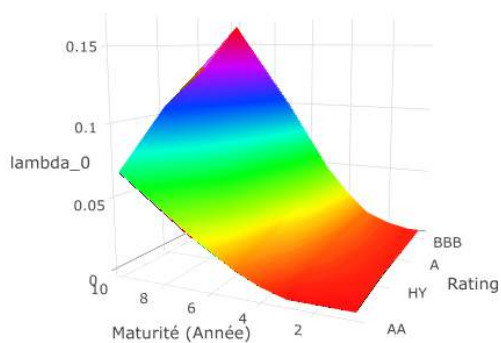


FIGURE 3.138 – Fitting réduit lambda0 22/03/2018

Fitting Surface de Prix des CDS

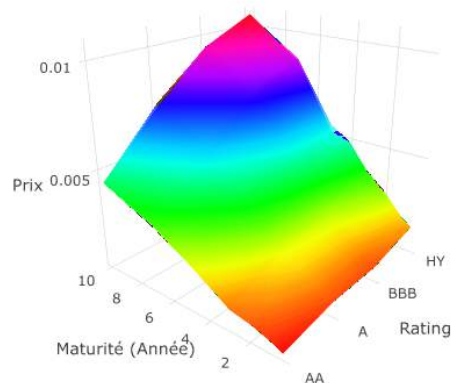


FIGURE 3.139 – Fitting réduit Prix CDS 22/03/2018

Fitting Surface des lambda_0 des CDS

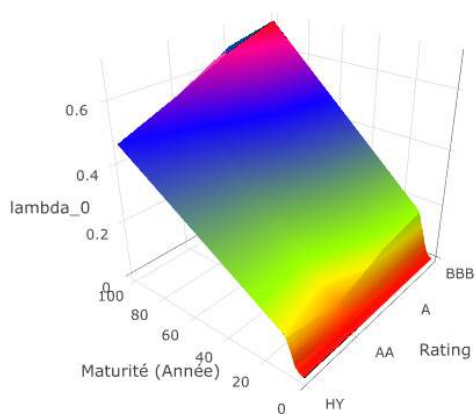


FIGURE 3.140 – Fitting complet lambda0 22/03/2018

Fitting Surface de Prix des CDS

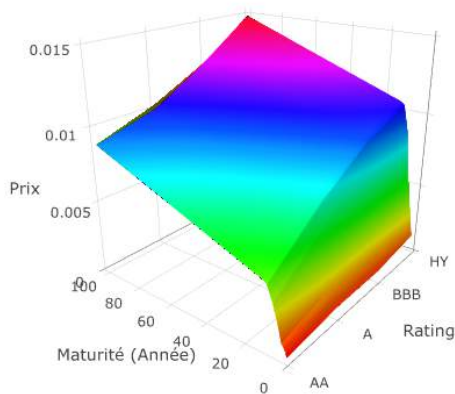


FIGURE 3.141 – Fitting complet Prix CDS 22/03/2018

A ce stade, le modèle choisi est pertinent. Le *fitting* des surfaces d'intensité de défaut des *rating* pour chaque pas de temps est remarquable. Dans l'étude, ce qui est primordiale est la réplcation des prix, et l'utilisation de la pondération par les vega permet d'améliorer l'ajustement au niveau des prix qui est remarquable.

Dans l'étude du risque de crédit, on parle souvent de probabilité de défaut. Ainsi, pour se faire une réelle idée de l'impact de la structure par terme des λ_0 par pays et par *rating* sur leur défaillance, le *fitting* des surfaces de probabilités de défaut associées à celles-ci sont représentées ci-après :

Fitting Surface des Probabilités de Défaut

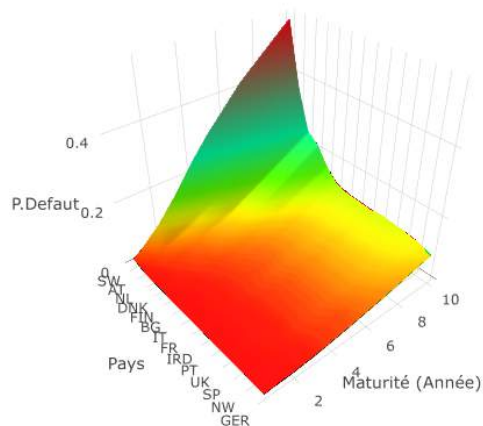


FIGURE 3.142 – Fitting Probabilité de Défaut des pays au 10/01/2017

Fitting Surface des Probabilités de Défaut

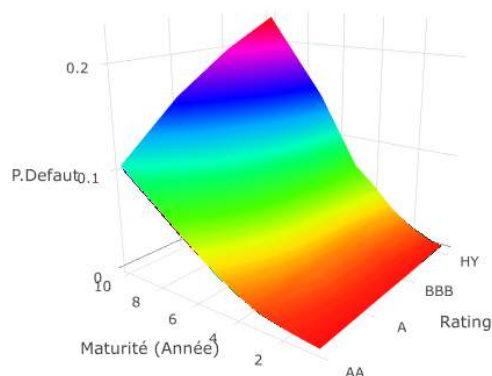


FIGURE 3.143 – Fitting Probabilité de Défaut des rating au 22/03/2018

Maintenant que nous sommes en mesure de quantifier et de projeter la défaillance des pays et des entreprises de ces pays, nous cherchons à quantifier et projeter la liquidité des obligations sur le marché, c'est-à-dire la capacité à ce que ces titres soient plus ou moins demandés. Cette notion de liquidité renferme un effet de volume, on dira par exemple qu'une obligation est liquide lorsque le volume échangé de cette obligation est élevé. La section suivante fait référence à la calibration des γ_0 .

3.7 Modélisation de la structure par terme des γ_0

Après étude des structures par terme des γ_0 par pas de temps et par *rating* et pays, il s'avère qu'elle ne varie que très sensiblement au cours du temps. Ainsi, il est possible de considérer cette structure par terme déterministe par pays et par *rating*. Les graphes suivants montrent la stabilité de ces structures par terme de γ_0 au cours du temps :

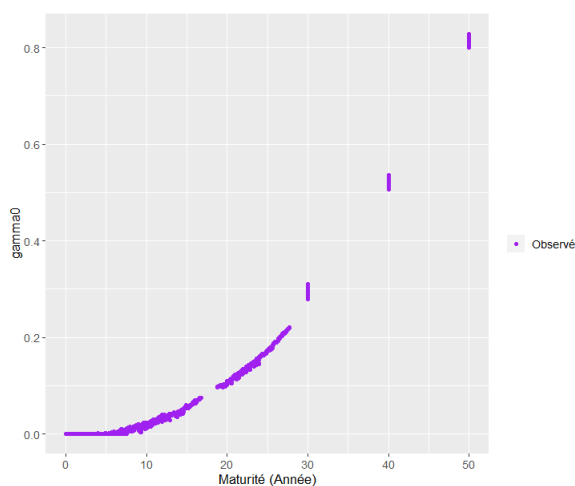


FIGURE 3.144 – Structures par terme de γ_0 du rating A sur tous les pas de temps

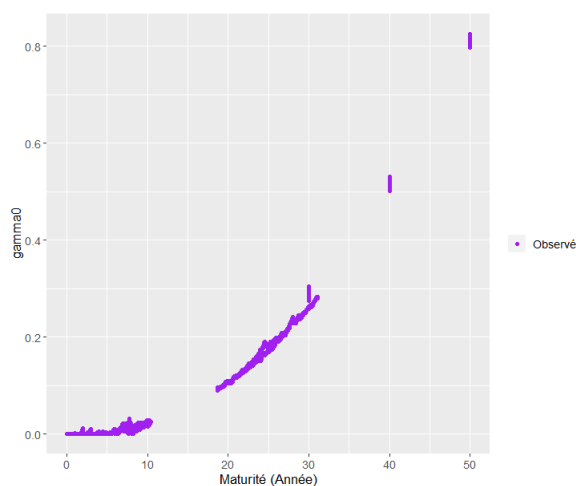


FIGURE 3.145 – Structures par terme de γ_0 de l'Espagne sur tous les pas de temps

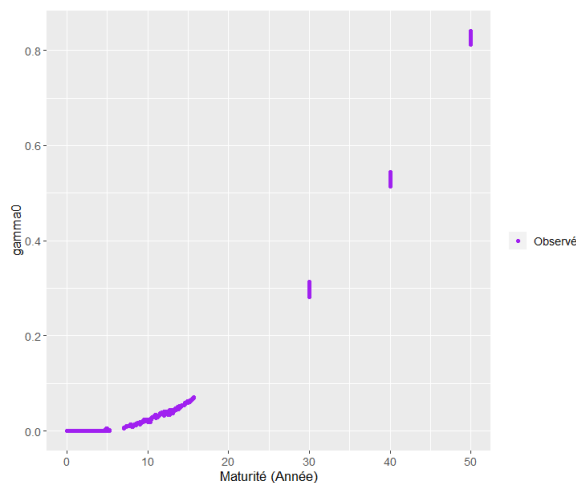


FIGURE 3.146 – Structures par terme de γ_0 de la Finlande sur tous les pas de temps

Bien que le paramètre γ_0 soit défini sur l'intervalle $[-1; 1]$ dans l'article original du LMN, au vue des structures par terme de γ_0 strictement positives et d'après l'étude menée par Planchet et Laïdi considérant les γ_0 strictement positifs, la spécification avec une transformation logit sur le terme à expliquer sera appliquée, garantissant la positivité du paramètre de liquidité.

Il existe alors deux modèles du paramètre de liquidité γ_0 pour les obligations :

- la structure par terme des γ_0 des pays (*Govies*)
- la structure par terme des γ_0 des sociétés cotées (*Corporate*) groupées en fonction de leur *rating* (*High Yield Bonds*, BBB, A, AA)

Ainsi, la transformation suivante sera appliquée : chaque pays et *rating* dispose de sa propre structure par terme de γ_0 caractérisée de manière implicite au travers des paramètres globaux calibrés α , β , σ^2 et η^2 propre à chacun des pays et *rating*. $i \in \{1, \dots, 11\}$ pour les pays et $i \in \{1, \dots, 4\}$ pour les *rating*.

$$\text{TransGamma}(\gamma_0(\text{Tenor}, i)) = \ln \left(\frac{\gamma_0(\text{Tenor}, i)}{1 - \gamma_0(\text{Tenor}, i)} \right) \quad (3.145)$$

Au vue des structures de γ_0 qui sont très similaires au cours du temps et de par leur structure croissante, ils seront modélisés par un modèle de Christensen auquel nous appliquerons une transformation logit pour garantir la positivité du paramètre de liquidité.

La modélisation des γ_0 au temps τ avec transformation logit donne :

$$\text{TransGamma}(\gamma_0(\tau, i)) = \beta_0 + \beta_1 \frac{\tau}{2} + \beta_2 X_1^{\text{Christ}} + \beta_3 X_2^{\text{Christ}} + \beta_4 X_3^{\text{Christ}} \quad (3.146)$$

Tel que :

$$\begin{aligned} \text{— } X_1^{\text{Christ}} &= \frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda})}{\frac{\tau}{\lambda}} \\ \text{— } X_2^{\text{Christ}} &= \lambda \left(\frac{1 - \exp(-\frac{\tau}{\lambda})}{\frac{\tau}{\lambda}} - \exp(-\frac{\tau}{\lambda}) \right) \\ \text{— } X_3^{\text{Christ}} &= \lambda \frac{1 - \exp(-\frac{2\tau}{\lambda})}{\frac{2\tau}{\lambda}} \end{aligned}$$

Avec :

- β_0 représente une constante de niveau s'ajoutant au 2^{ème} terme.
- β_1 représente le facteur de niveau correspondant au taux long lorsque τ est très grand.
- β_2 représente le facteur de rotation correspondant à l'écart entre le taux court et le taux long (spread).
- β_3 représente le facteur de courbure.
- β_4 représente le facteur améliorant la partie courte et longue de la courbe.
- λ représente le paramètre d'échelle.

Estimation des paramètres

La principale problématique d'estimation est l'utilisation qui est faite du lissage des γ_0 . En effet, ce paramètre implicite n'est pas exploité de manière directe mais plutôt de façon indirecte par l'intermédiaire de la formule fermée des *Corporate*. En effet, in fine, l'objectif est de repasser à une matrice de prix afin de calibrer en « risque-neutre », un modèle de *pricing*.

Comme pour les études précédentes, la métrique suivante sera utilisée :

$$MSE(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (CB_i - CB_i(\theta))^2 \quad (3.147)$$

où :

- n = le nombre de prix des *Corporate*.
- CB_i le prix du $i^{\text{ème}}$ *Corporate*, avec le γ_{0_i} lissé.
- $CB_i(\theta)$ le prix du $i^{\text{ème}}$ *Corporate* calculé à partir de la formule fermée du LMN, et qui dépendent d'un ensemble de paramètres θ et des γ_{0_i} estimées des *Corporate* $\hat{\gamma}_{0_i}$.
- γ_{0_i} le paramètre de liquidité implicite du modèle LMN des *Corporate* obtenue $CB_{mkt} = CB^{LMN}(\gamma_{0_i}, \alpha_i, \beta_i, \sigma_i^2, \eta_i^2, \lambda_{0_i})$
- $\hat{\gamma}_{0_i}$ le paramètre de liquidité implicite estimée du modèle LMN des *Corporate* obtenue avec $CB^{LMN} = CB^{LMN}(\hat{\gamma}_{0_i}, \alpha_i, \beta_i, \sigma_i^2, \eta_i^2, \lambda_{0_i})$

Cette métrique est cohérente avec les prix des *Corporate* car elle fournit des paramètres estimés qui, lorsque utilisés dans le modèle, génèrent des prix de *Corporate* très proches de ceux observés sur le marché.

La méthode d'estimation mono-objective apparaît comme la plus pertinente avec la méthode des moindres carrés pondérés pour une matrice de poids judicieusement choisie. Ajouter à cela, l'estimateur des moindres carrés pondérés est explicite et garantie également l'homogénéité des minimums. Par analogie aux études précédentes, la pondération par la dérivée du prix des *Corporate* par rapport au γ_0 interviendra dans l'estimation. En effet, comme pour les vega, nous cherchons à modéliser de manière plus fine davantage les γ_0 qui produisent des écarts de prix importants. Par abus de langage et par analogie à ce qui a été fait précédemment sur les nappes de volatilité, nous notons v comme étant la dérivée du prix par rapport à γ_0 :

$$v_{CB} = \frac{\partial CB^{LMN}(\lambda_0, \alpha, \beta, \sigma^2, \eta^2, \gamma_0)}{\partial \gamma_0} \quad (3.148)$$

Le v_{CB} représente la sensibilité du prix par rapport au paramètre de liquidité, il est donc le plus élevé lorsque l'erreur de prédiction sur le paramètre de liquidité engendre l'erreur la plus forte sur le prix des *Corporate*. Cet indicateur de gestion financière a été choisi également pour son expression mathématique explicite découlant du modèle d'évaluation LMN :

$$v_{CB} = -c \int_0^T t * \exp(B(t)\lambda_0)C(t)D(0,t)\exp(-\gamma_0 t)dt \quad (3.149)$$

$$- T * A(t)\exp(B(T)\lambda_0)C(T)D(0,T)\exp(-\gamma_0 T) \quad (3.150)$$

$$- (1 - w) \int_0^T t * \exp(B(t)\lambda_0)C(t)D(0,t)(G(t) + H(t)\lambda_0)\exp(-\gamma_0 t)dt \quad (3.151)$$

Où :

- λ_0 le taux d'intensité de défaut initial.
- γ_0 le taux de liquidité initial.
- w le taux de recouvrement.
- s le prix de la prime de CDS.
- $D(0,t)$ le facteur d'actualisation, $t \in [0, T]$.
- T la maturité de l'obligation associée à la prime de CDS.
- $B(t)$, $G(t)$, $H(t)$, $A(t)$ les fonctions du LMN introduites précédemment.

Le raisonnement précédent induit que la fonction objectif de calibrage doit tendre à réduire l'erreur d'estimation sur les prix des *Corporate*.

Aussi, la fonction de calibrage avec la pondération au moyen des vega des prix des *Corporate* doit prendre en considération la transformation logit modifiée, appliquée aux intensités de défaut pour ne pas introduire de biais dans les estimations. La pondération sera donc de la forme suivante avec CB le prix des *Corporate* et f la fonction inverse du logit appliquée au prix des *Corporate* :

$$f(CB) = \frac{1}{1 + e^{-CB}} \Rightarrow \frac{\partial f(CB)}{\partial \gamma_0} = \frac{\partial CB}{\partial \gamma_0} \frac{e^{-CB}}{(1 + e^{-CB})^2} \quad (3.152)$$

$$= v \left(\frac{1}{1 + e^{-\ln\left(\frac{\gamma_0}{1-\gamma_0}\right)}} \right) \frac{e^{-\ln\left(\frac{\gamma_0}{1-\gamma_0}\right)}}{\left(1 + e^{-\ln\left(\frac{\gamma_0}{1-\gamma_0}\right)}\right)^2} \quad (3.153)$$

$$= v(\gamma_0) \frac{e^{-\ln\left(\frac{\gamma_0}{1-\gamma_0}\right)}}{\left(1 + e^{-\ln\left(\frac{\gamma_0}{1-\gamma_0}\right)}\right)^2} \quad (3.154)$$

Ainsi, la transformation de vega utilisée dans la pondération vaut :

$$v = v_{CB} \frac{e^{-\ln\left(\frac{\gamma_0}{1-\gamma_0}\right)}}{\left(1 + e^{-\ln\left(\frac{\gamma_0}{1-\gamma_0}\right)}\right)^2} \quad (3.155)$$

La surface de vega "ajusté" des *Corporate* par *rating* est représentée ci-dessous :

Surface de Vega modifiée des lambda_0

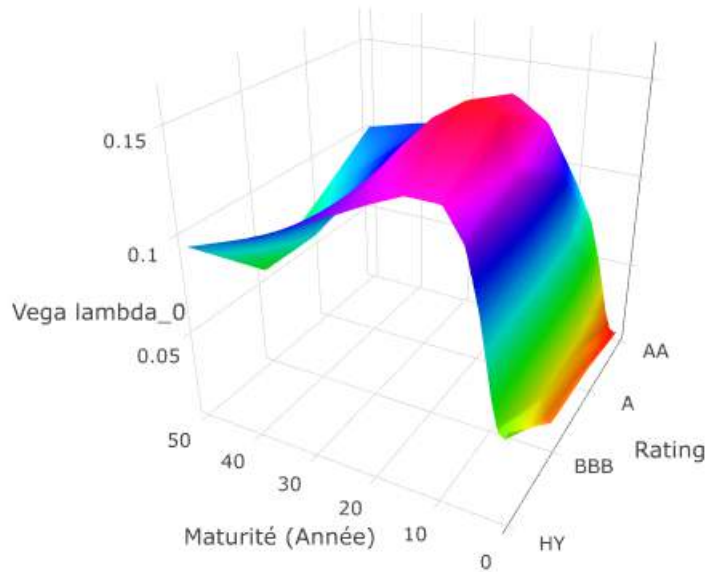


FIGURE 3.147 – Surface de Vega des CB par rating

La fonction de calibrage est alors définie comme suit pour rentrer dans le cadre d'estimation des moindres carrés pondérés : $i \in \{1, \dots, 11\}$ pour les pays et $i \in \{1, \dots, 4\}$ pour les *rating*

$$F(\beta_0, \dots, \beta_4) = \sum_{i=1}^n \omega_i [TransGamma(\gamma_{0,i}(Tenor, j)) - TransGamma(\gamma_{0,i}(\widehat{Tenor}, j))]^2 \quad (3.156)$$

Avec :

$$\omega_i = \frac{v(\alpha_i, \beta_i, \sigma_i^2, \lambda_i, \eta_i^2, Tenor_i, \gamma_i)}{\sum_{k=1}^n v(\alpha_k, \beta_k, \sigma_k^2, \lambda_k, \eta_k^2, Tenor_k, \gamma_k)} \quad (3.157)$$

Pour plus de commodité pour l'expression de l'estimateur des moindres carrés pondérés, réécrivons le modèle linéaire sous forme matricielle :

$$Y = X\beta + U, U \sim N(0, \gamma_0 I) \quad (3.158)$$

Avec :

$$Y_{n,1} = \begin{bmatrix} \text{TransGamma}(\gamma_{0,1}) \\ \vdots \\ \text{TransGamma}(\gamma_{0,n}) \end{bmatrix} \quad I_{n,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta_{5,n} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}$$

$$X_{n,1} = \begin{bmatrix} 1 & \tau/2 & X_1^{Christ_1} & X_2^{Christ_1} & X_3^{Christ_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \tau/2 & X_1^{Christ_n} & X_2^{Christ_n} & X_3^{Christ_n} \end{bmatrix}$$

Introduisons la matrice de poids :

$$W_{n,n} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \omega_n \end{bmatrix}$$

L'estimateur des moindres carrés pondérés (MCP) découle du programme d'optimisation suivant :

$$\text{Min}_{\beta} (Y - X\beta)^T W (Y - X\beta) \quad (3.159)$$

Et permet d'avoir une expression explicite garantissant l'homogénéité des résultats obtenus (minimums globaux) :

$$\beta_{MCP} = (X^T W X)^{-1} X^T W Y \quad (3.160)$$

Reconstitution des structures par terme déterministe des pays et rating

Les structures par terme de γ_0 seront donc considérées comme déterministe : ainsi, chacun des pays et *rating* se verra attribuer une structure par terme de γ_0 qui restera la même au cours du temps. Les différentes structures de γ_0 et de prix des *Corporate* pour quelques pays et *rating* sont graphées ci-après :

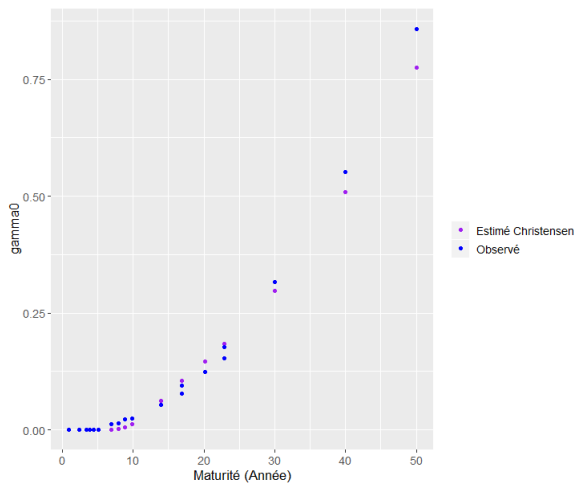


FIGURE 3.148 – Structure par terme de γ_0 de la Belgique

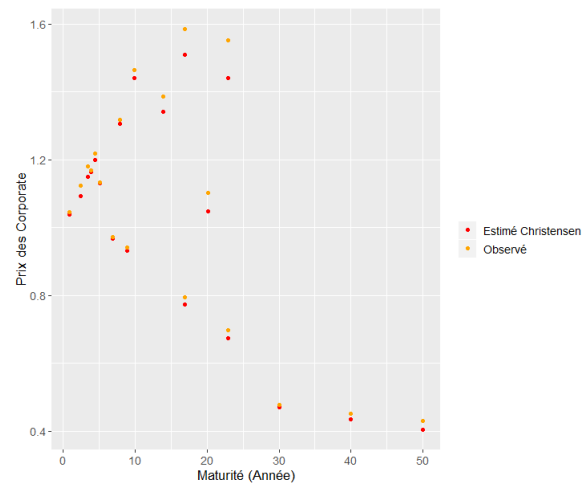


FIGURE 3.149 – Structure par terme de prix des CB de la Belgique

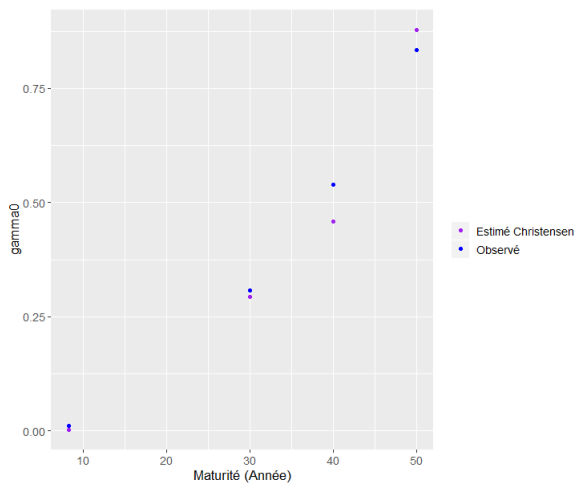


FIGURE 3.150 – Structure par terme de γ_0 de la Finlande

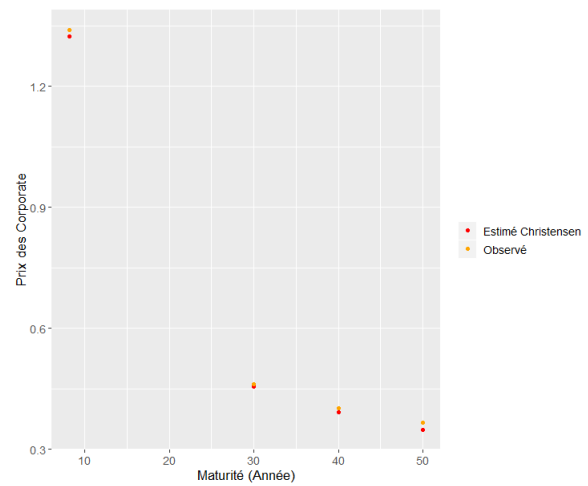


FIGURE 3.151 – Structure par terme de prix des CB de la Finlande

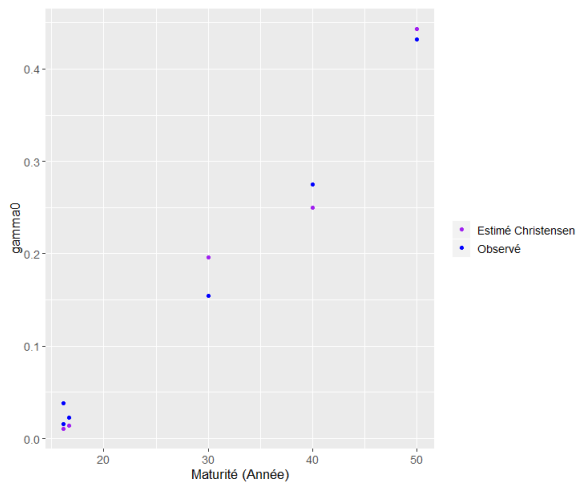


FIGURE 3.152 – Structure par terme de gamma0 du rating A

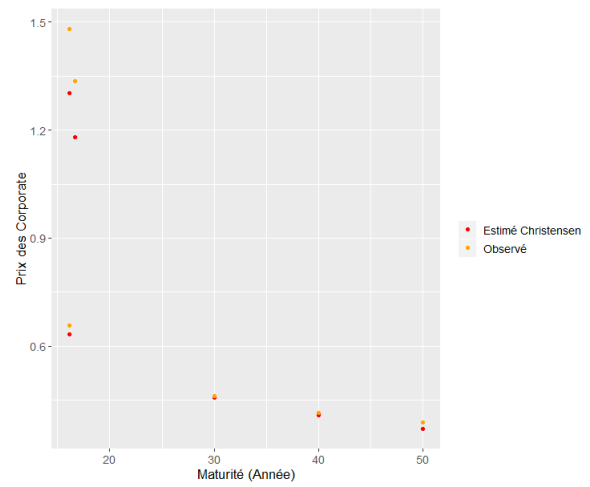


FIGURE 3.153 – Structure par terme de prix des CB du rating A

Tous les facteurs de risque inobservables ont été rendus observables, la suite s'intéresse aux facteurs de risque déjà observables (indice direct).

Autres facteurs de risque

3.8 L'indice Immobilier : Euronext IEIF REIT Europe

L'indice immobilier utilisé dans le VAR sera Euronext IEIF REIT Europe (IEIF : Institut de l'Épargne Immobilière et Foncière). Cet indice est composé des sociétés européennes les plus représentatives du régime REIT (Real Estate Investment Trust), sélectionnées sur la base de leur capitalisation boursière et de leur liquidité ; composé de 25 valeurs présentes en septembre 2009.

L'indice Euronext IEIF REIT Europe permet ainsi de suivre le secteur des sociétés immobilières européennes ayant opté pour un régime fiscal REIT, c'est-à-dire un régime de transparence fiscale avec obligation de distribution et elles doivent avoir :

- 0,4 % par rapport à la capitalisation boursière totale du secteur des REITs en Europe.
- 20 % de flottant minimum.
- des transactions quotidiennes moyennes sur un an représentant plus de 0,2 % des transactions totales du secteur des REITs en Europe.

La série temporelle du Euronext IEIF REIT Europe est graphée ci-après :

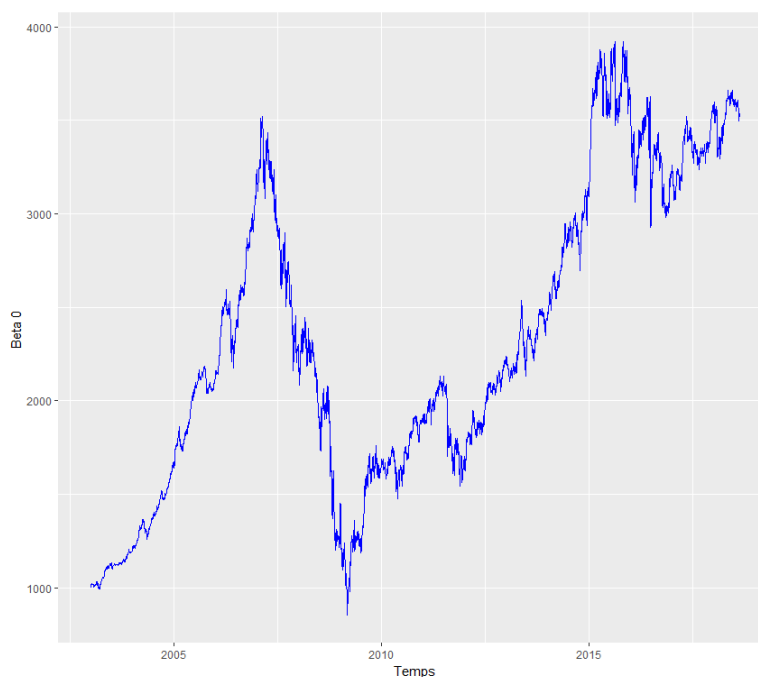


FIGURE 3.154 – Indice IEIF REIT Europe

3.9 L'indice SXXT

L'indice SXXT permet de modéliser plus largement l'*Equity*, en effet, le SXXT est l'indice net de rendement des 300 meilleurs entreprises européennes, cela permet d'avoir une vision plus large des performances des *small cap* et des *mid cap*. La représentation graphique du SXXT est donnée ci-après :

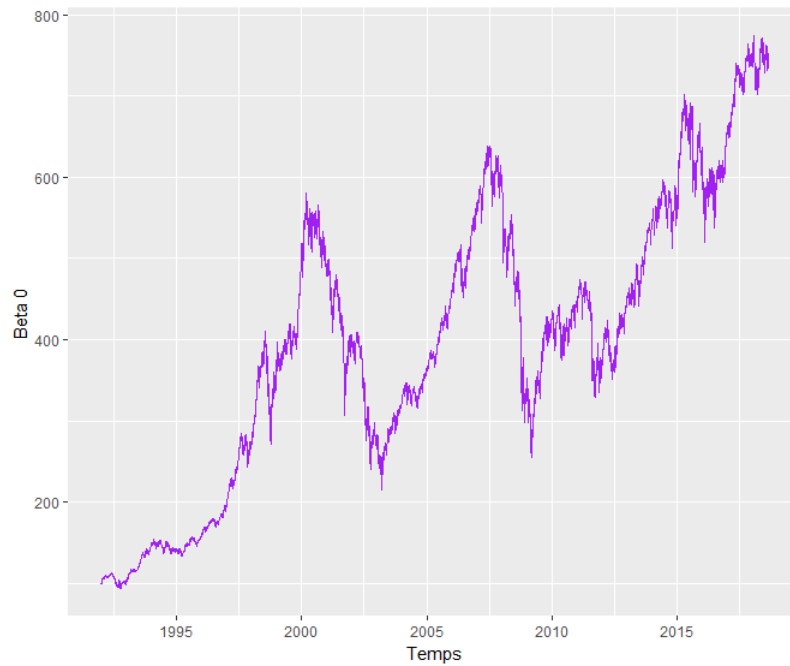


FIGURE 3.155 – Indice SXXT

Tous les facteurs de risque étant modélisés, il est désormais possible de les intégrer dans le VAR.

Chapitre 4

Construction du Vecteur AutoRégressif

Maintenant que chacun des facteurs de risque sont modélisés, il est possible de les agréger dans le Vecteur Autorégressif (VAR).

Sommaire

4.1	Théorie du modèle VAR (Vecteur Auto Régressif)	145
4.2	Agrégation des séries temporelles en représentation des facteurs de risque des classes d'actifs	151

4.1 Théorie du modèle VAR (Vecteur Auto Régressif)

4.1.1 Contexte historique

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce chapitre, c'est au début des années 80 que Christopher Sims développe ce modèle, voyons en quoi ce modèle est pertinent à cette époque.

Le contexte est le suivant : au milieu des années 70 arrive le premier choc pétrolier et cela marque définitivement la fin des Trentes glorieuses. Au même moment, les travaux de Phillips (1958) commencent à être contestés car la politique dont elle découle appelé "Stop and Go" ou politique basée sur un arbitrage inflation-chômage mise en place à l'époque devient inefficace. Les esprits de l'époque s'échauffent, plusieurs économistes et monétaristes comme Friedman, Lucas, Kydland, Prescott, Barro et Sargent rejettent alors promptement les modèles keynésiens et remettent en cause leur pouvoir à corriger les déséquilibres macroéconomiques.

Au cours des années 70, la modélisation économétrique était régie par plusieurs équations structurelles reliées entre elles par des variables présentent dans plusieurs équations. On appelle ces modèles des modèles à équations simultanées. Voici un aperçu de ce type de modèle avec un exemple simple de modélisation de l'offre et de la demande :

$$\begin{cases} q = a_1 + b_1p + c_1R + \epsilon_1, & \text{(fonction de demande)} \\ q = a_2 + b_2p + c_2T + \epsilon_2, & \text{(fonction d'offre)} \end{cases} \quad (4.1)$$

Tels que les endogènes sont la quantité produite q , et le prix unitaire p , d'un certain bien agricole et tels que les exogènes sont le revenu R , un facteur climatique T et les aléas ϵ_1 et ϵ_2 .

A cette période, les résultats de ces modèles étaient mauvais, notamment en prévision et les modèles utilisés ont été critiqués à propos de la simultanité des relations et de l'exogénéité des variables. C'est alors que Sims (1980) propose une modélisation multivariée dont les seules restrictions sont le choix des variables sélectionnées et le nombre de retards intégrés.

Il explique dans son article "la critique de Sims" (1980) en quoi les modèles macroéconométriques keynésiens sont insuffisants sur plusieurs points, à savoir :

- une restriction a priori sur les paramètres trop forte par rapport à ce que la théorie prédit, autrement dit l'exogénéité de certaines variables est postulée sans être formellement testée.
- une absence de tests sur la structure causale, c'est-à-dire que le choix des formes fonctionnelles (restrictions, exclusion de variables, structure de retards) relève de décisions arbitraires.
- un traitement inadéquat des anticipations des agents.

Ainsi, le modèle VAR constitue une alternative à ce type de modèles mais est régie tout de même par une hypothèse forte : l'évolution de l'économie peut être bien approchée par la description du comportement dynamique d'un vecteur de N variables dépendant linéairement du passé.

4.1.2 Définitions fondamentales en séries temporelles

On commence par rappeler quelques définitions d'un processus stationnaire au sens strict (ou stationnarité forte).

Soit un processus temporel aléatoire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

Définition d'un processus stationnaire au sens strict : *Le processus X_t est dit strictement ou fortement stationnaire si $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n$ tel que $t_i \in \mathbb{Z}$ et $\forall h \in \mathbb{Z}$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$; la suite $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ a la même loi de probabilité que la suite $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$. Mathématiquement :*

$$P_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}} = P_{X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}} \quad (4.2)$$

On poursuit avec la définition d'un processus stationnaire à accroissements indépendants et celle du bruit blanc.

Définition d'un processus stationnaire à accroissements indépendants : *Un processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus à accroissements indépendants si $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n$ tel que $t_i \in \mathbb{Z}$, les variables aléatoires réelles $(X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ sont indépendantes.*

Définition d'un bruit blanc : *Un bruit blanc est un processus $\varepsilon = (\varepsilon_t)$ où les ε_t , $t \in \mathbb{Z}$, sont non corélés, avec espérance zéro et variance constante. Un bruit blanc est une marche aléatoire. On parle aussi de processus i.i.d. (variables indépendantes et identiquement distribuées). Formellement, un processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un bruit blanc s'il satisfait les deux conditions suivantes $\forall t \in \mathbb{Z}$:*

$$\mathbb{E}(\varepsilon_t) = 0 \quad (4.3)$$

$$\Upsilon(h) = \mathbb{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-h}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \forall h \neq 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

La première condition signifie que l'espérance du processus est indépendante du temps et nulle. La seconde condition implique l'indépendance de la fonction d'autocovariance par rapport au temps (stationnarité) mais que les termes d'autocovariances (pour $h \neq 0$) sont tous nuls. Seule la variance est non nulle.

Autrement dit, cela signifie que les bruits blancs sont des processus stationnaires particuliers sans "mémoire". Le niveau de la série considéré aujourd'hui n'a aucune incidence sur son niveau de demain, tout comme le niveau d'hier n'a aucune incidence sur le niveau d'aujourd'hui.

Maintenant que nous avons défini quelques notions de séries temporelles, nous nous lançons dans la description du VAR(p) pour deux variables, nous généraliserons ensuite à N variables.

4.1.3 Un exemple à deux variables

Nous considérons deux processus stationnaires $y_{1,t}$ et $y_{2,t}$. Chacun de ces processus dépend de ses propres valeurs passées mais aussi des valeurs passées et présentes de l'autre processus. Aussi, le vecteur $(y_{1,t}, y_{2,t})$ est considéré stationnaire. On note p le nombre de

retards. Le processus VAR(p) décrivant la dynamique des deux processus s'écrit donc :

$$y_{1,t} = a_1 + \sum_{i=1}^p b_{1,i} y_{1,t-i} + \sum_{i=1}^p c_{1,i} y_{2,t-i} - d_1 y_{2,t} + \epsilon_{1,t} \quad (4.5)$$

$$y_{2,t} = a_2 + \sum_{i=1}^p b_{2,i} y_{2,t-i} + \sum_{i=1}^p c_{2,i} y_{1,t-i} - d_2 y_{1,t} + \epsilon_{2,t} \quad (4.6)$$

où $\epsilon_{1,t}$ et $\epsilon_{2,t}$ sont des bruits blancs non corrélés.

Réécrivons ce processus VAR(p) sous forme matricielle :

$$BY_t = A_0 + \sum_{i=1}^p A_i Y_{t-i} + \epsilon_t \quad (4.7)$$

Avec : $\forall i \in \{1, \dots, p\}$,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ d_2 & 1 \end{bmatrix} \quad Y_t = \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \end{bmatrix} \quad A_0 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad A_i = \begin{bmatrix} b_{1,i} & c_{1,i} \\ b_{2,i} & c_{2,i} \end{bmatrix} \quad \epsilon_t = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix}$$

On appelle cette représentation du VAR(p) une représentation structurelle dans laquelle le niveau de $y_{1,t}$ (respectivement $y_{2,t}$) est directement influencé par celui de $y_{2,t}$ (respectivement $y_{1,t}$). La représentation structurelle n'est donc pas utilisable en soi. C'est pourquoi, en général on travaille avec la forme réduite de la représentation VAR(p). Cette représentation est obtenue en multipliant l'équation par l'inverse de la matrice B notée B^{-1} , que l'on suppose inversible pour la suite. Le modèle précédent peut donc s'écrire :

$$Y_t = B^{-1}A_0 + \sum_{i=1}^p B^{-1}A_i Y_{t-i} + B^{-1}\epsilon_t \quad (4.8)$$

que l'on réécrit de la manière suivante :

$$Y_t = \Phi_0 + \sum_{i=1}^p \Phi_i Y_{t-i} + \eta_t \quad (4.9)$$

Avec : $\Phi_0 = B^{-1}A_0$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$, $\Phi_i = B^{-1}A_i$ et $\eta_t = B^{-1}\epsilon_t$

Ainsi, par cette transformation, nous observons que :

- le niveau de $y_{1,t}$ (respectivement $y_{2,t}$) ne dépend plus directement de $y_{2,t}$ (respectivement $y_{1,t}$) mais de ses valeurs passées.
- les innovations de la forme réduite ($\eta_{1,t}$ et $\eta_{2,t}$) sont fonctions des innovations structurelles ($\epsilon_{1,t}$ et $\epsilon_{2,t}$) même si elles respectent les propriétés d'un bruit blanc.

4.1.4 Généralisation à N variables du VAR(p)

Avec ce qui précède, on peut généraliser la représentation du processus VAR(p) à N variables. Sous forme matricielle, le VAR(p) à N variables s'écrit de la manière suivante :

$$Y_t = \Phi_0 + \sum_{i=1}^p \Phi_i Y_{t-i} + \epsilon_t = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{t-1} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t \quad (4.10)$$

Avec :

$$Y_t = \begin{bmatrix} y_{1,t} \\ \vdots \\ y_{N,t} \end{bmatrix} \quad \Phi_0 = \begin{bmatrix} a_1^0 \\ \vdots \\ a_N^0 \end{bmatrix} \quad \Phi_p = \begin{bmatrix} a_{1,p}^1 & a_{1,p}^2 & \cdots & a_{1,p}^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,Np}^1 & a_{1,Np}^2 & \cdots & a_{1,Np}^N \end{bmatrix} \quad \epsilon_t = \begin{bmatrix} \epsilon_{1,t} \\ \vdots \\ \epsilon_{N,t} \end{bmatrix}$$

On peut donc écrire l'équation précédente en fonction de l'opérateur retard L défini par $Y_{t-i} = Y_t L^i$ pour $i \in \{1, \dots, p\}$ et la matrice identité I :

$$Y_t(I - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \dots - \Phi_p L^p) = \Phi_0 + \epsilon_t \quad (4.11)$$

que l'on peut réécrire :

$$\Phi(L)Y_t = \Phi_0 + \epsilon_t \quad (4.12)$$

avec $\Phi(L) = 1 - \sum_{i=1}^p \Phi_i L^i$ et où ϵ_t satisfait les propriétés d'un bruit blanc.

Ainsi, il y a un moyen d'estimer des modèles comportant un grand nombre d'équations. La taille du modèle est en effet conditionnée par le nombre d'observations disponibles et le nombre de retards intégrés dans l'estimation. Il est donc de la responsabilité de l'utilisateur d'effectuer un arbitrage afin de préserver le degré de liberté et de réaliser une estimation de bonne qualité.

Une fois que l'on a choisi le modèle, il faut pouvoir le calibrer en fonction des données que l'on met en entrée. Nous avons donc besoin d'estimer les paramètres du modèle, de les valider pour ensuite faire de la projection (prédiction) de ces variables en respectant leur structure de dépendance.

4.1.5 Estimation, validation et prévision

Estimation d'un processus VAR

L'estimation d'un processus VAR(p) peut se faire par :

- la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO).
- la méthode du maximum de vraisemblance.

De manière générale, la méthode du maximum de vraisemblance ou de quasi vraisemblance est la principale méthode utilisée pour calibrer les paramètres du VAR(p) d'après Hamilton (1994). D'ailleurs, c'est cette méthode que nous utiliserons pour nos travaux ci-présent. Nous décidons donc de la présenter ci-après.

Nous considérons un processus VAR(p) :

$$Y_t = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{t-1} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t \quad (4.13)$$

Tel que ϵ_t est un bruit blanc de matrice de variance-covariance Σ . On supposera également que les bruits blancs ϵ_t sont indépendants : les ϵ_t sont alors des bruits blancs gaussiens. On rappelle que la densité jointe de ϵ_t est alors donnée par : pour un vecteur $x \in \mathbb{R}^p$,

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T \Sigma^{-1} x\right) \quad (4.14)$$

Ainsi, Y_t définit par le processus d'innovation ϵ_t est lui-même gaussien. On a donc immédiatement la densité de $Y_t | Y_s, s \leq t-1$:

$$Y_t | Y_{t-1} \sim \mathcal{N}\left(\Phi_0 + \sum_{i=1}^p \Phi^i Y_{t-i}, \Sigma\right) \quad (4.15)$$

Nous allons nous ramener à des produits de termes plus simples, utilisant le fait qu'une densité jointe peut toujours s'écrire comme produit d'une marginale par une conditionnelle. Ainsi, nous avons la densité $f(x)$ à la puissance T :

$$f_{Y_t|Y_{t-1}}(x) = \prod_{t=1}^T (2\pi)^{-\frac{N}{2}} |\Sigma^{-1}|^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} x^T \Sigma^{-1} x\right) \quad (4.16)$$

La vraisemblance conditionnellement à toutes les valeurs passées du processus s'écrit :

$$L(Y_1, \dots, Y_T) = \prod_{t=1}^T L(Y_t|Y_{t-1}) \quad (4.17)$$

Où Y_{t-1} doit être compris comme l'information disponible jusqu'au temps $(t-1)$. Autrement dit, Y_{t-1} est la mémoire du processus Y_t jusqu'à la date $(t-1)$ y compris.

La vraisemblance du processus VAR(p) s'écrit alors :

$$L(Y_1, \dots, Y_T) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N \sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[Y_t - \sum_{i=1}^p \Phi^i Y_{t-i} \right]^T \Sigma^{-1} \left[Y_t - \sum_{i=1}^p \Phi^i Y_{t-i} \right]\right) \quad (4.18)$$

La log-vraisemblance du processus VAR(p) s'écrit donc :

$$\ln(L(Y_1, \dots, Y_T)) = -\frac{TN}{2} \ln(2\pi) - \frac{T}{2} \ln(\Sigma) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \epsilon_t^T \Sigma^{-1} \epsilon_t \quad (4.19)$$

La maximisation de cette log-vraisemblance permet alors d'obtenir les estimations des paramètres Φ_1, \dots, Φ_p et de la matrice de variance-covariance Σ .

Le choix des retards

Une étape déterminante dans le processus d'estimation est le choix du nombre p optimal de retards. En effet, d'une part, choisir un nombre insuffisant de retards engendrerait une perte d'information du processus étudié mais d'autre part, choisir un nombre trop important de retards augmenterait le nombre de paramètres à estimer. Comme en Machine Learning, augmenter le nombre de paramètres dans un modèle permet d'être meilleur sur le passé mais le risque d'"over-fitting" (sur-apprentissage) est aussi augmenté et le pouvoir prédictif du modèle devient plus faible. A contrario, diminuer le nombre de paramètres d'un modèle laisse davantage de liberté au modèle dans son pouvoir prédictif et donc dans sa qualité prédictif (résultat tout de même nuancé en fonction des cas et de la considération du nombre de variables d'un modèle). Cela permet donc d'avoir une plus grande stabilité des estimations mais un pouvoir prédictif plus faible. Le choix du modèle réside donc dans l'utilisation que l'on veut faire de celui-ci : modèle équilibré tant sur le pouvoir prédictif que dans la réplification du passé ou modèle plus performant au niveau prédictif ou dans la réplification du passé.

Les méthodes utilisées pour déterminer le nombre de retards sont le plus souvent basées sur des critères d'information. Par exemple, une procédure couramment utilisée consiste à estimer le processus VAR(p) pour des retards allant de 0 à h_{max} , où h_{max} est le nombre maximum de retards inclus. h_{max} est en général choisi sur avis d'expert (théorie économique, intuition économique...). Les critères d'information les plus souvent utilisés

dans la minimisation en fonction du nombre p de retards sont les critères AIC et SC définis de la manière suivante :

$$AIC(p) = \ln(\det(\widehat{\Sigma})) + 2\frac{k^2 p}{T} \quad (4.20)$$

$$SC(p) = \ln(\det(\widehat{\Sigma})) + k^2 p \frac{\ln(T)}{T} \quad (4.21)$$

Avec :

- T le nombre d'observation
- k le nombre de variables du système
- $\widehat{\Sigma}$ un estimateur de la matrice de variance-covariance des résidus du modèle.

Dans un processus VAR, pour améliorer le degré de liberté et donc améliorer le pouvoir prédictif, le nombre de retards est réduit.

La prévision

L'intérêt des processus VAR est d'améliorer les prévisions par rapport aux modèles macroéconométriques.

Soit un processus VAR(p) estimé :

$$Y_t = \widehat{\Phi}_0 + \widehat{\Phi}_1 Y_{t-1} + \dots + \widehat{\Phi}_p Y_{t-p} + \epsilon_t \quad (4.22)$$

Par la précédente partie, le nombre de retards optimal p au même titre que les paramètres $\widehat{\Phi}_0, \widehat{\Phi}_1, \dots, \widehat{\Phi}_p$ et la matrice de variance-covariance $\widehat{\Sigma}$ associée au bruit blanc ϵ_t ont été choisis.

Avec la notation $\mathcal{F}^{Y_T} (= \sigma \{Y_s, s \leq T\})$, la prévision du processus VAR(p) à un horizon $h > 0$ décrit par la relation précédente est caractérisée par $\mathbb{E}(Y_{T+h} | \mathcal{F}^{Y_T})$. La prévision du processus VAR(p) à un horizon $h > 0$ s'écrit donc :

$$\widehat{\mathbb{E}}(Y_{T+h} | \mathcal{F}^{Y_T}) = \widehat{\Phi}_0 + \widehat{\Phi}_1 Y_T + \dots + \widehat{\Phi}_p Y_{T-p+h} \quad (4.23)$$

Par exemple, pour $p=h=2$, un calcul direct donne :

$$\widehat{\mathbb{E}}[Y_{T+2} | Y_s, s \leq T] = (\widehat{\Phi}_0 + \widehat{\Phi}_1 \widehat{\Phi}_0 + \widehat{\Phi}_1 (\widehat{\Phi}_1 + \widehat{\Phi}_2) Y_T + \widehat{\Phi}_1 \widehat{\Phi}_2 Y_{T-1} \quad (4.24)$$

Maintenant, d'un point de vue pratique et opérationnelle, il faut fournir les *input* du VAR : les différentes séries temporelles modélisant les facteurs de risque des classes d'actifs composant le portefeuille.

4.2 Agrégation des séries temporelles en représentation des facteurs de risque des classes d'actifs

Au total, les séries temporelles en entrée du VAR sont au nombre de 34. Ces séries sont extraites des parties précédentes, soit modélisées puis calibrées lorsqu'elles ne sont pas observables, soit directement extraites des données du marché. Le GSE (VAR) est calibré sur un historique commun à tous les facteurs de risque : du 01/07/2011 au 11/06/2018. Le pas de projection du GSE est journalier. Nous considérons un seul retard soit un VAR(1).

Les différents facteurs de risque sont associés à un nombre de séries temporelles permettant de les caractériser :

- la structure par terme des taux de dividende est caractérisée par 4 séries temporelles (les β du NSS logité)
- la structure par terme des taux d'intérêt est caractérisée par 4 séries temporelles (les β du NSS)
- la nappe de volatilité implicite des dérivés action est caractérisée par 6 séries temporelles.
- la nappe de volatilité implicite des dérivés de taux *cap & floor* est caractérisée par 6 séries temporelles.
- le cube de volatilité implicite des dérivés de taux *swaption* est caractérisée par 9 séries temporelles.
- la nappe du taux d'intensité de défaut initial des CDS des pays et des rating est caractérisée par une série temporelle chacune soit 2.
- le sous-jacent SX5E caractérisé par son cours soit une série temporelle.
- le sous-jacent SXXT caractérisé par son cours soit une série temporelle.
- le sous-jacent IEIF caractérisé par son cours soit une série temporelle.

Schématiquement, le GSE génère une « table » pour chaque simulation (10^5 dans notre cas) des 34 séries temporelles de cette forme avec n le nombre de pas (jour) de projection :

Séries temporelles Pas journalier	1	2	3	4	5	...	n
Beta.0.Dividendes							
Beta.1.Dividendes							
Beta.2.Dividendes							
Beta.3.Dividendes							
Beta.0.Taux							
Beta.1.Taux							
Beta.2.Taux							
Beta.3.Taux							
Beta.0.Equity							
Beta.1.Equity							
Beta.2.Equity							
Beta.3.Equity							
Beta.4.Equity							
Beta.5.Equity							
Beta.0.Cap							
Beta.1.Cap							
Beta.2.Cap							
Beta.3.Cap							
Beta.4.Cap							
Beta.5.Cap							
Beta.0.Swaption							
Beta.1.Swaption							
Beta.2.Swaption							
Beta.3.Swaption							
Beta.4.Swaption							
Beta.5.Swaption							
Beta.6.Swaption							
Beta.8.Swaption							
Beta.lambda0.Pays							
Beta.lambda0.Rating							
S0.SX5E							
SXXT							
IEIF							

TABLE 4.1 – Table GSE

Troisième partie

Application à l'évaluation et la prévision de dérivés vanilles

Chapitre 5

Evaluation & Forecasting

Une fois les séries temporelles projetées à l'aide du VAR (34 au total), il est d'usage de vérifier la *Market-Consistency* : sachant le GSE calibré avec des données historiques de marché (communes à tous les facteurs de risque projetés par le VAR) du 01/07/2011 au 11/06/2018, disposant des données du 09/08/2018 au 22/08/2018, 10^5 simulations de trajectoires sont générées par le VAR jusqu'à la dernière date disponible du 22/08/2018, des intervalles de confiance sont alors réalisés pour vérifier que le GSE est robuste pour chacun des facteurs de risque.

Ainsi, des intervalles de confiances de quantile 5 % et 95 % sur toutes les simulations par actif et une moyenne de toutes les simulations par actif sont réalisés de façon à reconstruire :

- le sous-jacent SX5E [1]
- le sous-jacent SXXT [1]
- l'indice immobilier Euronext IEIF REIT Europe. [1]
- la structure par terme des taux d'intérêt. [4]
- la structure par terme des taux de dividende. [4]
- la structure par terme des forward spot.
- la nappe de volatilité implicite des produits dérivés action (*call*). [6]
- la nappe de volatilité des produits dérivés de taux (*cap/floor*). [6]
- le cube de volatilité des produits dérivés de taux (*swaption*). [9]
- la nappe du paramètre d'intensité de défaut initial des CDS *Govies* par pays et par *rating*. [1] + [1]

Ce chapitre a pour vocation de présenter les résultats de manière sustain au travers de plusieurs graphiques montrant l'efficacité de l'approche utilisée jusqu'ici.

Sommaire

5.1	Hypothèse et calibration du VAR	156
5.2	L'indice action SX5E (dividendes non réinvestis)	157
5.3	L'indice SXXT	158
5.4	L'indice immobilier Euronext IEIF REIT Europe	159
5.5	La structure par terme des taux d'intérêt	160
5.6	La structure par terme des taux de dividende	162
5.7	La structure par terme des forward spot	164
5.8	La nappe de volatilité et de prix des produits dérivés action (<i>call</i>)	166
5.9	La nappe de volatilité et de prix des produits dérivés de taux (<i>cap</i>)	167
5.10	Le cube de volatilité et de prix des produits dérivés de taux (<i>swaption</i>)	169
5.11	La nappe du paramètre d'intensité de défaut initial des CDS par pays et par <i>rating</i>	171

5.1 Hypothèse et calibration du VAR

Plusieurs tests de vérification de stationnarité des séries temporelles en entrée du VAR sont appliqués tels que :

- test de Dickey-Fuller Augmenté (H_0 : la série comporte une racine unitaire (p-value > 5 %) contre H_1 : la série ne comporte pas de racine unitaire (la série est stationnaire).
- test de KPSS ou test de Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (H_0 : la série est stationnaire (p-value > 5 %) contre H_1 : la série ne comporte pas de racine unitaire (la série est stationnaire).

Le test de racine unitaire n'est pas accepté pour 26 des séries et celui de stationnarité est globalement rejeté : seulement trois séries sont stationnaires. Ainsi, pour vérifier les hypothèses du VAR, nous commençons par centrer et réduire chacune de nos séries (normalisation des séries) puis nous les rendons stationnaires au moyen de la différenciation classique sauf pour les sous-jacents directs auxquels nous appliquons une différenciation logarithmique de façon à garantir la positivité des processus. De cette façon, chacune des séries transformées sont stationnaires et il est possible d'exploiter le VAR correctement.

En ce qui concerne les corrélations entre les différentes séries, de bons résultats ont été observés en corrélant par bloc les séries en fonction de leur appartenance à un modèle paramétré. Par exemple, le modèle de projection de la surface de volatilité implicite sur les *swaption*, composé de 9 paramètres la caractérisant, nous corrélons seulement les 9 β entre eux.

Il est alors possible d'évaluer dans le futur des prix de dérivés vanilles ainsi que les autres facteurs de risques observables.

5.2 L'indice action SX5E (dividendes non réinvestis)

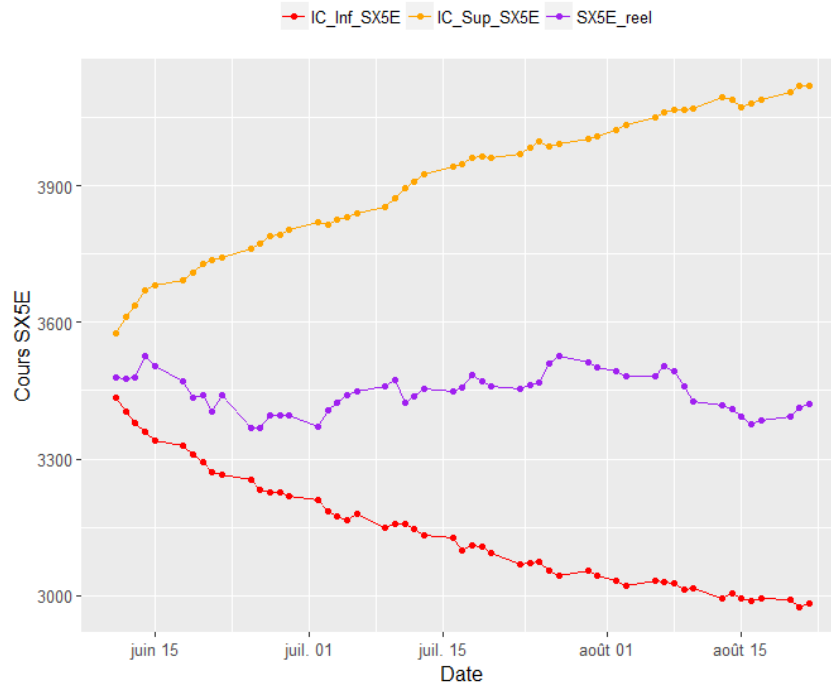


FIGURE 5.1 – Représentation graphique de l'intervalle de confiance du SX5E VAR et celle réelle

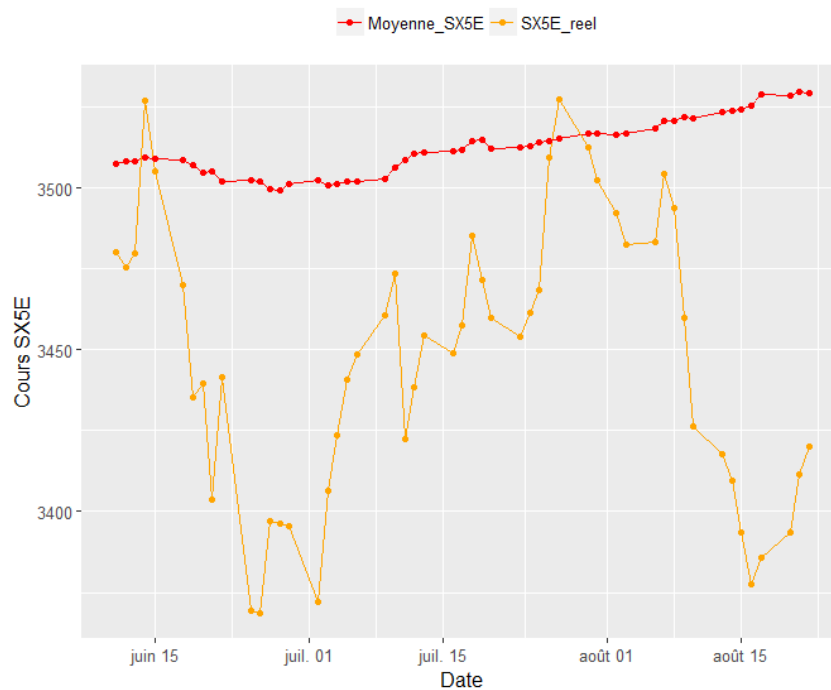


FIGURE 5.2 – Représentation graphique de la moyenne du SX5E VAR et celle réelle

5.3 L'indice SXXT

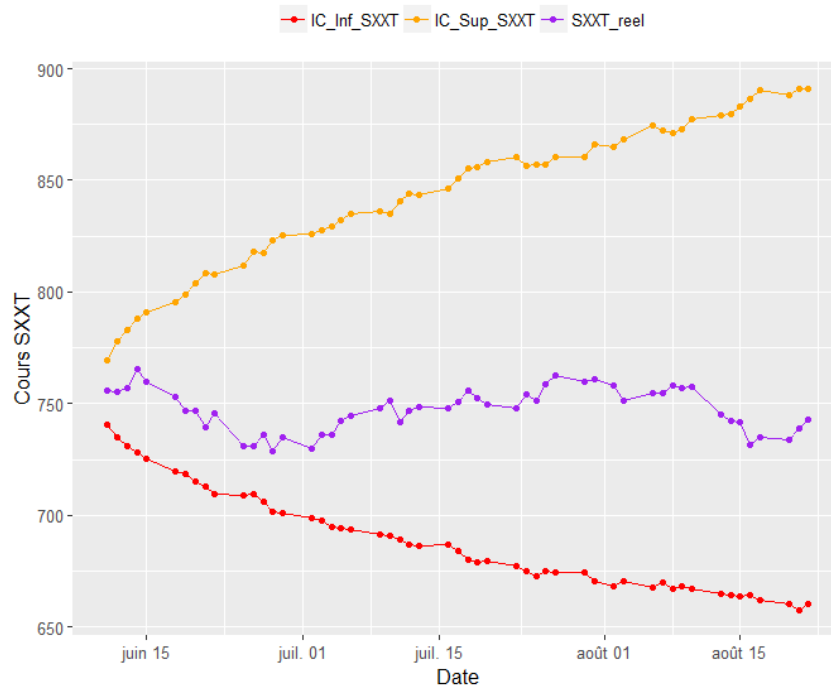


FIGURE 5.3 – Représentation graphique de l'intervalle de confiance du SXXT VAR et celle réelle

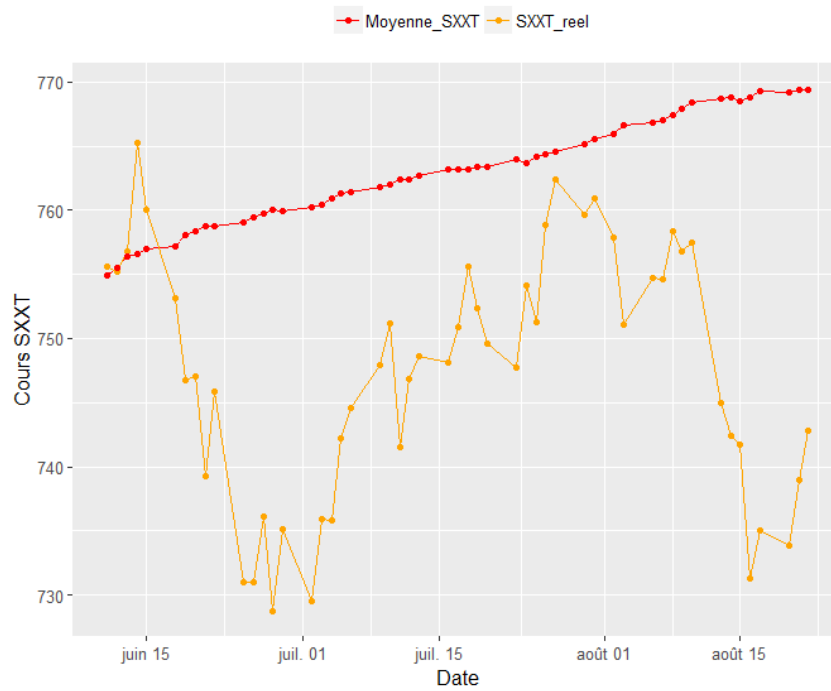


FIGURE 5.4 – Représentation graphique de la moyenne du SXXT VAR et celle réelle

5.4 L'indice immobilier Euronext IEIF REIT Europe

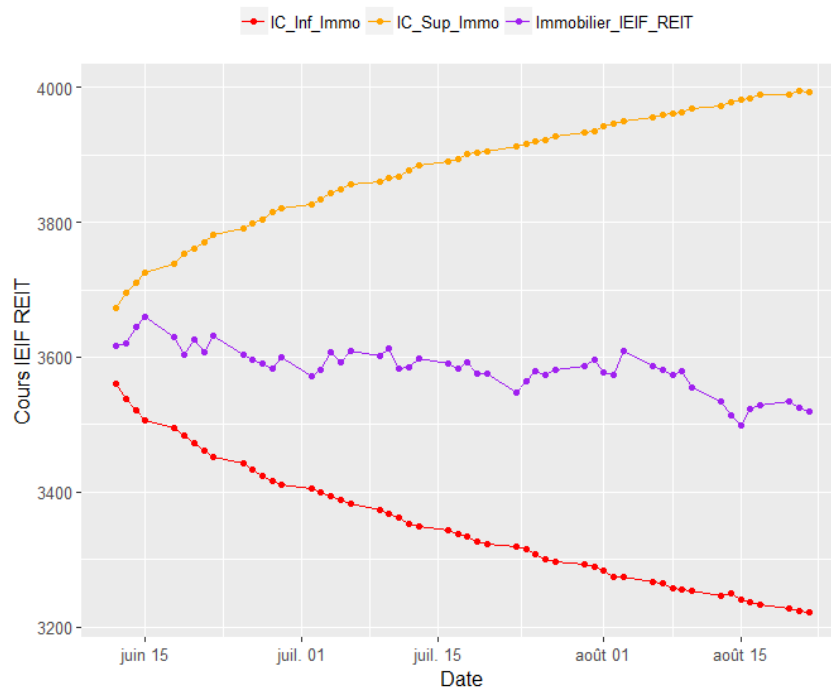


FIGURE 5.5 – Représentation graphique de l'intervalle de confiance de l'Euronext IEIF REIT VAR et celle réelle

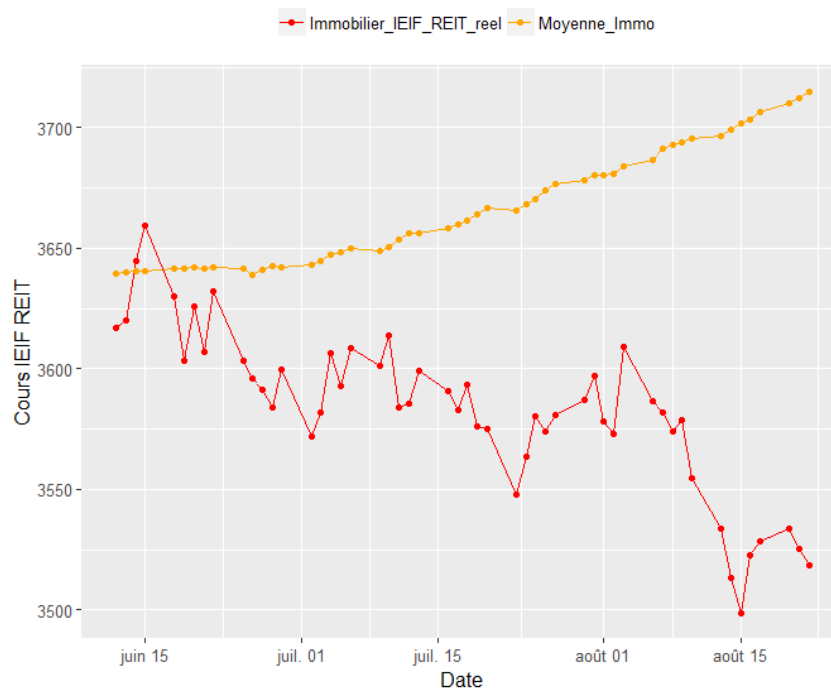


FIGURE 5.6 – Représentation graphique de la moyenne de l'Euronext IEIF REIT VAR et celle réelle

5.5 La structure par terme des taux d'intérêt

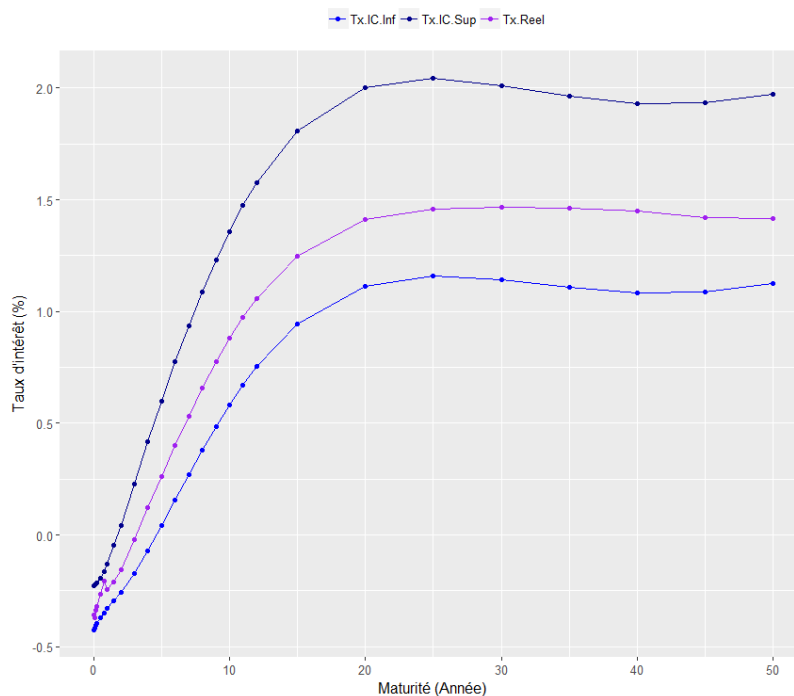


FIGURE 5.7 – Représentation graphique de l'intervalle de confiance de la STTI VAR et celle réelle au 16/08/2018

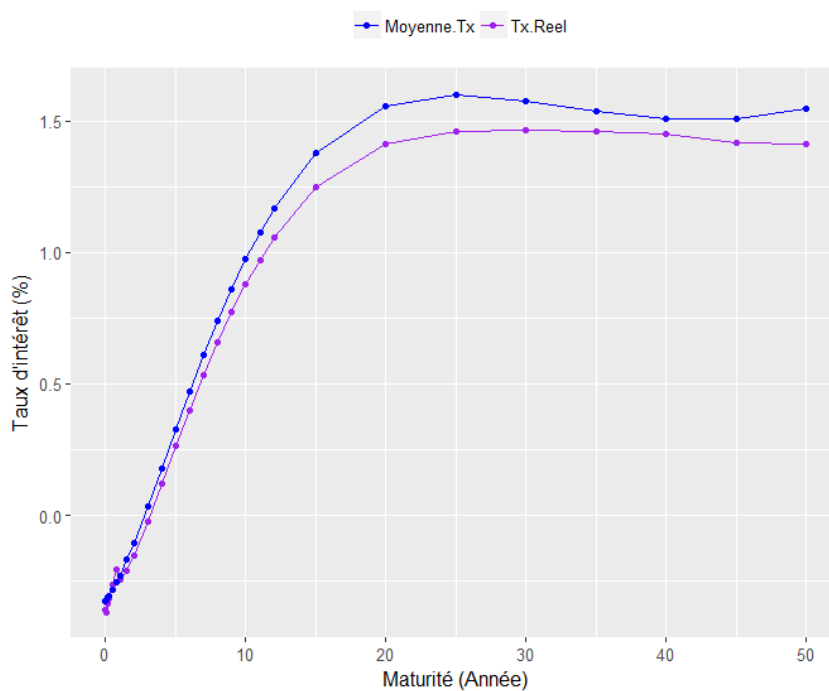


FIGURE 5.8 – Représentation graphique de la moyenne de la STTI du VAR et celle réelle au 16/08/2018

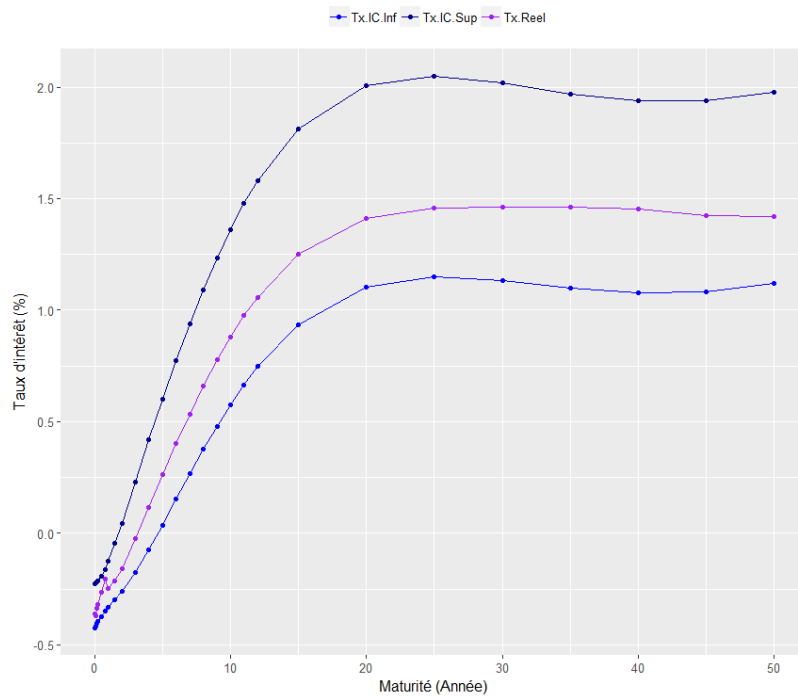


FIGURE 5.9 – Représentation graphique de l'intervalle de confiance de la STTI VAR et celle réelle au 20/08/2018

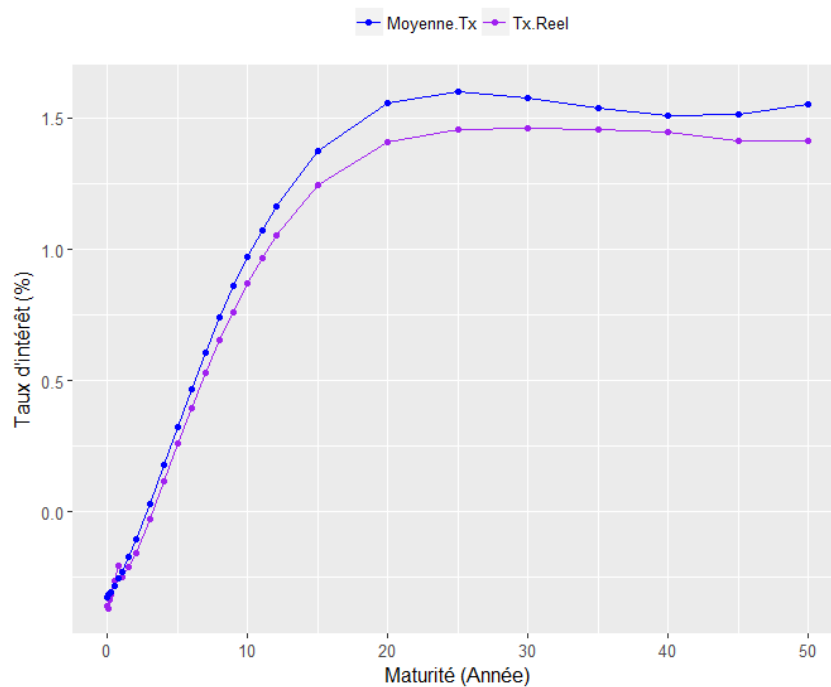


FIGURE 5.10 – Représentation graphique de la moyenne de la STTI du VAR et celle réelle au 20/08/2018

5.6 La structure par terme des taux de dividende

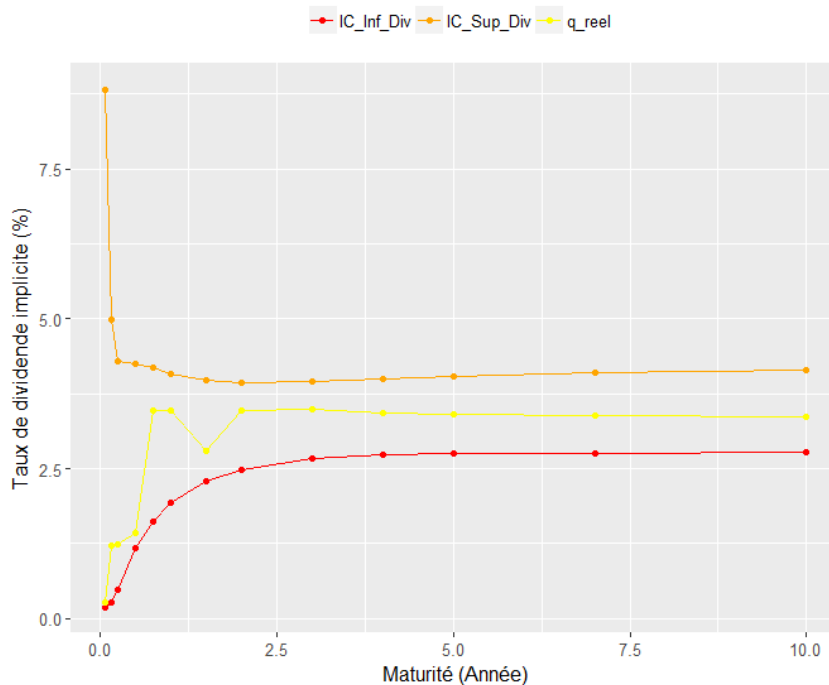


FIGURE 5.11 – Représentation graphique de l'intervalle de confiance de la STTD VAR et réelle au 22/08/2018

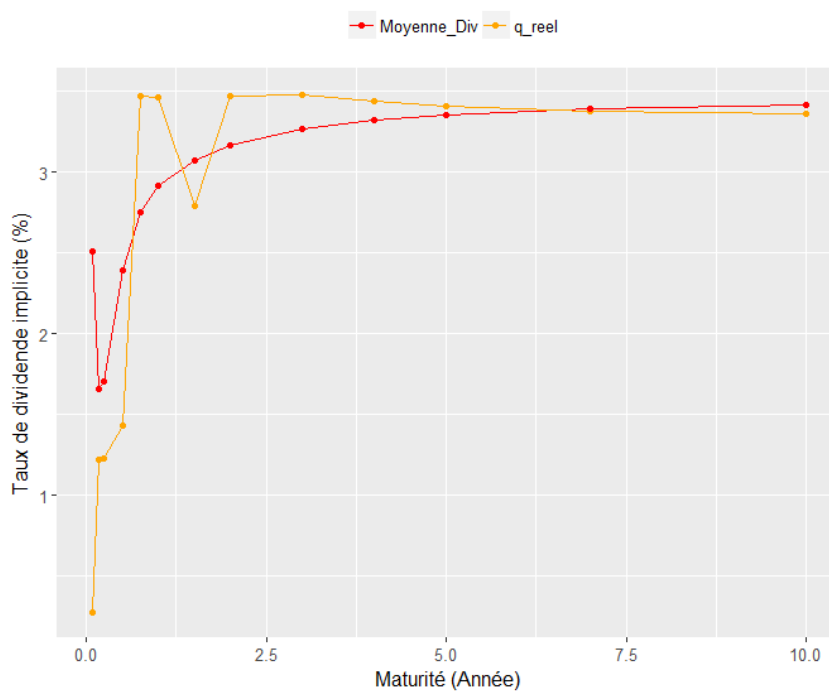


FIGURE 5.12 – Représentation graphique de la moyenne de la STTD VAR et réelle au 22/08/2018

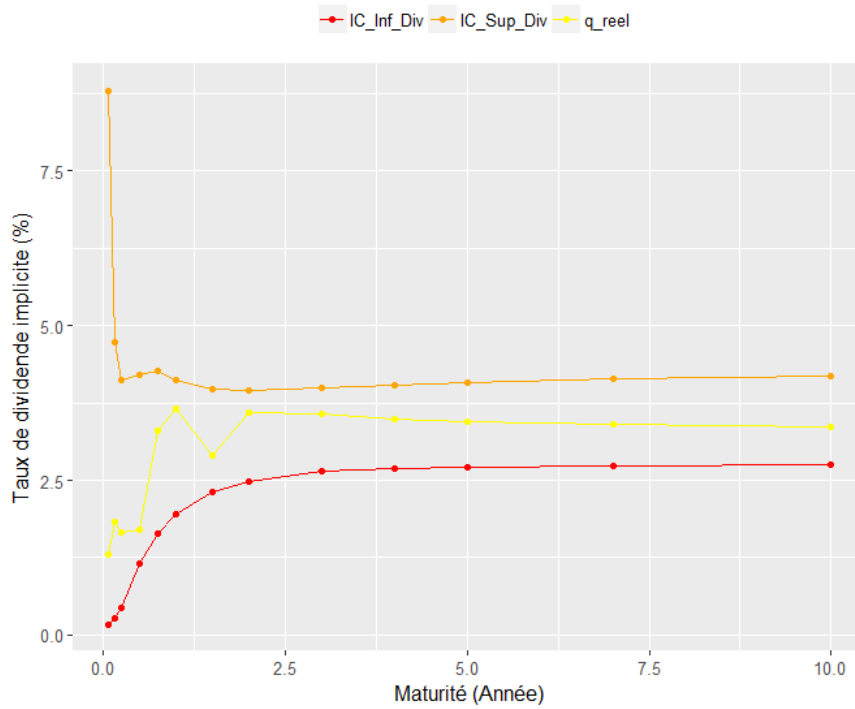


FIGURE 5.13 – Représentation graphique de l'intervalle de confiance de la STTD VAR et réelle au 15/08/2018

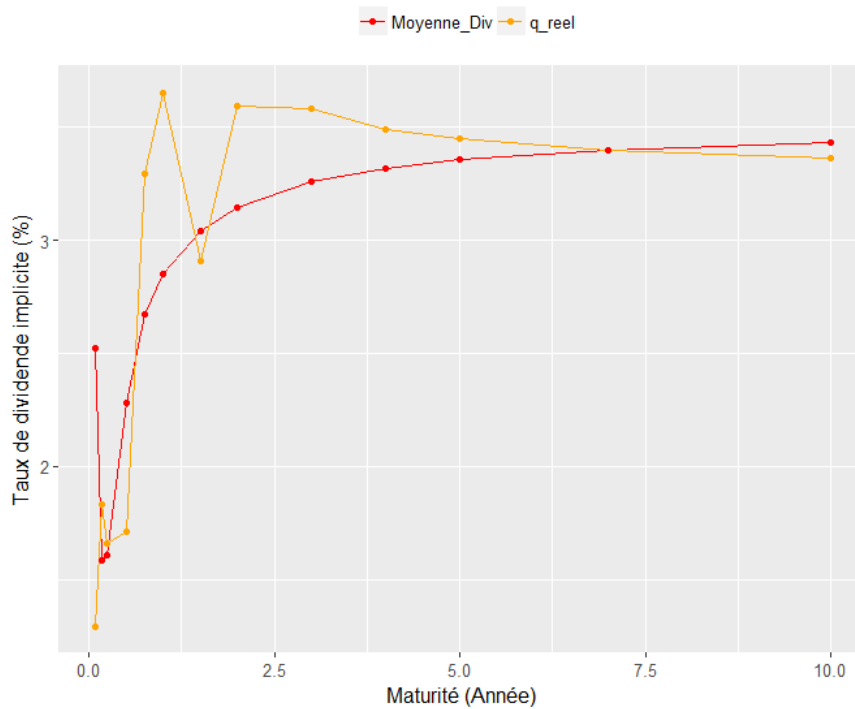


FIGURE 5.14 – Représentation graphique de la moyenne de la STTD VAR et réelle au 15/08/2018

5.7 La structure par terme des forward spot

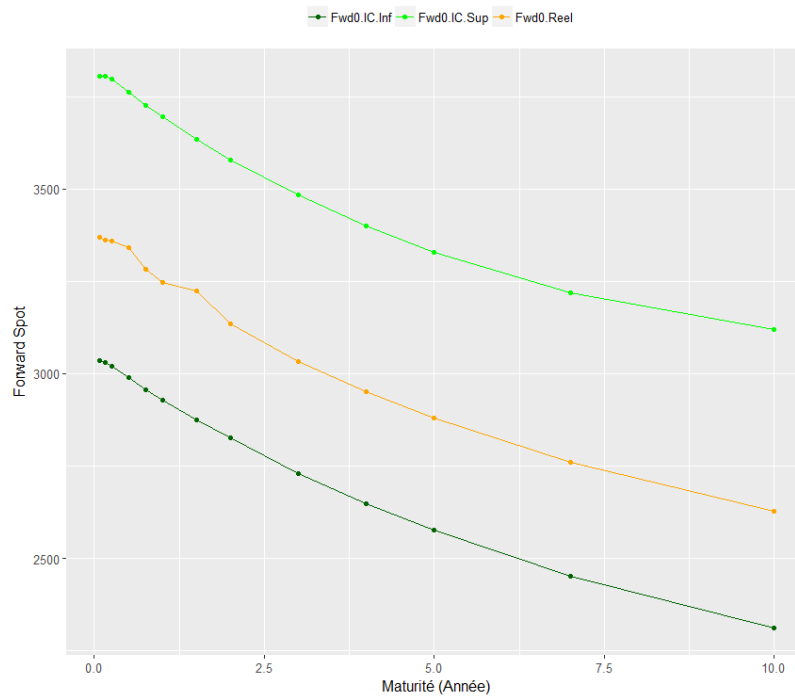


FIGURE 5.15 – Représentation graphique de l'intervalle de confiance de la STT des Forward Spot VAR et réelle au 17/08/2018

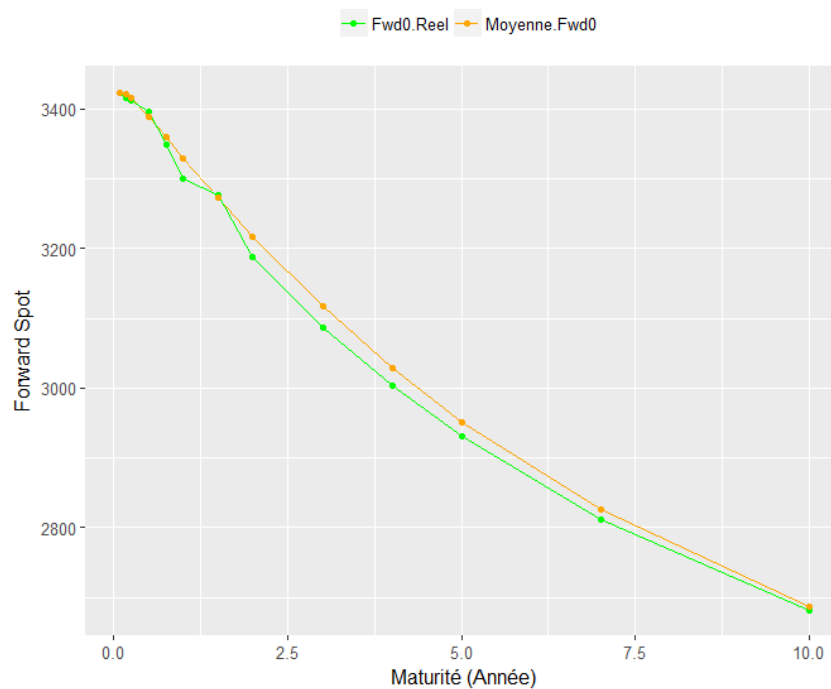


FIGURE 5.16 – Représentation graphique de la moyenne de la STT des Forward Spot VAR et celle réelle au 17/08/2018

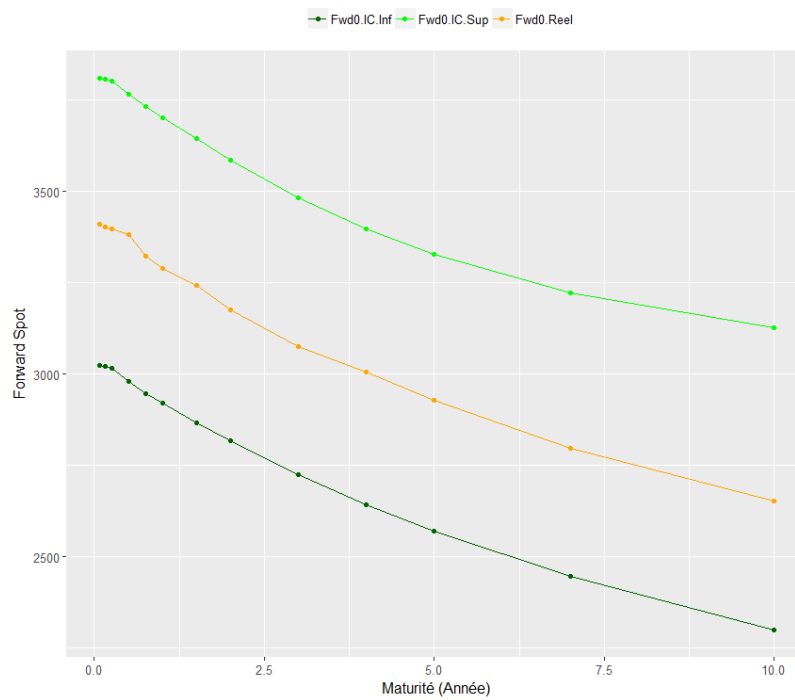


FIGURE 5.17 – Représentation graphique de l'intervalle de confiance de la STT des Forward Spot VAR et réelle au 21/08/2018

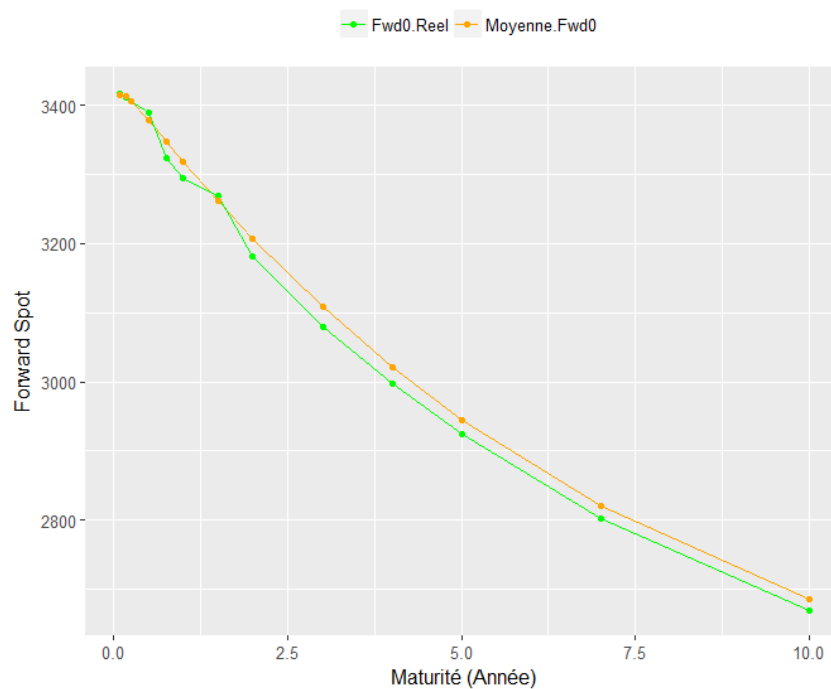


FIGURE 5.18 – Représentation graphique de la moyenne de la STT des Forward Spot VAR et celle réelle au 21/08/2018

5.8 La nappe de volatilité et de prix des produits dérivés action (call)

Market-Consistency des Volatilités des Call

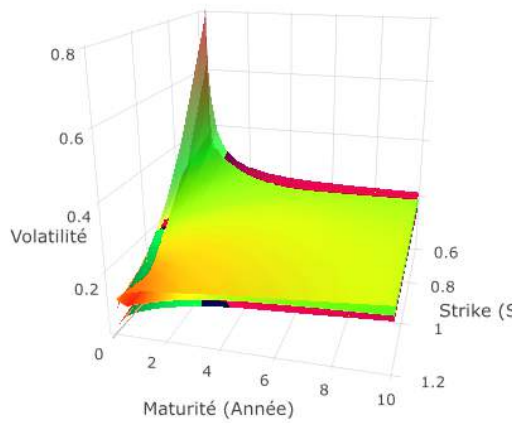


FIGURE 5.19 – IC CALL VOL
22/08/2018

Forecasting des Volatilités des Call

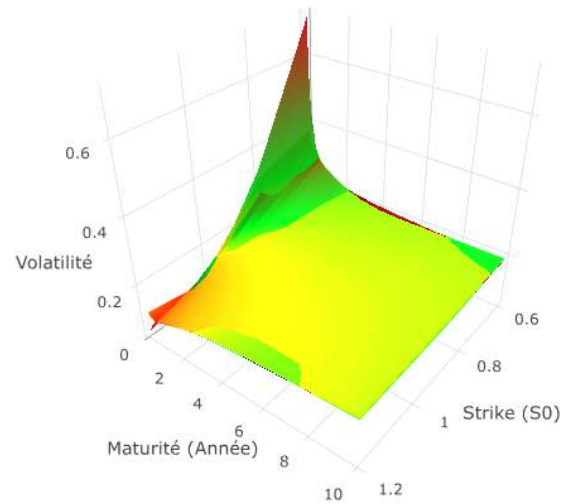


FIGURE 5.20 – MOY CALL VOL
22/08/2018

Market-Consistency des Prix des Call

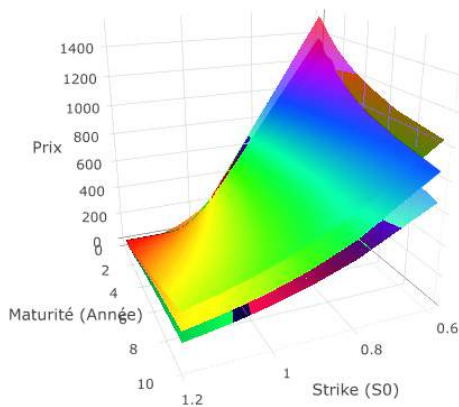


FIGURE 5.21 – IC CALL PRIX
22/08/2018

Forecasting des Prix des Call

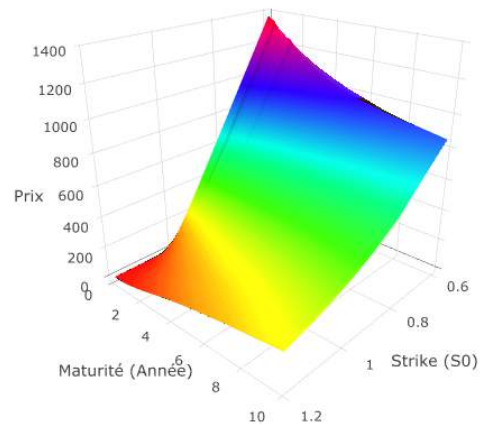


FIGURE 5.22 – MOY CALL PRIX
22/08/2018

5.9 La nappe de volatilité et de prix des produits dérivés de taux (cap)

Market-Consistency des Volatilités des Cap

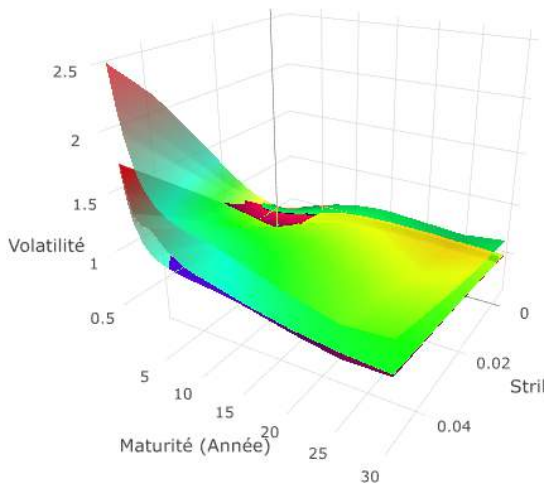


FIGURE 5.23 – IC CAP VOL 22/08/2018

Forecasting des Volatilités des Cap

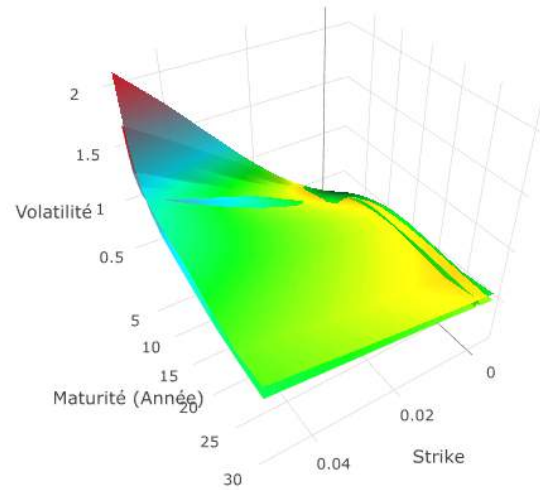


FIGURE 5.24 – MOY CAP VOL 22/08/2018

Market-Consistency des Prix des Cap

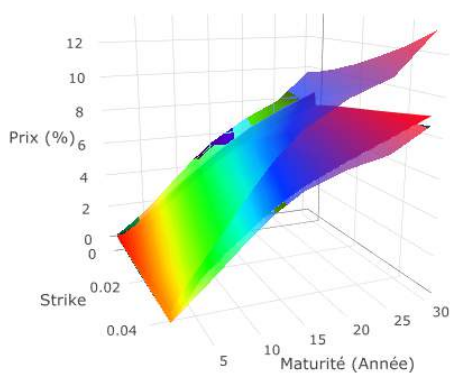


FIGURE 5.25 – IC CAP PRIX 22/08/2018

Forecasting des Prix des Cap

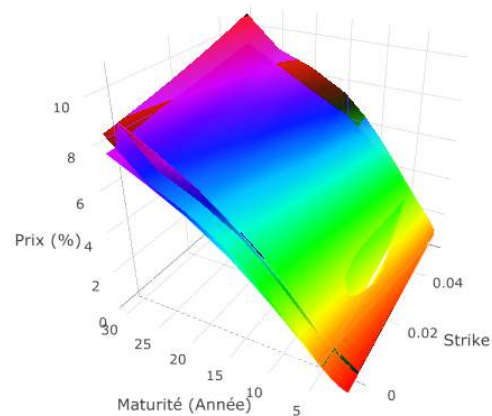


FIGURE 5.26 – MOY CAP PRIX 22/08/2018 (1)

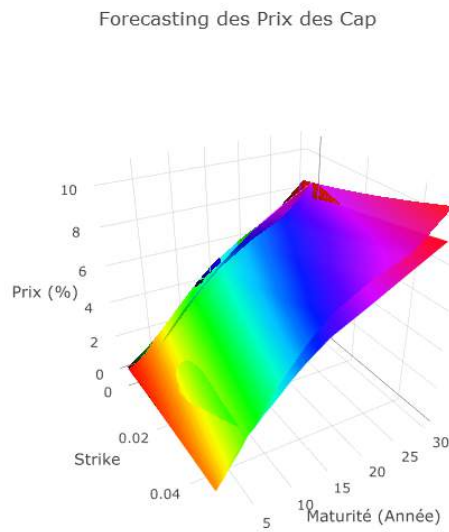


FIGURE 5.27 – MOY CAP PRIX 22/08/2018 (2)

Le *fitting* est de bonne qualité en ce qui concerne les volatilités mais lorsque la formule de *pricing* est appliquée, les prix sont très bien répliqués pour des *strike* proche de l'ATM jusqu'au *tenor* 25 ans, ensuite, pour des *tenor* très en dehors de la monnaie ($>3\%$), l'erreur est plus élevée et augmente d'autant plus que le *tenor* croît. Globalement, les prix sont surestimés pour des *tenor* supérieurs à 25 ans et cette surestimation est d'autant plus grande que l'on s'éloigne du *strike* ATM. Le modèle est tout de même très performant pour répliquer les prix dont les *tenor* sont inférieurs à 25 ans et dont le *strike* est proche de l'ATM.

5.10 Le cube de volatilité et de prix des produits dérivés de taux (*swaption*)

Market-Consistency des Volatilités des Swaptic

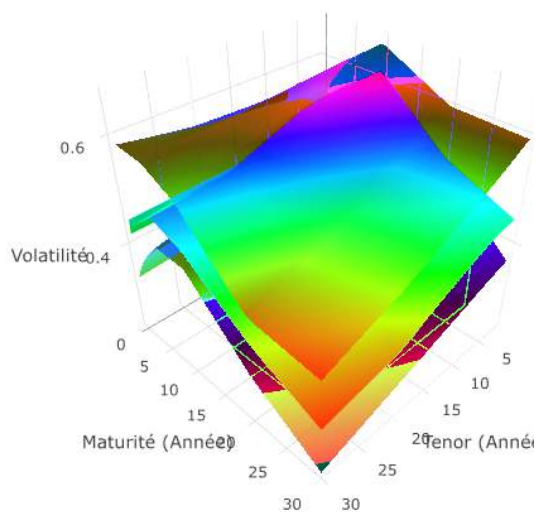


FIGURE 5.28 – IC SW VOL 22/08/2018 Strike -100 bps

Forecasting des Volatilités des Swaption

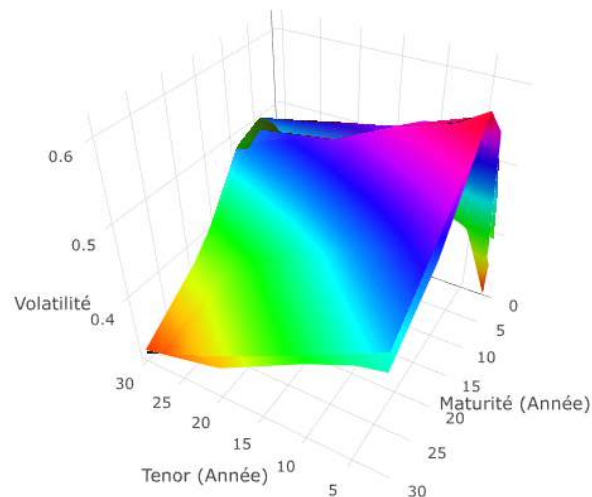


FIGURE 5.29 – MOY SW VOL 22/08/2018 -100 bps

Market-Consistency des Prix des Swaption

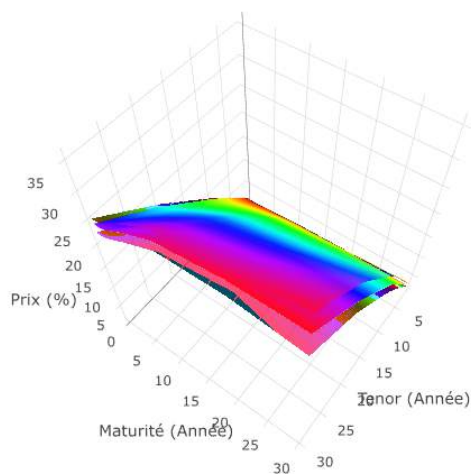


FIGURE 5.30 – IC SW PRIX 22/08/2018 Strike -100 bps

Forecasting des Prix des Swaption

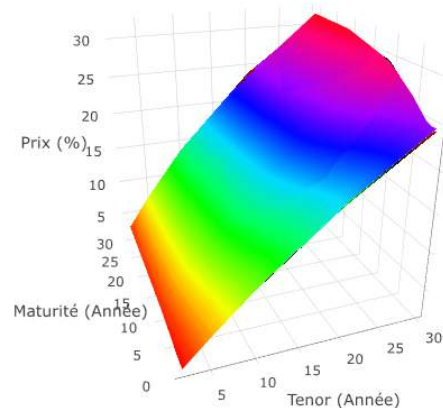


FIGURE 5.31 – MOY SW PRIX 22/08/2018 Strike -100 bps

Market-Consistency des Volatilités des Swaptic

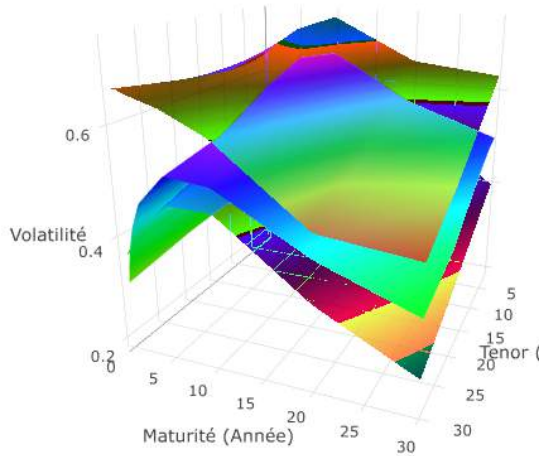


FIGURE 5.32 – IC SW VOL 22/08/2018 Strike 25 bps

Forecasting des Volatilités des Swaption

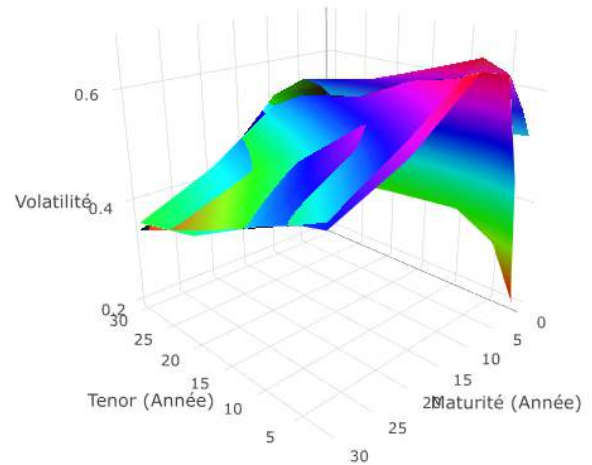


FIGURE 5.33 – MOY SW VOL 22/08/2018 Strike 25 bps

Market-Consistency des Prix des Swaption

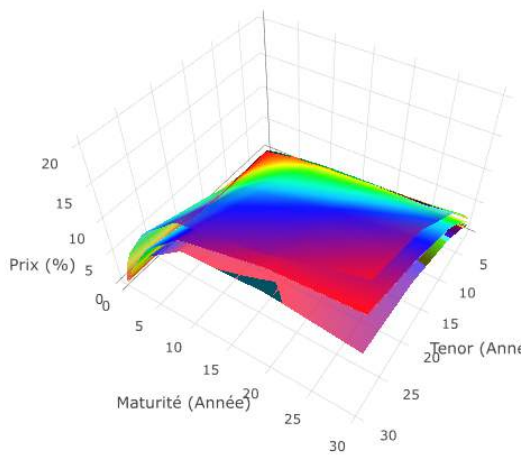


FIGURE 5.34 – IC SW PRIX 22/08/2018 Strike 25 bps

Forecasting des Prix des Swaption

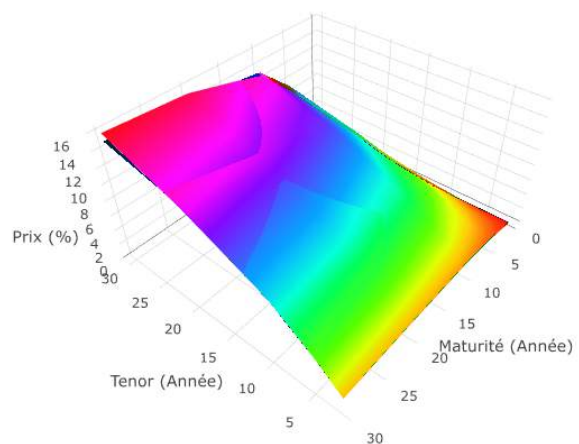


FIGURE 5.35 – MOY SW PRIX 22/08/2018 Strike 25 bps

5.11 La nappe du paramètre d'intensité de défaut initial des CDS par pays et par *rating*

Intervalle de Confiance lambda_0 Rating

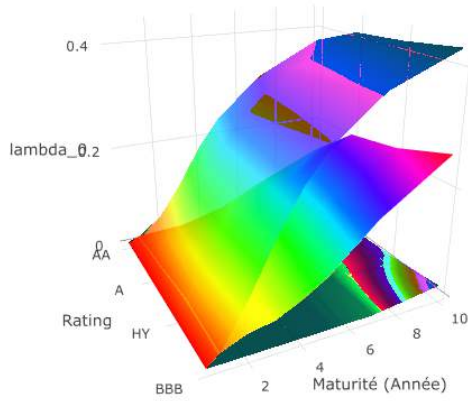


FIGURE 5.36 – IC lambda0 réduit Rating au 22/08/2018

Market-Consistency des Prix CDS Rating

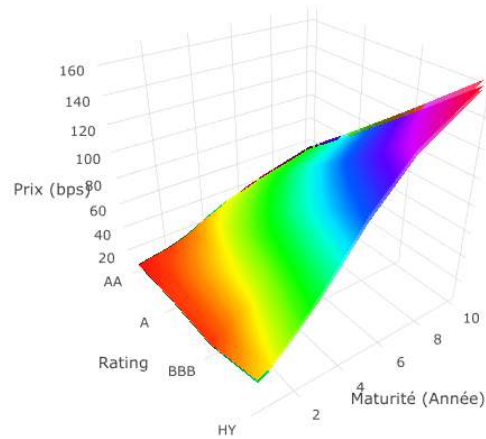


FIGURE 5.37 – IC Prix réduit Rating au 22/08/2018

Moyenne lambda_0 Rating (Forecasting)

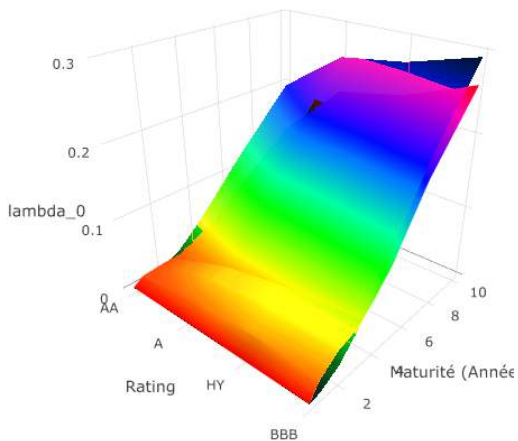


FIGURE 5.38 – MOY lambda0 réduit Rating au 22/08/2018

Forecasting des Prix CDS Rating

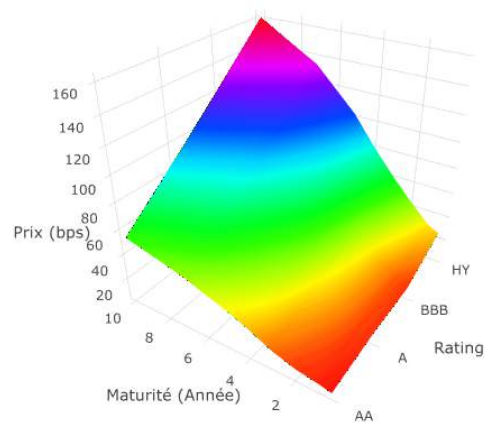


FIGURE 5.39 – MOY Prix réduit Rating au 22/08/2018

Intervalle de Confiance lambda_0 Rating

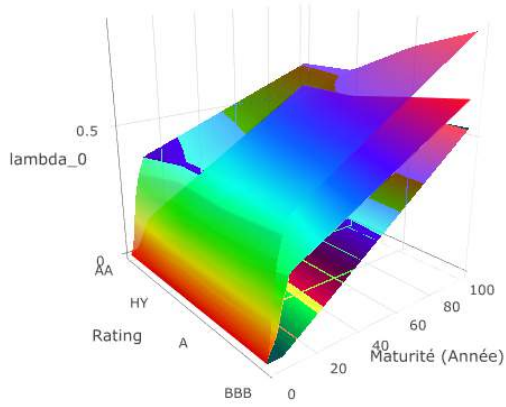


FIGURE 5.40 – IC lambda0 all Rating au 22/08/2018

Market-Consistency des Prix CDS Rating

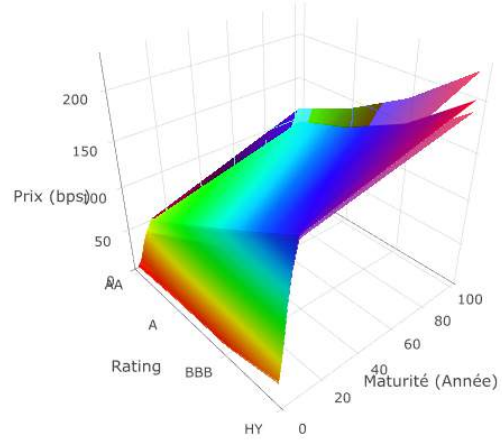


FIGURE 5.41 – IC Prix all Rating au 22/08/2018

Moyenne lambda_0 Rating (Forecasting)

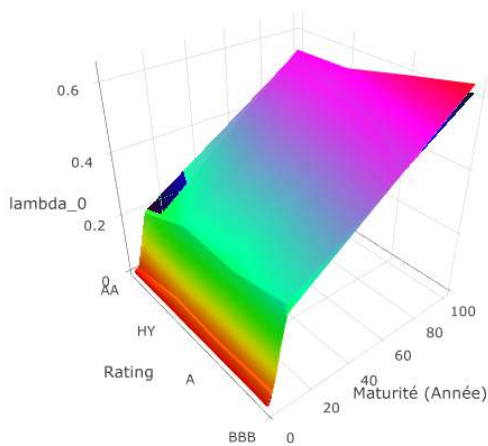


FIGURE 5.42 – MOY lambda0 all Rating au 22/08/2018

Forecasting des Prix CDS Rating

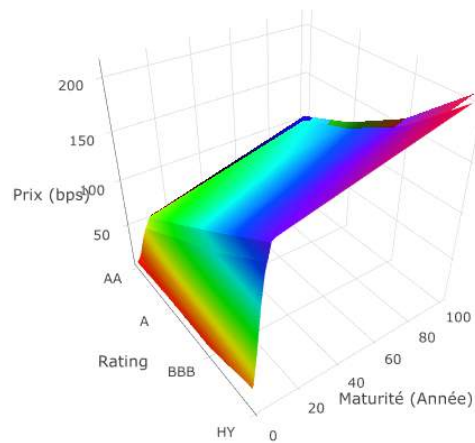


FIGURE 5.43 – MOY Prix all Rating au 22/08/2018

Market-Consistency des lambda_0 Pays

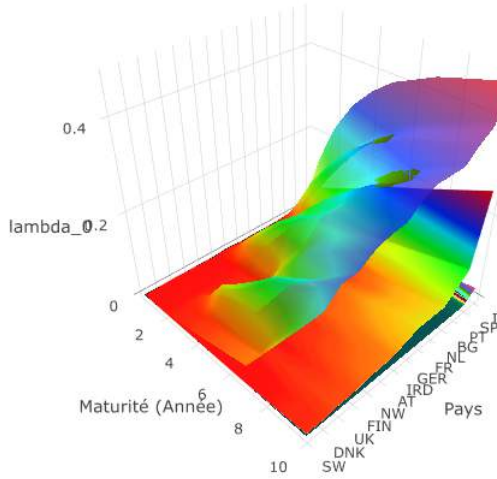


FIGURE 5.44 – IC lambda0 reduit Pays au 22/08/2018

Market-Consistency des Prix CDS Pays

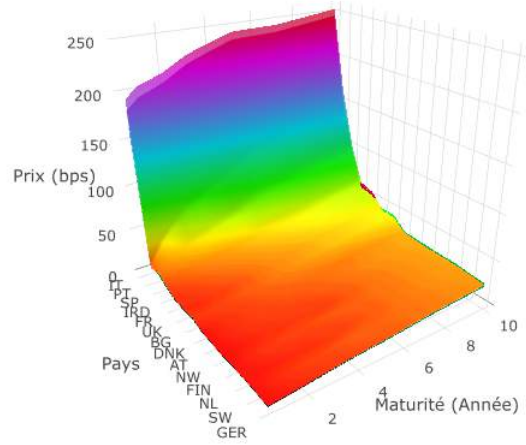


FIGURE 5.45 – IC Prix reduit Pays au 22/08/2018

Forecasting des lambda_0 Pays

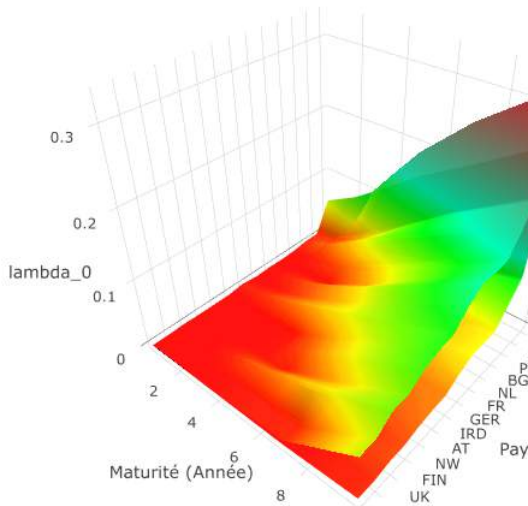


FIGURE 5.46 – MOY lambda0 reduit Pays au 22/08/2018

Forecasting des Prix CDS Pays

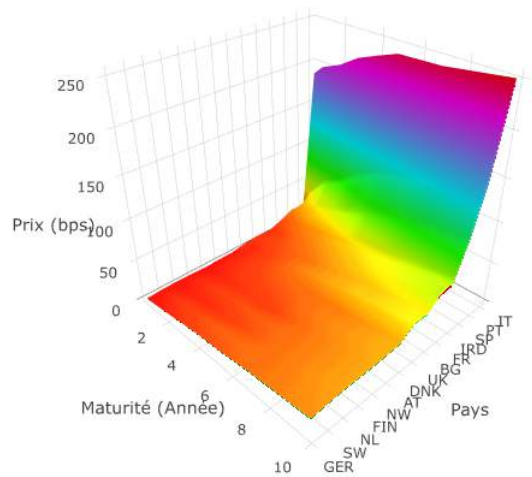


FIGURE 5.47 – MOY Prix reduit Pays au 22/08/2018

Market-Consistency des lambda_0 Pays

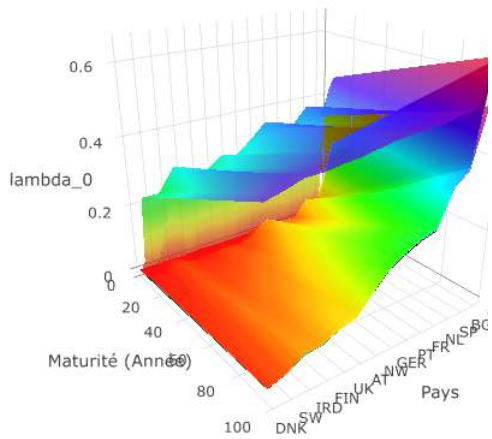


FIGURE 5.48 – IC lambda0 all Pays au 22/08/2018

Market-Consistency des Prix CDS Pays

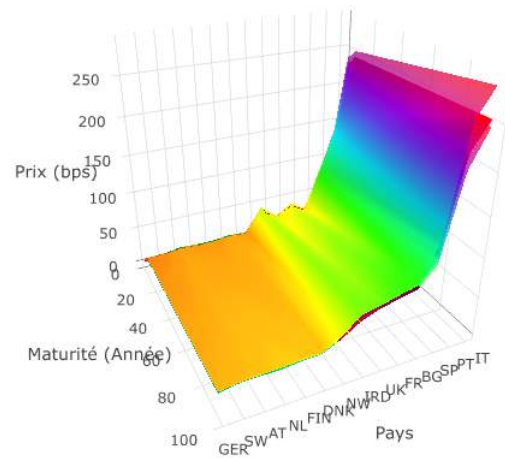


FIGURE 5.49 – IC Prix all Pays au 22/08/2018

Forecasting des lambda_0 Pays

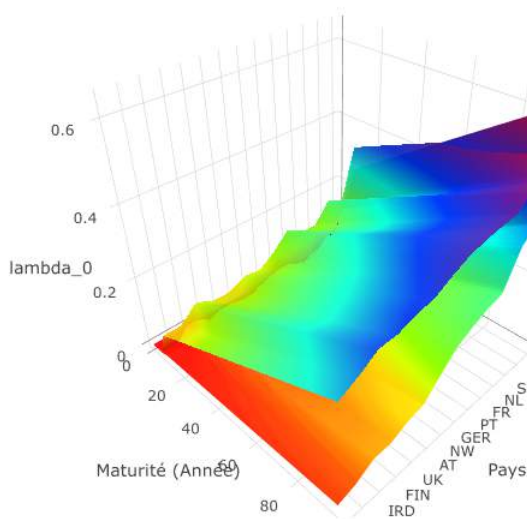


FIGURE 5.50 – MOY lambda0 all Pays au 22/08/2018

Forecasting des Prix CDS Pays

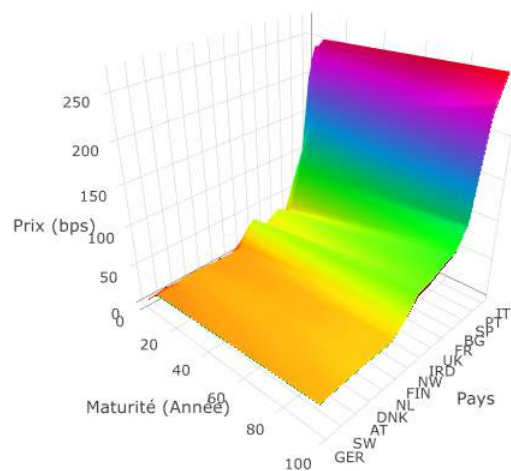


FIGURE 5.51 – MOY Prix all Pays au 22/08/2018

Enfin, le GSE génère des trajectoires de facteurs de risque qui permettent de reproduire de manière efficace les prix des dérivés sur le marché ainsi que les structures des différents facteurs de risque projetés. Notre GSE est donc robuste et *Market Consistent*.

Conclusion

La modélisation et l'exploration de la dynamique de la volatilité des actifs financiers a été la principale question et le point central des universitaires et des praticiens de la finance. La volatilité est fondamentale pour la gestion des risques, la tarification des options, la couverture des positions sur produits dérivés et l'élaboration des politiques financières des différentes institutions assurantielles et bancaires.

Cependant, le modèle de Black et Scholes [1973] suppose que les actifs sous-jacents suivent un mouvement brownien géométrique et une volatilité constante. Cela implique que les options ayant des *strike* et des échéances différents sur le même actif sous-jacent devraient avoir la même volatilité implicite. Cette hypothèse est mise en défaut dans le monde réel. De manière générale, les prix des actifs sont influencés par des facteurs de risque tels que les sauts, la volatilité stochastique et les frais dûs aux transactions [Carr et al 2001, Heston 1993 et Leland 1985]. Afin de tenir compte de ces écarts, les traders et les praticiens utilisent différentes volatilités implicites pour différents *strike* et échéances.

Le cadre de valorisation dynamique proposé repose sur une extraction des paramètres implicites de tout l'historique par inversion des formules de pricing propres à chaque classe de dérivés. Les grandeurs implicites engendrées sont extraites « brutes » par un algorithme d'optimisation (modèle de crédit) ou par lecture directe sur Bloomberg (volatilité log normale *call/put*, volatilité normale *cap/floor*, cube de volatilité normale pour les *swaption*) puis lissée par un modèle linéaire judicieusement choisi par une procédure de sélection de variables. Ces facteurs inobservables, rendus observables par notre procédure de calibrage et de lissage forment des sous-jacents propices à la construction d'un modèle linéaire dynamique multivarié. La diffusion des paramètres de modèle linéaire par un VAR (Vecteur AutoRégressif) permet de déformer au cours du temps une surface ou une structure par terme implicite. Ces déformations sont dès lors cohérentes avec les filtrations financières prospectives et permettent de reconstruire les prix de marché avec les formules de pricing classiques (Black & Scholes avec dividendes pour les dérivés actions, Bachelier pour les dérivés de taux et LMN pour le crédit) en accord avec la probabilité historique.

Le cadre de valorisation dynamique proposé produit des résultats remarquables, de par la procédure de calibrage complète orientée (pondérée par les dérivés premières) pour reproduire fidèlement les prix parfois au détriment du *fitting* de la structure des paramètres implicites.

Le cadre de la présente étude est suffisamment flexible pour potentiellement étendre la modélisation à des produits structurés plus complexes. En l'occurrence, il est possible de recalibrer des modèles à volatilité stochastique à des pas de temps adaptés sur la base des filtrations financières projetés (projection monde réel des sous-jacents observables et des paramètres implicites inobservables).

Le cadre d'application de ces travaux de modélisation porte sur l'évaluation dynamique de stratégies de couverture et plus généralement d'un portefeuille financier par la prise en compte du risque de crédit des *Govies* et des *Corporate*. De fait, il peut bien évidemment être utilisé pour des études ALM diverses et variées appliquées à l'assurance.

Une autre application des surfaces de volatilité implicite est qu'il est possible de *pricer* de nouvelles options en prenant des estimations à partir des surfaces de volatilité implicite, qui peut être utilisée pour gérer des positions de produits dérivés exotiques comme des options à barrière. Dans le même esprit, il serait chronophage mais envisageable d'intégrer un recalibrage prospectif d'un modèle *full* risque neutre à chaque pas de temps d'arrêt de façon à valoriser économiquement les engagements techniques et produire de facto un bilan S2.

Un point d'attention est porté sur l'application de ce cadre dans les modèles ALM. L'implémentation de ce cadre nécessite de penser la structure du modèle financier au préalable, de façon à minorer le nombre d'*input* : par exemple, il n'est pas optimal de renvoyer une structure par terme de taux d'intérêts mais il est préférable de renvoyer seulement les régresseurs des facteurs de risque utilisés. De la même façon, les paramètres globaux (figés) des modèles de crédit (α , β , σ^2 , η^2 et les λ associés aux modèles NSS et Christensen) sont à considérer au niveau *model point*. Ces travaux donnent lieu à la construction d'un modèle ALM customisé pour accueillir et interpréter l'ensemble des grandeurs projetées ou figées.

Un point non négligeable qui n'a pas été abordé ici est la limite de ce type de modélisation. Même si des projections consistantes ont été réalisées sur 5 ans, les applications mentionnées précédemment n'ont pas été menées pour le moment. Ce mémoire sera toutefois enrichi de ces applications une fois la construction du modèle ALM achevée et ceux même après la publication de celui-ci.

Ouverture : nous invitons les lecteurs à poursuivre leurs investigations sur ces sujets de paramétrisation de nappes de volatilité de plusieurs produits dérivés au travers des différents papiers présentés dans les pages suivantes ; ces travaux personnels ont été réalisés pendant les 6 mois (Octobre 2018 - Avril 2019) qui ont suivis mon stage de fin d'études de 6 mois (Avril 2018 - Septembre 2018). Nous proposons aux lecteurs de se familiariser avec ces différents sujets puis de se référer au mémoire de Tim FABRE dont le mémoire sortira fin 2019 ; mémoire reprenant mes travaux agrémentés des siens sur le pricing des obligations à taux variable, indexés sur inflation avec prise en compte du risque de crédit (extension du modèle de crédit LMN appliqué aux obligations à taux fixe) toujours dans l'optique de créer un environnement dynamique : modèle ALM customisé ayant une cohérence globale avec chacune des modélisations des actifs (cohérence avec la modélisation des taux d'intérêt avec l'AFNS quand on considère la calibration du modèle qui fait intervenir une matrice de volatilité [matrice de Cholesky] ; modélisation des STTI qui interviennent systématiquement dans les calibrations des nappes/cubes de volatilités des dérivés).

Papiers de recherche

Modèle Arbitrage Free Nelson-Siegel (AFNS) et calibration

Introduction

Nelson-Siegel dynamique

La modélisation et la prédiction de structures par terme de taux est un sujet phare de la finance. Parmi les études présentes dans la littérature, le modèle de *Nelson-Siegel* (1987) est certainement l'un des plus populaires tant dans sa simplicité de mise en oeuvre que dans son efficacité dans les résultats empiriques qu'il fournit. Ce modèle introduit une fonction à polynômes exponentiels qui permet de *fitter* convenablement la plupart des courbes de taux observées sur le marché et, de cette manière, il fournit les taux aux maturités non observées sur le marché. En notant $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un ensemble de maturités, $(y(T))_{T \in \{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}}$ une série de taux d'intérêt spot en composition continue, *Nelson* et *Siegel* supposent que la structure par terme des taux d'intérêts est décrite par la fonction suivante :

$$\forall T \in \{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \quad y(T) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T} + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda T} - e^{-\lambda T} \right) \quad (5.1)$$

Le modèle se calibre simplement par régression linéaire, après optimisation du paramètre λ . Les paramètres à estimer sont au nombre de 4 :

- λ est le paramètre d'échelle du temps et a un rôle de distorsion de celui-ci ;
- β_0 est le taux d'intérêt long-terme et définit le niveau de l'asymptote de la structure par terme de taux d'intérêt ;
- β_1 est le facteur de pente ;
- β_2 est le facteur de courbure.

Plusieurs extensions de cette fonctionnelle ont été proposées par la suite dans le but de *fitter* des courbes de taux capricieuses aux formes particulières. Ces courbes peuvent notamment être observées en cas de stress de marché sur les taux d'intérêt (inversion de la courbe de taux par exemple). On peut citer le modèle de *Björk* et *Christensen* (1999) ainsi que le modèle de *Nelson-Siegel-Svensson* (1997), plus populaire que celui de *Christensen*, et dont la fonctionnelle est la suivante :

$$\forall T \in \{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \quad y(T) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_1 T} + \beta_2 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_1 T}}{\lambda_1 T} - e^{-\lambda_1 T} \right) + \beta_3 \left(\frac{1 - e^{-\lambda_2 T}}{\lambda_2 T} - e^{-\lambda_2 T} \right) \quad (5.2)$$

Svensson introduit un quatrième facteur β_3 et un deuxième paramètre d'échelle λ_2 afin de rendre compte des courbures peu communes évoquées précédemment.

Afin d'effectuer des projections de la structure par terme de taux modélisée, on rend dépendant du temps chaque facteur et chaque paramètre d'échelle qui compose la fonctionnelle du modèle. C'est en ce sens que *Diebold et Li* (2006) proposent une approche dynamique du modèle de *Nelson-Siegel*, adaptable pour toute extension du modèle (*Nelson-Siegel-Svensson* par exemple). Ainsi, en notant $\{\tau_{t,i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ un ensemble de maturités résiduelles pour une date t (durées séparant la date d'évaluation de l'échéance du taux), $(y_t(\tau))_{(t,\tau) \in \mathbb{R}_+ \times \{\tau_{t,i}\}_{i \in \mathbb{N}}}$ une série temporelle de taux d'intérêt spot en composition continue, la fonctionnelle s'écrit :

$$\forall t \geq 0, \quad y_t(\tau) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} + \beta_{2,t} \left(\frac{1 - e^{-\lambda_t \tau}}{\lambda_t \tau} - e^{-\lambda_t \tau} \right) \quad (5.3)$$

Dans ce modèle, l'historique de la structure par terme de taux et ses déformations sont expliqués par les séries temporelles des facteurs *Nelson-Siegel*. Pour effectuer des prédictions sur la courbe des taux d'intérêt, il suffit alors de projeter ces séries temporelles et d'utiliser la fonctionnelle sur les projections obtenues. Il est d'usage d'optimiser le paramètre d'échelle λ en tant que paramètre extérieur (constant, non dépendant du temps). *Diebold et Li* utilisent un processus auto-régressif d'ordre 1 pour décrire la dynamique de chaque facteur $\beta_{i,t}$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Outre le fait qu'il fournisse des résultats empiriques très satisfaisants, l'un des points les plus notables de ce modèle est qu'il peut être utilisé à des fins de couverture de portefeuille. Ainsi, dans (REFERENCE), *Litterman et Scheinkman* (1991) ont montré que les facteurs $(\beta_{0,t}, \beta_{1,t}, \beta_{2,t})$ expliquent environ 96% des fluctuations de la structure par terme de taux et la couverture d'un portefeuille contre le risque de taux peut être effectuée en garantissant une insensibilité du portefeuille à ces trois facteurs.

Une attention toute particulière est à porter aux éléments suivants :

- Les expressions analytiques du prix du zéro-coupon sans risque et des divers taux d'intérêt découlent de la fonctionnelle caractérisant le taux spot en composition continue.
- Les modèles de lissage type *Nelson-Siegel* ne sont pas construits dans un cadre théorique classique qui incorpore l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage. Ils ne possèdent donc pas la propriété *arbitrage-free* et ceci constitue un inconvénient non-négligeable, conséquence des lacunes théoriques que présentent ces modèles.
- Les taux d'intérêt ne sont pas les seuls éléments de la finance qui possèdent une structure par terme. D'autres indices tels que les prix des CDS ou les probabilités de défaut associées ont également une structure par terme qui leur est propre. L'approche *Nelson-Siegel* peut donc aussi être utilisée dans leur étude.

Le jeu de modèles type *Nelson-Siegel* permet de fitter de manière efficiente un bon nombre de courbes de taux, et de les projeter en dynamique. Cependant, comme énoncé plus haut, il possède l'inconvénient de ne pas garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage. Dans le but de construire un cadre théorique rigoureux, nous nous intéressons à un modèle plus sophistiqué, basé sur l'hypothèse d'AOA et qui permet de conserver la forme factorielle de la fonction de *Nelson-Siegel* et ainsi de garder de bonnes propriétés de fitting et d'interprétabilité des paramètres. C'est l'objet de la partie suivante.

Arbitrage-Free Nelson-Siegel

Avant de procéder au pricing de produits dérivés, il est nécessaire de proposer un modèle de taux court (ou de taux forward). Le cadre proposé doit être solide et assez robuste pour garantir la pertinence des projections. Parmi les modèles les plus répandus, les modèles à deux facteurs *G2++* et *Hull-White* ainsi que le cadre *Heath-Jarrow-Morton* se révèlent être efficaces tant dans la simplicité des formules fermées obtenues que dans leur principe de calibration. Cependant, dans notre cadre de valorisation dynamique, la structure par terme des taux d'intérêt au comptant est lissée et projetée via le modèle **Nelson-Siegel-Svensson dynamique**. Ce modèle et ses améliorations fournissent des résultats empiriques très satisfaisants et permet de fitter la majorité des formes de structures par terme de taux, mais s'avère lacunaire sur le plan théorique. En effet, ce dernier possède l'inconvénient de ne pas garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage. Ceci nous mène à poser la question suivante : quel modèle de taux *arbitrage-free* choisir de sorte à combler ce manque de qualité théorique tout en conservant les bons résultats empiriques du modèle *NS*? Pour ce faire, **Jens Christensen, Francis Diebold et Glenn Rudebusch** ont construit un modèle *arbitrage-free* qui conserve les propriétés empiriques et les interprétations des paramètres du modèle *Dynamic Nelson-Siegel* tout en garantissant l'absence d'opportunité d'arbitrage : c'est le modèle **Arbitrage-Free Nelson-Siegel**. Nous utilisons ce modèle de taux pour pricer l'ensemble des produits dérivés ainsi que pour obtenir une expression analytique du facteur d'actualisation.

Le modèle AFNS fait partie de la classe *affine* des modèles de taux court. Cette classe de modèles est certainement la plus populaire en modélisation de structure par terme de taux tant sur le plan théorique que pratique. De nombreux exemples de modèles affines ont été proposés et étudiés dans la littérature tels que le modèle de *Vasicek*, celui de *Cox-Ingersoll-Ross*, de *Hull-White* ou encore le modèle de *Longstaff-Schwartz*. Leur efficacité provient en grande partie de leur flexibilité ainsi que de la présence de formules fermées pour le prix des zéro-coupons et des options sur zéro-coupon. En utilisant l'approche de l'article *The affine arbitrage-free class of Nelson-Siegel term structure models* de Christensen, nous spécifions tout d'abord le modèle AFNS à trois facteurs, avant d'exhiber des formules fermées.

Spécification

Sous la mesure de probabilité risque-neutre \mathbb{Q} , le processus de taux d'intérêt instantané $(r_t)_{t \geq 0}$ est supposé être un processus de classe affine à trois facteurs, de sorte que :

$$dr_t = X_t' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

où les variables d'état suivent la dynamique suivante :

$$dX_t = \Lambda [\Theta - X_t] dt + \Sigma dW_t \quad (5.5)$$

et :

$$- X_t = \begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \\ X_t^3 \end{pmatrix} \text{ est le vecteur des facteurs stochastiques en } t,$$

— $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ est la matrice de vitesse de retour à la moyenne, pour $\lambda > 0$,

— $\Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$ est le vecteur de moyenne long-terme des variables d'état,

— $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & 0 & 0 \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & 0 \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_{3,3} \end{pmatrix}$ est la matrice de volatilité,

— $\left(W_t = \begin{pmatrix} W_t^1 \\ W_t^2 \\ W_t^3 \end{pmatrix} \right)_{t \geq 0}$ est un \mathbb{Q} -mouvement brownien multidimensionnel.

Le matrice de volatilité Σ est la matrice triangulaire inférieure de la décomposition de Cholesky de la matrice de variance-covariance. Les coefficients de sa diagonale sont positifs, et les autres peuvent prendre des valeurs positives ou négatives.

Les facteurs $(X_t^1)_{t \geq 0}$, $(X_t^2)_{t \geq 0}$ et $(X_t^3)_{t \geq 0}$ sont donc solutions du système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\begin{cases} dX_t^1 &= \sigma_{1,1} dW_t^1, \\ dX_t^2 &= \lambda[(\theta_2 - X_t^2) - (\theta_3 - X_t^3)] + \sigma_{2,1} dW_t^1 + \sigma_{2,2} dW_t^2, \\ dX_t^3 &= \lambda(\theta_3 - X_t^3) + \sigma_{3,1} dW_t^1 + \sigma_{3,2} dW_t^2 + \sigma_{3,3} dW_t^3, \end{cases} \quad X_0^1, X_0^2, X_0^3$$

Notons que ces facteurs permettent au taux court de prendre des valeurs positives comme négatives, et ainsi de reproduire la réalité des marchés financiers d'aujourd'hui. Comme dans tout modèle de structure par terme de taux de la classe affine, le prix du zéro-coupon de maturité $T > 0$ s'écrit sous la forme :

$$\forall t \geq 0, \quad P(t, T) = \exp(B(t, T)' X_t + C(t, T)), \quad (5.6)$$

où $B(t, T) = \begin{pmatrix} B_1(t, T) \\ B_2(t, T) \\ B_3(t, T) \end{pmatrix}$ et B_1, B_2, B_3, C sont des fonctions déterministes.

Le calcul de ces fonctions se fait par résolution des deux équations différentielles matricielles suivantes :

$$\frac{dB}{dt}(t, T) - \Lambda' B(t, T) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

$$\frac{dC}{dt}(t, T) + B(t, T)' \Lambda \Theta = -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ \Sigma' B(t, T) B(t, T)' \Sigma \} \quad (5.8)$$

Ces deux équations mènent aux expressions suivantes :

$$B(t, T) = \begin{pmatrix} -(T-t) \\ -\frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} \\ (T-t)e^{-\lambda(T-t)} - \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{C(t, T)}{T-t} &= c_1 \frac{(T-t)^2}{6} + c_2 \left(\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda^3(T-t)} + \frac{1-e^{-2\lambda(T-t)}}{4\lambda^3(T-t)} \right) \\ &+ c_3 \left(\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} - \frac{T-t}{4\lambda} e^{-2\lambda(T-t)} - \frac{3}{4\lambda^2} e^{-2\lambda(T-t)} - 2 \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda^3(T-t)} + 5 \frac{1-e^{-2\lambda(T-t)}}{8\lambda^3(T-t)} \right) \\ &+ c_4 \left(\frac{T-t}{2\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} - \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda^3(T-t)} \right) \\ &+ c_5 \left(\frac{3}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} + \frac{T-t}{2\lambda} + \frac{T-t}{\lambda} e^{-\lambda(T-t)} - 3 \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda^3(T-t)} \right) \\ &+ c_6 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda(T-t)} - \frac{1}{2\lambda^2} e^{-2\lambda(T-t)} - 3 \frac{1-e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda^3(T-t)} + 3 \frac{1-e^{-2\lambda(T-t)}}{4\lambda^3(T-t)} \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

où

$$\begin{aligned} c_1 &= \sigma_{1,1}^2, & c_2 &= \sigma_{2,1}^2 + \sigma_{2,2}^2, & c_3 &= \sigma_{3,1}^2 + \sigma_{3,2}^2 + \sigma_{3,3}^2, \\ c_4 &= \sigma_{1,1}\sigma_{2,1}, & c_5 &= \sigma_{1,1}\sigma_{3,1} + \sigma_{1,1}\sigma_{2,1}, & c_6 &= \sigma_{2,1}\sigma_{3,1} + \sigma_{2,2}\sigma_{3,2} \end{aligned}$$

Le modèle nous fournit également une expression du taux spot en composition continue :

$$\forall t \leq T, \quad R(t, T) = -\frac{B(t, T)' X_t}{T-t} - \frac{C(t, T)}{T-t} \quad (5.11)$$

En utilisant l'expression obtenue pour le vecteur B , il vient :

$$\forall t \leq T, \quad R(t, T) = X_t^1 + X_t^2 \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda(T-t)} + X_t^3 \left(\frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda(T-t)} - e^{-\lambda(T-t)} \right) - \frac{C(t, T)}{T-t} \quad (5.12)$$

On reconnaît les facteurs de la fonctionnelle du modèle de *Nelson-Siegel* dynamique, où les processus X_t^1 , X_t^2 et X_t^3 sont respectivement assimilables au taux d'intérêt long-terme, au facteur de pente et au facteur de courbure de la structure par terme de taux. En fait, le modèle AFNS introduit une cale déterministe C homogène : elle dépend de la maturité résiduelle du taux. C'est cette fonction qui, soustraite à l'expression du taux dans le modèle de *Nelson-Siegel*, assure l'absence d'opportunité d'arbitrage. Si l'on souhaite construire un cadre théorique rigoureux qui reprend les hypothèses classiques des modèles financiers basés sur l'AOA, c'est cette expression du taux qui doit être envisagée dans l'approche *Nelson-Siegel*.

Autour du prix du zéro-coupon dans le modèle retenu

Dans le modèle Arbitrage-Free Nelson-Siegel, le prix d'un zéro-coupon d'échéance T s'écrit :

$$\forall t \geq 0, \quad P(t, T) = f_T(t, X_t)$$

où $f_T : (t, X) \mapsto \exp(B(t, T)'X + C(t, T))$. La fonction f est de classe C^2 sur son ensemble de définition, on peut lui appliquer le lemme d'Itô multidimensionnel et obtenir l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = \underbrace{\left[\left[\frac{dB}{dt}(t, T) \right]' X_t + \frac{dC}{dt}(t, T) + B(t, T)' \Lambda (\Theta - X_t) + \frac{1}{2} Tr \left\{ \Sigma' B(t, T) B(t, T)' \Sigma \right\} \right]}_{(a)} dt + B(t, T)' \Sigma dW_t$$

Par définition de la mesure de probabilité risque-neutre, la quantité (a) est égale au processus de taux sans risque évalué en t . Cette équation peut se réécrire en faisant intervenir un \mathbb{Q} -mouvement brownien unidimensionnel :

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt + \sigma_p(t, T) d\widehat{W}_t \quad (5.13)$$

où, en notant $\|\cdot\|_2$ la norme Euclidienne,

$$\forall t \leq T, \quad \widehat{W}_t = \frac{B(t, T)' \Sigma W_t}{\sigma_p(t, T)} \quad (5.14)$$

$$\text{et} \quad \sigma_p(t, T) = \|\Sigma' B(t, T)\|_2 \quad (5.15)$$

La fonction de volatilité $(\sigma_p(t, T))_{t \geq 0}$ caractérise ainsi la structure de volatilité du zéro-coupon. La solution de cette équation est un mouvement brownien géométrique, qui s'écrit :

$$\forall t \leq T, \quad P(t, T) = P(0, T) \exp \left(\int_0^t (r_u - \frac{1}{2} \sigma_p(u, T)^2) du + \int_0^t \sigma_p(u, T) d\widehat{W}_u \right) \quad (5.16)$$

Comme $\forall t \geq 0, P(t, t) = 1$, on peut obtenir une nouvelle expression plus pratique à manipuler :

$$\begin{aligned}
P(t, T) &= \frac{P(t, T)}{P(t, t)} \\
&= \frac{P(0, T) \exp\left(\int_0^t (r_u - \frac{1}{2} \sigma_p(u, T)^2) du + \int_0^t \sigma_p(u, T) d\widehat{W}_u\right)}{P(0, t) \exp\left(\int_0^t (r_u - \frac{1}{2} \sigma_p(u, t)^2) du + \int_0^t \sigma_p(u, t) d\widehat{W}_u\right)} \\
\implies P(t, T) &= \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp\left(\int_0^t (\sigma_p(u, T) - \sigma_p(u, t)) d\widehat{W}_u - \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma_p(u, T)^2 - \sigma_p(u, t)^2) du\right)
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Cette expression illustre l'efficacité de ce type de modèle : le pricing d'un zéro-coupon à toute date t nécessite seulement la structure par terme des taux zéro-coupon en 0 ainsi que la structure de volatilité du prix.

L'un des principaux objectifs de ce chapitre est, dans le cadre de notre étude, de déterminer des formules fermées pour les prix de produits dérivés de taux. Des changements de mesure de probabilité issus du théorème de Radon-Nikodym ainsi que du théorème de Girsanov peuvent être des étapes essentielles pour développer des expressions qui s'écrivent sous forme d'espérance. En ce sens, nous introduisons la mesure de probabilité t -forward neutre, notée \mathbb{Q}_t ,

$$\frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{Q}} = \frac{\exp\left(-\int_0^t r_u du\right)}{P(0, t)} \tag{5.18}$$

Par l'expression 5.16, il vient :

$$\frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{Q}} = \exp\left(\int_0^t \sigma_p(u, t) d\widehat{W}_u - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma_p(u, t)^2 du\right) \tag{5.19}$$

Par le théorème de Girsanov, le processus défini ci-dessous est un mouvement brownien sous \mathbb{Q}_t :

$$d\widetilde{W}_u = d\widehat{W}_u - \sigma_p(u, t) du \tag{5.20}$$

Le prix à la date t d'un zéro-coupon d'échéance T s'écrit donc, sous cette nouvelle mesure de probabilité :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp\left(\int_0^t (\sigma_p(u, T) - \sigma_p(u, t)) d\widetilde{W}_u - \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma_p(u, T) - \sigma_p(u, t))^2 du\right) \tag{5.21}$$

Après calibration du modèle sur l'ensemble de l'historique disponible, nous obtenons l'historique de la structure par terme des taux observés VS l'historique de la structure par

terme des taux estimés avec le modèle AFNS sont comparés :

Historique de la structure par terme des taux nominaux

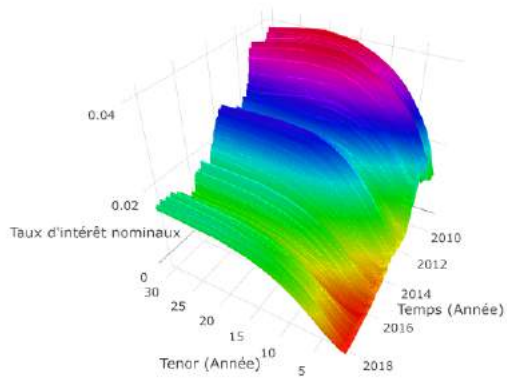


FIGURE 5.52 – Historique des STTI observées

Historique de la structure par terme des taux nominaux AFNS

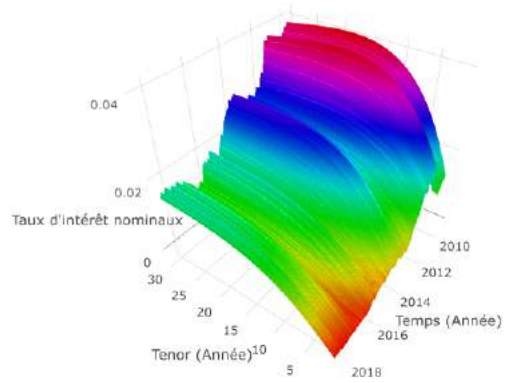


FIGURE 5.53 – Historique des STTI AFNS

Il est alors possible de reconstruire les séries chronologiques des β_i .

Reconstruction des séries chronologiques

La reconstruction des séries chronologiques des régresseurs est illustrée ci-dessous :

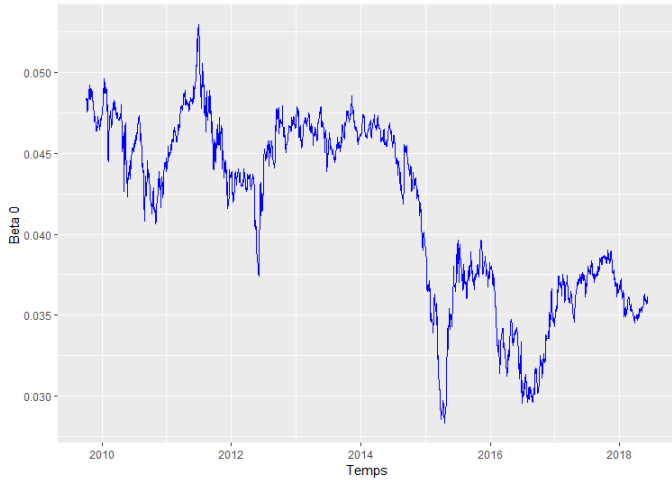


FIGURE 5.54 – Serie chronologie Beta0 STTI AFNS

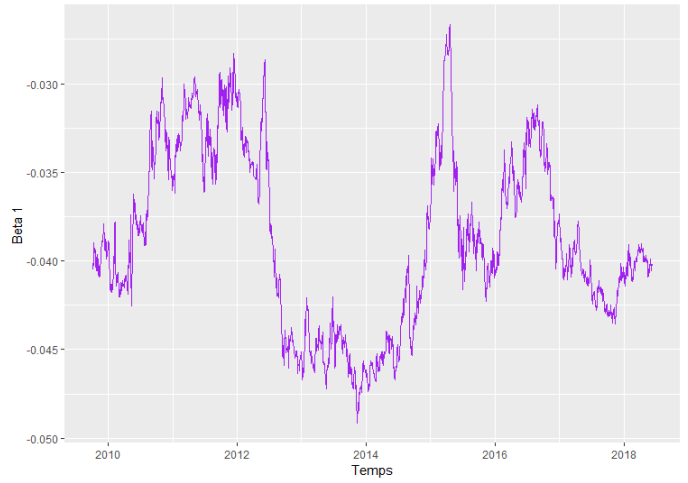


FIGURE 5.55 – Serie chronologie Beta1 STTI AFNS

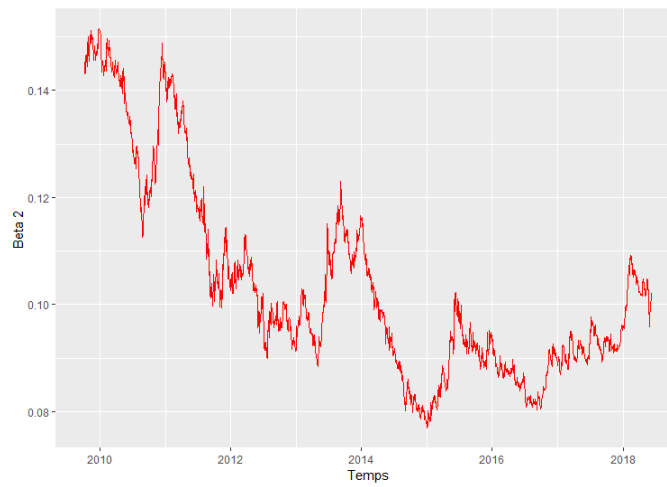


FIGURE 5.56 – Serie chronologie Beta2 STTI AFNS

Calibration du modèle de Black-Scholes sur le sous-jacent inflation



Introduction

Dans l'optique du développement de l'outil ALM, une part importante du travail réside dans la modélisation des différents actifs composant le portefeuille. Ainsi, la présente note a pour objectif de décrire la modélisation des obligations indexés ainsi que leurs *pricing*.

L'évolution récente des marchés des actions et des obligations a montré que ni les actions, ni les obligations n'héritent d'une protection efficace contre la perte de pouvoir d'achat. Aussi, l'assureur cherche à se couvrir contre l'inflation des prestations, ce qui donne un intérêt non négligeable aux dérivés sur l'inflation.

Ces deux dernières décennies, malgré l'évolution relativement favorable du taux d'inflation générale observé dans nombre de pays, certains événements survenus après la crise financière de 2008 ont donné lieu à une plus grande instabilité potentielle des prix. D'une part, le risque d'une période de déflation provoquée par la récession est réel, et, d'autre part, les craintes à l'égard d'un tel scénario ont amené la Réserve fédérale américaine et les banques centrales des autres pays à recourir à des mécanismes d'intervention tantôt classiques, tantôt innovants pour empêcher la déflation de s'installer. Inversement, le risque d'une augmentation substantielle du taux d'inflation s'est accru, largement en raison des politiques fiscales expansionnistes qui ont été adoptées en réponse à la crise. Ces forces montrent que l'utilisation du passé récent pour prévoir l'avenir ne permet pas de lever l'incertitude financière qui existe aujourd'hui.

Alors que le taux d'inflation globale, mesuré par le Bureau of Labor Statistics (BLS) et exprimé comme une variation en pourcentage de l'IPC, constitue l'un des indicateurs de la hausse des prix, les effets de l'inflation sur les assureurs peuvent être très différents. De fait, les hausses des prix de détail se décomposent (par une régression hédonique) en des purs effets de prix et des coûts de fabrication supplémentaires liés à l'amélioration

des produits, souvent amenée par les progrès technologiques. Lors de la mesure de l'inflation, l'IPC publié exclut les coûts supplémentaires intégrés dans les nouveaux produits qui tiennent compte des améliorations de ces derniers. À titre d'exemple, les prix de détail des automobiles ont peut-être augmenté de 25 % au cours de la dernière décennie, mais la composante de l'IPC se rapportant aux automobiles pourrait indiquer une hausse beaucoup plus faible vu que les nouvelles voitures sont dotées d'une technologie bien plus avancée que celle des anciennes voitures. Le BLS soutient que pour obtenir une mesure d'un vrai panier fixe de biens de consommation, il faut tenir compte du fait que les voitures produites cette année ne sont pas les mêmes que celles fabriquées auparavant.

Or, les indemnités des assureurs ne tiennent pas compte de ces corrections hédoniques. Les assureurs automobiles ne réduisent pas le montant des indemnités de sinistres pour tenir compte des différences de qualité. Les remboursements des frais médicaux par les assureurs sont particulièrement sujets aux progrès technologiques. Les coûts croissants des assureurs s'expliquent par l'amélioration continue des technologies médicales de pointe, et non parce que les mêmes procédés obsolètes d'il y a longtemps coûtent plus chers aujourd'hui. Si une nouvelle génération de prothèses offre d'importants avantages par rapport aux anciens appareils, la hausse des coûts, le cas échéant, serait sans doute entièrement prise en compte dans les indemnités d'assurance, alors que seulement une fraction de la hausse se refléterait dans l'IPC publié. Deuxièmement, il est probable que les assureurs soient exposés à certaines composantes de l'IPC plutôt qu'aux variations générales des prix. Masterson (1968) a évalué l'impact de l'inflation sur les assureurs en isolant les composantes qui se rapportent à des branches d'assurance distinctes.

Enfin, l'inflation n'a pas un impact unique sur la performance des assureurs. Tandis que l'inflation élevée peut, à elle seule, faire augmenter les sinistres d'assurance, son interaction avec d'autres variables économiques ou financières peut compliquer l'évaluation des risques. Par exemple, selon la courbe classique de Phillips (1958), l'inflation par la demande peut s'accompagner d'un faible taux de chômage. Ainsi, alors que les assureurs pourraient devoir faire face à une hausse du montant des sinistres en raison de l'inflation, ces effets pourraient être compensés par la baisse du taux de chômage qui est susceptible d'influer sur les sinistres d'invalidité et d'accidents de travail. Le faible taux de chômage peut aussi améliorer les ventes des assureurs et le taux de conservation de la clientèle. Il peut aussi avoir des effets positifs sur le marché boursier, offrant ainsi aux assureurs une protection supplémentaire contre le risque de hausse des sinistres due à l'inflation.

Peu importe la cause de la hausse des prix en devises, de la hausse des coûts, de la dette publique ou de la demande croissante de biens de consommation, les banques centrales jouent un rôle majeur dans la politique de stabilisation. En outre, les investisseurs demandent une compensation pour couvrir le risque d'inflation lorsqu'on investit dans des obligations, il existe donc un lien clair entre le marché des taux d'intérêt et les prévisions concernant le taux de change futur. Une théorie reflétant cette relation est celle de Fisher (1930), qui décrit la relation entre le taux d'intérêt du marché et celui de l'inflation par l'équation dite de Fisher :

$$r_N(t, T) = r_R(t, T) + \mathbb{E}[i(t, T)] \quad (5.22)$$

— $r_N(t, T)$ représente le taux d'intérêt nominal cumulé d'aujourd'hui de t à T sur le marché.

- $r_R(t, T)$ représente le taux d'intérêt réel cumulé, le profit qu'un investisseur recherche pour un investissement jusqu'à l'échéance T excluant la perte de pouvoir d'achat depuis le temps t .
- $\mathbb{E}[i(t, T)]$ est le taux d'inflation global prévu entre le temps t et l'échéance T .

On peut noter qu'en présence de taux d'intérêt annuels continus, l'équation de Fisher est réécrite comme suit :

$$e^{(r_N - r_R)(T-t)} = \mathbb{E} \left[\frac{I(T)}{I(t)} \right] \quad (5.23)$$

- $r_N(t, T)$ représente le taux d'intérêt nominal continu et constant.
- $r_R(t, T)$ représente le taux d'intérêt réel continu et constant.
- $I(T)$ représente l'indice de l'inflation au temps t .

Aussi, la relation entre l'indice de l'inflation I et le taux d'inflation i est donné par :

$$i(t, T) = \frac{I(T)}{I(t)} - 1 \quad (5.24)$$

Dans le contexte des dernières émissions d'obligations d'État indexées sur l'inflation dans la zone euro et d'un nombre croissant de produits d'assurance vie indexés sur l'inflation, le marché des produits dérivés indexés sur l'inflation se développe. Ces dérivés sont conçus pour protéger les investisseurs contre les modifications du pouvoir d'achat d'un certain pays ou d'une certaine région économique telle que la zone euro. En plus des obligations indexées sur l'inflation, ces dérivés couvrent le risque d'inflation ou même de déflation et peuvent être utilisés pour protéger les flux de trésorerie futurs contre le risque d'inflation.

Les prix des dérivés liés à l'inflation sont généralement évalués à l'aide d'une analogie en monnaie étrangère. Les valeurs nominales peuvent être converties en valeurs réelles liées au pouvoir d'achat en utilisant la valeur du quotient des deux indices d'inflation pertinents comme taux de change. Dans ces cadres, les taux d'intérêt nominaux se réfèrent à la "monnaie nationale", tandis que le taux réel peut être considéré comme la "devise étrangère" ou inversement. Nous notons que cette analogie ne tient pas compte du fait que les taux réels actuels sur le marché diffèrent du gain de pouvoir d'achat réalisé ultérieurement.

Hugston (1998) a introduit un cadre Heath-Jarrow Morton (HJM) modélisant les prix des obligations nominales et réelles et propose une solution via une formule fermée pour les options de type vanille sur l'inflation réelle. Jarrow et Yildirim (2003) ont également utilisé un cadre HJM pour calculer le prix d'un call sur l'indice d'inflation. Jarrow et Yildirim ont supposé que les taux nominal et réel suivaient tous deux des processus gaussiens à facteur unique ainsi qu'un IPC log-normal préservant l'équation de Fisher. Un modèle simple introduisant un paramètre similaire à celui de Jarrow et Yildirim (2003) peut être trouvé dans Korn et Kruse (2004) en préservant également l'équation de Fisher. Kazziha (1999), Belgrade et al : (2004) et Mercurio (2005) ont présenté des approches alternatives utilisant l'IPC *forward* avec une modélisation log-normal. Ces auteurs supposent que les IPC *forward* suivent des mouvements browniens sans dérive dans le cadre des mesures prévisionnelles correspondantes. Mercurio et Moreni (2006) étendent ces modèles log-normaux d'IPC à la volatilité stochastique. Cependant, le concept macroéconomique de Fisher ne

se reflète pas dans ces modèles log-normaux d'IPC.

Le cadre Jarrow et Yildirim (2003) ne permet pas d'avoir un système fermé convenable notamment à cause de la modélisation des taux nominaux et réels suivant tous deux des processus gaussiens corrélés. D'où l'intérêt de rendre déterministe ces deux processus. Ainsi, dans cette note, nous examinons la modélisation des obligations indexées ainsi que le *pricing* de celles-ci sur la base du modèle de Black-Scholes de Korn et Kruse (2004) calibré sur les produits dérivés contenant l'information de l'inflation future tels que les options vanilles sur le taux d'inflation réel : les cap d'inflation.

La note est structurée comme suit : nous rappelons le modèle de Korn et Kruse (2004) et en déduisons une formule fermée pour les cap d'inflation, nous calibrons ensuite ce modèle au moyen de données de marché des cap d'inflation et montrons que les volatilités implicites dans la formule de *pricing* de type Black-Scholes sont tout sauf constantes selon la maturité et le strike des options. Il sera alors question de modéliser cette surface de volatilité des cap inflation grâce à une paramétrisation de celle-ci au moyen d'un modèle de régression linéaire.

Pricing des dérivés de l'inflation dans le cadre Black-Scholes

Dans cette section, nous nous plaçons dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ avec la filtration financière du marché $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et considérons le modèle de Korn et Kruse (2004) où l'indice d'inflation $I(t)$ suit un mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = (r_N - r_R)dt + \sigma_I dW_I(t) \quad (5.25)$$

Par résolution de cette équation différentielle stochastique (EDS), il vient que :

$\forall t \in [0, T],$

$$I(t) = I(0)e^{\sigma_I W_I(t) + (r_N - r_R - \frac{1}{2}\sigma_I^2)t} \quad (5.26)$$

Il est donc évident que le modèle préserve bien l'équation de Fisher :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{I(T)}{I(t)} \middle| \mathcal{F}_t \right] = e^{(r_N - r_R)(T-t)} \quad (5.27)$$

Notons que les taux nominaux r_N sont directement extraits via le *stripping* des taux swap nominaux du marché alors que les taux réels r_R sont déduits au moyen des taux swap inflation. Le raisonnement suivant permet de les déduire.

Les zéro-coupon swap d'inflation

Un zéro-coupon swap (ZCIIS, qui signifie zéro-coupon swap indexé sur inflation) est un contrat dans lequel l'une des deux parties accepte de payer le taux d'inflation à l'échéance et de recevoir de l'autre partie un taux fixe K qui est établi au début, où les deux taux

sont calculés en se référant à la valeur nominale N . Si nous indiquons avec M la durée du contrat, le taux d'inflation est calculé en tant que pourcentage d'augmentation de l'indice entre les dates $T_0 := 0$ et T_M , respectivement le début et la fin du contrat. Notons que $I(0)$ est connu au moment de la stipulation du contrat, alors que $I(T_M)$ ne l'est pas. La jambe fixe est la jambe liée au taux fixe K , et nous l'indiquerons par l'indice « fix ». La jambe flottante est la jambe liée à l'inflation, et nous l'indiquerons avec l'indice « flo ».

La valeur de la jambe fixe à échéance est :

$$N[(1 + K)^M - 1] \quad (5.28)$$

Et celle de la jambe variable est :

$$N \left[\frac{I(T_M)}{I(0)} - 1 \right] \quad (5.29)$$

Nous nous intéressons à la jambe variable : sous la mesure martingale \mathbb{Q} avec le numéraire B_n , son prix d'arbitrage au temps t est donné par :

$$ZCIIS_{flo}(t, T_M, I(0), N) = N \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^{T_M} r_n(u) du} \left[\frac{I(T_M)}{I(0)} - 1 \right] | \mathcal{F}_t \right] \quad (5.30)$$

Nous introduisons la notation P_r et P_n pour respectivement les prix zéro-coupon des taux réels et nominaux. La valeur nominale d'une obligation est :

$$I(t)P_r(t, T) = \mathbb{E} \left[e^{-\int_t^T r_n(u) du} I(T) | \mathcal{F}_t \right] \quad (5.31)$$

On obtient donc :

$$ZCIIS_{flo}(t, T_M, I(0), N) = N \left[\frac{I(t)}{I(0)} P_r(t, T_M) - P_n(t, T_M) \right] \quad (5.32)$$

Et en particulier, quand $t = 0$:

$$ZCIIS_{flo}(0, T_M, I(0), N) = N [P_r(0, T_M) - P_n(0, T_M)] \quad (5.33)$$

Quant au prix de la jambe fixe, il vaut en $t = 0$:

$$\begin{aligned} ZCIIS_{fix}(0, T_M, I(0), N, K) &= N \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^{T_M} r_n(u) du} \left((1 + K)^M - 1 \right) | \mathcal{F}_0 \right] \\ &= N P_n(0, T_M) \left((1 + K)^M - 1 \right) \end{aligned}$$

Dans le cas où nous sommes la partie qui paie la jambe fixe, nous obtenons finalement :

$$ZCIIS(0, T_M, I(0), N, K) = N [P_r(0, T_M) - P_n(0, T_M)] - N P_n(0, T_M) [(1 + K)^M - 1] \quad (5.34)$$

$$= N [P_r(0, T_M) - P_n(0, T_M) (1 + K)^M] \quad (5.35)$$

Il est intéressant de remarquer que le prix est indépendant du modèle. Si nous cherchons la valeur du taux fixe K qui rend le swap nul à l'instant 0, nous obtenons :

$$K = \left(\frac{P_r(0, T_M)^{\frac{1}{M}}}{P_n(0, T_M)} - 1 \right) \quad (5.36)$$

Ces valeurs sont connues sur le marché pour certaines maturités T_M , il est alors possible de déduire les prix des zéro-coupon réels P_r :

$$P_r(0, T_M) = P_n(0, T_M)(1 + K(T_M))^M \quad (5.37)$$

Puis finalement les taux d'intérêt réels r_R :

$$r_R(0, T_M) = -\frac{1}{T_M} \ln(P_r(0, T_M)) \quad (5.38)$$

Pricing des cap inflation

Corollaire : selon l'hypothèse de dynamique de l'indice inflation donnée par l'équation (4), le *payoff* d'un cap sur taux d'inflation à un horizon de temps fixe de t_0 à l'échéance du cap T avec $t_0 \leq 0 < T$ et de strike k vaut :

$$C_{ID}(T, I(T), k) = \left(\frac{I(T) - I(t_0)}{I(t_0)} - k \right)^+$$

Son prix en $t = 0$ est alors :

$$C_{ID}(0, I(0), k) = \frac{I(0)}{I(t_0)} e^{-r_R T} N(d) - (1 + k) e^{-r_N T} N(d - \sigma_I \sqrt{T}) \quad (5.39)$$

Avec :

$$d = \frac{\ln \left(\frac{I(0)}{I(t_0)(1+k)} \right) + (r_N - r_R + \frac{1}{2} \sigma_I^2) T}{\sigma_I \sqrt{T}}$$

De manière analogue à la formule du prix d'un cap dans le cadre des options sur action avec le modèle de Black-Scholes, nous obtenons une formule fermée pour le prix d'un caplet sur l'intervalle $[T_{i-1}, T_i]$:

Proposition : selon l'hypothèse de dynamique de l'indice inflation donnée par l'équation (4), le *payoff* d'un caplet sur taux d'inflation $i(T_{i-1}, T_i)$ sur un intervalle de temps futur allant du temps T_{i-1} à la maturité du caplet T_i avec $0 < T_{i-1} < T_i$, de strike k vaut :

$$C_{FIR}(T_i, i(T_{i-1}, T_i), k) = (i(T_{i-1}, T_i) - k)^+ = \left(\frac{I(T_i) - I(T_{i-1})}{I(T_{i-1})} - k \right)^+$$

L'expression du prix d'un caplet au temps 0 est donnée par l'expression :

$$C_{FIR}(0, I(0), k) = e^{-r_R(T_i - T_{i-1})} e^{-r_N T_{i-1}} N(d) - (1 + k) e^{-r_N T_i} N(d_i - \sigma_i \sqrt{T_i - T_{i-1}}) \quad (5.40)$$

Avec :

$$d_i = \frac{-\ln(1+k) + (r_N - r_R + \frac{1}{2}\sigma_i^2)(T_i - T_{i-1})}{\sigma_i\sqrt{T_i - T_{i-1}}}$$

Nous notons que ce modèle est assez simple à utiliser pour les praticiens, mais hérite des mêmes hypothèses que le modèle Black-Scholes pour les stock-options, telles que l'hypothèse d'une volatilité constante en fonction de la maturité et le strike de l'option, qui se sont révélées irréalistes. Intuitivement, le prix d'une option sur le taux d'inflation sur un intervalle de temps futur dépend de la position actuelle du marché sur le comportement futur de l'inflation. Ceci est reflété par les volatilités implicites à terme dans ce cadre de type Black-Scholes. Cependant, l'étude de la nappe de volatilité des cap inflation montera dans la note sur le calibrage de ce modèle qu'elle n'est pas constante en fonction du strike et l'échéance de l'option.

Dans la prochaine section, nous extrayons les volatilités implicites des caplet par stripping sur les prix des cap inflation et montrons ainsi que la volatilité des caplet sur l'inflation est tout sauf constante pour toutes les échéances et tous les strike.

Calibration du modèle de Black-Scholes

Dans cette section, nous calibrons notre modèle de type Black-Scholes sur les données de marché et montrons que les volatilités implicites prospectives des caplet de notre modèle de type Black-Scholes sont tout sauf constantes selon les échéances et les strike des cap inflation.

Le modèle est calibré sur les prix des cap indexés sur l'inflation pour différents strike et maturités notés respectivement k et T tels que :

$$T = [1 \mid 2 \mid 3 \mid 5 \mid 7 \mid 10 \mid 12 \mid 15 \mid 20 \mid 30] \quad (5.41)$$

$$k = \frac{1}{100} [1.00 \mid 1.50 \mid 2.00 \mid 2.50 \mid 3.00 \mid 3.50 \mid 4.00 \mid 4.50 \mid 5.00 \mid 6.00] \quad (5.42)$$

Stripping des volatilités des caplet

Cette méthode réside sur le fait qu'un *cap* est une séquence de *caplet* de même *strike* (sauf pour l'ATM) sur la réalisation de taux à différentes maturités, dans notre cas, il s'agit de la variation de l'IPC. Pour décrire cette méthode, les notations suivantes seront utilisées :

- $\mathcal{T} = \{1ans, 2ans, \dots, 29ans, 30ans\}$
- $V_{Cap_i}^{BACH}(\zeta_i, K)$ le prix du $i^{\text{ème}}$ cap de volatilité ζ_i et de *strike* K à $t = 0$.
- $V_{caplet_n}^{BACH}(\gamma_n, K)$ le prix du $n^{\text{ème}}$ caplet de volatilité γ_n et de *strike* K à $t = 0$.

Par définition $V_{Cap_i}^{BACH}$ est composé de i *caplet* et on peut écrire :

$$V_{Cap_i}^{BACH}(\zeta_i, K) = \sum_{n=1}^i V_{caplet_n}^{BACH}(\zeta_i, K), \quad i \in \mathcal{T} \quad (5.43)$$

Et la formule de *stripping* peut en être déduite :

$$V_{Cap_i}^{BACH}(\zeta_i, K) = V_{Cap_{i-1}}^{BACH}(\zeta_{i-1}, K) + V_{caplet_i}^{BACH}(\gamma_i, K), \quad i \in \mathcal{T} \quad (5.44)$$

De cette façon, il est possible de calculer $V_{caplet_i}^{BACH}(\gamma_i, K)$ le prix du $i^{\text{ème}}$ *caplet* et d'en déduire la volatilité implicite des *caplet* γ_i qui lui est associée par l'algorithme de Newton présenté en annexe.

Sur le plan pratique, les volatilités des *cap* disponibles sur le marché appartiennent à l'ensemble $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 5, 7, 10, 12, 15, 20, 30\}$. Ainsi, afin de réaliser le *stripping* des volatilités de *caplet*, nous allons travailler avec des *caplet* de maturité un an. Ainsi, dans la mesure où les prix des *cap* du marché sont à k fixé strictement croissants en fonction de la maturité, et à maturité fixe strictement décroissants en fonction du *strike*, il est possible par interpolation des prix de déduire les prix des *cap* des maturités 1 à 30 an par intervalle de temps d'une année. Ainsi, la notation est mise à jour avec :

$$T = [1 \mid 2 \mid 3 \mid \dots \mid 28 \mid 29 \mid 30] \quad (5.45)$$

Pour cela, nous disposons d'une matrice de prix des cap inflation spot ($t = 0$), par exemple, si on se situe au 11/06/2018, on calibrera notre modèle avec la surface de prix des cap inflation du 11/06/2018 dont la surface est représentée ci-après :

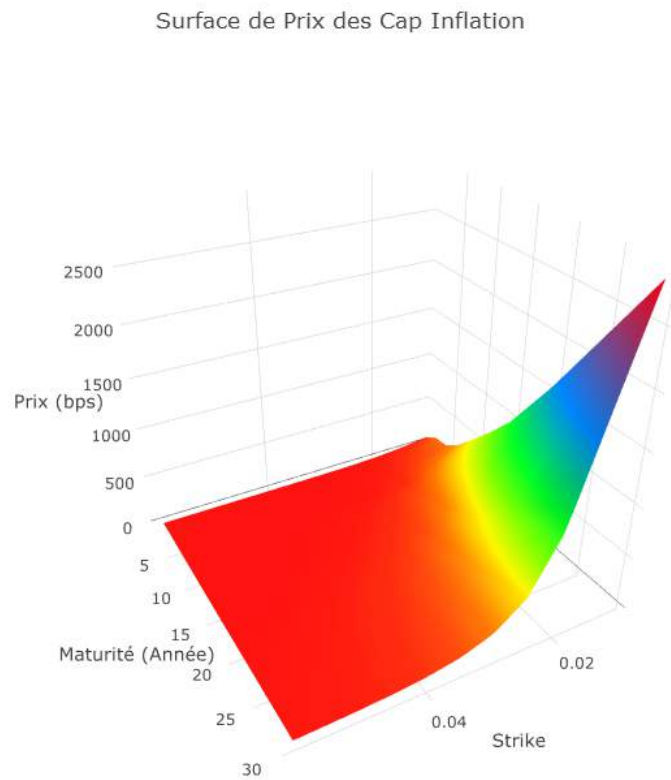


FIGURE 5.57 – Surface de prix des cap inflation au 11/06/2018

On en déduit alors la surface des volatilité implicites des caplet calibrées sur les prix des cap inflation par la méthode de *stripping* décrite plus haut :

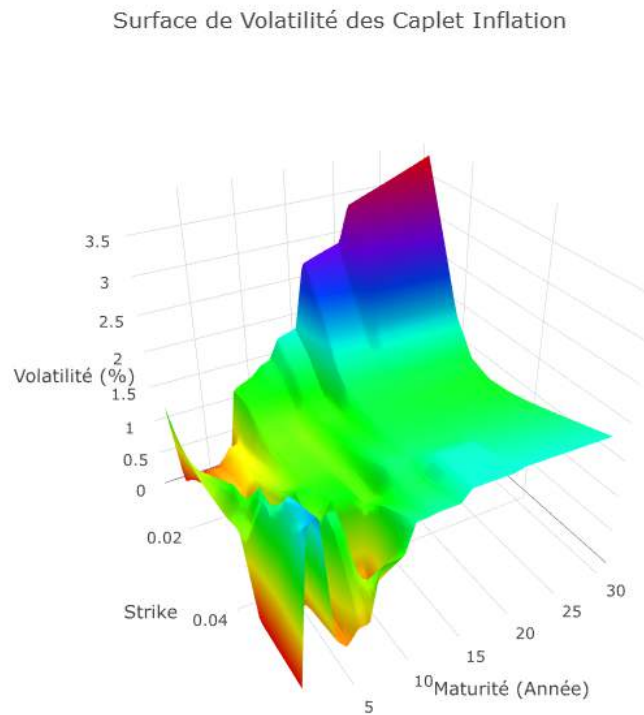


FIGURE 5.58 – Surface de volatilités des caplet inflation au 11/06/2018

Une fois ces volatilités déduites, le modèle est calibré et il est possible alors de l'utiliser pour le *pricing* des obligations indexées au temps t avec le risque de crédit. [Note : **Modélisation et pricing des obligations indexées**]

Maintenant, dans le cas où nous cherchons à faire des études prospectives, il faudra *pricer* dans le futur des dérivés sur inflation comme des cap et des floor. Pour cela, nous proposons une méthode qui permet de projeter la surface de volatilité dans le futur. Cette méthode de paramétrisation de la surface de volatilité des dérivés cap inflation qui ne peut être considérer constante au cours du temps au même titre que celle des dérivés action call/put est décrite dans la note **Calibration de la nappe de volatilité des caplet inflation**.

Calibration de la nappe de volatilité des caplet inflation

Introduction

Dans l'optique du développement de l'outil ALM, une part importante du travail réside dans la modélisation des différents actifs composant le portefeuille. La précédente note **Calibration du modèle de Black-Scholes sur le sous-jacent inflation** a permis de *pricer* des obligations indexés sur inflation à n'importe quel moment dans le passé et spot. Il est maintenant question dans la présente note de pouvoir *pricer* dans le futur des produits indexés sur l'inflation comme les OATi ou certains produits structurés indexés sur l'inflation.

Calibration de la nappe de volatilité des caplet inflation

Contexte de l'étude

Le cadre de l'étude proposée s'inscrit dans la construction d'un GSE « monde réel » répondant à la fois aux problématiques de projections de grandeurs économiques et de *pricing* à horizon court et moyen terme. A ce titre, l'approche de modélisation doit s'intégrer dans la structure du modèle VAR ou du MSIAH-VAR et doit induire une cohérence entre les univers de projection (« monde réel ») et de *pricing* (« risque-neutre »).

La spécification proposée doit respecter une forme économétrique linéaire sur les paramètres, dans la continuité de notre approche inspirée de l'article de Diebold and Li [2006] pour la structure par terme des taux d'intérêts. Cette méthodologie a été privilégiée à celles impliquant une dynamique de facteurs inobservables (modèles à espace d'états). En effet, les facteurs inobservables sont rendus observables en construisant une série chronologique des paramètres économétriques par moindres carrés, permettant de rentrer de manière élégante dans un cadre d'étude de séries temporelles multivariées plus classique.

Dans un souci de cohérence entre les scénarios « monde réel » et « risque-neutre », le cadre de travail proposé est le recalibrage du modèle de valorisation selon les paramètres implicites projetés par le VAR ou le MSIAH-VAR, en l'occurrence la nappe de volatilité implicite. Bien moins chronophage qu'un modèle plus complet tel que le MSIAH-VAR, un modèle VAR répondra à la problématique de *repricing* dans un univers réel où les paramètres implicites sont des séries chronologiques. Le MSIAH-VAR répond également à cette problématique et est plus adapté dans le cas de séries chronologiques très volatiles car il induit un changement de régime de volatilité contrairement au VAR où la volatilité est supposée constante au cours du temps. L'indice VSTOXX en est l'illustration parfaite :



FIGURE 5.59 – Représentation de l’historique du VSTOXX

En outre les techniques traditionnelles de calibrage sur la base de l’information disponible à la date de projection induisent soit une constance des paramètres implicites (calibrage RN) soit une constance des prix du marché du risque (approche par déflateurs) alors même que la volatilité des évaluations « spots » est pointée du doigt par les assureurs. La question du recalibrage conditionnel apparaît dès lors assez naturelle pour des évaluations de stratégie de couverture action, de détermination de SCR marché liés à des produits structurés de maturité moyen terme.

La présente étude porte donc sur la projection de la nappe de volatilité implicite par une approche économétrique linéaire sur les paramètres et le raisonnement théorique et pratique autour du recalibrage de notre modèle de *pricing*.

Spécification du modèle paramétrique

La spécification du modèle est une adaptation de l’étude menée sur la nappe de volatilité Equity. En effet, l’étude reprend un modèle de Black-Scholes permettant de traiter l’inflation dans les dérivés de taux. De cette façon, nous allons déduire des formules en analogie avec la nappe de volatilité Equity.

Avec T et M , respectivement la maturité restante et la « moneyness » qui est tout simplement une forme de prix d’exercice normalisé. Nous retenons l’expression, ajustée de la maturité, avec intégration des taux nominaux r_N et réels r_R ainsi que le strike k du cap inflation :

$$M = \frac{\ln\left(\frac{(1+k)I(t_0)}{I(T_0)(e^{r_R T} + e^{r_N T} - 1)}\right)}{\sqrt{T}} \quad (5.46)$$

De manière générale, les cap inflation sont émis spot donc $t_0 = T_0$, ce qui simplifie l’ex-

pression de la *moneyness* :

$$M = \frac{\ln\left(\frac{(1+k)}{(e^{r_R T} + e^{r_N T} - 1)}\right)}{\sqrt{T}} \quad (5.47)$$

Avec :

- r_N représente le taux d'intérêt nominal cumulé d'aujourd'hui de t à T sur le marché.
- r_R représente le taux d'intérêt réel cumulé, le profit qu'un investisseur recherche pour un investissement jusqu'à l'échéance T excluant la perte de pouvoir d'achat depuis le temps t.

Les taux réels r_R sont issus d'une méthode de *stripping* sur les taux swap inflation qui est décrite dans la note **Calibration du modèle de Black-Scholes sur le sous-jacent inflation**

On rappelle la formule de *pricing* d'un caplet inflation en $t = 0$ dans le cas où la date d'émission de l'option est la même que la date de valorisation :

$$C_{FIR}(\gamma_i, k, T_i) = e^{-r_R(T_i - T_{i-1})} e^{-r_N T_{i-1}} N(d_i) - (1+k) e^{-r_N T_i} N(d_i - \gamma_i \sqrt{T_i - T_{i-1}}) \quad (5.48)$$

Avec :

- $d_i = \frac{-\ln(1+k) + (r_N - r_R + \frac{1}{2}\gamma_i^2)(T_i - T_{i-1})}{\gamma_i \sqrt{T_i - T_{i-1}}}$
- $N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$, $N(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

La transformation logitée sur l'intervalle $]0, \max(\gamma)[$ sur le terme à expliquer telle que $\max(\gamma)$ correspond à la volatilité observée maximale sur tout l'historique, garantissant la positivité de la volatilité dans un cadre stochastique. Toutefois, la seule hypothèse sur la forme qui est adopté à ce stade est une spécification polynomiale en T et M d'un degré inférieur ou égal à 3 :

$$\begin{cases} \text{logit}^{MAX}(\gamma(M, T)) = \beta_0 + \beta_1 M + \beta_2 T + \beta_3 M^2 + \beta_4 T^2 + \beta_5 MT + \beta_6 M^3 \\ \quad + \beta_7 T^3 + \beta_8 M^2 T + \beta_9 T^2 M + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \gamma) \end{cases} \quad (5.49)$$

On en profite pour rappeler la définition de la fonction logit :

$$\text{logit}(p) = \ln\left(\frac{p}{p^* - p}\right), \quad \text{où } p \in]0, p^*[\quad (5.50)$$

Estimation des paramètres

La principale problématique d'estimation est l'utilisation qui est faite du lissage de la nappe de volatilité. En effet, cette surface implicite n'est pas exploitée de manière directe mais plutôt de façon indirecte par l'intermédiaire de la formule de transfert de Black & Scholes. En effet, in fine, l'objectif est de repasser à une matrice de prix afin de calibrer en « risque-neutre », un modèle de *pricing*.

Nous utiliserons cette métrique pour l'estimation :

$$MSE(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (C_i - C_i(\theta))^2 \quad (5.51)$$

Avec :

- n = le nombre de prix d'options de type caplet qui existent sur le marché.
- C_i les prix des n options de type caplet sur le marché.
- $C_i(\theta)$ les prix de ces n options calculé à partir du modèle de BS, et qui dépendent d'un ensemble de paramètres θ .
- γ_i la volatilité implicite de Black & Scholes des caplet obtenue avec $C_{mkt} = C_{ID}(\gamma_i, k, T)$.
- $\gamma_i(\theta)$ la volatilité implicite de Black & Scholes estimée obtenue avec $C_{ID} = C_{ID}(\hat{\gamma}_i, k, T)$.

Ces métriques sont cohérentes avec les prix des options car elles fournissent des paramètres estimés qui, lorsque utilisés dans le modèle, génèrent des prix d'options très proches de ceux observés sur le marché.

L'idée sous-jacente de bi-objectif le problème d'optimisation est qu'une erreur absolue d'estimation sur la volatilité n'a pas le même effet sur le prix selon le *strike* et la maturité restante. Toutefois dans le cadre d'un modèle dynamique, une optimisation multi-objective ne peut pas être utilisée puisqu'elle découle sur un panel de solutions entraînant la production d'une fonction d'utilité et par suite une instabilité des paramètres dans le temps (par exemple construire une même série chronologique avec des optimums globaux et locaux).

Par ailleurs, l'estimation OLS classique ne permet pas de prendre en compte le lien entre le prix et la volatilité. Dès lors, la méthode d'estimation mono-objective qui apparaît la plus pertinente est la méthode des moindres carrés pondérés pour une matrice de poids judicieusement choisie. Ajouter à cela, l'estimateur des moindres carrés pondérés est explicite et garantit également l'homogénéité des minimums (globaux en l'occurrence). Nous avons donc imaginé faire intervenir le vega dans l'estimation. Nous calibrons une nappe de volatilité de caplet donc nous allons utiliser le vega des caplet mais nous appliquons le vega des cap à la pondération puisque l'on cherche à répliquer le prix des cap :

$$v_{CFIR} = \frac{\partial C_{FIR}(\gamma, k, T)}{\partial \gamma} \quad (5.52)$$

Cependant, pour déduire les vega des cap inflation, il nous faut d'abord déduire le vega des caplet. Or, cela se fait au travers des volatilités de caplet que l'on extrait par la méthode de *stripping*.

Stripping des volatilités des caplet

Présentation des données Bloomberg

Nous avons à notre disposition une plage de données du 05/10/2009 au 11/06/2018 (soit 2224 points du passé), dans laquelle 100 couples (T_i, K_i) sont disponibles :

$$T = [1 \mid 2 \mid 3 \mid 5 \mid 7 \mid 10 \mid 12 \mid 15 \mid 20 \mid 30] \quad (5.53)$$

$$k = \frac{1}{100} [1.00 \mid 1.50 \mid 2.00 \mid 2.50 \mid 3.00 \mid 3.50 \mid 4.00 \mid 4.50 \mid 5.00 \mid 6.00] \quad (5.54)$$

Pour cela, nous disposons de l'historique des matrices de prix des cap inflation, par exemple, au 11/06/2018, la surface de prix des cap inflation donne :

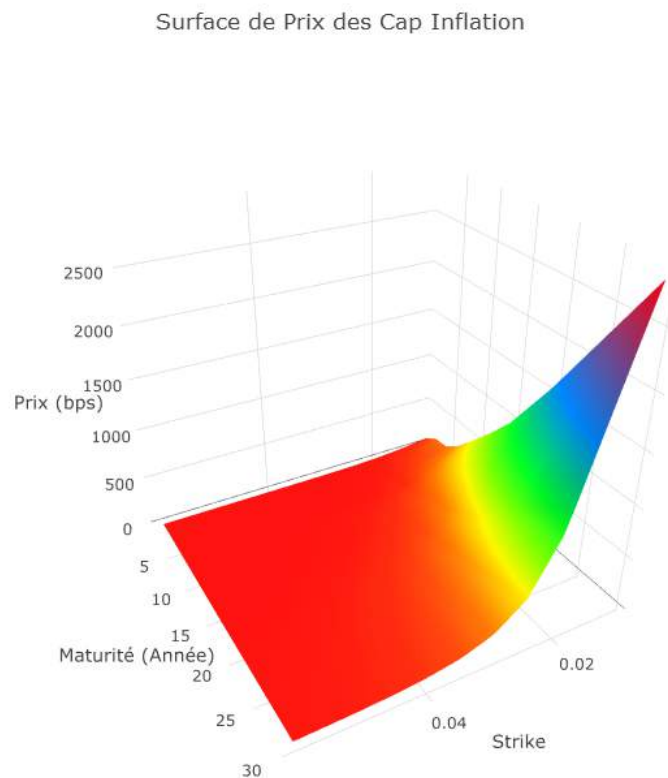


FIGURE 5.60 – Surface de prix des cap inflation au 11/06/2018

On en déduit alors l'historique des matrices de volatilité implicite des caplet calibrées sur les prix des cap inflation par la méthode de *stripping* décrite plus haut :

Surface de Volatilité des Caplet Inflation

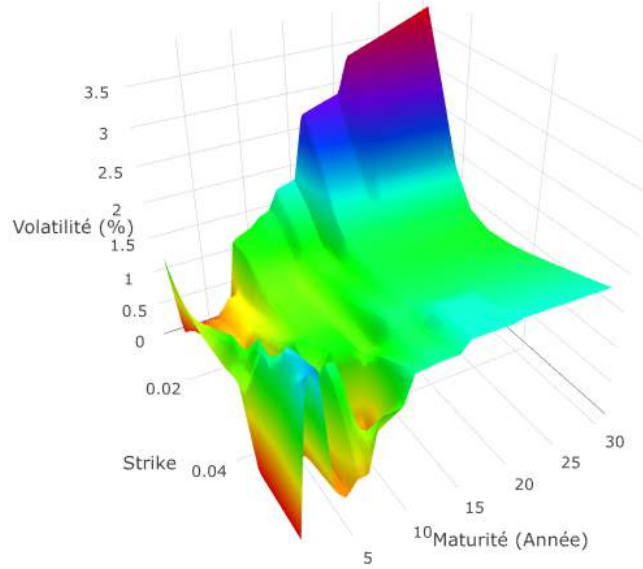


FIGURE 5.61 – Surface de volatilités des caplet inflation au 11/06/2018

Cette méthode réside sur le fait qu'un *cap* est une séquence de *caplet* de même *strike* (sauf pour l'ATM) sur la réalisation de taux à différentes maturités, dans notre cas, il s'agit de la variation de l'IPC. Pour décrire cette méthode, les notations suivantes seront utilisées :

- $\mathcal{T} = \{1an, 2ans, \dots, 29ans, 30ans\}$
- $V_{Cap_i}(\zeta_i, K)$ le prix du $i^{\text{ème}}$ *cap* de volatilité ζ_i et de *strike* K à $t = 0$.
- $V_{caplet_n}(\gamma_n, K)$ le prix du $n^{\text{ème}}$ *caplet* de volatilité γ_n et de *strike* K à $t = 0$.

Par définition V_{Cap_i} est composé de i *caplet* et on peut écrire :

$$V_{Cap_i}(\zeta_i, K) = \sum_{n=1}^i V_{caplet_n}(\zeta_i, K), \quad i \in \mathcal{T} \quad (5.55)$$

Et la formule de *stripping* peut en être déduite :

$$V_{Cap_i}(\zeta_i, K) = V_{Cap_{i-1}}^{BACH}(\zeta_{i-1}, K) + V_{caplet_i}(\gamma_i, K), \quad i \in \mathcal{T} \quad (5.56)$$

De cette façon, il est possible de calculer $V_{caplet_i}(\gamma_i, K)$ le prix du $i^{\text{ème}}$ *caplet* et d'en déduire la volatilité implicite des *caplet* γ_i qui lui est associée par l'algorithme de Newton présenté en annexe.

Sur le plan pratique, les volatilités des *cap* disponibles sur le marché appartiennent à l'ensemble $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 5, 7, 10, 12, 15, 20, 30\}$. Ainsi, afin de réaliser le *stripping* des volatilités de *caplet*, nous allons travailler avec des caplet de maturité un an. Ainsi, dans la mesure où les prix des cap du marché sont à k fixé strictement croissants en fonction de la maturité, et à maturité fixe strictement décroissants en fonction du strike, il est possible par interpolation des prix de déduire les prix des cap des maturités 1 à 30 an par intervalle de temps d'une année. Ainsi, la notation est mise à jour avec :

$$T = [1 \mid 2 \mid 3 \mid \dots \mid 28 \mid 29 \mid 30] \quad (5.57)$$

On reprend nos notations habituelles sur l'inflation. Puisque le prix d'un cap inflation de maturité T est la somme de la séquence de prix de caplet de même tenor, il vient que :

$$C_{ID} = \sum_{i=1}^T C_{FIR}(\gamma_i, k, T_i) \quad (5.58)$$

Donc le vega d'un cap inflation est tout simplement la composition linéaire de vega de caplet inflation. D'où :

$$v_{C_{ID}} = \sum_{i=1}^T v_{C_{FIR_i}} \quad (5.59)$$

Le vega représente la sensibilité du prix par rapport à la volatilité, il est donc le plus élevé lorsque l'erreur de prédiction sur la volatilité engendre l'erreur la plus forte sur le prix du dérivé action. Cet indicateur de gestion financière a été choisi également pour son expression mathématique explicite découlant du modèle d'évaluation de Black & Scholes sur inflation :

$$v_{C_{FIR_i}} = \sqrt{T_i - T_{i-1}} e^{-r_R(T_i - T_{i-1})} e^{-r_N T_{i-1}} N'(d_i) \quad (5.60)$$

Avec,

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (5.61)$$

Il est donc possible d'en déduire la formule de vega des cap :

$$v_{C_{ID}} = \sum_{i=1}^T \sqrt{T_i - T_{i-1}} e^{-r_R(T_i - T_{i-1})} e^{-r_N T_{i-1}} N'(d_i) \quad (5.62)$$

Avec :

$$— d_i = \frac{-\ln(1+k) + (r_N - r_R + \frac{1}{2}\gamma_i^2)(T_i - T_{i-1})}{\gamma_i \sqrt{T_i - T_{i-1}}}$$

$$— N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du, N(\cdot) \text{ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.}$$

Graphiquement, le vega est plus élevé sur les maturités élevées :

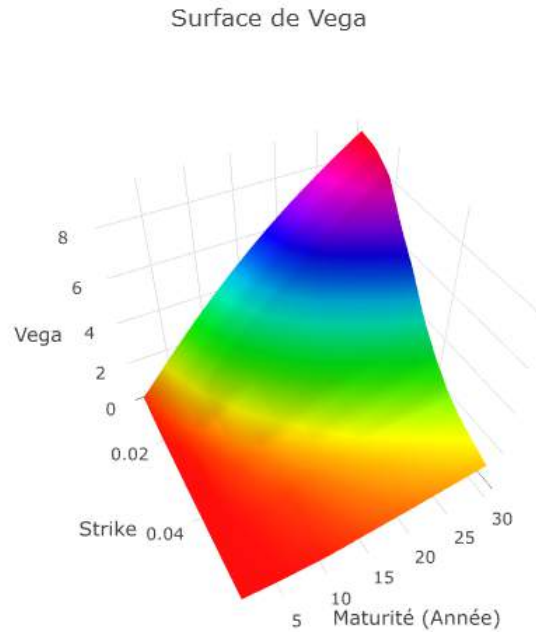


FIGURE 5.62 – Surface du vega en fonction de la maturité et du taux d'exercice

Le raisonnement précédent induit que la fonction objectif de calibrage doit tendre à réduire l'erreur d'estimation sur les options dont les vega sont les plus importants. Ceci est d'ailleurs pertinent économiquement car les options les plus liquides sur le marché (proche de l'ATM) sont plus demandées contrairement aux options OTM ou ITM dont les données proviennent dans la grande majorité des cas d'une extrapolation théorique (« Mark to Model »).

Aussi, la fonction de calibrage avec la pondération au moyen des vega doit prendre en considération la transformation appliquée aux volatilités pour ne pas introduire de biais dans les estimations. La pondération sera donc de la forme suivante avec P le prix de l'option et f la fonction inverse du logit appliquée au prix de l'option :

$$f(P) = \frac{\gamma_{MAX}}{1 + e^{-P}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f(P)}{\partial \gamma} = \frac{\partial P}{\partial \gamma} \gamma_{MAX} \frac{e^{-P}}{(1 + e^{-P})^2} \quad (5.63)$$

$$= \gamma_{MAX} v \left(\frac{\gamma_{MAX}}{1 + e^{-\ln(\frac{\gamma}{\gamma_{MAX}-\gamma})}} \right) \frac{e^{-\ln(\frac{\gamma}{\gamma_{MAX}-\gamma})}}{\left(1 + e^{-\ln(\frac{\gamma}{\gamma_{MAX}-\gamma})}\right)^2} \quad (5.64)$$

$$= \gamma_{MAX} v(\gamma) \frac{e^{-\ln(\frac{\gamma}{\gamma_{MAX}-\gamma})}}{\left(1 + e^{-\ln(\frac{\gamma}{\gamma_{MAX}-\gamma})}\right)^2} \quad (5.65)$$

Ainsi, la transformation de vega utilisée dans la pondération vaut :

$$v = \gamma_{MAX} v_{CID} \frac{e^{-\ln(\frac{\gamma}{\gamma_{MAX}-\gamma})}}{\left(1 + e^{-\ln(\frac{\gamma}{\gamma_{MAX}-\gamma})}\right)^2} \quad (5.66)$$

Ainsi, la surface de vega utilisée pour la pondération dans l'étude a l'allure suivante :

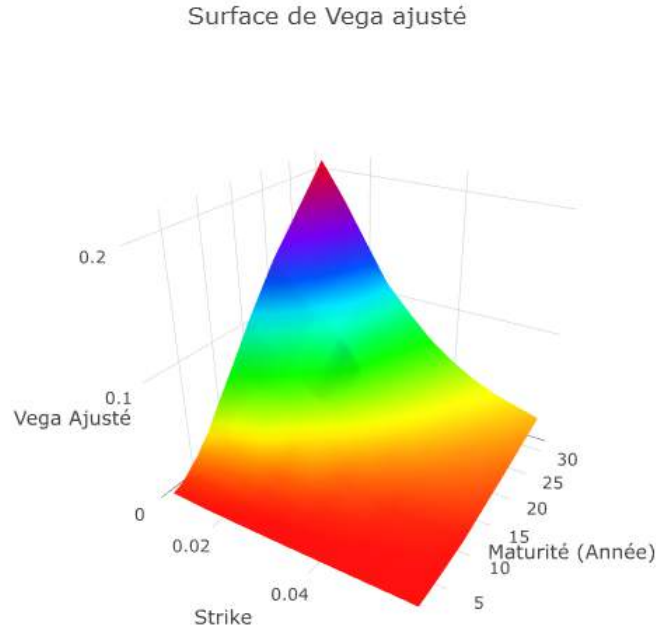


FIGURE 5.63 – Surface de Vega Ajusté en fonction de la maturité et du taux d'exercice

La pondération avec ces vega ajustés permettra de reproduire davantage les prix les plus liquides du marché, à savoir les prix dont le strike est proche de l'ATM.

La fonction de calibrage est alors définie comme suit pour rentrer dans le cadre d'estimation des moindres carrés pondérés :

$$F(\beta_0, \dots, \beta_9) = \sum_{i=1}^n \omega_i [\text{logit}(\gamma_i(M_i, T_i, r_{N_i}, r_{R_i})) - \widehat{\text{logit}(\gamma_i(M_i, T_i, r_{N_i}, r_{R_i}))}]^2 \quad (5.67)$$

Avec :

$$\omega_i = \frac{v(M_i, T_i, \gamma_i, r_{N_i}, r_{R_i})}{\sum_{k=1}^n v(M_k, T_k, \gamma_k, r_{N_k}, r_{R_k})} \quad (5.68)$$

Pour plus de commodité pour l'expression de l'estimateur des moindres carrés pondérés, réécrivons le modèle linéaire sous forme matricielle :

$$Y = X\beta + U, U \sim \mathcal{N}(0, \gamma I) \quad (5.69)$$

Avec :

$$Y_{n,1} = \begin{bmatrix} \text{logit}^{MAX}(\gamma_1(M_1, T_1, r_{N_i}, r_{R_i})) \\ \vdots \\ \text{logit}^{MAX}(\gamma_n(M_n, T_n, r_{N_i}, r_{R_i})) \end{bmatrix} \quad I_{n,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta_{10,n} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_9 \end{bmatrix}$$

$$X_{n,10} = \begin{bmatrix} 1 & M_1 & T_1 & M_1^2 & T_1^2 & M_1 T_1 & M_1^3 & T_1^3 & M_1^2 T_1 & T_1^2 M_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & M_n & T_n & M_n^2 & T_n^2 & M_n T_n & M_n^3 & T_n^3 & M_n^2 T_n & T_n^2 M_n \end{bmatrix}$$

Introduisons la matrice de poids :

$$W_{n,n} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \omega_n \end{bmatrix}$$

L'estimateur des moindres carrés pondérés (MCP) découle du programme d'optimisation suivant :

$$\underset{\beta}{\text{Min}}(Y - X\beta)^T W (Y - X\beta) \quad (5.70)$$

Et permet d'avoir une expression explicite garantissant l'homogénéité des résultats obtenus (minimums globaux) :

$$\beta_{MCP} = (X^T W X)^{-1} X^T W Y \quad (5.71)$$

Reconstitution des séries chronologiques de la nappe de volatilité des caplet

Modèle général

La partie précédente explique la construction des séries chronologiques supposées inobservables (i.e. dans un modèle dynamique à espace d'états), par la méthode des moindres carrés. Cette méthode en deux étapes, repris par DIEBOLD et LI [2006], et permettant de s'acquitter d'une dimension (la fameuse équation de mesure des modèles à espace d'états), donne cette forme à la dynamique de la nappe de volatilité implicite :

$$\begin{cases} \text{logit}(\gamma_{i,t}(M, T)) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}M_{i,t} + \beta_{2,t}T_i + \beta_{3,t}M_{i,t}^2 + \beta_{4,t}T_i^2 + \beta_{5,t}M_{i,t}T_i + \beta_{6,t}M_{i,t}^3 \\ \quad + \beta_{7,t}T_i^3 + \beta_{8,t}M_{i,t}^2T_i + \beta_{9,t}T_i^2M_{i,t} + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \gamma) \end{cases} \quad (5.72)$$

Pour la présente étude, nous retenons l'expression de la *moneyness* :

$$M_t = \frac{\ln \left(\frac{(1+k_i)}{e^{r_{N,t,T_i} T_i} + e^{r_{R,t,T_i} T_i} - 1} \right)}{\sqrt{T_i}} \quad (5.73)$$

Avec :

$$\begin{aligned} - r_{N_{0,T_i}} &= - \frac{\ln(P_n(0,T_i))}{T_i} \\ - r_{R_{0,T_i}} &= - \frac{\ln(P_r(0,T_i))}{T_i} \end{aligned}$$

Les paramètres r_N et r_R étant des inputs de la formule de *pricing* des caplet et des cap inflation, nous devons déterminer une modélisation de la structure par terme des taux nominaux et des taux réels.

La structure par terme des taux nominaux

La structure par terme des taux nominaux sera modélisé par un modèle AFNS (Arbitrage-Free Nelson Siegel : The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models), modèle décrit dans la note **Modèle Arbitrage Free Nelson-Siegel (AFNS) et calibration**.

L'historique de la structure par terme des taux nominaux observés VS l'historique de la structure par terme des taux nominaux estimés avec le modèle AFNS sont comparés :

Historique de la structure par terme des taux nominaux

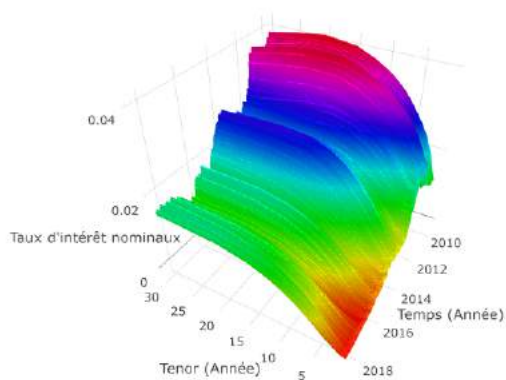


FIGURE 5.64 – Historique des STTI nominaux observé

Historique de la structure par terme des taux nominaux AFNS

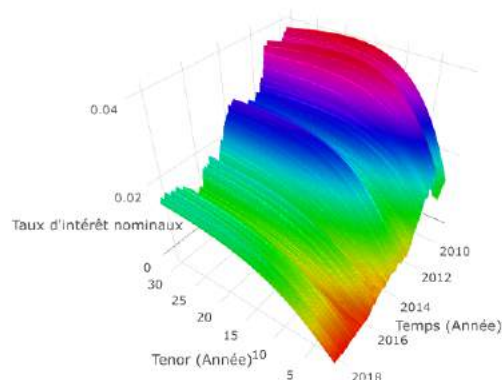


FIGURE 5.65 – Historique des STTI nominaux AFNS

Il est alors possible de reconstruire les séries chronologiques des β_i .

Reconstruction des séries chronologiques

La reconstruction des séries chronologiques des régresseurs est illustrée ci-dessous :

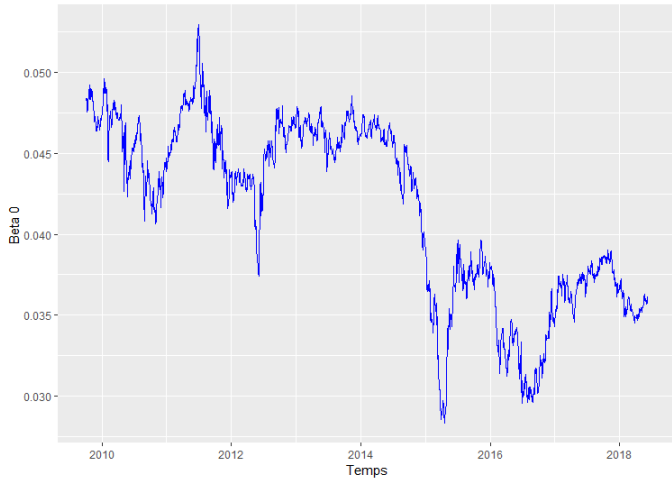


FIGURE 5.66 – Serie chronologie Beta0 STTI nominaux AFNS

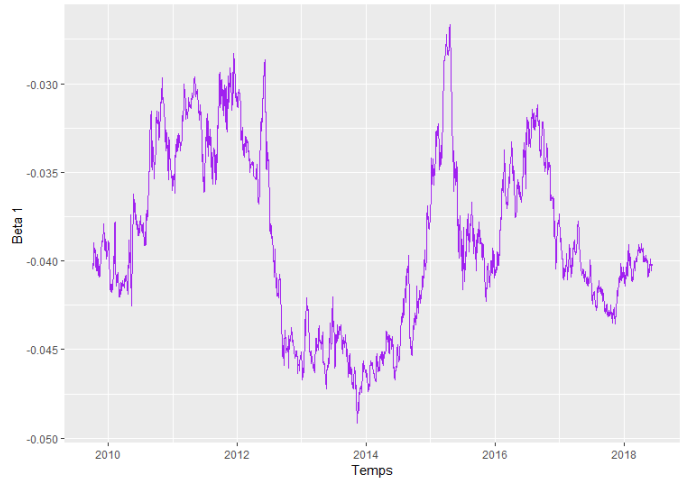


FIGURE 5.67 – Serie chronologie Beta1 STTI nominaux AFNS

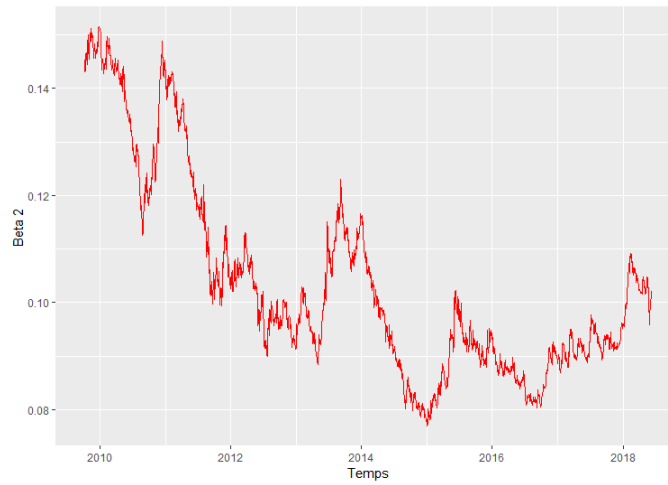


FIGURE 5.68 – Serie chronologie Beta2 STTI nominaux AFNS

La structure par terme des taux réels

La structure par terme des taux réels sera modélisé par un modèle AFNS, modèle décrit dans la note **Modèle AFNS et calibration**.

L'historique de la structure par terme des taux réels observés VS l'historique de la structure par terme des taux réels estimés avec le modèle AFNS sont comparés :

Historique de la structure par terme des taux réels

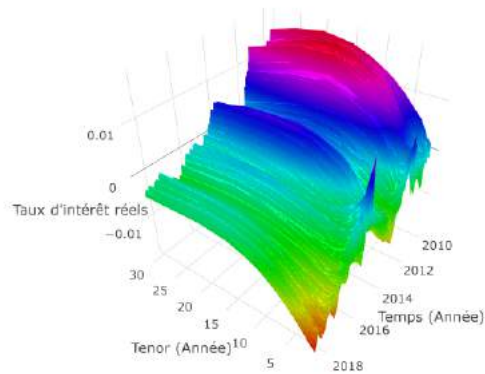


FIGURE 5.69 – Historique des STTI réels observé

Historique de la structure par terme des taux réels AFNS

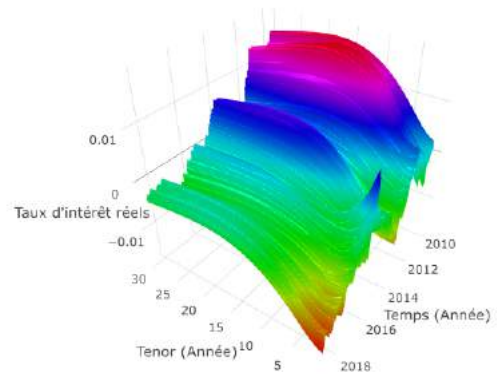


FIGURE 5.70 – Historique des STTI réels AFNS

Il est alors possible de reconstruire les séries chronologiques des β_i .

Reconstruction des séries chronologiques

La reconstruction des séries chronologiques des régresseurs est illustrée ci-dessous :

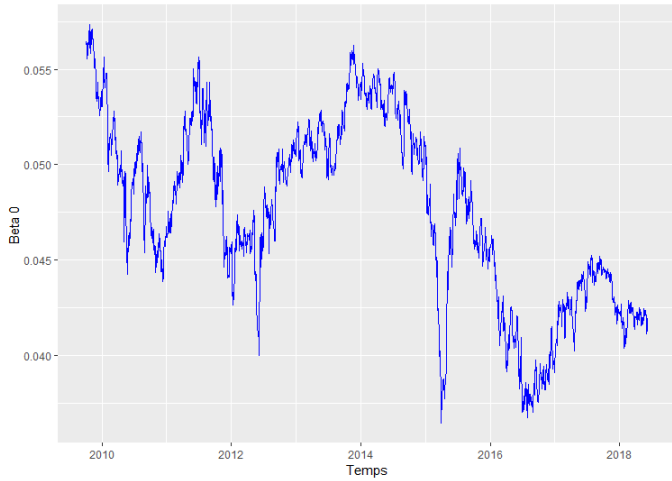


FIGURE 5.71 – Serie chronologie Beta0 STTI réels AFNS

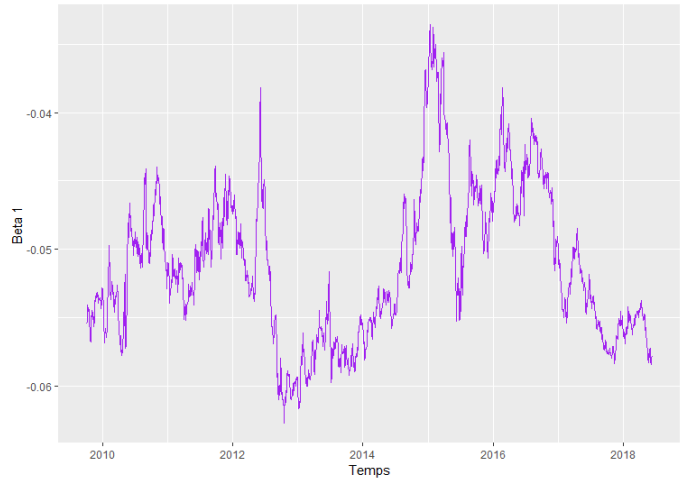


FIGURE 5.72 – Serie chronologie Beta1 STTI réels AFNS

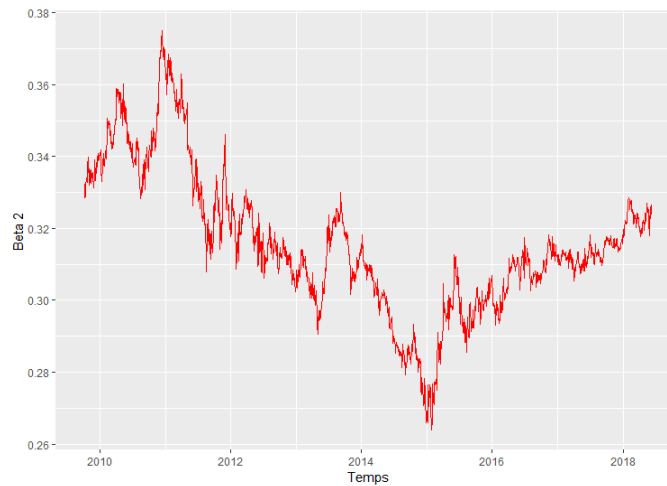


FIGURE 5.73 – Serie chronologie Beta2 STTI réels AFNS

Les structures par terme des taux nominaux et réels étant modélisées, l'étude de la nappe de volatilité implicite des caplet est reprise ci-après.

Modèle retenu

La sélection du modèle final s'effectue avec une méthode exhaustive pour définir une spécification inter-temporelle (2224 données (N=2224)) cohérente. En pratique, pour chaque jeu de données journalières, 1023 spécifications (modèles différents) sont testées ($\sum_{k=1}^{10} C_n^k = 2^{10} - 1 = 1023$).

Le problème s'y prêtant (données spatiales à t fixé), la notion de validation croisée est introduite dans le choix de spécification du modèle, à savoir la présence conjointe d'indicateurs explicatifs et prédictifs. Pour éviter le biais de sélection lié au choix des points à prédire, ceux-ci sont tirés aléatoirement selon l'importance des poids des vega. Il s'agit tout simplement de tirer au hasard des volatilités en fixant leur probabilité d'être tiré au sort selon leur vega (une volatilité associée à un vega élevé aura une probabilité d'être tiré au sort plus élevée).

De cette façon, le modèle sera calibré et plus fin davantage sur les volatilités dont les variation de prix sont les plus grandes. On cherche à être meilleur sur les volatilités engendrant des écarts de prix plus élevés. Pour cela, par pas de temps, la base est séparée en une base d'apprentissage constitué de 72 % des volatilités et d'une base de test constitué de 28 % des volatilités. La structure des poids vega étant d'une date à une autre du même ordre de grandeur, le tirage des volatilités pour chaque pas se fait de la même manière : les volatilités extraites selon le *strike* ou le *tenor* sont les mêmes par pas. Ainsi, l'étude permet d'être homogène pour chaque pas et permet la comparaison des modèles testés pour chaque base d'apprentissage. Ainsi, la procédure de sélection est effectuée par rééchantillonnage : répétée K fois. Cela permet de tester les modèles sur différentes base d'apprentissage et de test afin d'établir un modèle robuste et plus stable.

Formalisation de la procédure de calibrage

Soit $\{E_k\}$, l'ensemble des points sélectionnés pour l'estimation par moindres carrés.
Soit $\{E\}$, l'ensemble des points à disposition pour l'étude.
Soit $\{V_i\}$, l'ensemble des variables spécifiant le modèle i.

Fonctions objectifs de calibrage

Les fonctions objectifs de calibrage suivantes sont utilisées à la fois sur la base d'apprentissage et sur la base de test. En effet, le modèle doit être équilibré et performant tant sur la base d'apprentissage que sur la base de test.

$$\text{Moy } MSE_{i,K} = \text{Moy } Err_{i,K} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N MSE_{i,t,(\{E_K\},\{V_i\})} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Err_{i,t,(\{E_K\},\{V_i\})}$$

$$\text{Tail VaR } 0.95 \text{ } MSE_{i,K} = \mathbb{E}(-MSE | MSE < -VaR_{0.95}(MSE))_{i,K}$$

$$\text{Nb } Var_i = \text{Card} \{V_i\}$$

Avec :

$$Err_{i,t,K} = (100[e^{Y_{t,\{E \setminus E_K\}}} - e^{X_{t,\{V_i\}} \beta_{t,\{E_K\}}}]^T W (100[e^{Y_{t,\{E \setminus E_K\}}} - e^{X_{t,\{V_i\}} \beta_{t,\{E_K\}}}]])$$

$$VaR_{0.95}(MSE) = F^{-1}(0.95) = \inf(x : F(x) > 0.95)$$

Indicateurs indicatifs

L'indicateur $Moy\ MSE_{i,K}$ représente la moyenne des MSE soit la moyenne de l'erreur quadratique de prédiction pondérée (par les Vega), sur tous les jeux de données passés (2224) de la $i^{ème}$ spécification testée (rappelons qu'il y en a 1023 différentes), pour l'ensemble $\{E_k\}$ des données de calibrage sélectionnées lors du $K^{ième}$ tirage aléatoire.

L'indicateur $Tail\ VaR\ 0.95\ MSE_{i,K}$ représente la Tail VaR qui est une mesure de risque qui décrit la survenance des pertes sous réserve que le seuil soit franchit et il est calculé sur tous les jeux de données passés, de la $i^{ème}$ spécification, pour l'ensemble $\{E_k\}$ des données de calibrage sélectionnées lors du $K^{ième}$ tirage aléatoire. La Tail VaR est pertinente au lieu de la VaR car dans les cas où pour certains pas de temps, le modèle choisi serait moins bon, on aurait un modèle moyen global pour tous les pas de temps. Or, ce n'est pas l'intérêt ici, nous voulons que le modèle soit bon sur tous les pas de temps mais dans le cas où il est moins bon, nous voulons qu'il soit le moins mauvais par rapport à d'autres modèles. Ainsi, la focalisation se fait sur un certain seuil de performance et d'erreur.

Comme dans le cas où un assureur voudrait calculer sa probabilité de faire faillite à partir d'un certain seuil : la Tail VaR donne à la fois une estimation de la probabilité de ruine et étudie également la sévérité des pertes une fois le seuil franchi en tenant compte de la queue de la distribution.

L'indicateur $NbVar_i$ renvoie le nombre de degrés de liberté de la $i^{ème}$ spécification.

En synthèse, les deux premiers indicateurs chacun appliqués sur la base d'apprentissage et sur la base de test (4 indicateurs) ainsi que l'indicateur "Nb Var" sont utilisés pour l'optimisation multi-objectif. Ensuite, en fonction du nombre de variables présents dans les modèles, cela permet d'orienter la décision finale en incarnant respectivement la robustesse statistique et la parcimonie.

Programme d'optimisation multi-objectif

$$(PMO)_K = \begin{cases} \min_{x=(x_1, \dots, x_{10})} F_K(x) = (f_{1,K}(x), \dots, f_{5,K}(x)) \\ x_{j=1, \dots, 10} = \begin{cases} 1 & \text{si selection} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad (5.74)$$

Choix de modèle

La dominance de pareto ($y \succ x \Leftrightarrow F(x) \leq F(y), \exists i = 1, \dots, 5 \text{ tq } f_i(x) < f_i(y)$), permet d'établir le front 1, trié sur la moyenne des erreurs de prédiction. Cette procédure d'optimisation multi-objectif donne dès lors un ensemble de spécifications possibles (163 dans l'exemple en annexe, issu d'un tirage aléatoire des points à prédire).

Dans l'étude, 10 tirages aléatoires ont été effectués ($K=10$), et les modèles qui ressortent, même très paramétrés ne semblent pas en surapprentissage. Toutefois, dans un souci de parcimonie et de robustesse, l'idéal est un modèle le moins paramétré possible. En effet, dans le cadre de l'intégration du modèle dans le VAR, un nombre limité de paramètres et qui plus est relatif à des régresseurs sans signification économique particulière est fortement conseillé. Par ailleurs, un modèle intégralement significatif est un bon point mais qui peut s'avérer négatif si cela est trop souvent constaté (le pouvoir explicatif est quelque peu saturé et ne prend sans doute pas en compte certaines formes particulières).

Le lecteur trouvera en fin de papiers les tableaux récapitulatifs de l'étude des résultats dans leur intégralité classés par ordre croissant en fonction de la métrique MSE.test (prédiction) : ces tableaux indiquent que les modèles à 7 et 8 paramètres apparaissent systématiquement dans le front 1 des 10 tirages. Objectivement, ces modèles ne peuvent être rejetés que sur des considérations liées à la parcimonie. Les modèles à 5 et 6 paramètres sont intéressants également car moins paramétrés et apparaissant plusieurs fois dans le front 1 (respectivement 19 et 35 fois sur les 10 tirages).

Le jugement d'expert qui prédomine à ce stade (avant intégration dans le VAR ou le MSVAR) est la parcimonie. A ce titre, le modèle retenu est celui à 6 variables (identifiants : 104, 96, 64, 33, 50, 89, 12, 39, 74, 26), le modèle ressort pour chacun des 10 tirages aléatoires :

$$\begin{cases} \text{logit}(\gamma_{i,t}(M, T)) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}T_i + \beta_{2,t}T_i^2 + \beta_{3,t}T_i^3 + \beta_{4,t}M_{i,t}^2T_i + \beta_{4,t}M_{i,t}T_i^2 + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \gamma) \end{cases} \quad (5.75)$$

Reconstruction des séries chronologiques

La reconstruction des séries chronologiques des régresseurs est illustrée ci-dessous :

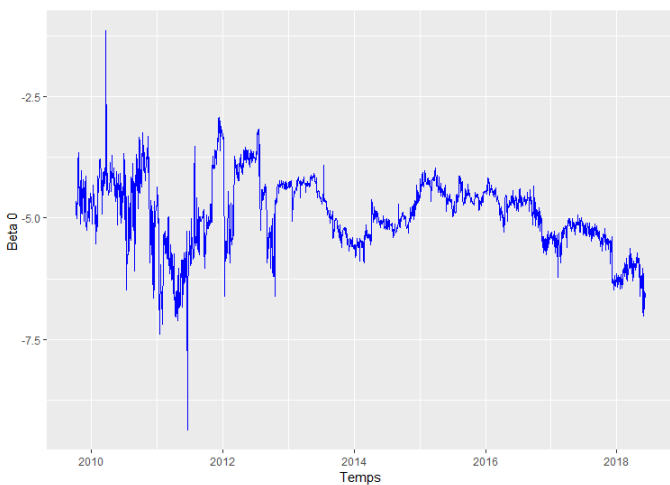


FIGURE 5.74 – Serie chronologie Beta0 Caplet Inflation

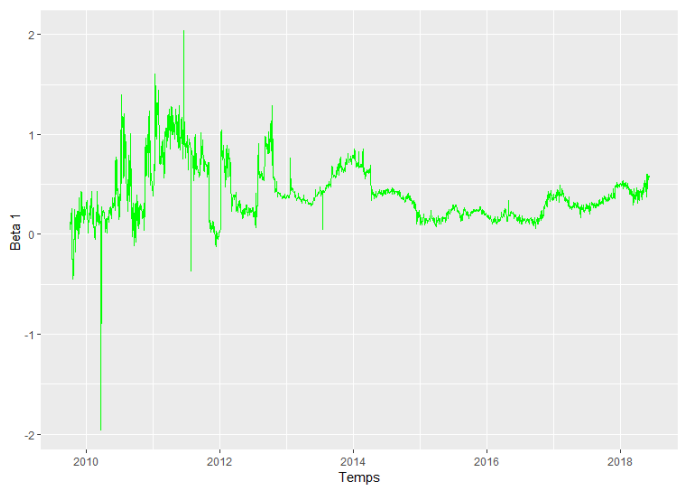


FIGURE 5.75 – Serie chronologie Beta1 Caplet Inflation

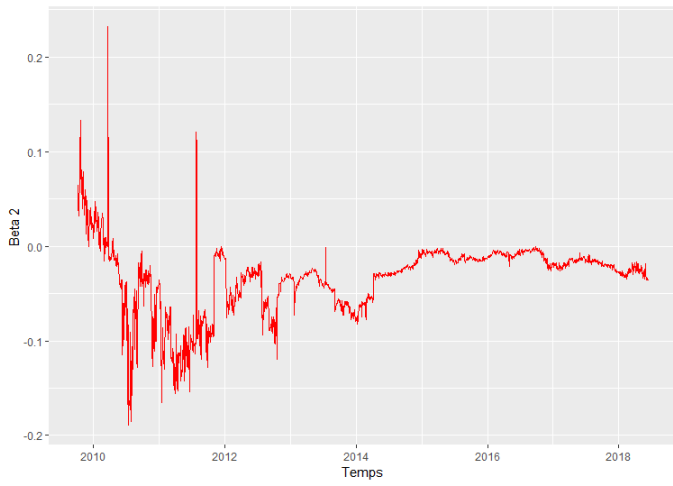


FIGURE 5.76 – Serie chronologie Beta2 Caplet Inflation

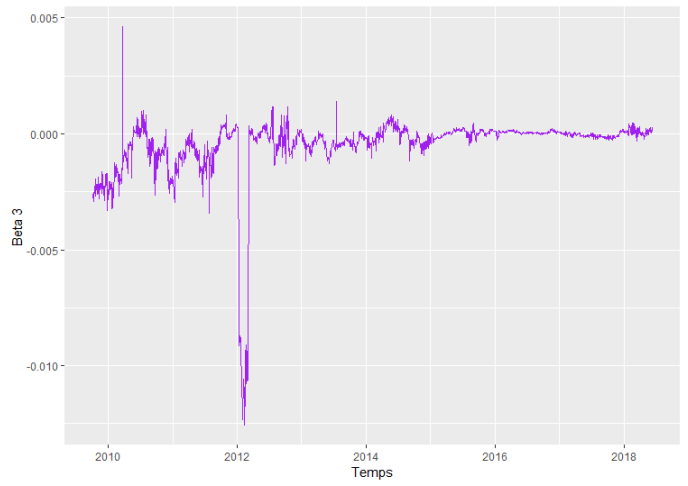


FIGURE 5.77 – Serie chronologie Beta3 Caplet Inflation

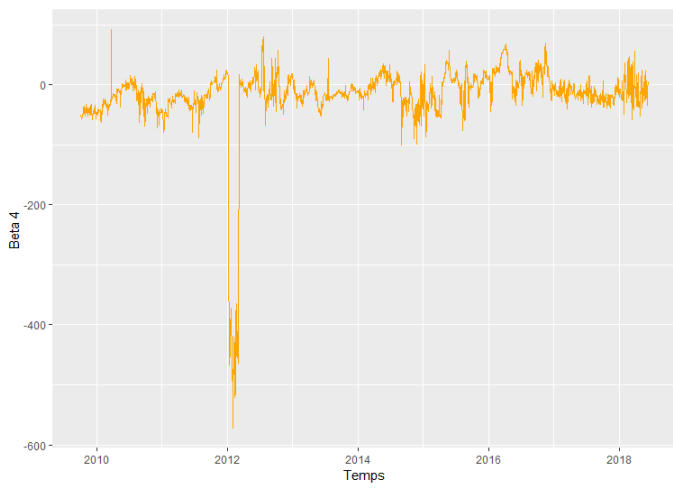


FIGURE 5.78 – Serie chronologie Beta4 Caplet Inflation

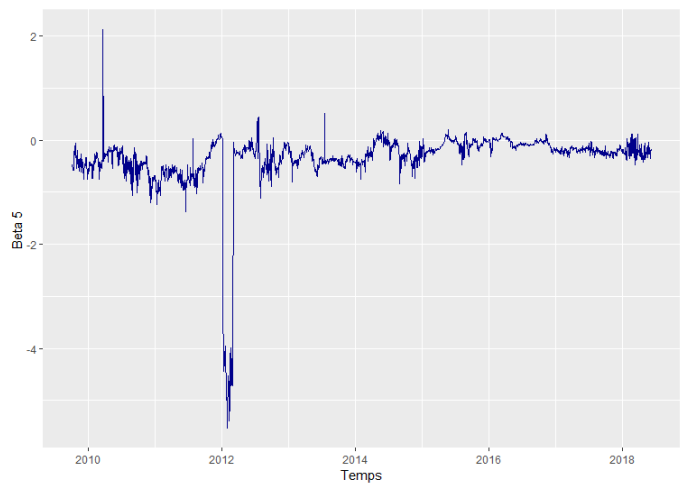


FIGURE 5.79 – Serie chronologie Beta5 Caplet Inflation

Validation du modèle

On obtient alors les surfaces de volatilité et de prix prédites suivantes VS les surfaces de volatilité et de prix observées pour plusieurs dates choisies aléatoirement :

Fitting Surface de Volatilité des Caplet Inflativ

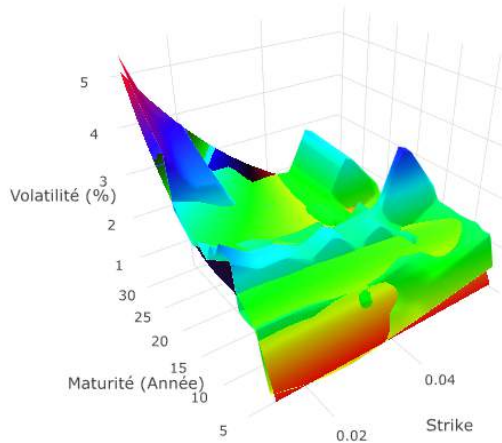


FIGURE 5.80 – Fitting de la surface de volatilité des caplet 20/12/2012

Fitting Surface de Prix des Cap Inflation

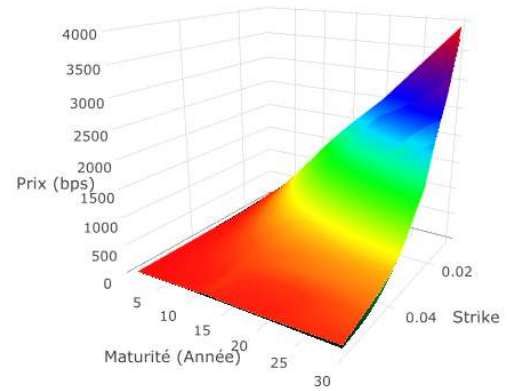


FIGURE 5.81 – Fitting de la surface de Prix des Cap 20/12/2012

Fitting Surface de Volatilité des Caplet Inflation

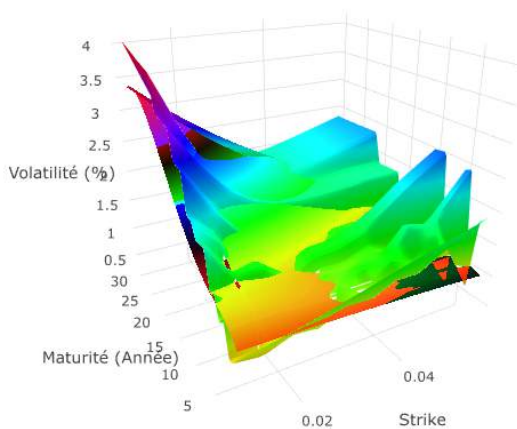


FIGURE 5.82 – Fitting de la surface de volatilité des caplet 25/03/2015

Fitting Surface de Prix des Cap Inflation

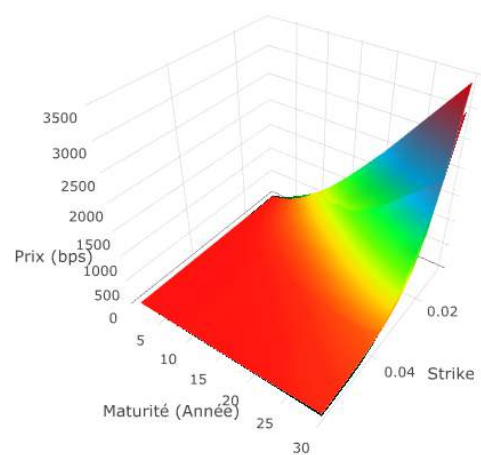


FIGURE 5.83 – Fitting de la surface de Prix des Cap 25/03/2015

Erreur globale pour les prix des options (n = 667200)		
Erreur normal/WLS	RMSE	44.07282 bps
	TVaR.0.95.RMSE	231.6048 bps

TABLE 5.1 – Tableau erreur modèle

Identifiant	Nb.variables	MSE.app	TVaR0.95.MSE.app	MSE.test	TVaR0.95.MSE.test	Intercept	M	T	M*T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² *T	T ² *M
60	5	26,26319854	104,9311148	31,9575133	129,8153364	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
31	5	26,29216344	104,8587651	32,36203647	131,2394002	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
97	7	23,73353702	93,32156188	32,53970241	132,1168304	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
101	5	26,8311592	107,1897775	32,66160526	132,890291	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
55	2	27,74218549	95,07337954	32,67247328	128,486577	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
56	2	26,85632463	89,69090902	32,92942934	128,6872865	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
104	6	24,55123136	95,96300295	33,09088051	133,2478385	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
99	2	27,62866974	95,16274238	33,17612394	128,9785729	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
29	2	27,4859751	93,59947782	33,35244104	131,1011315	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
96	6	24,40900663	95,27622339	33,38740634	135,1334221	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
100	2	26,74646473	90,15025714	33,43032198	128,4476409	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
45	5	26,58642048	106,2345312	33,47969395	136,0156158	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
30	2	26,70168251	88,77686546	33,48528798	130,1270977	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
94	5	26,64717177	106,1520244	33,49316228	137,8729457	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
64	6	23,87754646	93,2088122	33,55543092	135,4853987	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
93	2	26,64020994	88,72419909	33,76518893	130,8513166	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
42	2	27,408602	93,76475046	34,0399578	132,2194973	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
32	5	26,19820992	104,4301847	34,09038184	138,4354418	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
21	2	27,08284212	93,21988037	34,10529896	131,5170927	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
2	2	26,9907302	92,84366582	34,1117487	131,897158	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
33	6	23,92085998	93,24892056	34,19870583	138,112104	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
34	7	23,37669238	91,91754802	34,22052778	139,2207583	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
36	2	26,16336539	87,42598984	34,22389433	130,8111733	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
3	2	26,11012561	88,11159223	34,25810579	130,1840297	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
22	2	26,2520852	88,65608134	34,26113182	129,9385162	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
43	2	26,53156935	88,8359985	34,30201996	131,30338	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
69	2	26,20850375	88,12441429	34,30919032	130,5778679	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
80	2	27,31173117	94,051379	34,32376766	132,5319199	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
84	5	26,86984333	107,7360767	34,38773825	139,5925763	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
50	6	24,3278987	95,28007667	34,43861897	138,1641959	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1
81	2	26,359177	88,84425604	34,53843456	131,1656077	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
91	7	23,48071207	92,34460042	34,5466508	140,2349844	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
106	7	24,22936723	95,79700345	34,56702661	142,0151566	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
51	7	23,51872132	92,30067109	34,76167631	141,8671799	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
66	7	23,27907779	91,71506036	35,02922707	143,6145365	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
89	6	24,14303693	94,45285956	35,10349999	140,8375736	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
12	6	23,86912934	93,81511824	35,14921838	139,9883558	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
39	6	23,95635471	94,13813106	35,29094649	140,5886715	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
74	6	24,33940106	95,71717035	35,98960386	144,288393	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
26	6	24,0001195	94,27623643	36,1583256	144,4659371	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1
46	5	26,50031859	105,8052666	36,6373318	150,0649053	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
54	1	33,20817347	116,7323717	36,91203879	135,3374216	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	1	33,09322614	116,211118	37,05186932	136,0427471	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
38	5	25,97431113	103,8837179	37,12101842	151,1304246	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
76	7	23,80597211	94,21834985	37,15622388	151,246208	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1
92	1	32,89763786	116,303768	37,67914004	136,3669971	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
88	6	24,1615137	94,40749485	38,17655212	155,5524732	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
102	6	24,56057331	95,92394476	38,59465493	159,483565	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
98	1	32,59104032	115,1934671	38,59530283	138,2756551	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
41	1	32,32327244	114,5974399	39,14747447	139,4638111	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	6	23,89623135	93,81102038	39,20199841	159,6044907	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1
35	1	32,11237371	112,9393015	39,34773975	141,2627695	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
79	1	32,15773476	114,7280661	39,4223164	138,6595925	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	1	31,96397273	113,1539334	39,58046015	140,7341198	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 5.2 – Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite Caplet Inflation (1)

Identifiant	Nb.variables	MSE.app	TVaR0.95.MSE.app	MSE.test	TVaR0.95.MSE.test	Intercept	M	T	M*T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² *T	T ² *M
1	1	31,93154226	113,713724	39,60913578	139,6084115	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
68	1	31,9580886	114,0155054	39,82002277	139,9414981	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
86	6	24,00535982	93,35781424	41,00864418	169,4446247	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
49	6	24,26978799	94,73539522	41,18601672	171,3198662	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
58	5	26,11202129	99,92610055	41,48736196	172,3096503	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
10	6	23,65588634	92,78216527	41,84839039	172,978731	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
73	6	24,24703346	95,34321535	42,60576945	177,3157874	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1
83	5	25,91410558	99,07816685	42,83788906	177,3694985	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
27	7	23,54895894	93,07958472	43,01087632	179,9799283	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
17	7	23,31617305	91,6583992	43,07615164	179,6418257	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
24	6	24,00294666	94,20283759	43,493347	179,9943806	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
108	7	24,21018191	94,9332463	45,37517312	192,2114483	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
71	6	24,26940286	95,05805013	45,52700808	190,6167529	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
6	5	25,78349105	99,06850363	46,17822207	192,8476564	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
82	5	25,85128983	98,63411123	46,25898814	193,4169111	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
40	7	23,58244103	93,35344745	46,9859838	199,2814446	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
85	6	23,81617537	92,83489375	47,12587583	198,7562668	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
8	6	23,69361919	92,47551732	47,17742856	197,9394163	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
57	5	26,049658	103,2367023	48,33829229	204,9717118	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
16	7	22,99345166	90,56735707	48,65985332	207,1635653	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
61	6	23,84068763	92,87854389	49,09878897	208,4694271	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
5	5	25,7808318	98,91016902	49,9709361	210,6770592	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
37	5	26,12160374	103,433032	50,8215606	211,1559999	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0
59	5	26,04977892	98,65953973	51,29115958	218,2487486	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
44	5	26,30961852	104,4771618	51,67022548	219,8008682	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
70	6	24,15926112	94,80972004	51,97926018	221,2235018	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
7	6	23,43593328	91,60792619	52,65344521	223,8166368	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
4	5	25,39582002	100,8127659	56,09872274	239,5979394	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
47	6	24,21775643	94,52846343	57,84856874	249,182765	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0
82	6	23,75641717	92,4775602	62,21954686	269,1915572	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
72	6	24,11416088	94,47928665	66,17509088	287,1661253	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
62	6	23,79188739	92,58252095	66,87131266	290,916398	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
9	6	23,34698733	91,10407432	67,71622622	293,7852678	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
48	6	24,19995802	94,37025304	70,76436171	308,7224188	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1
23	6	24,16945636	93,83925514	79,44215187	344,9972577	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1
13	7	23,09208519	90,46219362	80,45823014	352,5149488	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0
63	6	23,79912124	92,46040976	83,18803359	365,8388133	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
95	6	24,31686273	94,37187104	84,84244865	373,3561729	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
103	6	24,49735824	95,37389456	88,67744307	390,5575625	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
14	7	22,97749066	89,87582009	92,50891309	407,3654924	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1
25	6	23,8609005	93,18174737	92,67312478	407,3689593	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
15	7	22,60056765	87,77418427	98,23581986	433,3829981	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1
67	7	23,26909955	91,11548845	98,42332677	435,227144	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
52	7	23,47732072	91,77910818	98,6562515	436,0515527	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
105	7	24,19723562	95,69578817	100,1543882	443,095294	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
77	7	23,69650246	93,34738056	100,7989868	444,961307	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
107	7	24,05279464	94,374036	101,7539986	450,3884326	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
78	7	23,89937473	93,30148533	129,7874799	575,5575266	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
90	7	23,31601439	90,4406887	149,345454	663,8125521	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
53	7	23,33712387	90,96430711	156,6521873	697,2220654	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
75	7	23,45036347	91,33702974	158,9385308	706,8160599	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
65	7	23,39742162	90,81367411	169,2504398	753,2701806	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1
18	8	22,50970046	88,00163715	184,6300295	822,0294871	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
19	8	22,17127288	86,10902455	306,612418	1368,772966	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1

TABLE 5.3 – Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite Caplet Inflation (2)

Calibration de la nappe de volatilité du FOREX

Introduction

Dans l'optique du développement de l'outil ALM, une part importante du travail réside dans la modélisation des différents actifs composant le portefeuille. Dans la présente note, il est question de pouvoir *pricer* des actions dont les prix de revient sont en monnaie étrangère et de les repasser en monnaie locale. Ainsi, ce type de *pricing* met l'accent sur la volatilité du sous-jacent qui est ici le taux de change. L'intérêt de cette note est donc de modéliser la volatilité de ce taux de change toujours par les approches polynomiales. Le but étant de projeter les paramètres implicites responsables de l'aléatoire dans la volatilité du taux de change pour ensuite *pricer* dans le futur des actions en monnaie étrangère. Cette volatilité du taux de change sera captée au moyen des différents dérivés utilisés sur le FOREX selon la monnaie étrangère et la monnaie locale.

Le marché des options de change est l'un des marchés des dérivés de gré à gré les plus importants et les plus liquides au monde. Le marché a développé sa propre méthode de cotation d'options, qui diffère considérablement des autres marchés. Un fait qui est souvent ignoré dans la littérature scientifique est qu'il existe un certain nombre de conventions différentes du delta et de la *moneyness* ATM. Sur le marché des dérivés de gré à gré (FX), la version du *smile* de volatilité «volatilité en fonction de la moneyness» n'est pas directement observable, contrairement aux marchés des actions, où il est possible de déterminer des couples de paramètres en fonction du tenor de l'option et de la *moneyness* pour déduire le prix de l'option cotée. En revanche, le marché des changes dispose de deux moyens communs pour *pricer* des options vanilles :

- une cotation de la volatilité implicite par rapport au delta correspondant (par opposition à une *moneyness*)
- des niveaux de volatilité liés aux positions autour de la parité ou à la parité (*risk reversal*, *strangle and at-the-money* ou *call*, *put and at-the-money* : options qui permettent de situer la volatilité sur l'axe du delta).

Cela montre que les acteurs du marché des changes (FX OTC) utilisent le delta pour représenter la *moneyness* d'une option, ce qui est à opposer à un prix d'exercice classique. Les options du type *risk reversal* et *strangle* sont attribuées à un delta de 0.25 par exemple. Étant donné les deux types de données, nous sommes confrontés à la tâche de transformer ces cours en prix d'options standard vanille. La procédure permettant de créer un *smile* de volatilité avec trois niveaux de delta (à la monnaie, *reversal risk/call* et *strangle/put*) nécessite une procédure de calibrage discutée par Reiswich et Wystup [2009], Castagna [2010] et Clark [2011]. Nous nous concentrons sur la calibration de la nappe de volatilité avec des options vanilles pures, à savoir les call et les put. Notons que le delta ne fait en aucun cas référence au delta standard de Black – Scholes et la convention à la monnaie ne correspond généralement pas à la zone à la monnaie.

Notions et notations

Taux FX spot, options spot et forward

Le taux de change spot, noté $S_t = FOREIGN - DOMESTIC$, représente le nombre d'unités de devise nationale nécessaires pour acheter une unité de devise étrangère au moment t . Par exemple, EUR-USD = 1.3900 signifie qu'un euro vaut 1.3900 USD. Dans ce cas, EUR est la devise étrangère et USD est la devise nationale. Le cours EUR-USD = 1.3900 équivaut à un USD-EUR de 0.7194. Un notionnel de N unités de devise est égal à NS_t de monnaie nationale (voir également Wystup [2006]). «Domestique» ne fait référence à aucune région géographique, mais représente simplement un aspect particulier de la transaction. La monnaie nationale est également désignée par le numéraire et la devise étrangère par la devise de base (voir Castagna [2010]).

Un contrat de couverture populaire et liquide pour un trésorier d'entreprise est le contrat à terme ferme (*outright forward contract*). Ce contrat est négocié au moment t à un coût nul et donne lieu à un échange de notionnels au moment t au taux à terme prédéterminé $f(t, T)$. Au moment t , le montant notionnel étranger N est échangé contre un montant de $N \cdot f(t, T)$ unités de monnaie nationale. Par exemple, 1 000 000 EUR peuvent être échangés contre 1 390 000 USD dans l'hypothèse d'un taux à terme ferme de 1.3900 EUR-USD. Le forward est lié au taux de change spot via la parité du taux d'intérêt spot tel que :

$$f(t, T) = S_t e^{(r_d - r_f)(T-t)}$$

Avec :

- r_f est le taux d'intérêt étranger (composition continue)
- r_d est le taux d'intérêt national (composition continue)

Au début, un contrat à terme ferme a une valeur de zéro. Par la suite, lorsque les taux de change et/ou les taux d'intérêt changent, la valeur du contrat à terme n'est plus nulle, mais vaut pour un taux de change prédéterminé K :

$$v_f(t, T) = e^{r_d(T-t)}(f(t, T) - K) = S_t e^{r_f(T-t)} - K e^{r_d(T-t)}$$

Il s'agit de la valeur du contrat à terme en unités de monnaie nationale, indiquée sur le marché au moment t . Comme indiqué précédemment, le fait d'ajuster à $K = f(t, T)$ donne un contrat sans coût.

Sur les marchés des changes, les options sont généralement réglées physiquement (c'est-à-dire que l'acheteur d'un call vanille EUR-USD reçoit un montant notionnel N en EUR à l'échéance et paie $N \times K$ USD, K étant le strike). La valeur d'un tel contrat vanille est calculée à l'aide de la formule standard de Black - Scholes :

$$v(S_t, K, \sigma, \phi) = \phi e^{r_d(T-t)} \left(f(t, T) N(\phi d_+) - K N(\phi d_-) \right)$$

Avec :

- $d_{\pm} = \frac{\ln\left(\frac{f(t, T)}{K}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$
- K est le strike de l'option sur taux de change
- σ la volatilité de l'option sur taux de change
- $\phi = +1$ pour un call, $\phi = -1$ pour un put
- $N(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale

Nous pouvons supprimer certaines des variables de la fonction v en fonction du contexte. La formule renvoie une valeur v en monnaie nationale. Une valeur équivalente de la position en devise étrangère est $\frac{v}{S_t}$. La devise comptable (la devise dans laquelle la valeur de l'option est mesurée) est également appelée prime de devise/change (*premium currency*). Le notionnel est le montant en devise que le détenteur d'une option a le droit d'échanger. La formule de valeur s'applique par défaut à une unité de notional étrangère (correspondant à une action d'un sous-jacent action sur les marchés des actions), d'une valeur exprimée en unités de monnaie nationale. Voici un exemple illustrant ces termes. Prenons un call sur le taux de change EUR-USD avec un taux de change spot $S_t = 1.3900$, un strike de $K = 1.3500$ et un prix de 0.1024 USD. Si un montant notionnel de $1\,000\,000$ EUR est spécifié, le détenteur de l'option recevra $1\,000\,000$ EUR et paiera $1\,350\,000$ USD à l'échéance et le prix actuel est $102\,000$ USD ($73\,669$ EUR).

Les conventions des quotations sur prime étrangère

Sur les marchés des changes, il existe différentes manières d'exprimer une prime d'option lorsque la transaction est conclue. Nous suivons Wystup [2006], Castagna [2010] et Clark [2011] et nous expliquons les idées communes en utilisant les exemples fournis dans la section précédente. La convention de prime la plus courante est la notation standard de Black – Scholes décrite précédemment. La prime correspondante est appelée prix du taux de change étranger/nationale (*foreign/domestic price*) et sera noté v^{f-d} . Alternativement, le prix est appelé prix en pips national après la multiplication d'un facteur dépendant de la devise (tel que $10\,000$ pour EUR-USD). Dans notre exemple, nous avons $v^{EUR-USD} = 0.1024$ USD. Si un notionnel de N_f unités de devise étrangère est spécifié, le montant réel payé/reçu sera $N_f * v^{f-d}$. Dans l'exemple précédent, ce montant est $102\,400$ USD. Le prix correspondant en pips national est $v^{EUR-USD} \times 10\,000 = 1024$ pips USD.

L'échange d'une unité de devise étrangère contre K unités de nationale peut être analysé du point de vue de l'investisseur étranger. Dans notre exemple, c'est le parti qui paie les unités en monnaie étrangère et reçoit les unités nationales. La prime $\frac{v^{f-d}}{S_t}$ pour l'investisseur étranger ne sera pas notée v^{d-f} en raison d'une incohérence par ailleurs incorporée, comme cela sera expliqué ultérieurement. Le cas classique est que l'investisseur national reçoit une unité de devise étrangère et en paye K en monnaie nationale. Cela montre que l'investisseur étranger reçoit K unités de l'autre monnaie, pas une. Par souci de cohérence, la notation v^{x-f} est utilisée pour une option avec une prime en devise x et un notionnel de devise X . Pour obtenir v^{d-f} , nous devons ajuster le taux de change appliqué au montant de manière à ce que l'investisseur étranger reçoive une unité de devise nationale, pas K . Cela correspond à un paiement de $1/K$ unité de devise étrangère au lieu d'une, ce qui revient à ajuster le notionnel étranger ($1/K$ au lieu d'une). Étant donné que la partie nationale reçoit $1/K$ d'une unité en devise étrangère, le montant national équivalent payé est égal à $(1/K) \times K = 1$. Cela montre qu'après l'ajustement, l'investisseur étranger reçoit une unité en monnaie nationale comme il le souhaite. Le prix v^{d-f} peut ensuite être exprimé en réinitialisant le notionnel étranger à $N_f = 1/K$ et en convertissant la prime en devise étrangère. Cela donne :

$$v^{d-f} = \frac{1}{K} \frac{v^{f-d}}{S_t}$$

Le prix est appelé prix national/étranger (ou prix en pips étrangers après multiplication

avec un facteur approprié) : dans notre exemple, nous calculons :

$$v^{USD-EUR} = \frac{0.1024}{1.3500 * 1.3900} = 0.054570$$

Ce *pricing* améliore la spécification du notionnel dans la devise nationale au lieu de la devise étrangère. Le montant total de la prime en unités de devise étrangère sera $v^{d-f} * N_d$, N_d étant la valeur nominale en unités de devise nationale. Par exemple, on peut spécifier un notionnel de 1 000 000 USD de telle sorte que la prime en devise étrangère soit de 54 570 EUR.

Enfin, on peut ignorer l'ajustement du notionnel et simplement exprimer le prix v^{f-d} en unités de devise étrangère. Le prix v^{f-d}/S_t est appelé le prix en pourcentage en devise étrangère. Nous définissons :

$$v^{f\%} = \frac{v^{f-d}}{S_t}$$

Dans notre exemple, le prix en pourcentage en devise étrangère est de 0.073669 EUR. C'est la méthode standard utilisée par certaines options vanilles et options à barrière sur le marché interbancaire (voir Castagna [2010]). La prime $v^{f\%}$ est exprimée en unités de devise étrangère pour une option dans laquelle le détenteur reçoit $1 = 100\%$ d'une unité de devise étrangère. Cela montre que $v^{f\%}$ est un nombre/pourcentage par rapport au notionnel dans la devise étrangère : un nombre de 0.073669 EUR peut alors être interprété en ce sens que la prime d'option en unités de devise étrangère représente 7.3669% du notionnel en devise étrangère. Cette interprétation est toujours valable si le notionnel est changé en un nombre quelconque. Une fois ce nombre connu, il est facile de multiplier le facteur par un notionnel étranger pour recevoir la prime totale en devise étrangère.

Alternativement, la même chose peut être obtenue avec v^{d-f} . Cette prime doit être multipliée par S_t pour calculer le prix de cette option dans la devise nationale. Par conséquent, on peut spécifier un prix en pourcentage en monnaie nationale comme $v^{d-f} \times S_t$. Nous définissons :

$$v^{d\%} = v^{d-f} S_t = \frac{v^{f-d}}{K}$$

Dans notre exemple, cela donne 0.075852 USD. La cotation en pourcentage de la monnaie nationale est la méthode standard de cotation des primes pour les options exotiques (one-touch, double-no-touch) où les gains sont exprimés en unités de monnaie nationale (voir Castagna [2010]). Les conventions de prime pour les couples de devises sélectionnées sont fournies dans le tableau ci-après :

Couple de devises	Convention
EUR-USD	$v^{EUR-USD}$ Pips
EUR-CAD	$v^{EUR-CAD}$ Pips
EUR-CHF	$v^{EUR\%}$
EUR-GBP	$v^{EUR-GBP}$ Pips
EUR-JPY	$v^{EUR\%}$
EUR-ZAR	$v^{EUR\%}$
GBP-CHF	$v^{GBP\%}$
GBP-JPY	$v^{GBP\%}$
GBP-USD	$v^{GBP-USD}$ Pips
USD-CAD	$v^{USD\%}$
USD-CHF	$v^{USD\%}$
USD-JPY	$v^{USD\%}$
USD-ZAR	$v^{USD\%}$

TABLE 5.4 – Conventions des primes de change pour des couples de devises sélectionnés

Par exemple, le taux de change spot USD-JPY est traditionnellement quoté en JPY comme devise nationale, car un nombre tel que 87.00 USD-JPY est plus facile à coter que 0.01149 JPY-USD, la prime sera généralement exprimée en USD. La norme du marché est de quoter dans la monnaie la plus communément échangée en tant que prime de change. Pratiquement tous les couples de devises impliquant l'USD exprimeront l'USD en tant que prime de change (Clark [2011]). De même, les contrats portant sur un couple de devises incluant l'EUR, et non l'USD, seront exprimés en EUR. Une hiérarchie de base des devises premium est donnée telle que (Clark) :

$$\begin{aligned}
 &USD \succ EUR \succ GBP \succ AUD \succ NZD \succ CAD \succ CHF \\
 &\succ NOK, SEK, DKK \\
 &\succ CZK, PLN, TRY, MXN \succ JPY \succ \dots
 \end{aligned}$$

Pour résumer, il y a toujours deux côtés selon l'accord d'option de change. En fonction des détails de la transaction, l'investisseur peut être intéressé par un notionnel standardisé, en devise étrangère ou nationale. Un investisseur national calcule la prime de change nationale et peut être intéressé par un notionnel étranger ou national. Les conventions de la prime de change correspondantes sont v^{f-d} et $v^{d\%}$, respectivement. L'investisseur étranger exprime la prime dans la devise étrangère et peut également être intéressé par un notionnel national ou étranger de celui-ci. Les conventions de prime de change correspondantes sont respectivement v^{d-f} et $v^{f\%}$.

Convention du delta et de la parité

Types de delta

Le delta d'une option est le pourcentage de la valeur notionnelle étrangère que l'on doit acheter lors de la vente de l'option de maintien d'une position couverte (équivalent à l'achat d'actions). Par exemple, un delta de $0.35 = 35\%$ indique qu'il est nécessaire d'acheter 35% du notionnel étranger pour couvrir une option à court terme. Sur les marchés des changes, nous établissons une distinction entre le delta spot pour une couverture sur le marché spot et le delta à terme pour une couverture sur le marché à terme des changes. De plus, le

delta standard est une quantité exprimée en pourcentage de devise étrangère. La quantité de couverture réelle doit être modifiée si la prime est payée en devise étrangère, ce qui équivaldrait à payer des options d'achat d'actions en actions. Nous appelons ce type de delta le delta ajusté des primes. Dans l'exemple précédent, la prime étrangère/nationale d'une option d'un montant notionnel de 1 000 000 EUR était de 73 669 EUR. Dans l'hypothèse d'une position courte sur option vanille avec un delta de 60%, l'achat de 600 000 EUR est nécessaire pour la couverture. Il s'agit de la couverture spot standard, toutefois, la quantité finale de couverture peut également être de 526 331 EUR, soit la quantité delta réduite de la prime reçue en EUR. Par conséquent, le delta ajusté des primes serait de 52.63%. Dans la suite de cet article, v désignera la prime étrangère/nationale.

Delta non ajusté

Les deltas non ajustés ne tiennent pas compte du paiement de la prime en devise étrangère. Il existe deux types de deltas non ajustés :

- Delta spot : la sensibilité standard de l'option vanille par rapport au taux spot S_t est donnée par :

$$\Delta_S(K, \sigma, \phi) = \frac{\partial v}{\partial S} = v_S = \phi e^{-r_f(T-t)} N(\phi d_+)$$

et la relation de parité delta call-put par :

$$\Delta_S(K, \sigma, +1) - \Delta_S(K, \sigma, -1) = e^{-r_f(T-t)}$$

Ce delta est également appelé le delta spot pips, ce qui reflète le fait qu'une option est couverte en utilisant la cotation nationale en pips (ou étrangère/nationale). Sur les marchés des actions, on achèterait des unités Δ_S de l'action pour couvrir une position courte sur option vanille. Sur les marchés des changes, cela revient à acheter Δ_S fois le notionnel étranger N_f . Ceci équivaut à la vente de $\Delta_S * N_f * S_t$ unités de monnaie nationale. Notons que la valeur absolue de delta est un nombre compris entre zéro et un facteur d'actualisation. Par conséquent, 50% n'est pas la valeur centrale de la plage de delta.

- Delta forward : une alternative à la couverture spot est une couverture avec un contrat à terme. Le nombre de contrats à terme que l'on achèterait dans ce cas diffère du nombre d'unités dans une couverture spot. Le montant de la couverture à terme est donné par :

$$\Delta_f(K, \sigma, \phi) = \frac{\partial v}{\partial v_f} = \frac{\partial v}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial v_f} = \frac{\partial v}{\partial S} \left(\frac{\partial v_f}{\partial S} \right)^{-1} = \phi N(\phi d_+)$$

et la relation de parité delta call-put par :

$$\Delta_f(K, \sigma, +1) - \Delta_f(K, \sigma, -1) = 100\%$$

Dans la couverture, on achèterait des contrats à terme $\Delta_f * N_f$ pour couvrir à terme une position courte sur option vanille. Le delta forward est souvent utilisé dans les matrices de *smile* de volatilités des options FX car le delta d'un call et la valeur absolue du delta d'un put correspondant s'ajoutent à 100% (c'est-à-dire qu'un call

à 25-delta doit avoir la même volatilité qu'un put à 75-delta). Cette symétrie ne fonctionne que pour les delta forward. Pour les delta spot, le facteur d'actualisation avec le taux d'intérêt étranger doit être connu pour pouvoir convertir un delta call en delta put. Si on observe un delta de 100 dans un *smile*, on peut en conclure que les données correspondent à un delta forward.

Delta ajusté (de la prime de devise étrangère)

Les delta ajustés des primes sont les équivalents des delta de la sous-section précédente, mais dans ce cas, le paiement de la prime en devise étrangère est pris en compte :

- Delta spot ajusté de la prime : le delta spot ajusté en fonction de la prime prend en considération la correction induite par le paiement de la prime en devise étrangère, qui correspond au montant par lequel la couverture du delta en devise étrangère doit être corrigée. Le delta peut être représenté comme :

$$\Delta_{S,pa} = \Delta_S - \frac{v}{S_t} = \Delta_S - v^{f\%}$$

avec Δ_S étant le delta spot. Dans ce scénario de couverture, l'investisseur national achèterait $(\Delta_S - \frac{v}{S_t})$ unités en devise étrangère pour couvrir une position courte vanille (le notionnel peut être appliqué facilement). Le nombre équivalent d'unités en monnaie nationale à vendre est $(S_t \Delta_S - v)$. Ce delta a un équivalent d'un point de vue étranger. Considérons à nouveau la cotation en prime étrangère, qui est

$$v^{f\%} = \frac{v^{f-d}}{S_t}$$

Supposons comme précédemment que l'investisseur national a vendu la position et que l'investisseur étranger est l'acheteur. L'investisseur national marque sa position sur le marché en unités monétaires nationales, mais l'investisseur étranger valorise sa position en unités de devise étrangère, qui est $v^{f\%}$. Le facteur de risque spot pour l'investisseur étranger est $1/S_t$, où S_t représente le taux de change FOREIGN-DOMESTIC. L'investisseur étranger dispose d'un delta d'option positif et doit donc vendre des unités en monnaie nationale à couvrir. Les montants correspondants peuvent être calculés comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^{f\%}}{\partial \frac{1}{S_t}} &= \frac{\partial \frac{v}{S_t}}{\partial \frac{1}{S_t}} = \frac{\partial \frac{v}{S_t}}{\partial S_t} \frac{\partial S_t}{\partial \frac{1}{S_t}} = \frac{S_t \Delta_S - v}{S_t^2} \left(\frac{\partial \frac{1}{S_t}}{\partial S_t} \right)^{-1} = \frac{S_t \Delta_S - v}{S_t^2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right)^{-1} \\ &= -(S_t \Delta_S - v) \text{ DOMESTIC à vendre} \\ &= S_t \Delta_S - v \text{ DOMESTIC à acheter} \\ &= \Delta_S - \frac{v}{S_t} \text{ FOREIGN à vendre} \end{aligned}$$

Ce calcul montre que l'investisseur étranger doit vendre $\Delta_S - \frac{v}{S}$ unités en monnaie étrangère, qui correspondent exactement au montant que l'investisseur national doit acheter après ajustement du delta de la prime. Nous trouvons :

$$\Delta_{S,pa}(K, \sigma, \phi) = \phi e^{-r_f(T-t)} \frac{K}{f} N(\phi d_-)$$

et la relation de parité delta call-put par :

$$\Delta_{S,pa}(K, \sigma, +1) - \Delta_{S,pa}(K, \sigma, -1) = e^{-r_f(T-t)} \frac{K}{f}$$

Pour le delta call ajusté en fonction des primes, la relation strike contre delta n'est pas monotone : pour un delta donné, il peut exister plusieurs strike correspondants.

- Delta forward ajusté de la prime : comme dans le cas d'un delta spot, le paiement d'une prime en monnaie étrangère entraîne un ajustement du delta forward. La quantité de couverture résultante est donnée par :

$$\Delta_{f,pa}(K, \sigma, \phi) = \phi \frac{K}{f} N(\phi d_-)$$

et la relation de parité delta call-put par :

$$\Delta_{f,pa}(K, \sigma, +1) - \Delta_{f,pa}(K, \sigma, -1) = \frac{K}{f}$$

Notons à nouveau que le delta call ajusté de la prime n'est pas une fonction monotone du strike.

Conventions du Delta pour les couples de devises

Cette sous-section est basée sur le résumé [2011] de Clark des conventions de marché des changes en vigueur. Si une volatilité implicite de x% EUR/USD sur un call de tenor 1 mois est mappée à un delta de 0.25, la question se pose de savoir laquelle des quatre définitions possibles de delta s'applique. La réponse dépend de la stratégie de couverture choisie et de la devise de référence de l'option. Comme le montre le tableau précédent, la prime de change pour certains couples de devises ne sera pas un pourcentage national, mais étranger. Si la prime d'option est exprimée en unités monétaires nationales, le delta spot est utilisé. En cas de cotation en unités de devise étrangère, un ajustement de prime de change est appliqué. Par exemple, le delta d'une option USD-JPY sera toujours ajusté des primes de change. Le tableau suivant donne les conventions utilisées :

Couple de devises	Prime de change	Delta
EUR-USD	USD	Standard
USD-JPY	USD	Ajusté
EUR-JPY	EUR	Ajusté
USD-CHF	USD	Ajusté
EUR-CHF	EUR	Ajusté
GBP-USD	USD	Standard
EUR-GBP	EUR	Ajusté
AUD-USD	USD	Standard
AUD-JPY	AUD	Ajusté
USD-CAD	USD	Ajusté
USD-BRL	USD	Ajusté
USD-MXN	USD	Ajusté

TABLE 5.5 – Couples de devises sélectionnés et prime de change par défaut déterminant le type de delta

La question est de savoir quel type de delta doit être utilisé. En règle générale, les couvertures forward sont populaires pour capturer le risque de taux d'intérêt en plus du risque spot. Ainsi, naturellement, les couvertures forward se présentent pour les options à long terme ou les couples de devises qui présentent une grande différence de taux d'intérêt (ceux des pays émergents). Dans ce cas, le delta forward standard ou sa version ajustée pour la prime de change est utilisé. Par exemple, par défaut, pour les monnaies des marchés émergents, le delta forward est utilisé, comme pour les options comportant les devises USD, EUR, JPY, GBP, AUD, NZD, CAD, CHF, NOK, SEK ou DKK avec des échéances supérieures à un an. Avec des échéances inférieures à un an, les delta spot sont utilisés pour ces devises. Par exemple, le NZD-JPY utilise des delta spot pour les échéances inférieures à un an et des delta forward pour les échéances supérieures à un an.

Dernière remarque très importante : Clark [2011] note que la cotation avec le delta forward est devenue de plus en plus populaire pour tous les couples de devises après la récente crise du resserrement du crédit (2007-2008). La raison en est qu'il est devenu difficile pour les traders de s'entendre sur le facteur d'actualisation, qui n'est pas présent dans le delta forward. Cela peut être attribué aux difficultés générales liées à la construction cohérente d'une courbe de rendement post-crise du crédit (voir Ametrano et Bianchetti [2009], Chibane et Sheldon [2009] et Fujii, Shimada et Takahashi [2010]).

Définition de la parité (at-the-money)

Définir la parité n'est pas évident lorsqu'on étudie les options FX. On peut penser à :

- ATM spot $K = S_t$
- ATM forward $K = f$
- ATM en valeur absolue - K neutre, tel que prix call = prix put
- ATM en delta - K neutre, tel que delta call = - delta put

Le spot ATM (parité spot) est souvent utilisé dans les manuels scolaires ou sur les feuilles de calcul pour les investisseurs particuliers, car la majorité des participants du marché le connaît bien. Quant à l'ATM forward, il tient compte du fait que l'anticipation du taux sans-risque de l'ATM future est le forward, ce qui est un moyen naturel pour spécifier le point médian de la distribution sans risque. La valeur neutre (neutral-value) de l'ATM est équivalente à l'ATM forward en raison de la parité call-put,

$$v(S_t, K, \sigma, 1) - v(S_t, K, \sigma, -1) = S_t e^{-r_f(T-t)} - K e^{-r_d(T-t)} = 0$$

$$\Leftrightarrow K = S_t \frac{e^{-r_f(T-t)}}{e^{-r_d(T-t)}} = f$$

La notion de ATM Δ -neutre (parité delta neutre) a des sous-catégories en fonction de la convention du delta utilisée. Le choix du strike dans ce sens garantit qu'un straddle avec ce strike a une exposition spot nulle. Le principal risque résiduel est le risque du vega. Par conséquent, un straddle delta-neutre est une position d'option qui répond aux besoins des traders qui couvrent leur portefeuille en vega (vega-hedging). Cette convention ATM est considérée comme la notion ATM par défaut pour les options FX à court terme. Par exemple, le strike delta-neutre spot est calculé comme suit :

$$\Delta_S(K, \sigma, 1) = -\Delta_S(K, \sigma, -1) \Leftrightarrow e^{-r_f(T-t)} N(d_+) = e^{-r_d(T-t)} N(-d_+) \Leftrightarrow d_+ = 0$$

La dernière équation peut être résolue pour K ,

$$d_+ = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{f}{K}\right) = -\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \Leftrightarrow K = fe^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$$

Notons que le même résultat peut être obtenu en utilisant des delta forward. Par exemple, si l'on observe une volatilité implicite de 10%, il est nécessaire de trouver à quel type de monnaie correspond cette volatilité. Une quotation delta-neutre spot implique un strike de

$$fe^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$$

Avec une volatilité de 10%, un tenor de 6 mois et un forward de 1.21 USD entraîneraient

$$K = 1.21e^{\frac{1}{2}0.10^20.5} = 1.2130$$

comme strike correspondant. Le couple strike-volatilité (1.2130, 0.10) peut ensuite être transféré sous la forme d'un input dans le *smile* de volatilité dans l'espace de strike. Nous résumons les différentes définitions «à la monnaie» et les relations entre toutes les quantités pertinentes dans le tableau suivant :

Delta Type	ATM Δ -Neutre K	ATM Fwd K	ATM Δ -Neutre Delta	ATM Fwd Delta
Delta Spot	$fe^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$	f	$\frac{1}{2}\phi e^{-r_f(T-t)}$	$\phi e^{-r_f(T-t)} N(\phi\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t})$
Delta Forward	$fe^{\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$	f	$\frac{1}{2}\phi$	$\phi N(\phi\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t})$
Delta Spot p.a.	$fe^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$	f	$\frac{1}{2}\phi e^{-r_f(T-t)} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$	$\phi e^{-r_f(T-t)} N(-\phi\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t})$
Delta Forward p.a.	$fe^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$	f	$\frac{1}{2}\phi e^{-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$	$\phi N(-\phi\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t})$

TABLE 5.6 – Valeurs strike à la monnaie et delta pour différentes conventions de delta

Encore une fois, il est conseillé de demander au fournisseur de données du marché le type de delta «à la monnaie» associé à la volatilité qui est utilisé. Un delta à la monnaie de 50 risque fort de faire partie d'un *smile* delta forward.

Conversion Delta-Strike

De nombreux clients du côté acheteur reçoivent des couples de volatilité implicite-delta de leur fournisseur de données de marché. La figure suivante présente un échantillon représentatif du marché d'une matrice de volatilités implicites du FOREX EUR-USD :

	5D.P	10D.P	15D.P	25D.P	35D.P	ATM	35D.C	25D.C	15D.C	10D.C	5D.C
1W	8.151%	7.960%	7.822%	7.595%	7.410%	7.222%	7.145%	7.145%	7.172%	7.200%	7.254%
2W	7.735%	7.539%	7.399%	7.166%	6.978%	6.788%	6.713%	6.709%	6.731%	6.756%	6.810%
3W	7.773%	7.559%	7.398%	7.140%	6.941%	6.740%	6.654%	6.650%	6.688%	6.726%	6.792%
1M	8.019%	7.775%	7.595%	7.316%	7.108%	6.898%	6.798%	6.784%	6.815%	6.850%	6.921%
2M	8.360%	8.090%	7.885%	7.561%	7.305%	7.045%	6.920%	6.899%	6.920%	6.955%	7.020%
3M	8.835%	8.481%	8.212%	7.807%	7.519%	7.232%	7.091%	7.067%	7.117%	7.184%	7.290%
4M	8.973%	8.566%	8.266%	7.818%	7.504%	7.200%	7.056%	7.043%	7.114%	7.194%	7.333%
6M	9.304%	8.814%	8.445%	7.906%	7.540%	7.203%	7.055%	7.059%	7.175%	7.296%	7.491%
9M	9.597%	9.055%	8.644%	8.045%	7.641%	7.280%	7.129%	7.145%	7.291%	7.440%	7.672%
1Y	9.871%	9.260%	8.804%	8.149%	7.725%	7.350%	7.195%	7.216%	7.396%	7.580%	7.869%
18M	10.033%	9.423%	8.970%	8.334%	7.921%	7.568%	7.434%	7.476%	7.680%	7.878%	8.188%
2Y	10.210%	9.570%	9.099%	8.448%	8.039%	7.693%	7.571%	7.628%	7.861%	8.090%	8.440%
3Y	10.563%	9.893%	9.403%	8.748%	8.354%	8.033%	7.931%	8.008%	8.278%	8.538%	8.923%
4Y	10.813%	10.116%	9.613%	8.961%	8.598%	8.323%	8.268%	8.369%	8.663%	8.934%	9.328%
5Y	10.918%	10.258%	9.784%	9.170%	8.823%	8.565%	8.523%	8.640%	8.971%	9.273%	9.703%
7Y	10.860%	10.210%	9.839%	9.340%	9.038%	8.825%	8.838%	8.990%	9.326%	9.600%	9.995%
10Y	11.191%	10.515%	10.104%	9.570%	9.270%	9.080%	9.110%	9.260%	9.561%	9.795%	10.166%

TABLE 5.7 – Matrice de volatilités implicites des call EUR-USD

Ces données sont généralement le résultat d'un étalonnage et d'une transformation appropriés. Le calibrage est basé sur des données du type dérivé call/put sur taux de change EUR-USD dans notre exemple. Le participant du marché est alors confronté à la tâche de transformer le couple delta-volatilité en couple strike-prix respectant les définitions du marché de change à la monnaie et aux delta spécifiques des devises. Dans cette section, nous décrivons les méthodes qui peuvent être utilisés pour déduire cela. Par exemple, supposons que les volatilités implicites sont indiquées pour plusieurs delta call standard (non-ajusté), tels que

$$0.10, 0.15, \dots, \Delta_{ATM}, \dots, 0.85, 0.90$$

avec les volatilités implicites correspondantes :

$$\sigma_{0.10\Delta}, \sigma_{0.15\Delta}, \dots, \sigma_{\Delta_{ATM}}, \dots, \sigma_{0.85\Delta}, \sigma_{0.90\Delta}$$

Le type de delta pourrait être l'un des quatre delta décrits précédemment (en supposant que la grille se trouve dans le domaine du delta). Les deux demandes typiques concernant les données sont :

- le calcul du strike correspondant à un delta de 0.62
- le calcul de la volatilité implicite correspondant à un strike de 1.4000

La première demande est généralement représentative d'une opération de couverture. Un trader peut avoir un delta restant de -30% qui doit être couvert et demande une volatilité pour un delta de 30% . Compte tenu de la quotation, la transaction peut être clôturée

en calculant le prix d'exercice qui, étant donné la volatilité implicite quoté, permet d'obtenir le delta requis. La deuxième demande est généralement représentative d'une opération côté acheteur, où un trésorier est intéressé par une volatilité implicite concrète pour un strike spécifique.

Le premier cas peut être traité en interpolant le *smile* dans l'espace des delta à l'aide d'une procédure appropriée, telle qu'une interpolation cubique ou à noyau (voir Hakala et Wystup [2002]). Le résultat dans l'exemple est le couple delta-volatilité,

$$(0.62, \sigma_{0.62\Delta})$$

Les deux variables peuvent ensuite être utilisées pour extraire le strike correspondant.

Conversion du couple delta spot-volatilité en strike

La conversion d'un delta spot non ajusté en fonction des primes de change en strike est relativement simple. Avec Δ_S et σ , nous pouvons résoudre directement (voir aussi Wystup [2006]) l'équation :

$$\Delta_S(K, \sigma, \phi) = \frac{\partial v}{\partial S} = v_S = \phi e^{-r_f(T-t)} N(\phi d_+)$$

pour le strike K . Nous obtenons :

$$K = f e^{-\phi N^{-1}(\phi e^{r_f(T-t)} \Delta_S) \sigma \sqrt{T-t} + \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t)}$$

N^{-1} étant l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale.

Conversion du delta forward-volatilité en strike

Un calcul similaire pour le delta forward donne :

$$K = f e^{-\phi N^{-1}(\phi \Delta_f) \sigma \sqrt{T-t} + \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t)}$$

Conversion du couple delta forward ajusté de la prime de change-volatilité en strike

La conversion du delta spot ajusté de la prime de change est analogue à celle décrite dans cette sous-section. Pour un delta forward ajusté de la prime de change, la relation entre delta et strike,

$$\Delta_{f,pa}(K, \sigma, \phi) = \phi \frac{K}{f} N\left(\phi \frac{\ln(\frac{f}{K}) - \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}\right)$$

ne peut pas être résolu pour le strike sous forme fermée. Certaines procédures numériques doivent être utilisées. Ceci est relativement trivial pour le delta put car ce dernier est monotone en strike. Cependant, ce n'est pas le cas pour le delta call ajusté de la prime de change en raison de la non-monotonie, deux strike peuvent être obtenus pour un delta call ajusté de la prime de change donné (par exemple, pour $\Delta_{S,pa} = 0.2$). Une solution courante

à ce problème consiste à rechercher des strike correspondant aux delta situés du côté droit du delta maximum. Brent [2002] a proposé un système de recherche de racine permettant de rechercher $K \in [K_{min}, K_{max}]$ et donnant le delta associé. La limite droite K_{max} peut être choisie comme le strike correspondant au delta non ajusté de la prime de change, car le delta ajusté de la prime de change pour un strike K est toujours inférieur au delta non ajusté correspondant au même strike. Dans notre exemple, si nous recherchons un strike correspondant à un delta de 0.20 ajusté de la prime de change, nous pouvons choisir K_{max} pour qu'elle corresponde à un simple delta de 0.20. Ce strike peut être alors calculée analytiquement à l'aide de l'équation : $K = f e^{-\phi N^{-1}(\phi \Delta_f) \sigma \sqrt{T-t} + \frac{1}{2} \sigma^2 (T-t)}$. Il est facile de voir que le delta ajusté de la prime de change est toujours inférieur à celui non-ajusté. Cela découle de

$$\begin{aligned} \Delta_S(K, \sigma, \phi) - \Delta_{S,pa}(K, \sigma, \phi) &= e^{-r_f(T-t)} \phi N(\phi d_+) - e^{-r_f(T-t)} \phi \frac{K}{f} N(\phi d_-) \geq 0 \\ \Leftrightarrow \phi f N(\phi d_+) - \phi K N(\phi d_-) &\geq 0 \end{aligned}$$

pour le cas delta spot, le cas delta forward est équivalent. En réduisant la dernière inégalité, on obtient la formule de Black – Scholes, qui est toujours positive. Le maximum pour le spot et le forward delta ajusté de la prime de change est donné implicitement par l'équation

$$\sigma \sqrt{T-t} N(d_-) = N'(d_-)$$

On peut résoudre cette équation implicite numériquement pour K_{min} , puis utiliser la méthode de Brent pour rechercher le strike dans $[K_{min}, K_{max}]$, ce qui donne le delta en entrée.

Après avoir présenté quatre façons d'exprimer la prime de l'option FX, nous montrons qu'il en résulte deux définitions différentes du delta : le delta spot et le delta ajusté. Le delta ajusté de la prime de change est spécifique aux devises et n'a pas d'équivalent simple sur les autres marchés. L'ajout du forward comme instrument de couverture supplémentaire donne deux delta supplémentaires. Les définitions de delta sont importantes pour la quotation delta-neutre à la monnaie, en plus des conventions alternatives à la monnaie. Enfin, nous avons décrit des outils permettant de convertir un *smile* delta-volatilité en un *smile* strike-volatilité. Le but de cette section permet de se donner une idée des problèmes de cotation sur les marchés des changes. Parfois, le marché ne respecte pas les conventions fixées ci-dessus et une adaptation doit être mise en place pour être compatible avec le marché.

Dans la prochaine section, nous nous intéressons à la calibration du *smile* de volatilité du taux de change FOREIGN-DOMESTIC (surface de volatilité implicite du taux de change FOREIGN-DOMESTIC).

Calibration de la nappe de volatilité des call/put du FOREX

Contexte de l'étude

Le cadre de l'étude proposée s'inscrit dans la construction d'un GSE « monde réel » répondant à la fois aux problématiques de projections de grandeurs économiques et de *pricing* à horizon court et moyen terme. A ce titre, l'approche de modélisation doit s'intégrer dans la structure du modèle MSIAH-VAR et doit induire une cohérence entre les univers de projection (« monde réel ») et de *pricing* (« risque-neutre »).

La spécification proposée doit respecter une forme économétrique linéaire sur les paramètres, dans la continuité de notre approche inspirée de l'article de Diebold and Li [2006] pour la structure par terme des taux d'intérêts. Cette méthodologie a été privilégiée à celles impliquant une dynamique de facteurs inobservables (modèles à espace d'états). En effet, les facteurs inobservables sont rendus observables en construisant une série chronologique des paramètres économétriques par moindres carrés, permettant de rentrer de manière élégante dans un cadre d'étude de séries temporelles multivariées plus classique.

Dans un souci de cohérence entre les scénarios « monde réel » et « risque-neutre », le cadre de travail proposé est le recalibrage du modèle de valorisation selon les paramètres implicites projetés par le MSIAH-VAR, en l'occurrence la nappe de volatilité implicite. Un modèle MSIAH-VAR répondra à la problématique de *repricing* dans un univers réel où les paramètres implicites sont des séries chronologiques. Le MSIAH-VAR est plus adapté dans le cas de séries chronologiques très volatiles car il induit un changement de régime de volatilité contrairement au VAR où la volatilité est supposée constante au cours du temps. L'indice VSTOXX en est l'illustration parfaite :

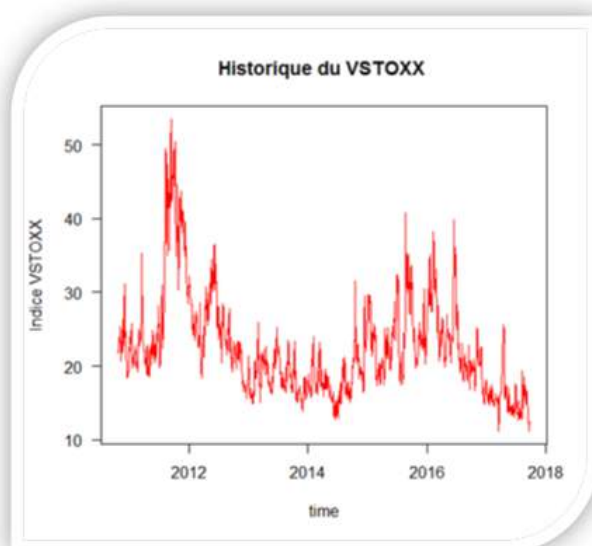


FIGURE 5.84 – Représentation de l'historique du VSTOXX

En outre les techniques traditionnelles de calibrage sur la base de l'information disponible à la date de projection induisent soit une constance des paramètres implicites

(calibrage RN) soit une constance des prix du marché du risque (approche par déflateurs) alors même que la volatilité des évaluations « spots » est pointée du doigt par les assureurs. La question du recalibrage conditionnel apparaît dès lors assez naturelle pour des évaluations de stratégie de couverture action, de détermination de SCR marché liés à des produits structurés de maturité moyen terme.

La présente étude porte donc sur la projection de la nappe de volatilité implicite par une approche économétrique linéaire sur les paramètres et le raisonnement théorique et pratique autour du recalibrage de notre modèle de *pricing*.

Spécification du modèle utilisé sur le FOREX

Dans cette section, nous nous plaçons dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ avec la filtration financière du marché $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et considérons le modèle de Black - Scholes où le taux de change FOREIGN/DOMESTIC $S(t)$ suit un mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = (r_d - r_f)dt + \sigma dW(t)$$

Avec :

- $r_d(t, T)$ représente le taux d'intérêt domestique/national continu.
- $r_f(t, T)$ représente le taux d'intérêt étranger continu.

Par résolution de cette équation différentielle stochastique (EDS), il vient que :

$\forall t \in [0, T]$ et $T > 0$

$$S(t) = S(0)e^{\sigma W(t) + (r_d - r_f - \frac{1}{2}\sigma^2)t}$$

Notons que les taux d'intérêt domestique r_d et étranger r_f sont d'après le modèle utilisé par Bloomberg les taux de dépôt respectifs des devises. Cependant, nous projetons déjà dans le GSE les facteurs de risque qui permettent de reconstruire les STTI des devises comme l'EUR, l'USD, le JPY ou encore le GBP. Ces différents calibrages ont été effectués sur la base des taux swap respectifs de chaque pays, il est donc hors de question d'augmenter le nombre de paramètre à projeter dans le GSE pour déduire ces STT de dépôt sachant qu'elles sont assez proches de celles des STTI. Ainsi, par cohérence avec les données fournies par Bloomberg (surface de volatilité du taux de change des call/put), nous nous devons de repasser par les prix en utilisant ces volatilités ainsi que les taux de dépôt. Ensuite, nous obtenons une surface de prix moitié call, moitié put. Il faudra alors passer par la formule de parité call/put pour obtenir une surface complète de prix de call. Enfin, par stripping en utilisant nos STTI associées aux devises nationale et étrangère ainsi que les strike propre à chaque volatilité, nous pourrons repasser alors aux surfaces de volatilité des call.

Transfert modèle Bloomberg

Nous disposons de l'historique des matrices de volatilité du FOREX pour un couple de devise que nous noterons FOREIGN/DOMESTIC ainsi que des matrices de strike associées. Les données représentées ci-après seront issues du taux de change EUR/USD (la

monnaie EUR est la monnaie étrangère et la monnaie USD est la monnaie domestique). Nous rappelons que les taux utilisés par Bloomberg pour les devises sont des taux de dépôt mais nous préférons par souci de complexité dans le nombre de paramètres à projeter de repasser par nos propre taux issus des taux swap des devises utilisées. Nous exposons les différentes étapes ci-après.

Nous disposons de la surface de volatilité du FOREX associée aux call/put avec comme moneyness les delta call et delta put ainsi que l'ATM (parité) et de la surface de strike associée à chacune des volatilités telles que :

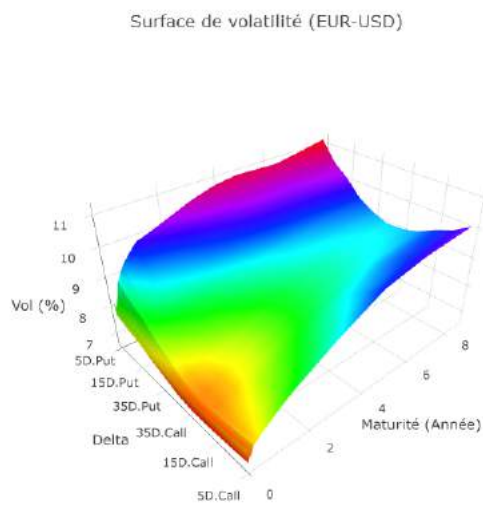


FIGURE 5.85 – Surface de Volatilité Call/Put EUR/USD (25/09/2018)

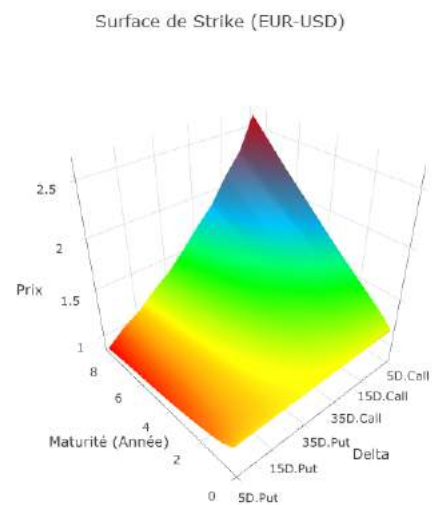


FIGURE 5.86 – Surface de Strike Call/Put EUR/USD (25/09/2018)

Nous repassons de ces surfaces de volatilité Call/Put aux surfaces de prix Call/Put en utilisant les taux de dépôt et les différents strike associés aux volatilités que Bloomberg fournis :

Surface de Prix Call/Put (EUR-USD)

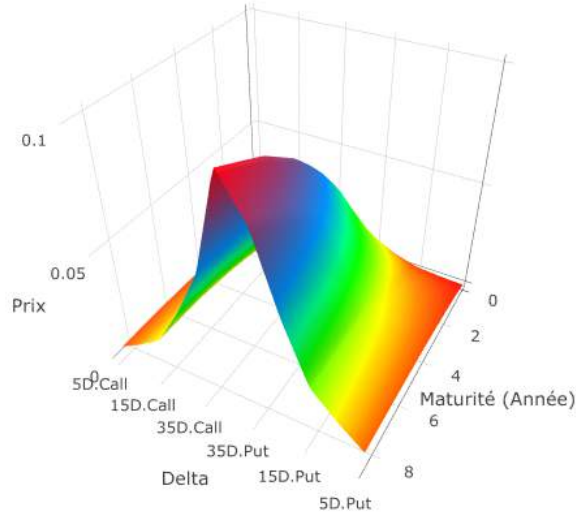


FIGURE 5.87 – Surface de Prix Call/Put EUR/USD (25/09/2018)

Nous utilisons maintenant la formule de parité call-put pour passer d'une surface de prix en delta-call/delta-put en une surface complète de prix de call en fonction de la moneyness :

$$C_{t,T} - P_{t,T} = S_t e^{-r_{f,t,T}(T-t)} - K_{t,T} e^{-r_{d,t,T}(T-t)}$$

Avec :

$$\begin{cases} C_{t,T} = C_{t,T}(K_{t,T}, T, \sigma_{t,T}, S_t, r_{d,t,T}, r_{f,t,T}) = S_t e^{-r_{f,t,T}(T-t)} N(d_1) - K_{t,T} e^{-r_{d,t,T}(T-t)} N(d_2) \\ P_{t,T}(K_{t,T}, T, \sigma_{t,T}, S_t, r_{d,t,T}, r_{f,t,T}) = -S_t e^{-r_{f,t,T}(T-t)} N(-d_1) + K_{t,T} e^{-r_{d,t,T}(T-t)} N(-d_2) \end{cases}$$

Et :

- $d_1 = \frac{1}{\sigma_{t,T} \sqrt{T-t}} [\ln \frac{S_t}{K_{t,T}} + (T-t)(r_{d,t,T} - r_{f,t,T} + \frac{\sigma_{t,T}^2}{2})]$
- $d_2 = \frac{1}{\sigma_{t,T} \sqrt{T-t}} [\ln \frac{S_t}{K_{t,T}} - (T-t)(r_{d,t,T} - r_{f,t,T} - \frac{\sigma_{t,T}^2}{2})]$
- $N(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$, $N(\cdot)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Nous obtenons la surface de prix de call suivante :

Surface de Prix Call (EUR-USD)

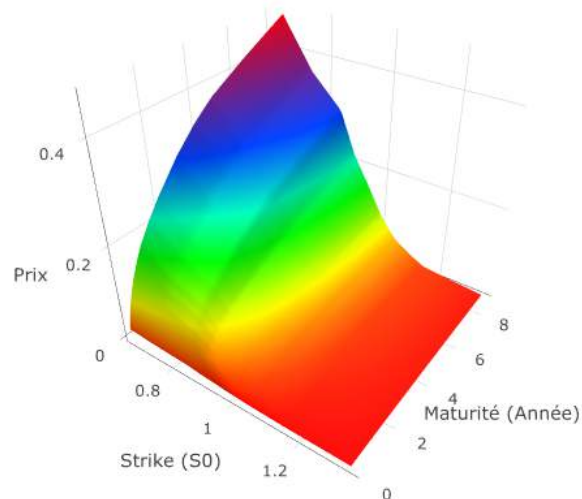


FIGURE 5.88 – Surface de Prix Call EUR/USD (25/09/2018)

On en déduit alors par la formule d'inversion de Black-Scholes les volatilités implicites issues des prix de call en utilisant les taux FOREIGN et DOMESTIC que nous avons calibrés sur les données associées à leurs taux swap respectifs, la surface de volatilité implicite des call donne donc :

Surface de Volatilité Call (EUR-USD)

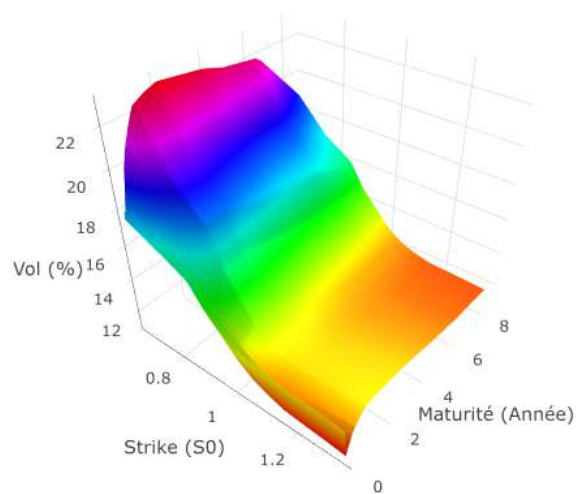


FIGURE 5.89 – Surface de Volatilité Call EUR/USD (25/09/2018)

Maintenant que nous disposons de l'ensemble de l'historique des matrices de volatilités associées au taux de change, il est possible de paramétrer un modèle permettant de reproduire ces surfaces.

Spécification du modèle paramétrique

La spécification du modèle est une adaptation de l'étude menée sur la nappe de volatilité Equity. En effet, l'étude reprend un modèle de Black-Scholes permettant de traiter la partie déterministe de l'équation stochastique tel que la différence entre le taux d'intérêt zéro-coupon et le taux de dividendes est remplacée par la différence entre le taux domestique et celui étranger. De cette façon, nous allons déduire des formules en analogie avec la nappe de volatilité Equity.

Avec T et M , respectivement la maturité restante et la « moneyness » pour laquelle plusieurs définitions apparaissent dans la littérature. Nous retenons l'expression de la « moneyness » M :

$$M = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0[e^{r_f T} + e^{r_d T} - 1]}\right)}{\sqrt{T}}$$

Notons que le " r_f ", " r_d " et " K " de Black & Scholes sont en pratique un $r_{f,T}$, $r_{d,T}$ et un K_T (simplification d'écriture pour la suite).

La transformation logitée sur l'intervalle $]0, \max(\sigma)[$ sur le terme à expliquer telle que $\max(\sigma)$ correspond à la volatilité calibrée observée maximale sur tout l'historique, garantissant la positivité de la volatilité dans un cadre stochastique. Toutefois, la seule hypothèse sur la forme qui est adopté à ce stade est une spécification polynomiale en T et M d'un degré inférieur ou égal à 3 :

$$\begin{cases} \text{logit}^{MAX}(\sigma(M, T)) = \beta_0 + \beta_1 M + \beta_2 T + \beta_3 M^2 + \beta_4 T^2 + \beta_5 MT + \beta_6 M^3 \\ \quad + \beta_7 T^3 + \beta_8 M^2 T + \beta_9 T^2 M + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \end{cases}$$

On en profite pour rappeler la définition de la fonction logit :

$$\text{logit}(p) = \ln\left(\frac{p}{p^* - p}\right), \quad \text{où } p \in]0, p^*[$$

Estimation des paramètres

La principale problématique d'estimation est l'utilisation qui est faite du lissage de la nappe de volatilité. En effet, cette surface implicite n'est pas exploitée de manière directe mais plutôt de façon indirecte par l'intermédiaire de la formule de transfert de Black & Scholes. En effet, in fine, l'objectif est de repasser à une matrice de prix afin de calibrer en « risque-neutre », un modèle de *pricing*.

Nous utiliserons cette métrique pour l'estimation :

$$MSE(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (C_i - C_i(\theta))^2$$

Avec :

- n le nombre de prix d'options qui existent sur le marché.
- C_i les prix des n options sur le marché.
- $C_i(\theta)$ les prix de ces n options calculé à partir du modèle de BS, et qui dépendent d'un ensemble de paramètres θ .
- σ_i la volatilité implicite de Black & Scholes obtenue avec $C_{mkt} = C_{BS}(\sigma_i, K, T)$.
- $\sigma_i(\theta)$ la volatilité implicite de Black & Scholes estimée obtenue avec $C_{BS} = C_{BS}(\hat{\sigma}_i, K, T)$.

Ces métriques sont cohérentes avec les prix des options car elles fournissent des paramètres estimés qui, lorsque utilisés dans le modèle, génèrent des prix d'options très proches de ceux observés sur le marché.

L'idée sous-jacente de bi-objectivité le problème d'optimisation est qu'une erreur absolue d'estimation sur la volatilité n'a pas le même effet sur le prix selon le *strike* et la maturité restante. Toutefois dans le cadre d'un modèle dynamique, une optimisation multi-objective ne peut pas être utilisée puisqu'elle découle sur un panel de solutions entraînant la production d'une fonction d'utilité et par suite une instabilité des paramètres dans le temps (par exemple construire une même série chronologique avec des optimums globaux et locaux).

Par ailleurs, l'estimation OLS classique ne permet pas de prendre en compte le lien entre le prix et la volatilité. Dès lors, la méthode d'estimation mono-objective qui apparaît la plus pertinente est la méthode des moindres carrés pondérés pour une matrice de poids judicieusement choisie. Ajouter à cela, l'estimateur des moindres carrés pondérés est explicite et garantit également l'homogénéité des minimums (globaux en l'occurrence). Nous avons donc imaginé faire intervenir le vega dans l'estimation :

$$v_{Call} = \frac{\partial C(K, T)}{\partial \sigma}$$

Le vega représente la sensibilité du prix par rapport à la volatilité, il est donc le plus élevé lorsque l'erreur de prédiction sur la volatilité engendre l'erreur la plus forte sur le prix du dérivé action. Cet indicateur de gestion financière a été choisi également pour son expression mathématique explicite découlant du modèle d'évaluation de Black & Scholes :

$$v_{Call} = S_0 e^{-r_f T} \sqrt{T} N'(d_1)$$

Avec,

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Graphiquement, le vega est plus élevé sur les *call* ATM et en particulier sur les maturités élevées :

Surface de Vega

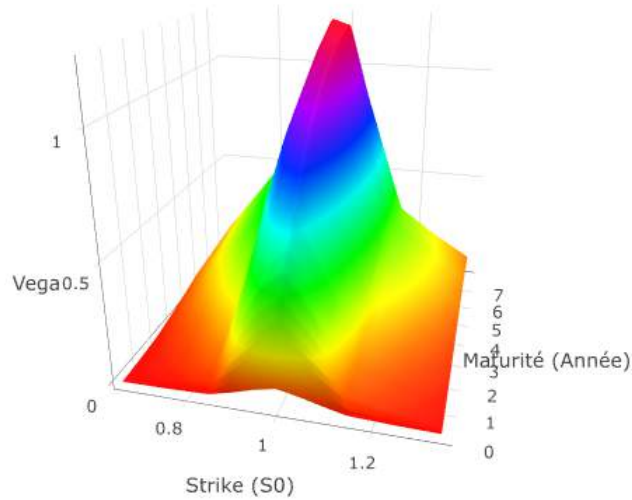


FIGURE 5.90 – Surface du vega en fonction de la maturité et du prix d'exercice

Le raisonnement précédent induit que la fonction objectif de calibrage doit tendre à réduire l'erreur d'estimation sur les options ATM. Ceci est d'ailleurs pertinent économiquement car ces options sont liquides sur le marché contrairement aux options OTM ou ITM dont les données proviennent dans la grande majorité des cas d'une extrapolation théorique (« Mark to Model »).

Aussi, la fonction de calibrage avec la pondération au moyen des vega doit prendre en considération la transformation appliquée aux volatilités pour ne pas introduire de biais dans les estimations. La pondération sera donc de la forme suivante avec P le prix de l'option et f la fonction inverse du logit appliquée au prix de l'option :

$$\begin{aligned}
 f(P) = \frac{1}{1 + e^{-P}} &\Rightarrow \frac{\partial f(P)}{\partial \sigma} = \frac{\partial P}{\partial \sigma} \frac{e^{-P}}{(1 + e^{-P})^2} \\
 &= v \left(\frac{1}{1 + e^{-\ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_{max} - \sigma}\right)}} \right) \frac{e^{-\ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_{max} - \sigma}\right)}}{\left(1 + e^{-\ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_{max} - \sigma}\right)}\right)^2} \\
 &= v(\sigma) \frac{e^{-\ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_{max} - \sigma}\right)}}{\left(1 + e^{-\ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_{max} - \sigma}\right)}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Ainsi, la transformation de vega utilisée dans la pondération vaut :

$$v = v_{Call} \frac{e^{-\ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_{max} - \sigma}\right)}}{\left(1 + e^{-\ln\left(\frac{\sigma}{\sigma_{max} - \sigma}\right)}\right)^2}$$

La fonction de calibrage est alors définie comme suit pour rentrer dans le cadre d'estimation des moindres carrés pondérés :

$$F(\beta_0, \dots, \beta_9) = \sum_{i=1}^n \omega_i [\text{logit}(\sigma_i(M_i, T_i, S_0, r_{d_i}, r_{f_i})) - \text{logit}(\sigma_i(M_i, \widehat{T}_i, \widehat{S}_0, r_{d_i}, r_{f_i}))]^2$$

Avec :

$$\omega_i = \frac{v(S_0, M_i, T_i, \sigma_i, r_{d_i}, r_{f_i})}{\sum_{k=1}^n v(S_0, M_k, T_k, \sigma_k, r_{d_k}, r_{f_k})}$$

Pour plus de commodité pour l'expression de l'estimateur des moindres carrés pondérés, réécrivons le modèle linéaire sous forme matricielle :

$$Y = X\beta + U, U \sim \mathcal{N}(0, \sigma I)$$

Avec :

$$Y_{n,1} = \begin{bmatrix} \text{logit}(\sigma_1(M_1, T_1, S_0, r_{d_1}, r_{f_1})) \\ \vdots \\ \text{logit}(\sigma_n(M_n, T_n, S_0, r_{d_n}, r_{f_n})) \end{bmatrix} \quad I_{n,n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \beta_{10,n} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_9 \end{bmatrix}$$

$$X_{n,10} = \begin{bmatrix} 1 & M_1 & T_1 & M_1^2 & T_1^2 & M_1 T_1 & M_1^3 & T_1^3 & M_1^2 T_1 & T_1^2 M_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & M_n & T_n & M_n^2 & T_n^2 & M_n T_n & M_n^3 & T_n^3 & M_n^2 T_n & T_n^2 M_n \end{bmatrix}$$

Introduisons la matrice de poids :

$$W_{n,n} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \omega_n \end{bmatrix}$$

L'estimateur des moindres carrés pondérés (MCP) découle du programme d'optimisation suivant :

$$\text{Min}_{\beta} (Y - X\beta)^T W (Y - X\beta)$$

Et permet d'avoir une expression explicite garantissant l'homogénéité des résultats obtenus (minimums globaux) :

$$\beta_{MCP} = (X^T W X)^{-1} X^T W Y$$

Reconstitution de la série chronologique

Présentation des données Bloomberg

Nous avons à notre disposition une plage de données de fin 2011 à fin 2018, dans laquelle 187 couples (T_i, K_i) sont disponibles :

$$T = [1W \mid 2W \mid 3W \mid 1M \mid 2M \mid 3M \mid 4M \mid 6M \mid 9M \mid 1Y \mid 18M \mid 2Y \mid 3Y \mid 4Y \mid 5Y \mid 7Y \mid 10Y]$$

$$K = [0.65 \mid 0.75 \mid 0.85 \mid 0.90 \mid 0.95 \mid 1.00 \mid 1.05 \mid 1.10 \mid 1.15 \mid 1.25 \mid 1.35]$$

Modèle général

La partie précédente explique la construction des séries chronologiques supposées inobservables (i.e. dans un modèle dynamique à espace d'états), par la méthode des moindres carrés. Cette méthode en deux étapes, repris par DIEBOLD et LI [2006], et permettant de s'acquitter d'une dimension (la fameuse équation de mesure des modèles à espace d'états), donne cette forme à la dynamique de la nappe de volatilité implicite :

$$\begin{cases} \text{logit}^{MAX}(\sigma_{i,t}(M, T)) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}M_{i,t} + \beta_{2,t}T_i + \beta_{3,t}M_{i,t}^2 + \beta_{4,t}T_i^2 + \beta_{5,t}M_{i,t}T_i + \beta_{6,t}M_{i,t}^3 \\ \quad + \beta_{7,t}T_i^3 + \beta_{8,t}M_{i,t}^2T_i + \beta_{9,t}T_i^2M_{i,t} + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \end{cases} \quad (5.76)$$

Pour la présente étude, nous retenons l'expression de la *moneyness* :

$$M_{i,t} = \frac{\ln\left(\frac{K_{t,T_i}}{S_{0,t}[e^{rf,t,T_i}T_i + e^{rd,t,T_i} - 1]}\right)}{\sqrt{T_i}} \quad (5.77)$$

Formalisation de la procédure de calibrage

- Soit $\{E_k\}$, l'ensemble des points sélectionnés pour l'estimation par moindres carrés.
- Soit $\{E\}$, l'ensemble des points à disposition pour l'étude.
- Soit $\{V_i\}$, l'ensemble des variables spécifiant le modèle i.

Fonctions objectifs de calibrage

Les fonctions objectifs de calibrage suivantes sont utilisées à la fois sur la base d'apprentissage et sur la base de test. En effet, le modèle doit être équilibré et performant tant sur la base d'apprentissage que sur la base de test.

$$Moy\ MSE_{i,K} = Moy\ Err_{i,K} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N MSE_{i,t,(\{E_K\},\{V_i\})} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Err_{i,t,(\{E_K\},\{V_i\})}$$

$$Tail\ VaR\ 0.95\ MSE_{i,K} = \mathbb{E}(-MSE | MSE < -VaR_{0.95}(MSE))_{i,K}$$

$$Nb\ Var_i = Card\{V_i\}$$

Avec :

$$Err_{i,t,K} = (100[e^{Y_{t,\{E \setminus E_K\}}} - e^{X_{t,\{V_i\}}\beta_{t,\{E_K\}}}]^T W (100[e^{Y_{t,\{E \setminus E_K\}}} - e^{X_{t,\{V_i\}}\beta_{t,\{E_K\}}}]$$

$$VaR_{0.95}(MSE) = F^{-1}(0.95) = \inf(x : F(x) > 0.95)$$

Indicateurs indicatifs

L'indicateur $Moy\ MSE_{i,K}$ représente la moyenne des MSE soit la moyenne de l'erreur quadratique de prédiction pondérée (par les Vega), sur tous les jeux de données passés de la $i^{ème}$ spécification testée (rappelons qu'il y en a 1023 différentes), pour l'ensemble $\{E_k\}$ des données de calibrage sélectionnées lors du $K^{ième}$ tirage aléatoire.

L'indicateur $Tail\ VaR\ 0.95\ MSE_{i,K}$ représente la Tail VaR qui est une mesure de risque qui décrit la survenance des pertes sous réserve que le seuil soit franchit et il est calculé sur tous les jeux de données passés, de la $i^{ème}$ spécification, pour l'ensemble $\{E_k\}$ des données de calibrage sélectionnées lors du $K^{ième}$ tirage aléatoire. La Tail VaR est pertinente au lieu de la VaR car dans les cas où pour certains pas de temps, le modèle choisi serait moins bon, on aurait un modèle moyen global pour tous les pas de temps. Or, ce n'est pas l'intérêt ici, nous voulons que le modèle soit bon sur tous les pas de temps mais dans le cas où il est moins bon, nous voulons qu'il soit le moins mauvais par rapport à d'autres modèles. Ainsi, la focalisation se fait sur un certain seuil de performance et d'erreur.

Comme dans le cas où un assureur voudrait calculer sa probabilité de faire faillite à partir d'un certain seuil : la Tail VaR donne à la fois une estimation de la probabilité de ruine et étudie également la sévérité des pertes une fois le seuil franchi en tenant compte de la queue de la distribution.

L'indicateur $NbVar_i$ renvoie le nombre de degrés de liberté de la $i^{ème}$ spécification.

En synthèse, les deux premiers indicateurs chacun appliqués sur la base d'apprentissage et sur la base de test (4 indicateurs) ainsi que l'indicateur "Nb Var" sont utilisés pour l'optimisation multi-objectif. Ensuite, en fonction du nombre de variables présents dans les modèles, cela permet d'orienter la décision finale en incarnant respectivement la robustesse statistique et la parcimonie.

Programme d'optimisation multi-objectif

$$(PMO)_K = \begin{cases} \min_{x=(x_1, \dots, x_{10})} F_K(x) = (f_{1,K}(x), \dots, f_{5,K}(x)) \\ x_{j=1, \dots, 10} = \begin{cases} 1 & \text{si selection} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases} \quad (5.78)$$

Choix de modèle EUR-USD

La dominance de pareto ($y \propto x \Leftrightarrow F(x) \leq F(y), \exists i = 1, \dots, 5 \text{ tq } f_i(x) < f_i(y)$), permet d'établir le front 1, trié sur la moyenne des erreurs de prédiction. Cette procédure d'optimisation multi-objectif donne dès lors un ensemble de spécifications possibles (163 dans l'exemple en annexe, issu d'un tirage aléatoire des points à prédire).

Dans l'étude, 10 tirages aléatoires ont été effectués ($K=10$), et les modèles qui ressortent, même très paramétrés ne semblent pas en surapprentissage. Toutefois, dans un souci de parcimonie et de robustesse, l'idéal est un modèle le moins paramétré possible. En effet, dans le cadre de l'intégration du modèle dans le VAR, un nombre limité de paramètres et qui plus est relatif à des régresseurs sans signification économique particulière est fortement conseillé. Par ailleurs, un modèle intégralement significatif est un bon point mais qui peut s'avérer négatif si cela est trop souvent constaté (le pouvoir explicatif est quelque peu saturé et ne prend sans doute pas en compte certaines formes particulières).

Le lecteur trouvera en annexe les tableaux récapitulatifs de l'étude des résultats dans leur intégralité classés par ordre croissant en fonction de la métrique MSE.test (prédiction) : ces tableaux indiquent que les modèles à 7 et 8 paramètres apparaissent systématiquement dans le front 1 des 10 tirages. Objectivement, ces modèles ne peuvent être rejetés que sur des considérations liées à la parcimonie. Les modèles à 5 et 6 paramètres sont intéressants également car moins paramétrés et apparaissant plusieurs fois dans le front 1 (résultats en annexes).

Le jugement d'expert qui prédomine à ce stade (avant intégration dans le MSVAR) est la parcimonie. A ce titre, le modèle retenu est celui à 6 variables pour le taux de change EUR-USD, le modèle ressort pour chacun des 10 tirages aléatoires :

$$\begin{cases} \text{logit}^{MAX}(\sigma_{i,t}(M, T)) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}M_{i,t} + \beta_{2,t}T_i + \beta_{3,t}T_i^2 + \beta_{4,t}M_{i,t}^2 + \beta_{5,t}T_i^3 + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \end{cases} \quad (5.79)$$

Reconstruction des séries chronologiques EUR-USD

La reconstruction des séries chronologiques des régresseurs pour le taux de change EUR-USD est illustrée ci-dessous :

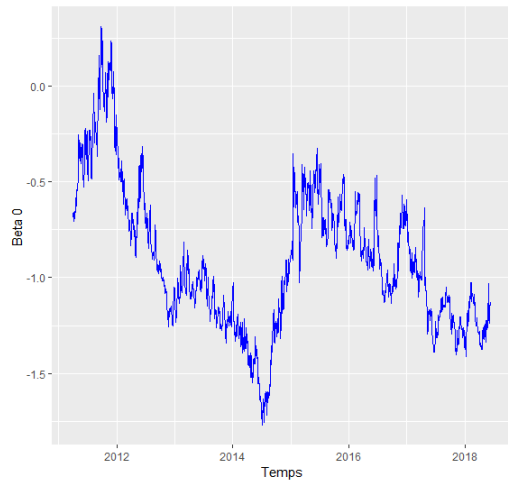


FIGURE 5.91 – Serie chronologie Beta0
Call EUR-USD

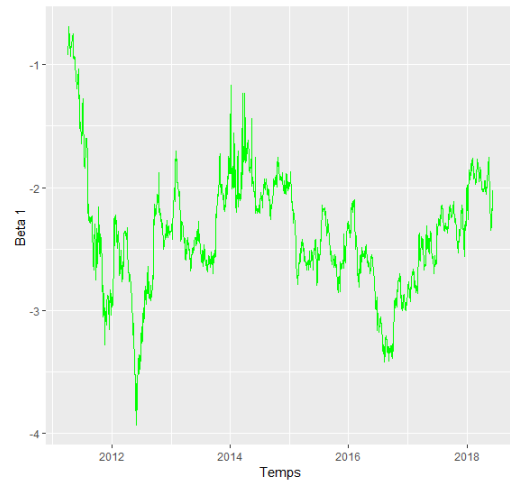


FIGURE 5.92 – Serie chronologie Beta1
Call EUR-USD

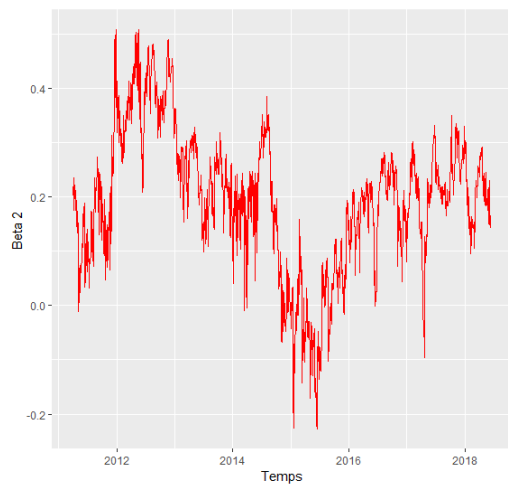


FIGURE 5.93 – Serie chronologie Beta2
Call EUR-USD

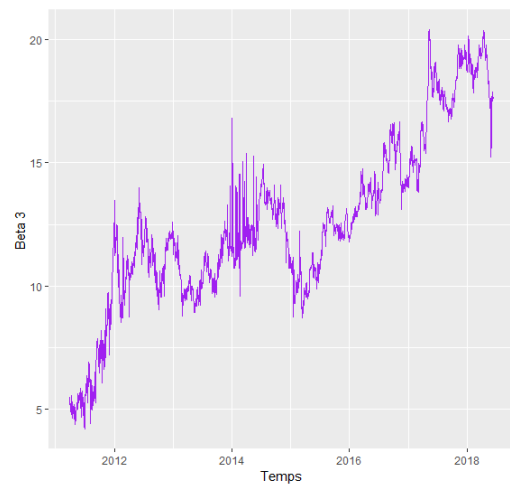


FIGURE 5.94 – Serie chronologie Beta3
Call EUR-USD

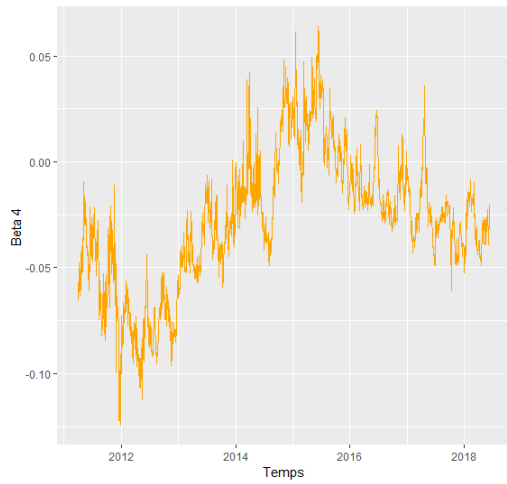


FIGURE 5.95 – Serie chronologie Beta4 Call EUR-USD

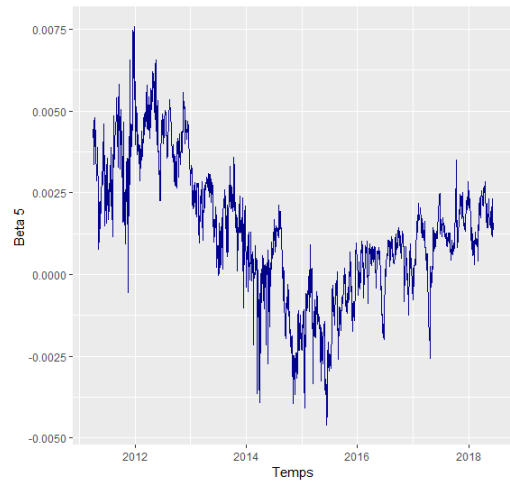


FIGURE 5.96 – Serie chronologie Beta5 Call EUR-USD

Validation du modèle EUR-USD

On obtient alors les surfaces de volatilité et de prix prédites suivantes VS les surfaces de volatilité et de prix observées pour plusieurs dates choisies aléatoirement :

Fitting Surface de Volatilité Call EUR-USD

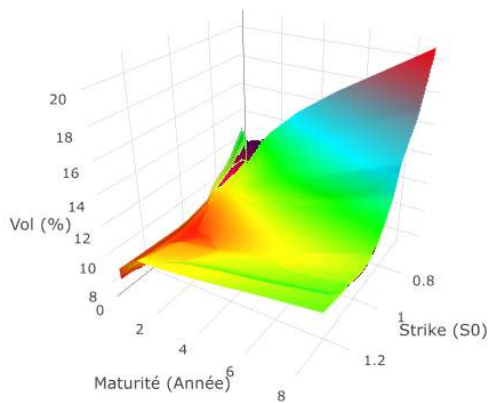


FIGURE 5.97 – Fitting Surface Volatilité Call EUR-USD (22/08/2013)

Fitting Surface de Prix Call EUR-USD

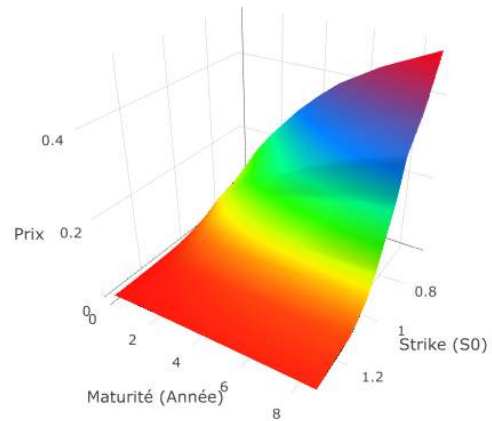


FIGURE 5.98 – Fitting de la surface de Prix des Call EUR-USD (22/08/2013)

Fitting Surface de Volatilité Call EUR-USD

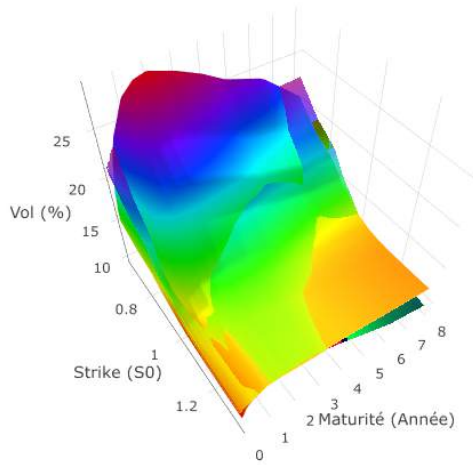


FIGURE 5.99 – Fitting Surface Volatilité Call EUR-USD (23/03/2011)

Fitting Surface de Prix Call EUR-USD

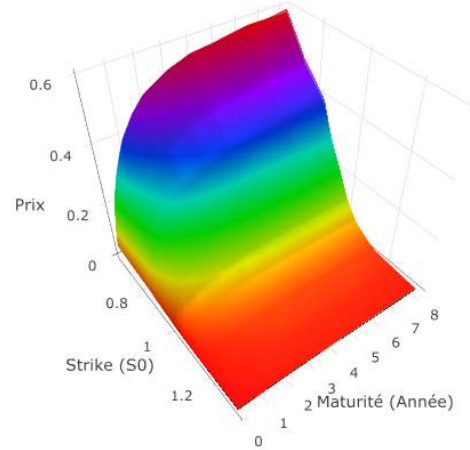


FIGURE 5.100 – Fitting de la surface de Prix des Call EUR-USD (23/03/2011)

Fitting Surface de Volatilité Call EUR-USD

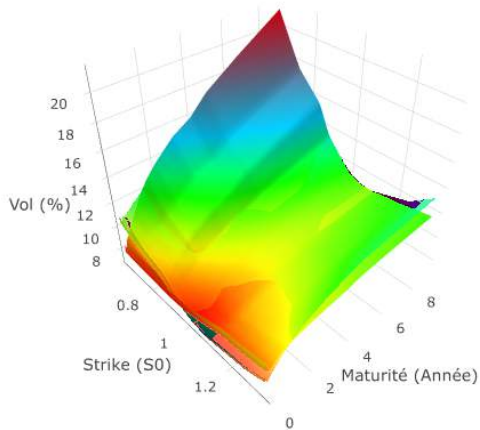


FIGURE 5.101 – Fitting Surface Volatilité Call EUR-USD (15/01/2018)

Fitting Surface de Prix Call EUR-USD

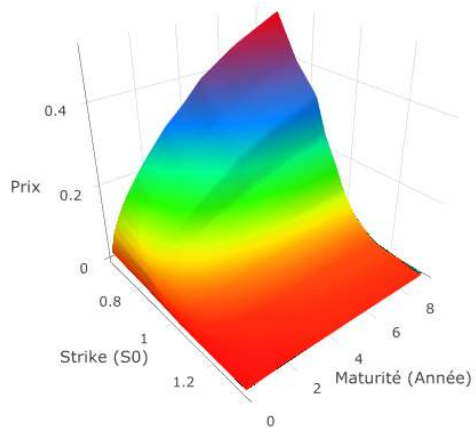


FIGURE 5.102 – Fitting de la surface de Prix des Call EUR-USD (15/01/2018)

Erreur globale pour les prix des options (n = 342771)		
Erreur normal/WLS	RMSE	14.19 bps
	TVaR.0.95.RMSE	77.80 bps

TABLE 5.8 – Tableau erreur modèle EUR-USD

A ce stade, la validation du modèle choisi est sans appel. Le *fitting* de la nappe de volatilité implicite pour chaque pas de temps est de très bonne qualité et celles des prix sont remarquables.

Etudes similaires sur d'autres taux de change

Dans notre portefeuille, en plus des actions US, nous avons également des actions dont la monnaie est le Yen (JPY) ainsi que des actions dont la monnaie est la Livre Sterling (GBP). Nous devons donc également fournir une paramétrisation de la surface de volatilité de ces taux de change. Normalement, d'après les tableaux de la première partie sur les différentes conventions à utiliser selon le couple de devises, les couples EUR/JPY et EUR/GBP doivent être traités avec des delta ajustés de la prime de devise. Cependant, quand nous comparons les erreurs entre les conversions en delta-strike avec l'ajustement et sans l'ajustement, nous observons que l'erreur est beaucoup plus élevée quand l'ajustement est réalisé. Après discussion avec Bloomberg, il s'avère qu'il travaille sans l'ajustement de la prime de change. Nous ferons de même pour avoir une cohérence globale avec Bloomberg.

Choix de modèle EUR-JPY

Le modèle retenu est celui à 6 variables pour le taux de change EUR-JPY, le modèle ressort pour chacun des 10 tirages aléatoires (résultats en annexes) :

$$\begin{cases} \text{logit}^{MAX}(\sigma_{i,t}(M, T)) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}M_{i,t} + \beta_{2,t}T_i + \beta_{3,t}T_i^2 + \beta_{4,t}M_{i,t}^2 + \beta_{5,t}T_i^2 M_{i,t} + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \end{cases} \quad (5.80)$$

Reconstruction des séries chronologiques EUR-JPY

La reconstruction des séries chronologiques des régresseurs pour le taux de change EUR-JPY est illustrée ci-dessous :

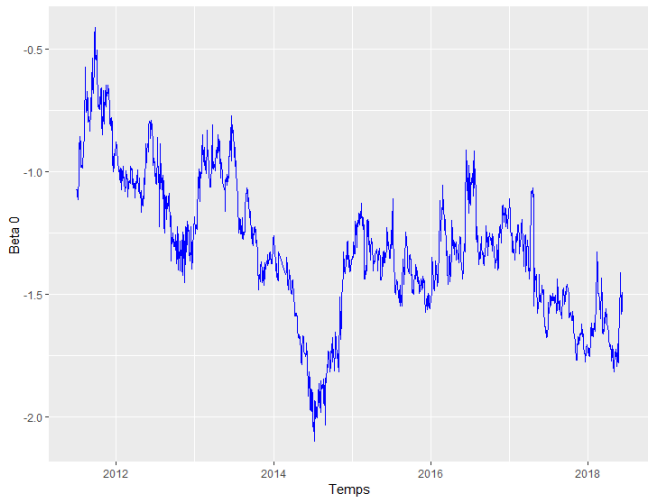


FIGURE 5.103 – Serie chronologie Beta0
Call EUR-JPY

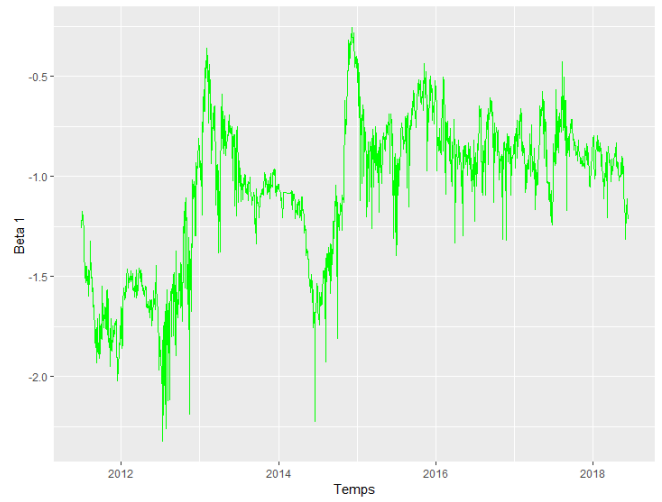


FIGURE 5.104 – Serie chronologie Beta1
Call EUR-JPY

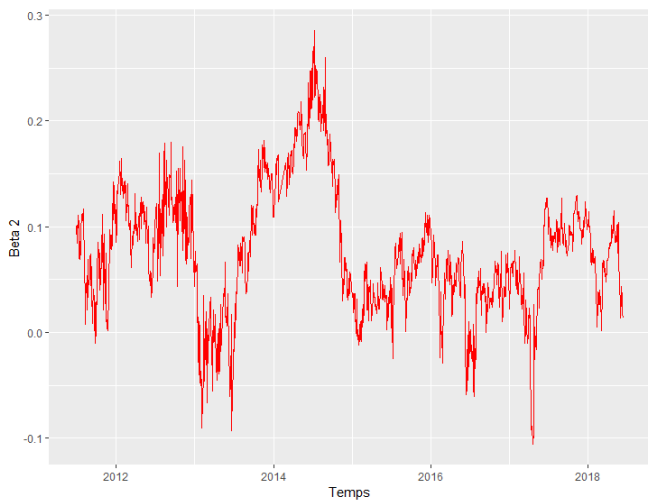


FIGURE 5.105 – Serie chronologie Beta2
Call EUR-JPY

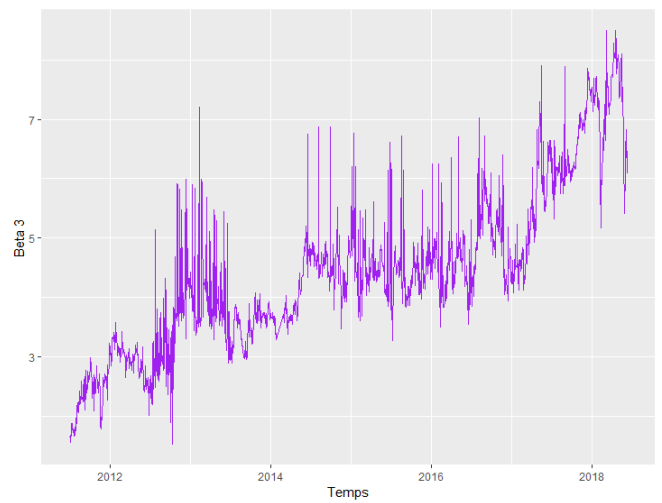


FIGURE 5.106 – Serie chronologie Beta3
Call EUR-JPY

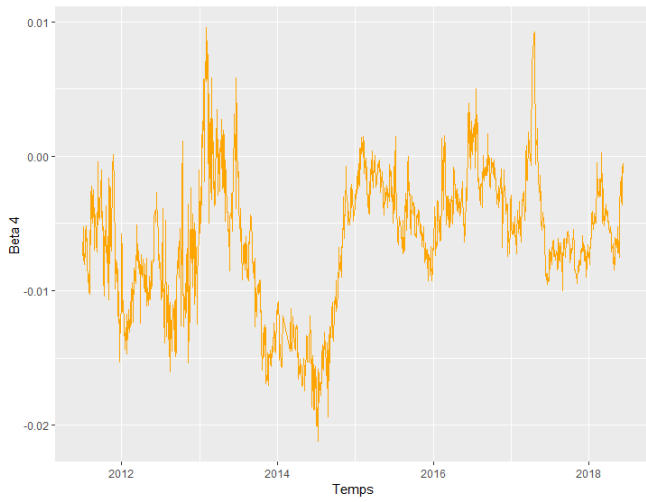


FIGURE 5.107 – Serie chronologie Beta4 Call EUR-JPY

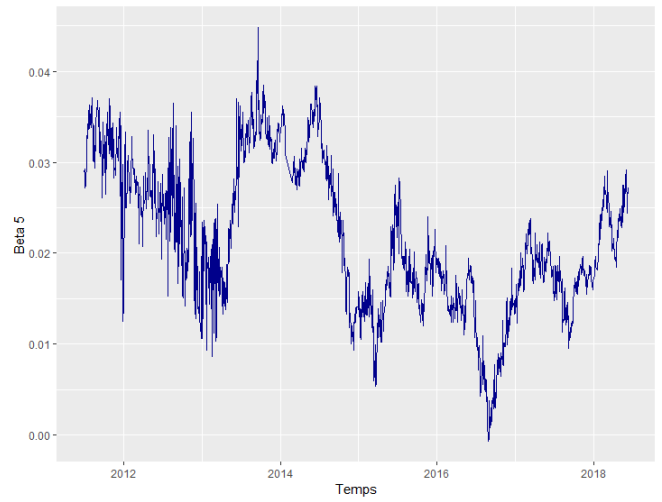


FIGURE 5.108 – Serie chronologie Beta5 Call EUR-JPY

Validation du modèle EUR-JPY

On obtient alors les surfaces de volatilité et de prix prédites suivantes VS les surfaces de volatilité et de prix observées pour plusieurs dates choisies aléatoirement :

Fitting Surface de Volatilité Call EUR-JPY

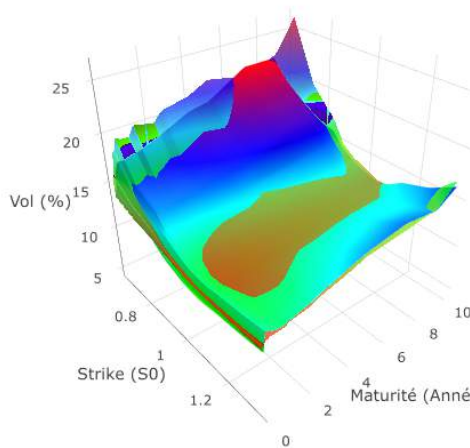


FIGURE 5.109 – Fitting Surface Volatilité Call EUR-JPY (22/08/2013)

Fitting Surface de Prix Call EUR-JPY

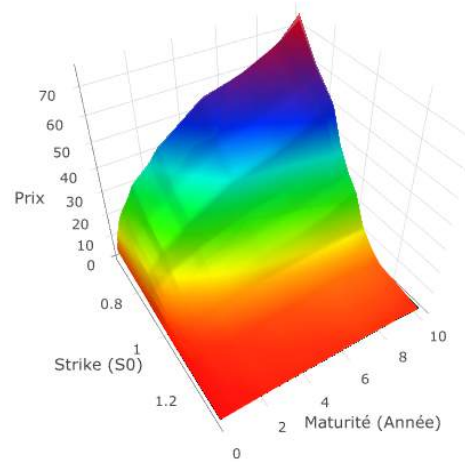


FIGURE 5.110 – Fitting de la surface de Prix des Call EUR-JPY (22/08/2013)

Fitting Surface de Volatilité Call EUR-JPY

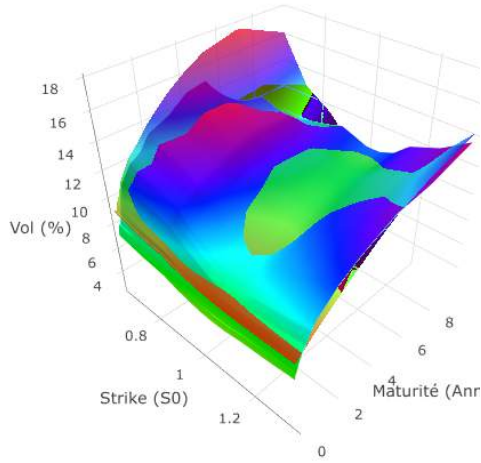


FIGURE 5.111 – Fitting Surface Volatilité Call EUR-JPY (23/03/2011)

Fitting Surface de Prix Call EUR-JPY

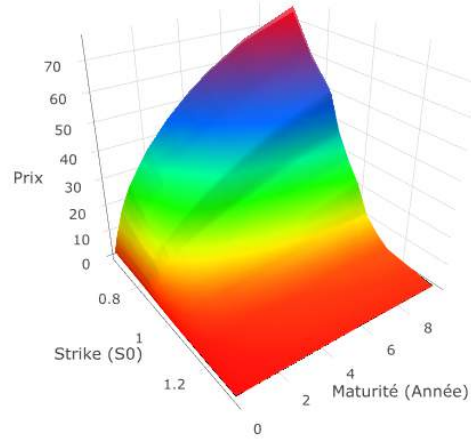


FIGURE 5.112 – Fitting de la surface de Prix des Call EUR-JPY (23/03/2011)

Fitting Surface de Volatilité Call EUR-JPY

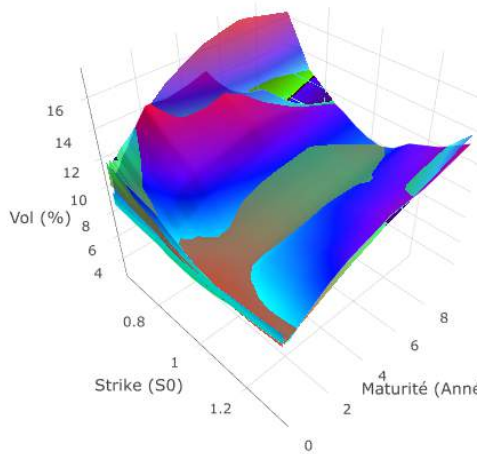


FIGURE 5.113 – Fitting Surface Volatilité Call EUR-JPY (15/01/2018)

Fitting Surface de Prix Call EUR-JPY

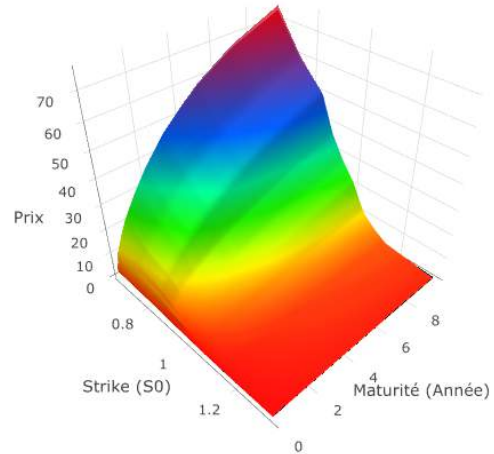


FIGURE 5.114 – Fitting de la surface de Prix des Call EUR-JPY (15/01/2018)

Erreur globale pour les prix des options (n = 322388)		
Erreur normal/WLS	RMSE	0.2143
	TVaR.0.95.RMSE	1.592919

TABLE 5.9 – Tableau erreur modèle EUR-JPY

A ce stade, la validation du modèle choisi est sans appel. Le *fitting* de la nappe de volatilité implicite pour chaque pas de temps est de bonne qualité et celles des prix sont plutôt remarquables.

Choix de modèle EUR-GBP

Le modèle retenu est celui à 6 variables pour le taux de change EUR-GBP, le modèle ressort pour chacun des 10 tirages aléatoires (résultats en annexes) :

$$\begin{cases} \logit^{MAX}(\sigma_{i,t}(M, T)) = \beta_{0,t} + \beta_{1,t}M_{i,t} + \beta_{2,t}T_i + \beta_{3,t}M_{i,t}T_i + \beta_{4,t}M_{i,t}^2 + \beta_{5,t}T_i^2 + u, \\ u \sim \mathcal{N}(0, \sigma) \end{cases} \quad (5.81)$$

Reconstruction des séries chronologiques EUR-GBP

La reconstruction des séries chronologiques des régresseurs pour le taux de change EUR-GBP est illustrée ci-dessous :

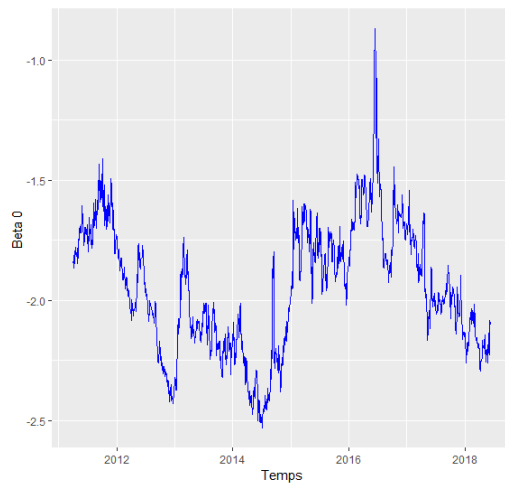


FIGURE 5.115 – Serie chronologie Beta0 Call EUR-GBP

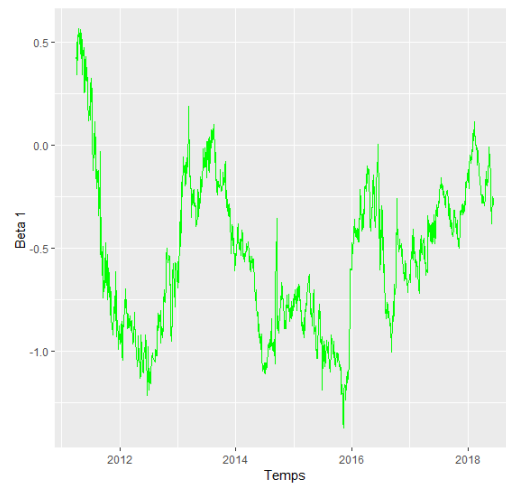


FIGURE 5.116 – Serie chronologie Beta1 Call EUR-GBP

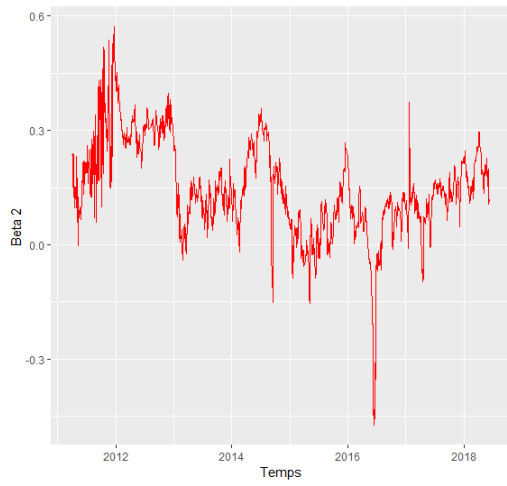


FIGURE 5.117 – Serie chronologie Beta2
Call EUR-GBP

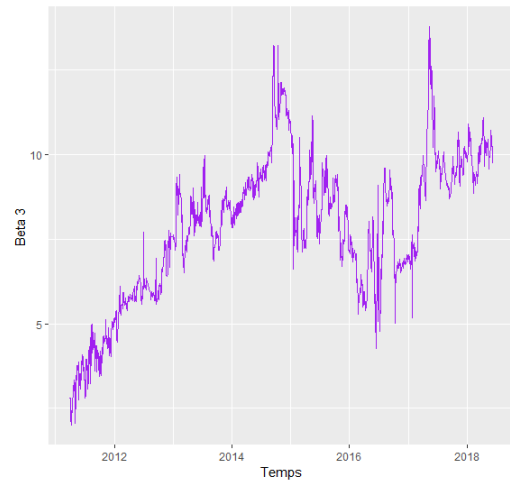


FIGURE 5.118 – Serie chronologie Beta3
Call EUR-GBP

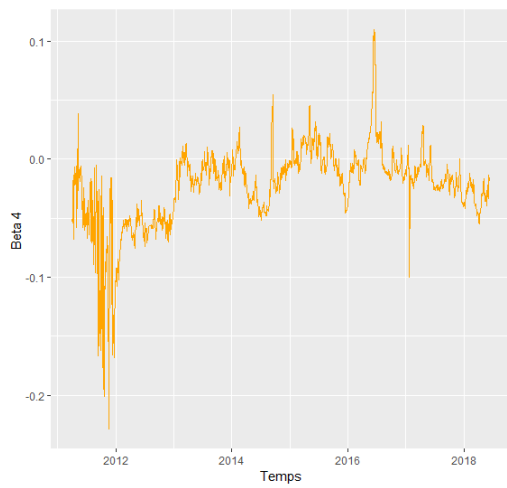


FIGURE 5.119 – Serie chronologie Beta4
Call EUR-GBP

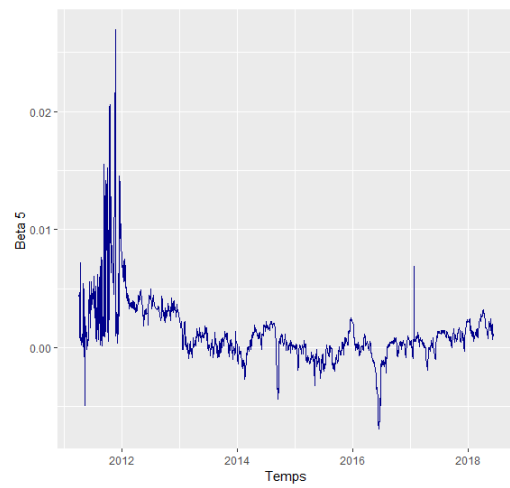


FIGURE 5.120 – Serie chronologie Beta5
Call EUR-GBP

Validation du modèle EUR-GBP

On obtient alors les surfaces de volatilité et de prix prédites suivantes VS les surfaces de volatilité et de prix observées pour plusieurs dates choisies aléatoirement :

Fitting Surface de Prix Historique FOREX

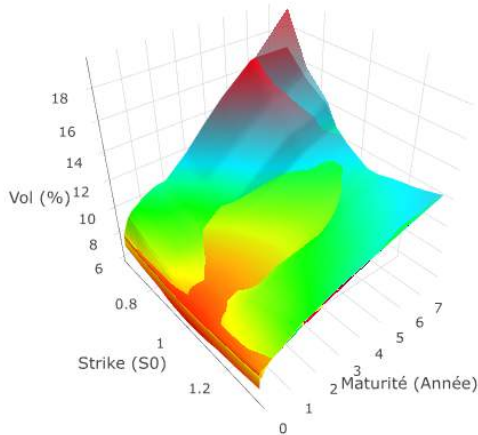


FIGURE 5.121 – Fitting Surface Volatilité Call EUR-GBP (22/08/2013)

Fitting Surface de Prix Call EUR-GBP

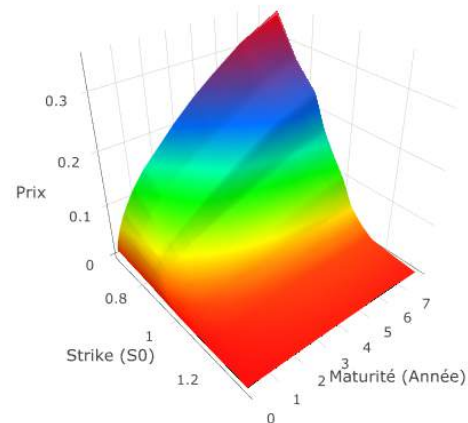


FIGURE 5.122 – Fitting de la surface de Prix des Call EUR-GBP (22/08/2013)

Fitting Surface de Volatilité Call EUR-GBP

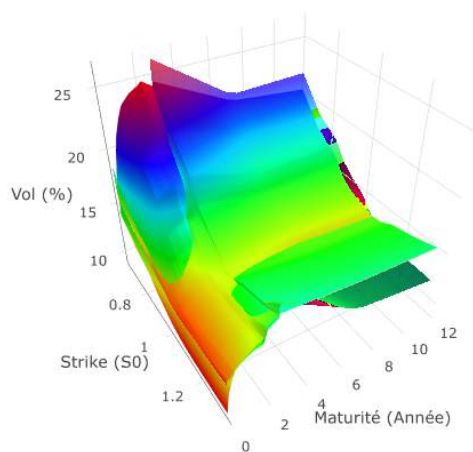


FIGURE 5.123 – Fitting Surface Volatilité Call EUR-GBP (03/04/2011)

Fitting Surface de Prix Call EUR-GBP

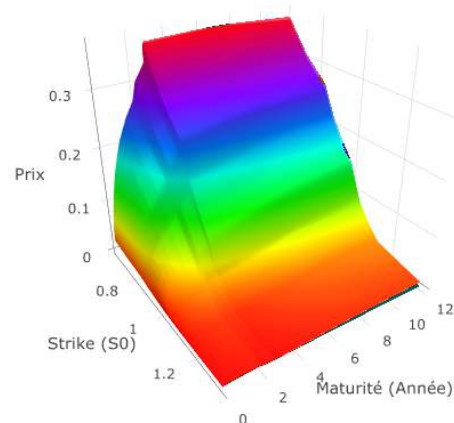


FIGURE 5.124 – Fitting de la surface de Prix des Call EUR-GBP (03/04/2011)

Fitting Surface de Volatilité Call EUR-GBP

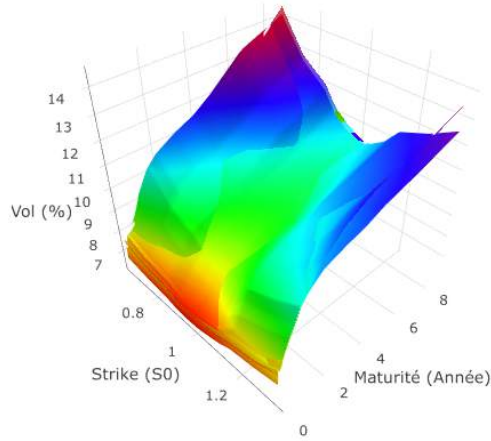


FIGURE 5.125 – Fitting Surface Volatilité Call EUR-GBP (15/01/2018)

Fitting Surface de Prix Call EUR-GBP

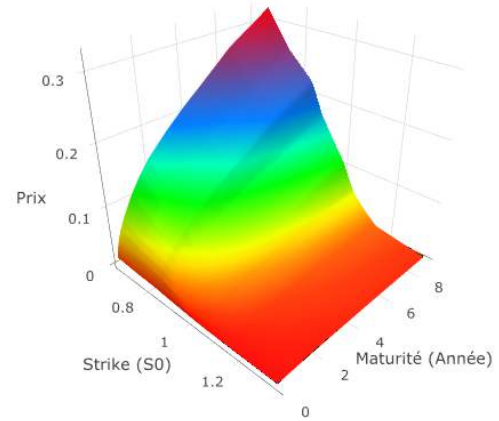


FIGURE 5.126 – Fitting de la surface de Prix des Call EUR-GBP (15/01/2018)

Erreur globale pour les prix des options (n = 325941)		
Erreur normal/WLS	RMSE	10.21 bps
	TVaR.0.95.RMSE	58.43 bps

TABLE 5.10 – Tableau erreur modèle EUR-GBP

A ce stade, la validation du modèle choisi est sans appel. Le *fitting* de la nappe de volatilité implicite pour chaque pas de temps est de très bonne qualité et celles des prix sont remarquables.

Identifiant	Nb.variables	MSE.app	TVaR0.95.MSE.app	MSE.test	TVaR0.95.MSE.test	Intercept	M	T	M*T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² *T	T ² *M
191	10	0,00134945	0,003857669	8,05E-07	6,62E-06	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
116	10	0,001348354	0,003834912	8,92E-07	8,45E-06	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
61	10	0,001329529	0,003803169	9,04E-07	7,86E-06	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
18	10	0,001322495	0,003735813	9,27E-07	9,00E-06	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
176	10	0,00131697	0,003755404	9,71E-07	9,02E-06	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
138	10	0,001334618	0,003858421	9,86E-07	8,60E-06	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
37	10	0,001332438	0,003808778	9,92E-07	9,54E-06	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
55	8	0,002504487	0,007705451	1,05E-06	6,73E-06	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
160	10	0,001293967	0,003721457	1,07E-06	9,34E-06	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
82	10	0,001333403	0,003761431	1,09E-06	1,18E-05	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
59	9	0,00250194	0,007645888	1,11E-06	7,01E-06	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
154	8	0,002444775	0,007436886	1,13E-06	7,63E-06	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
102	10	0,001288439	0,003636716	1,15E-06	1,33E-05	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
52	7	0,004404017	0,013078778	1,16E-06	7,70E-06	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
51	6	0,003263062	0,010273047	1,19E-06	7,30E-06	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
33	8	0,002489157	0,007618634	1,25E-06	1,10E-05	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
58	9	0,00180467	0,006140129	1,26E-06	1,32E-05	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
135	9	0,00182656	0,006281154	1,27E-06	1,27E-05	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
15	8	0,002506533	0,007727404	1,31E-06	1,10E-05	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
57	9	0,001716756	0,005869024	1,34E-06	1,56E-05	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
186	7	0,001976252	0,006160826	1,34E-06	1,26E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
53	7	0,001974316	0,006172232	1,37E-06	1,29E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
172	8	0,00249503	0,007723004	1,37E-06	1,07E-05	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
189	9	0,001785105	0,005968841	1,37E-06	1,63E-05	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
136	9	0,002488879	0,007649165	1,40E-06	1,09E-05	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
60	9	0,001600665	0,004747398	1,40E-06	1,34E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
174	9	0,001784915	0,00604762	1,41E-06	1,60E-05	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
131	8	0,002477548	0,007625677	1,41E-06	1,15E-05	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
35	9	0,002488306	0,007607121	1,42E-06	1,34E-05	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
190	9	0,001616398	0,004815266	1,42E-06	1,41E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
149	6	0,003237392	0,010256619	1,42E-06	1,09E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
100	9	0,00172787	0,005717361	1,43E-06	1,69E-05	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
134	9	0,001739432	0,006025469	1,43E-06	1,63E-05	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
112	7	0,001978572	0,006151973	1,46E-06	1,50E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
158	9	0,001735297	0,005849567	1,47E-06	1,55E-05	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
175	9	0,001593019	0,004723591	1,48E-06	1,48E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
115	9	0,00163409	0,004846077	1,48E-06	1,59E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
50	6	0,002307347	0,007807947	1,49E-06	1,44E-05	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
54	7	0,002693942	0,008543953	1,49E-06	9,38E-06	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
97	7	0,004342952	0,012757375	1,50E-06	1,45E-05	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
170	7	0,001955883	0,006114117	1,50E-06	1,52E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
130	8	0,002078974	0,00747377	1,51E-06	1,68E-05	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
187	7	0,002749981	0,008775196	1,51E-06	1,17E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
128	7	0,00196185	0,006177352	1,53E-06	1,36E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
185	6	0,00232044	0,007857728	1,53E-06	1,57E-05	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
153	7	0,002670503	0,008458135	1,54E-06	1,03E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
17	9	0,001572766	0,00456782	1,56E-06	1,67E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
14	7	0,002772909	0,008865427	1,58E-06	1,37E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
96	6	0,003247667	0,010269577	1,58E-06	1,55E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
101	9	0,001553612	0,004527006	1,59E-06	1,72E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
171	7	0,002735216	0,008743585	1,60E-06	1,13E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
126	6	0,00231158	0,0078666	1,61E-06	1,52E-05	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
137	9	0,00160722	0,004872528	1,61E-06	1,49E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
36	9	0,001584488	0,004693229	1,64E-06	1,66E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
93	6	0,004456259	0,013327521	1,67E-06	1,50E-05	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0

TABLE 5.11 – Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite EUR-USD (1)

Identifiant	Nb. variables	MSE.app	TVaR0.95.MSE.app	MSE.test	TVaR0.95.MSE.test	Intercept	M	T	M*T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² *T	T ² *M
169	6	0,00228478	0,007703721	1,67E-06	1,70E-05	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
98	7	0,001938433	0,006041046	1,67E-06	1,88E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
111	6	0,002308285	0,007761343	1,68E-06	1,68E-05	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
157	9	0,001658977	0,005641904	1,70E-06	2,09E-05	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
127	6	0,003254014	0,010292743	1,72E-06	1,45E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
13	7	0,001949513	0,006047101	1,72E-06	2,00E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
47	5	0,004649196	0,01446181	1,73E-06	1,13E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
159	7	0,001550976	0,00460994	1,73E-06	1,67E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
152	7	0,001932581	0,006105878	1,74E-06	1,71E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
133	8	0,002695917	0,008413752	1,74E-06	1,13E-05	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
31	7	0,001941973	0,006058953	1,75E-06	1,90E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
129	7	0,002710951	0,008649314	1,78E-06	1,26E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
91	5	0,004616947	0,014375446	1,82E-06	1,47E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
32	7	0,002681604	0,008495804	1,82E-06	1,67E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
95	6	0,002257962	0,007604492	1,83E-06	2,12E-05	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
48	5	0,003408633	0,010627285	1,84E-06	1,24E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
29	6	0,002285271	0,007733584	1,87E-06	2,13E-05	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
148	6	0,00226373	0,00770169	1,90E-06	2,00E-05	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
80	9	0,001868819	0,005641275	1,94E-06	2,13E-05	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
184	6	0,002230021	0,006768385	1,99E-06	1,82E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
151	7	0,002759948	0,008183328	2,00E-06	1,44E-05	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1
79	9	0,001663182	0,005525115	2,01E-06	2,89E-05	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
145	5	0,004607168	0,014421701	2,02E-06	1,53E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
49	6	0,002220943	0,006733497	2,05E-06	1,91E-05	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
11	6	0,003277578	0,010476532	2,06E-06	2,41E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
10	6	0,002263858	0,00760163	2,06E-06	2,56E-05	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
167	5	0,004692089	0,014749974	2,10E-06	1,84E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
114	8	0,001958916	0,005772255	2,12E-06	2,04E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
146	5	0,003388459	0,010670016	2,12E-06	1,63E-05	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
30	7	0,002801092	0,008345663	2,12E-06	1,81E-05	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1
173	8	0,001927948	0,005621776	2,12E-06	2,09E-05	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
188	8	0,001956246	0,005761128	2,13E-06	2,14E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
92	5	0,003410934	0,010676293	2,14E-06	2,05E-05	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
183	5	0,002545754	0,008256979	2,14E-06	2,03E-05	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
46	5	0,002520911	0,008140162	2,17E-06	2,02E-05	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
124	5	0,003399742	0,010627053	2,18E-06	1,49E-05	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
56	8	0,001919276	0,005561948	2,19E-06	2,15E-05	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
168	6	0,002212278	0,006710301	2,21E-06	2,22E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
125	6	0,002210031	0,006762132	2,21E-06	1,98E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
123	5	0,002530587	0,008223594	2,22E-06	1,96E-05	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
110	6	0,002222198	0,006759339	2,26E-06	2,22E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
89	5	0,004604937	0,013541966	2,28E-06	2,02E-05	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
150	6	0,002887389	0,008685823	2,31E-06	1,65E-05	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
94	6	0,002188466	0,006616959	2,38E-06	2,51E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
16	8	0,001879789	0,005384814	2,39E-06	2,40E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
99	8	0,001895926	0,005501771	2,40E-06	2,57E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
109	5	0,002520311	0,008133619	2,42E-06	2,53E-05	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
166	8	0,002500044	0,008041499	2,43E-06	2,54E-05	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
34	8	0,00191709	0,005596775	2,45E-06	2,61E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
7	5	0,004696366	0,014845893	2,46E-06	2,82E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
88	4	0,004760288	0,014554091	2,47E-06	1,99E-05	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
147	6	0,00217574	0,006650267	2,48E-06	2,34E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
28	6	0,002189851	0,006648162	2,49E-06	2,61E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
45	4	0,004768641	0,014564882	2,50E-06	1,74E-05	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
81	9	0,001579894	0,004604582	2,50E-06	3,44E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1

TABLE 5.12 – Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite EUR-USD (2)

Identifiant	Nb. variables	MSE.app	TVaR0.95.MSE.app	MSE.test	TVaR0.95.MSE.test	Intercept	M	T	M*T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² *T	T ² *M
132	8	0,001922385	0,005703474	2,50E-06	3,44E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
113	8	0,001947456	0,006554555	2,55E-06	2,62E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
155	8	0,001907398	0,006539226	2,55E-06	3,22E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
90	5	0,002482268	0,007977167	2,55E-06	2,82E-05	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
156	8	0,001868614	0,005451646	2,56E-06	2,51E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
12	6	0,002971388	0,009027953	2,57E-06	2,44E-05	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
27	5	0,00250459	0,008098162	2,58E-06	2,79E-05	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
9	6	0,002181844	0,006568802	2,59E-06	2,77E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
77	8	0,002107021	0,006866773	2,69E-06	3,48E-05	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
144	5	0,00246617	0,008013369	2,69E-06	2,66E-05	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
78	8	0,001952782	0,005698568	2,70E-06	3,26E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
143	4	0,004733903	0,014541148	2,77E-06	2,09E-05	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
6	5	0,002459948	0,007888182	2,99E-06	3,47E-05	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
165	4	0,004825721	0,014896735	3,00E-06	2,83E-05	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
8	5	0,003410361	0,010803981	3,01E-06	3,45E-05	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
122	4	0,004751869	0,014571468	3,02E-06	2,09E-05	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
74	6	0,002210409	0,006749957	3,05E-06	3,81E-05	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
182	4	0,004783187	0,01475809	3,11E-06	2,86E-05	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
76	7	0,001918297	0,005590201	3,21E-06	4,78E-05	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
5	4	0,004817708	0,014974563	3,46E-06	3,82E-05	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
108	4	0,004834668	0,015069607	3,75E-06	4,24E-05	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
85	3	0,005873827	0,018923946	4,88E-06	3,87E-05	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
26	4	0,004711091	0,014616922	5,01E-06	6,70E-05	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
44	4	0,00442283	0,014253165	5,45E-06	4,57E-05	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
42	3	0,014126804	0,040843622	5,46E-06	5,59E-05	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
181	4	0,004425378	0,014314509	5,55E-06	4,45E-05	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
121	4	0,004415395	0,014330803	5,68E-06	4,54E-05	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
107	4	0,004431039	0,014281244	5,69E-06	4,66E-05	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
87	4	0,004482775	0,014585772	5,75E-06	5,54E-05	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
43	3	0,014152767	0,040913645	5,76E-06	5,49E-05	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0
164	4	0,004424873	0,014188547	5,85E-06	5,56E-05	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
41	3	0,00580104	0,018654313	5,90E-06	4,28E-05	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
71	5	0,002367562	0,007416155	6,20E-06	9,90E-05	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
72	5	0,002568548	0,00803852	6,47E-06	9,89E-05	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0
163	3	0,005886103	0,019138931	6,50E-06	5,94E-05	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
180	3	0,005804332	0,018781818	6,53E-06	4,83E-05	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
141	3	0,005793712	0,018795909	6,55E-06	5,50E-05	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
120	3	0,005755409	0,018531615	6,55E-06	4,30E-05	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
25	4	0,004384211	0,014191515	6,56E-06	5,99E-05	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
75	6	0,002051724	0,006578357	6,84E-06	0,000118387	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
142	4	0,004366687	0,014122514	6,90E-06	6,70E-05	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
105	3	0,005877329	0,019224989	7,09E-06	5,84E-05	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
4	4	0,00431394	0,013874081	7,74E-06	7,68E-05	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
73	5	0,003850218	0,011745253	7,86E-06	6,44E-05	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
3	3	0,005801971	0,018967692	8,40E-06	8,61E-05	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
86	3	0,006456522	0,018876093	8,63E-06	5,45E-05	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
40	2	0,014435118	0,042689545	9,03E-06	7,35E-05	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
21	3	0,005735694	0,018701868	9,97E-06	0,000123414	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
67	4	0,004499159	0,013884035	1,18E-05	0,000186978	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
106	3	0,006422587	0,019194939	1,22E-05	7,28E-05	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
119	2	0,014405899	0,042685994	1,29E-05	0,000108604	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
140	2	0,008183743	0,024075641	1,34E-05	8,40E-05	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
84	2	0,008173738	0,023998234	1,36E-05	8,54E-05	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
23	3	0,007220283	0,023906571	1,38E-05	0,000119796	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0
65	4	0,005570192	0,018524754	1,40E-05	0,00016926	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

TABLE 5.13 – Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite EUR-USD (3)

Identifiant	Nb. variables	MSE.app	TVaR0.95.MSE.app	MSE.test	TVaR0.95.MSE.test	Intercept	M	T	M*T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² *T	T ² *M
68	4	0,005481307	0,018184068	1,47E-05	0,000182777	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
64	3	0,005618623	0,018708865	1,48E-05	0,000187616	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
22	3	0,007103474	0,021503468	1,57E-05	9,75E-05	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
39	2	0,008112491	0,023877879	1,63E-05	9,76E-05	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
179	2	0,014336156	0,04267822	1,68E-05	0,000169203	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
162	2	0,008131916	0,024023255	1,78E-05	0,000135733	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
24	3	0,007295557	0,02021948	1,80E-05	0,000123197	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
69	4	0,007056477	0,021728455	1,82E-05	0,000168228	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
178	2	0,008063389	0,023836856	1,83E-05	0,000104436	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
66	4	0,004083745	0,012742889	1,86E-05	0,000291912	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0
70	4	0,006478387	0,019741615	1,89E-05	0,00015056	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1
118	2	0,00799424	0,023590669	1,93E-05	0,000107904	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	0,008092285	0,024004068	1,93E-05	0,000131292	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
20	2	0,008051389	0,023874687	2,04E-05	0,000156714	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
104	2	0,008021241	0,023756921	2,15E-05	0,00014569	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
83	1	0,015492136	0,047324522	2,56E-05	0,000161491	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
139	1	0,015413113	0,047389975	3,12E-05	0,000279475	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
63	2	0,008017891	0,024092348	3,22E-05	0,000416394	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
38	1	0,015420241	0,047075466	3,24E-05	0,000205185	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
177	1	0,015333206	0,047045032	3,94E-05	0,000272226	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
117	1	0,015336058	0,046939759	4,01E-05	0,000271632	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
161	1	0,015260148	0,046998307	4,44E-05	0,000373488	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0,015187785	0,047048879	4,89E-05	0,000490924	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
103	1	0,015188714	0,047058415	5,00E-05	0,000387642	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	1	0,015161387	0,04689308	5,11E-05	0,000537596	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
62	1	0,014210116	0,045149886	0,000121039	0,001740929	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 5.14 – Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite EUR-USD (4)

Identifiant	Nb. variables	MSE.app	TVaR0.95.MSE.app	MSE.test	TVaR0.95.MSE.test	Intercept	M	T	M*T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² *T	T ² *M
135	7	0.580053539	2.281128407	0.01942545	0.157503259	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
481	7	0.588575876	2.181202123	0.020950866	0.236609099	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
482	7	0.570472717	2.148140675	0.02230095	0.255078411	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
124	6	0.667528392	2.431714946	0.022481809	0.23523833	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
27	7	0.584108184	2.182325932	0.023124496	0.266228311	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
480	7	0.576207403	2.270629133	0.023288239	0.243286541	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
127	6	0.673327002	2.442234338	0.023718333	0.211033893	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
479	7	0.57601518	2.140138008	0.025738014	0.314172838	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
476	6	0.630666038	2.234878779	0.026719288	0.317465837	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
475	6	0.598116174	2.212735431	0.027995605	0.286433656	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
24	7	0.583647857	2.15648823	0.028101528	0.287876083	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
478	7	0.569134284	2.205474159	0.028366894	0.281569091	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
133	7	0.572033864	2.216548388	0.028824847	0.216330422	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
26	7	0.577488597	2.276386409	0.028946768	0.341904496	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
136	7	0.588395282	2.184611568	0.029403372	0.434117786	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
126	6	0.599637337	2.22347738	0.030261082	0.376103292	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
21	6	0.627127379	2.228331998	0.030281811	0.362520118	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
20	6	0.594340259	2.21699724	0.030432539	0.344468371	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
129	6	0.603093186	2.228321111	0.03085425	0.337373502	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
473	6	0.59884057	2.184895908	0.031737253	0.32046052	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
23	7	0.571238152	2.213161668	0.033051176	0.353943996	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
134	7	0.576370731	2.165909974	0.033479588	0.372411639	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
474	6	0.60597848	2.182733191	0.033943002	0.354770406	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
468	5	0.640991756	2.274957146	0.034218664	0.374613418	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
18	6	0.59504675	2.186741946	0.03462789	0.350444431	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
483	7	0.558508235	2.140381964	0.035237482	0.296206924	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
28	7	0.562303668	2.139930154	0.036359643	0.456472653	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
137	7	0.567699404	2.154235484	0.036520679	0.458711576	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
122	6	0.628811991	2.296384182	0.037196012	0.290636867	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
131	6	0.611416084	2.236772038	0.03729019	0.306622918	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
466	5	0.643835624	2.258554148	0.037741686	0.410253405	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
13	5	0.638365187	2.271478029	0.038103633	0.44749702	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
113	5	0.644844051	2.287079247	0.038247377	0.521056072	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
139	7	0.573162846	2.168612998	0.038421133	0.457046937	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
114	5	0.648012902	2.293549361	0.038516991	0.4716425	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
120	6	0.598589016	2.191795947	0.038826038	0.46291294	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
128	6	0.620206552	2.402901584	0.039432198	0.283224115	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
121	6	0.60290481	2.199716163	0.040241477	0.420516674	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
112	5	0.629715844	2.284471234	0.04074205	0.303119935	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
11	5	0.640943133	2.254771335	0.041859148	0.458283795	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
25	7	0.567534579	2.130194753	0.042947529	0.55792783	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
140	7	0.628113118	2.209164927	0.043088319	0.345071092	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
138	7	0.555193745	2.130666434	0.044230871	0.408399865	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
12	5	0.626756517	2.287722683	0.044908662	0.39652425	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
29	7	0.557176023	2.139173733	0.04514947	0.452670324	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
141	7	0.605744498	2.198325583	0.045881595	0.359798201	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
110	5	0.646752145	2.267434895	0.046091483	0.611382938	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
345	7	0.601123212	2.129856062	0.046390137	0.778979763	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
333	6	0.619220226	2.191975676	0.046720212	0.784528943	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
75	7	0.562999728	2.227152305	0.046730413	0.736331767	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
111	5	0.650998248	2.278716258	0.047031013	0.556853495	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
467	5	0.627780466	2.276274142	0.047085919	0.387278307	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
125	5	0.603571279	2.190517886	0.047169011	0.556920739	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
342	7	0.566341885	2.135584508	0.047431885	0.809125645	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
183	7	0.562134028	2.221206497	0.047606611	0.752351792	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
184	7	0.566587826	2.134085433	0.048058669	0.812520698	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
339	7	0.60714845	2.131046492	0.048073205	0.763777771	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
187	7	0.599918241	2.12986781	0.048495075	0.781786421	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1

TABLE 5.15 – Sélection modèle nappe volatilité implicite EUR-JPY (1)

Identifiant	Nb. variables	MSE.app	TVaRo.95.MSE.app	MSE.test	TVaRo.95.MSE.test	Intercept	M	T	M*T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² *T	T ² *M
179	7	0.557833524	2.15887936	0.048540939	0.751154632	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
130	6	0.613090692	2.212264961	0.048551946	0.378339633	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0
177	6	0.617989779	2.192004786	0.048778444	0.787422867	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
329	6	0.623749123	2.189607508	0.04878601	0.774469413	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
115	5	0.652017149	2.247161906	0.048943222	0.391399063	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
182	7	0.605967723	2.131646806	0.0493344	0.769881636	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
180	7	0.568031951	2.112026101	0.049638869	0.807063956	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
173	6	0.622463921	2.189136773	0.04914534	0.779770998	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
74	7	0.615068532	2.185160646	0.050186585	0.833627006	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
341	7	0.561468907	2.22479721	0.050833385	0.78159685	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
185	7	0.549379151	2.083861475	0.051006875	0.847307541	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
76	7	0.564915151	2.133512361	0.051180717	0.859247106	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
79	7	0.61155012	2.158282263	0.05119128	0.832783469	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
337	7	0.566563277	2.11209616	0.051492922	0.817779225	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
67	6	0.61631505	2.189685939	0.051574538	0.849617997	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
80	7	0.598248328	2.12652565	0.051593832	0.850706923	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
334	6	0.6134926	2.165932783	0.052216434	0.818012775	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
19	6	0.597984384	2.174520936	0.052251811	0.857839362	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
323	5	0.631234344	2.234244943	0.052599441	0.824021306	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
181	7	0.556586898	2.078121566	0.052894089	0.889436578	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
174	6	0.618707028	2.162853155	0.053183859	0.791703555	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0
330	6	0.619185806	2.161020544	0.053255113	0.79016599	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0
172	6	0.58027715	2.140962958	0.053307911	0.835003623	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
164	5	0.635098134	2.22584541	0.053711075	0.800469677	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
332	6	0.576692271	2.166340755	0.053885777	0.860208402	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
176	6	0.577172779	2.164265396	0.053944323	0.859249056	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
320	5	0.63577888	2.224906037	0.053986515	0.799714726	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
178	6	0.612192455	2.16569404	0.054217414	0.818443066	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
167	5	0.629952009	2.233684425	0.054570364	0.824082701	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1
10	5	0.623778604	2.224588536	0.054866435	0.436224738	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
336	7	0.556152638	2.164728722	0.055276336	0.783482326	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
465	5	0.62577547	2.222249788	0.055485029	0.470114395	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
70	7	0.555124349	2.161889296	0.055836989	0.803972928	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
68	5	0.628919048	2.233557124	0.056201601	0.883352241	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
53	6	0.611360281	2.165122873	0.056205477	0.884431013	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
65	6	0.575913512	2.165463102	0.056394989	0.902135071	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
109	5	0.625499406	2.219091415	0.05691788	0.39140269	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
328	6	0.577893049	2.140586368	0.057223074	0.855756129	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
73	7	0.601655101	2.122544575	0.05779582	0.927266859	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
71	7	0.563059089	2.107985543	0.059227881	0.934053344	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
477	6	0.650002747	2.176627203	0.059977555	0.647329009	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
175	6	0.587432869	2.120783794	0.061243713	0.90482089	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
132	6	0.650274023	2.181521475	0.062555317	0.670781716	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
186	7	0.54647012	2.096532082	0.06278303	0.844942395	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
63	6	0.613715802	2.154049861	0.063003667	0.957959146	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0
123	5	0.635287932	2.20702929	0.06306764	0.420307976	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0
50	6	0.630297207	2.218620413	0.06325482	0.957976762	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
62	6	0.574287907	2.135510217	0.065154161	0.975604715	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
66	6	0.605842501	2.354908631	0.065280844	0.846115769	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1
343	7	0.543223643	2.081613722	0.068396187	1.037204965	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
340	7	0.559968842	2.115973551	0.068767271	0.995374226	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1
117	5	0.66044878	2.211400886	0.070070039	0.537577912	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
15	5	0.658165045	2.21700701	0.070259218	0.612191767	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
166	5	0.608781651	2.233455939	0.071075232	0.949735157	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
81	7	0.566096838	2.095496764	0.071426329	1.006511343	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
163	5	0.609119615	2.179922402	0.071434734	0.929201674	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
77	7	0.542243966	2.080685038	0.072855939	1.096180122	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
346	7	0.563720452	2.0949294	0.073647531	1.027421614	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1

TABLE 5.16 – Sélection modèle nappe volatilité implicite EUR-JPY (2)

Identifiant	Nb. variables	MSE.app	TVaR0.95.MSE.app	MSE.test	TVaR0.95.MSE.test	Intercept	M	T	M*T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² *T	T ² *M
165	5	0.637984146	2.1882056632	0,073867609	0,9035543407	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
168	5	0.632167026	2,197633367	0,073909439	0,9214535	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
322	5	0.60750519	2,236240109	0,074275384	0,956868425	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
52	5	0.609449525	2,245045131	0,074648299	1,025312535	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
324	5	0.631349252	2,191948994	0,075333945	0,93005816	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
54	5	0.632582401	2,201824403	0,075728088	1,025675629	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
17	5	0.665236552	2,209388492	0,076953274	0,674313797	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
470	5	0.657649446	2,215322749	0,077302992	0,63786499	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
338	7	0.548392167	2,07504035	0,077481217	1,141750394	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
331	6	0.58150397	2,122253267	0,0787526	1,132838705	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
119	5	0.666979055	2,205391125	0,080383896	0,627433953	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
14	5	0.662692707	2,2155411	0,08116669	0,678020236	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
321	5	0.636215184	2,179282781	0,081210499	0,921506703	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
344	7	0.539952642	2,086055847	0,081936653	1,006949085	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
319	5	0.606189098	2,179513067	0,083220721	0,977329234	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
22	6	0.641744716	2,168675676	0,083942786	0,895011714	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
16	5	0.671815974	2,20373599	0,084051451	0,743546423	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1
118	5	0.672787187	2,194060849	0,084774739	0,653830466	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1
472	5	0.664472202	2,209180631	0,086243333	0,709305695	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
72	7	0.545469553	2,072186985	0,086739289	1,240324044	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
64	6	0.579576755	2,118807156	0,086810133	1,224521656	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
78	7	0.539576312	2,088014836	0,086810787	1,076062617	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
469	5	0.661992604	2,212897707	0,086816875	0,735938244	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
116	5	0.663728179	2,200047159	0,087042602	0,633874382	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
56	5	0.665313193	2,201597	0,087677922	1,074468664	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
471	5	0.669516501	2,200805175	0,089464065	0,754465926	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1
57	5	0.626226905	2,234728281	0,089629541	1,109060725	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
59	5	0.644373093	2,176110284	0,090758681	1,118888168	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
170	5	0.643415036	2,172511128	0,090947489	1,0384909	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
169	5	0.649837363	2,171024683	0,091316871	1,028669166	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
58	5	0.654443868	2,188521475	0,091614839	1,107520521	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
51	5	0.633869529	2,18024816	0,093107193	1,191918692	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
326	5	0.642070964	2,167429077	0,094598202	1,056551949	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
49	5	0.605031394	2,183276021	0,095460754	1,176729062	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
61	5	0.652687812	2,175125757	0,096629303	1,156812659	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
60	5	0.661944402	2,166712666	0,098706021	1,154697834	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1
171	5	0.661427538	2,167231797	0,100583549	1,100641157	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1
335	6	0.630250307	2,12043828	0,101437416	1,316046019	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
325	5	0.647797998	2,161944631	0,102301918	1,065265263	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
327	5	0.658974842	2,159912293	0,107776771	1,139511183	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1
55	5	0.646682385	2,161988063	0,110742589	1,29946965	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
69	6	0.627113616	2,115842826	0,11354652	1,485116138	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
392	7	0.495137409	1,939188532	0,171570755	3,193151562	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
390	7	0.490537705	1,883618129	0,176744906	3,225284145	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
387	6	0.561686795	1,944065146	0,178379848	3,299465181	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
395	7	0.534169597	1,87020054	0,180224544	3,341524433	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
393	7	0.482770205	1,809386239	0,181748667	3,335962236	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
376	5	0.575800545	1,993987301	0,184178395	3,32531907	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
388	6	0.548251822	1,909969774	0,185884051	3,364139646	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
373	5	0.580029445	1,994400163	0,186194456	3,32481296	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
391	7	0.488118429	1,806301696	0,186328705	3,392334298	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
385	6	0.54099673	2,063917128	0,187587471	3,251719593	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
382	6	0.551174646	1,908471755	0,188625098	3,376412807	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
384	6	0.507533447	1,882833602	0,188739571	3,466294723	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
394	7	0.488339465	1,843029838	0,19340403	3,299944839	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
380	6	0.508847229	1,867429793	0,1940403	3,510432126	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
383	6	0.525146596	1,868439767	0,195445375	3,405397518	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
386	6	0.52958938	1,948984238	0,19746839	3,397487001	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1

TABLE 5.17 – Sélection modèle nappe volatilité implicite EUR-JPY (3)

Identifiant	Nb. variables	MSE.app	TVaR0.95.MSE.app	MSE.test	TVaR0.95.MSE.test	Intercept	M	T	M*T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² *T	T ² *M
381	6	0.540177449	1.993449954	0.199403166	3.331495001	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
377	5	0.573620881	1.957985136	0.204377533	3.410792669	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
375	5	0.544163704	1.969080892	0.205601788	3.521573089	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
389	6	0.542145778	1.942019753	0.209210812	3.38791354	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
374	5	0.578296869	1.949542779	0.21326635	3.459639143	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
372	5	0.546809953	1.939935885	0.219229906	3.642636609	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
378	5	0.562355552	1.965393471	0.222893715	3.61943343	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
379	5	0.586522252	1.94080993	0.223599326	3.537105728	1	1	0	0	0	1	0	0	1	1
285	7	0.543907782	1.761165659	0.257802538	5.017794948	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
280	6	0.546655899	1.771517975	0.259060883	5.029440565	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
437	7	0.542118355	1.761238066	0.259221292	5.030540673	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
433	6	0.544799173	1.771228722	0.260494478	5.044924766	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
290	7	0.544856828	1.7377789	0.260882624	5.050402451	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1
287	7	0.482065365	1.681976384	0.261587095	5.096331303	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
439	7	0.481391832	1.681374949	0.262392365	5.100454392	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
278	6	0.549416703	1.767387838	0.262656881	5.038887557	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
442	7	0.54305535	1.736915306	0.262905011	5.071629126	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1
438	7	0.48876353	1.831541369	0.263852601	5.034455832	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1
431	6	0.546981092	1.765357925	0.264802329	5.062516076	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
286	7	0.487924742	1.831150248	0.265236571	5.04028902	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
271	5	0.558730358	1.824699224	0.265704329	5.052600494	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
424	5	0.557959369	1.827120316	0.265802345	5.058184607	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
284	7	0.543951824	1.740751609	0.265884974	5.077351815	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0
432	6	0.493440153	1.719923178	0.267706624	5.112219943	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
279	6	0.493352746	1.718087417	0.267888051	5.11476371	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
282	7	0.479355446	1.652081041	0.268549042	5.166538083	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
269	5	0.561452326	1.810376046	0.269879956	5.063674431	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
421	5	0.56018733	1.811484982	0.270557151	5.074798814	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
435	7	0.477580118	1.650429662	0.270755553	5.180390913	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
434	7	0.47492569	1.735249631	0.271874748	5.076564298	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
288	7	0.475451173	1.678458231	0.271918378	5.198158863	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
281	7	0.474398499	1.735270331	0.272463507	5.080243938	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
277	6	0.491722638	1.683487869	0.27530901	5.185153377	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
430	6	0.490797107	1.68470161	0.276498493	5.191839711	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
283	7	0.479248953	1.663898719	0.276733871	5.268195218	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
440	7	0.473548092	1.679730935	0.27911264	5.29955885	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
436	7	0.476275923	1.66416726	0.28754598	5.406006175	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
423	5	0.528317333	1.805865559	0.287887094	5.224062627	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
270	5	0.526880882	1.798272338	0.290311765	5.244477549	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
289	7	0.466745445	1.654902028	0.290606773	5.216533446	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
235	7	0.461591852	1.73884547	0.294524945	5.629792609	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1
425	5	0.559000807	1.782363707	0.294947904	5.317724429	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
234	7	0.520247894	1.697172524	0.296881187	5.696511454	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
229	6	0.522299728	1.70397334	0.297549593	5.6949755	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1
272	5	0.557894193	1.77400734	0.298543574	5.344038809	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
441	7	0.465834241	1.656263243	0.299242177	5.302700902	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
226	6	0.526752017	1.70523167	0.299507109	5.692859038	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
231	7	0.451349396	1.653331992	0.300019169	5.651927747	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
236	7	0.44817749	1.59564317	0.303219302	5.858957344	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
422	5	0.575466214	1.803719227	0.303642581	5.272727457	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0
218	5	0.535853695	1.757007413	0.304356352	5.709816965	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
420	5	0.525330109	1.743574839	0.305950065	5.359313267	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
215	5	0.53987598	1.750007494	0.305996027	5.703169817	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
268	5	0.524794852	1.73880735	0.3061498	5.368282664	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
427	5	0.546208912	1.795423935	0.306153406	5.343576836	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
232	7	0.446896332	1.568425693	0.309579685	5.921390624	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
428	5	0.587292836	1.764612917	0.309854824	5.331150857	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
239	7	0.499484928	1.641593846	0.309902629	5.813077774	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1

TABLE 5.18 – Sélection modèle nappe volatilité implicite EUR-JPY (4)

Identifiant	Nb.variables	MSE.app	TVaR0.95.MSE.app	MSE.test	TVaR0.95.MSE.test	Intercept	M	T	M*T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² *T	T ² *M
274	5	0,54432462	1,788430429	0,310096076	5,367054596	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
227	6	0,460854555	1,6299301	0,310540792	5,889778591	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
237	7	0,441437376	1,57431165	0,310997752	5,866121852	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
228	6	0,507228308	1,869287929	0,313831422	5,693855194	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1
275	5	0,586585452	1,760385444	0,315783981	5,366301481	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
224	6	0,460340879	1,601707076	0,316271662	5,942242495	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
240	7	0,470417688	1,605941007	0,317636056	5,844980904	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
233	7	0,445962641	1,563810576	0,317769264	5,942544001	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
429	5	0,595290735	1,740059072	0,318927736	5,397418923	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1
241	7	0,474656184	1,619958997	0,320711739	5,843675394	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
225	6	0,498710633	1,755500839	0,326011035	5,742486856	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
238	7	0,447946319	1,590620737	0,326027869	5,802117049	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1
276	5	0,59443004	1,738762859	0,326170424	5,436415396	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1
217	5	0,499154622	1,723453914	0,331009794	5,953402275	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
230	6	0,508916735	1,745221085	0,3316264	5,846019491	1	0	1	1	1	0	0	0	1	1
426	5	0,572963211	1,73644941	0,331853085	5,594378887	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
273	5	0,571694396	1,733934327	0,337130283	5,631489403	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
219	5	0,530663858	1,707623295	0,337488658	5,971960623	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
214	5	0,499413351	1,676653807	0,34540466	6,060433182	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
216	5	0,533461838	1,686046587	0,348032529	6,039427329	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
221	5	0,5193843	1,723315589	0,349373127	6,049663044	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1
220	5	0,574443204	1,725908031	0,349681231	5,903582917	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1
222	5	0,566653596	1,713919058	0,349690076	5,919357041	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1
223	5	0,575324844	1,694197775	0,358811199	5,972977636	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1

TABLE 5.19 – Sélection modèle nappe volatilité implicite EUR-JPY (5)

Identifiant	Nb.variables	MSE.app	TVaR0.95.MSE.app	MSE.test	TVaR0.95.MSE.test	Intercept	M	T	M*T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² *T	T ² *M
322	6	0,002044	0,006993946	5,35E-07	6,51E-06	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
281	6	0,001496522	0,00479564	5,63E-07	5,97E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
136	6	0,001484865	0,004760676	5,71E-07	6,04E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
318	6	0,001481148	0,004773799	5,95E-07	6,51E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
321	6	0,001938085	0,006735608	6,01E-07	6,31E-06	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
247	6	0,002024596	0,00688361	6,05E-07	7,45E-06	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0
316	5	0,002100843	0,007191011	6,36E-07	7,17E-06	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
208	6	0,001479315	0,004757926	6,41E-07	7,42E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
137	6	0,001505575	0,004755733	6,43E-07	6,52E-06	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0
245	6	0,001471819	0,004711986	6,46E-07	7,05E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
319	6	0,001502786	0,004766468	6,59E-07	6,59E-06	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
170	6	0,00147805	0,00475586	6,66E-07	7,43E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
210	6	0,003357756	0,009728007	6,92E-07	7,21E-06	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
134	5	0,002091683	0,007156177	6,97E-07	7,92E-06	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
320	6	0,00211517	0,006095415	6,98E-07	6,13E-06	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0
63	6	0,001471768	0,004647603	6,98E-07	8,66E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
209	6	0,001499712	0,004753522	7,20E-07	7,92E-06	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
211	6	0,002135751	0,006176368	7,24E-07	6,48E-06	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0
246	6	0,001491289	0,004706154	7,32E-07	7,62E-06	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0
205	5	0,003530702	0,010321859	8,18E-07	8,92E-06	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
35	7	0,001289555	0,004127619	7,81E-07	9,95E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
36	7	0,001459858	0,004936028	6,89E-07	7,58E-06	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0
37	7	0,001348982	0,004433468	7,77E-07	9,73E-06	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
242	5	0,002067986	0,007032889	8,19E-07	9,90E-06	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
203	5	0,002076989	0,007132664	8,28E-07	9,96E-06	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
34	6	0,001833237	0,005695006	8,29E-07	9,57E-06	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
133	5	0,00342193	0,010046508	8,31E-07	7,73E-06	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
212	6	0,002142859	0,006139498	8,37E-07	7,25E-06	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0
353	6	0,001455649	0,0046505	8,45E-07	1,09E-05	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
278	5	0,002075923	0,007107795	8,56E-07	1,10E-05	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
64	7	0,001349416	0,004352257	6,77E-07	8,50E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
65	7	0,001380731	0,004382141	5,53E-07	7,15E-06	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
66	7	0,001305362	0,004059424	6,81E-07	8,74E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
67	7	0,001377701	0,00442398	5,65E-07	7,45E-06	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
108	6	0,001922897	0,005499302	8,70E-07	1,04E-05	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1
107	6	0,001710815	0,005126996	8,81E-07	1,08E-05	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
202	5	0,003397861	0,009931061	8,83E-07	8,45E-06	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
105	6	0,001447937	0,004633711	8,87E-07	1,18E-05	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
279	5	0,001890152	0,005873828	9,05E-07	7,72E-06	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
317	5	0,001876414	0,005784617	9,05E-07	7,58E-06	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
206	5	0,002724186	0,00850161	9,15E-07	9,72E-06	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0
60	5	0,002064243	0,006994749	9,18E-07	1,26E-05	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
31	6	0,001451483	0,004717047	9,34E-07	1,25E-05	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
135	5	0,001873351	0,005803627	9,46E-07	7,71E-06	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
106	6	0,001467594	0,004622306	9,86E-07	1,27E-05	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0
101	5	0,003512938	0,010240939	1,01E-06	1,35E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
61	5	0,001875345	0,005755558	1,02E-06	1,05E-05	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
32	6	0,001469529	0,004695899	1,04E-06	1,34E-05	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0
109	7	0,001279322	0,004016304	7,57E-07	9,32E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
110	7	0,001647749	0,004909153	7,04E-07	9,01E-06	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0
111	7	0,001863419	0,005335348	7,07E-07	8,82E-06	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
27	5	0,003459652	0,010080839	1,05E-06	1,25E-05	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
243	5	0,001856021	0,005752298	1,06E-06	9,04E-06	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
204	5	0,001854919	0,005760196	1,07E-06	8,99E-06	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
102	5	0,00226349	0,007342753	1,08E-06	1,40E-05	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
29	5	0,003422681	0,010419934	1,11E-06	1,30E-05	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0
280	5	0,001884372	0,005972109	1,12E-06	1,19E-05	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
138	7	0,001366402	0,004467741	5,24E-07	5,54E-06	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

TABLE 5.20 – Sélection modèle nappe de volatilité implicite EUR-GBP (5-7 variables) (1)

Identifiant	Nb. variables	MSE.app	TVaR0.95.MSE.app	MSE.test	TVaR0.95.MSE.test	Intercept	M	T	M*T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² *T	T ² *M
139	7	0,001399295	0,004509886	4,23E-07	6,62E-06	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
140	7	0,001316317	0,004179849	5,79E-07	6,19E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
141	7	0,001350387	0,004374686	5,51E-07	6,18E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
142	7	0,001397754	0,00455915	4,36E-07	4,88E-06	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
33	6	0,001936312	0,006321651	1,13E-06	9,53E-06	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
244	5	0,001853681	0,005796141	1,16E-06	1,08E-05	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
22	5	0,003317507	0,009589097	1,17E-06	1,33E-05	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1
26	5	0,003187212	0,009570164	1,18E-06	1,42E-05	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
207	5	0,001851438	0,005829469	1,20E-06	1,12E-05	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
98	5	0,002029562	0,006917467	1,20E-06	1,67E-05	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0
171	7	0,001355981	0,004451745	6,09E-07	6,70E-06	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
172	7	0,00139589	0,004529645	5,04E-07	5,96E-06	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
173	7	0,00130753	0,004180292	6,62E-07	7,49E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
174	7	0,001337034	0,004342077	6,25E-07	7,07E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
175	7	0,00139534	0,004584614	5,18E-07	6,43E-06	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
166	5	0,001944545	0,006073886	1,21E-06	1,16E-05	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
30	5	0,002212832	0,007045049	1,22E-06	1,13E-05	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
167	5	0,002012161	0,006523915	1,23E-06	1,09E-05	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
62	5	0,001860892	0,005789495	1,23E-06	1,37E-05	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
168	5	0,001874076	0,005939419	1,29E-06	1,41E-05	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
351	5	0,001843829	0,005734963	1,31E-06	1,41E-05	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
103	5	0,002189479	0,00689395	1,32E-06	1,29E-05	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
28	5	0,002179282	0,006825893	1,43E-06	1,38E-05	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0
213	7	0,001365743	0,004485272	5,64E-07	6,05E-06	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
214	7	0,001398405	0,004523146	4,80E-07	5,96E-06	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
215	7	0,001303253	0,004137753	6,39E-07	7,55E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
216	7	0,001346467	0,004380828	5,68E-07	6,42E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
217	7	0,002086458	0,006095942	5,37E-07	4,85E-06	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
218	7	0,001389338	0,004544859	5,23E-07	6,70E-06	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
219	7	0,002048393	0,005989412	5,89E-07	5,89E-06	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
24	5	0,002005565	0,006487694	1,45E-06	1,53E-05	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0
352	5	0,001827109	0,005733192	1,47E-06	1,62E-05	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
99	5	0,001989738	0,006417123	1,49E-06	1,60E-05	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0
169	5	0,001869915	0,006043012	1,53E-06	1,82E-05	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
248	7	0,001350048	0,004413177	5,99E-07	6,48E-06	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
249	7	0,001394886	0,00450104	4,71E-07	5,44E-06	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
250	7	0,001295708	0,004108786	6,49E-07	7,16E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
251	7	0,001328143	0,004300204	6,39E-07	7,11E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
252	7	0,001392511	0,004541692	4,69E-07	5,43E-06	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
282	7	0,001378755	0,004521324	5,16E-07	5,38E-06	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
283	7	0,001403883	0,004522853	4,29E-07	4,50E-06	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
284	7	0,001332805	0,004230362	5,51E-07	6,24E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
285	7	0,00136756	0,004428878	5,35E-07	6,15E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
286	7	0,001401548	0,00456714	4,49E-07	4,92E-06	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
97	5	0,00187796	0,005791487	2,08E-06	2,78E-05	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
21	5	0,001875918	0,005790809	2,15E-06	2,81E-05	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
25	5	0,001797043	0,005583623	2,51E-06	3,72E-05	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
100	5	0,001789494	0,005538358	2,53E-06	3,77E-05	1	1	1	0	1	0	0	0	0	1
323	7	0,001370477	0,00448727	5,11E-07	5,15E-06	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
324	7	0,001393034	0,004521257	4,73E-07	5,52E-06	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
325	7	0,001309829	0,004176577	6,05E-07	6,88E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
326	7	0,001350027	0,004385217	5,31E-07	5,87E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
327	7	0,002059268	0,006017798	5,55E-07	4,90E-06	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
328	7	0,001392857	0,004572797	4,81E-07	5,75E-06	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
104	5	0,001778012	0,005580488	3,08E-06	4,89E-05	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
354	7	0,001278607	0,004040991	8,43E-07	1,09E-05	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0
355	7	0,001337352	0,004312747	6,96E-07	8,93E-06	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1

TABLE 5.21 – Sélection modèle nappe de volatilité implicite EUR-GBP (5-7 variables) (2)

Quatrième partie

Annexe

Identifiant	Nb.variables	MSE_app	TVaR0.95_MSE_app	MSE_test	TVaR0.95_MSE_test	Intercept	M	T	M*T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² *T	T ² *M
148	8	24,13444385	241,6747434	20,69074784	230,6069525	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
142	8	26,1569484	250,2157256	21,70011602	226,9696278	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
141	7	28,20255475	265,7799894	21,86594685	231,1641794	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
151	10	22,62278967	235,2054632	21,89726176	254,5657255	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
139	7	27,85084369	263,9653059	22,10958867	218,2817712	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0
144	8	25,51342275	253,0490278	22,11527038	236,084955	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
138	6	30,54214439	278,6039369	22,5500449	223,4057822	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
150	9	23,40166607	244,6261806	22,94934001	267,5895218	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
147	9	24,05114316	244,7402846	23,11975832	257,4883139	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
149	9	23,43132541	242,736647	23,20782369	263,1944308	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
37	10	19,98334287	210,9521168	23,66679991	253,6371643	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
33	9	21,74629217	219,8185705	23,7788353	251,9122094	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
48	8	21,64814527	223,0850766	23,84282286	256,0758592	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
146	9	24,28016885	249,42666	23,84398962	269,7543192	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
145	8	25,02825337	254,042923	23,87605105	262,2428882	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
68	8	21,27316504	208,6520644	24,0428681	268,1907754	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
49	10	20,83237897	214,2106521	24,05531024	263,2063819	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
47	9	21,62195667	220,2056945	24,05938797	257,3597526	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
36	9	20,99522635	222,6813592	24,24857578	262,8830745	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
46	8	22,77540064	228,2100749	24,34921618	257,122679	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
67	7	23,44816874	219,7579373	24,6156671	274,251686	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
140	7	25,97854446	258,2915835	24,69540568	266,3697472	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
116	10	18,37372991	187,3920046	24,73029852	287,1806081	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
143	8	24,87068833	252,0184434	24,79789124	265,0459668	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
35	9	21,10200682	220,6534676	24,84814331	253,6613911	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
28	7	23,80098327	236,6744949	25,23555747	263,7419013	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
32	8	21,74070315	225,6747104	25,2522872	268,0336692	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
115	9	19,29059174	198,2111431	25,2692103	291,2775613	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
30	8	22,94893819	232,21032	25,28388436	266,4149317	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
100	9	18,92125714	190,9047328	25,32133009	283,597795	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
29	8	22,8364033	228,6221241	25,45772555	253,631679	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
45	8	22,51869099	225,1085732	25,50550987	262,6057184	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
69	9	20,25474771	200,4894918	25,54608356	298,3887282	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
113	9	19,62798601	195,4603211	25,82792723	293,4828568	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
101	9	18,76210213	190,5615315	25,83493486	295,6928692	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
95	8	20,61154115	198,584753	25,83736639	284,0227699	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
34	9	20,76891339	213,2291604	25,93273649	279,866766	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
102	10	18,0628475	180,9722327	26,06816288	298,5072136	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
80	7	25,57595207	243,8679295	26,21847148	264,7872693	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
97	8	20,59375262	199,3772922	26,35139784	296,786824	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
44	7	23,65059561	232,9250189	26,45883453	269,3383257	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
114	9	19,17903343	193,8701474	26,49835061	293,3275815	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
98	8	19,65720861	195,5166903	26,60386844	294,2471809	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
111	8	20,05090318	201,397653	26,67626067	299,5042109	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
57	8	19,45730619	192,765933	26,8572076	301,1579834	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
58	9	18,69331274	184,7964946	26,89882166	311,3952416	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
112	9	19,40882947	193,0120479	26,92340169	302,7848795	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
94	7	21,6106297	206,1937392	26,9826506	296,0245492	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
60	10	18,0451299	182,0134995	27,11866982	315,9713872	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
59	9	18,61857094	187,6676082	27,46834242	321,6572042	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
125	8	20,10539254	204,342455	27,48453962	285,7129591	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
99	9	18,9916744	184,7969299	27,71341861	315,6021969	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
66	6	26,75201162	241,7948908	27,82024065	294,8660508	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
56	7	21,2506654	204,2504771	27,86571106	304,3900427	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
96	8	20,26305311	195,3987486	27,94105322	307,8870101	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0

TABLE 22 – Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite Equity (1)

Identifiant	Nb. variables	MSE_app	TVaR0.95_MSE_app	MSE_test	TVaR0.95_MSE_test	Intercept	M	T	M * T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² * T	T ² * M
26	6	32,57080989	299,3935251	28,06145747	283,3991916	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
79	7	23,49214466	234,0256709	28,086445	308,3903177	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
84	8	21,75934511	225,9895113	28,10859569	310,5523775	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
109	7	21,45017665	209,0623888	28,31818615	301,6634406	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
18	9	17,72217365	185,3235142	28,33604924	324,6589605	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
17	6	17,99734333	186,6292432	28,40290556	316,5216182	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
25	7	27,63965369	259,2324808	28,40640824	291,825321	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
27	6	30,12017581	276,9395132	28,60335768	284,6712767	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
12	8	19,39115744	193,7246375	28,6092467	322,2297233	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
123	7	21,52511825	211,9901277	28,65343232	293,2232394	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
129	9	18,91791436	197,5536054	28,71438894	307,1363596	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
19	10	16,77185699	172,6594269	28,86509356	331,258526	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	8	19,6010694	194,480935	29,05856128	316,9837042	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
15	9	18,41299631	181,4971662	29,05007045	333,1184842	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
110	8	20,14893953	198,3985622	29,26709545	310,0531803	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
43	6	27,33308523	259,059649	29,30407085	287,627759	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
14	8	18,77887609	192,6407675	29,35370362	330,2581956	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1
8	7	20,54376413	202,8714375	29,49864076	327,6340383	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
122	6	25,63181875	240,6823393	29,67289506	296,8356179	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
77	6	27,08089759	254,0345216	29,71699612	311,0086802	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
83	8	22,82708785	228,2280154	29,72509349	303,2194935	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
137	5	40,83459765	380,8056739	29,87558506	283,3019268	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
127	9	18,72397744	193,1936498	30,10189913	332,0188072	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
87	10	19,2045903	200,2860303	30,27260316	325,1763191	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
93	6	24,98578809	226,5429438	30,45810703	319,2346067	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
55	6	24,79854786	229,331298	30,51640932	318,6051719	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
108	6	25,22014665	232,8945743	30,53923956	312,6298681	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
16	9	17,47887957	175,3857344	30,74157204	350,788874	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
85	9	20,6255743	205,8441223	30,81068018	329,305153	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
128	9	18,41845186	185,013992	30,9074866	342,9302417	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
124	8	19,91477104	195,801584	30,93448257	331,3529465	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
130	10	17,02075789	174,5112718	30,98259395	346,1887438	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
126	9	18,66144265	189,8830809	31,13752504	333,5632585	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
11	8	19,10263939	190,8891543	31,28980171	343,442633	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
9	8	19,50021801	189,2364481	31,55619771	348,8544298	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
6	6	24,2592017	222,9426247	32,48465413	346,5899461	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
24	5	37,93725973	355,2361538	32,53204883	312,1234688	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
71	10	19,65855874	198,5822638	32,54190763	393,5527646	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
65	5	35,59423958	317,6685923	32,6427787	316,4964602	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
31	8	22,12751762	225,220779	32,73348032	364,8425052	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
13	8	18,86531535	187,9743801	32,99746362	364,053195	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
70	9	19,96040005	200,5649296	33,29343593	411,654423	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
54	5	34,97358726	324,4487409	34,25332598	329,3164899	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
7	7	20,6439251	201,643572	34,345484	370,8622175	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0
82	8	22,21440344	221,6304352	34,4427437	348,9302313	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
86	9	20,05575066	203,3209898	35,02366093	386,3307012	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
121	5	36,32272493	343,6503603	35,16454499	330,6353984	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
76	5	35,48842519	321,2241124	35,82714104	354,9262561	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
42	5	39,71754041	382,3769448	36,14120888	356,4300591	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
92	5	34,01298716	305,5440056	37,03596678	369,9330782	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
81	8	21,40800281	209,9042798	39,29806528	446,4839982	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
5	5	33,41632493	310,0242069	41,60976173	431,3487468	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
107	5	33,31025188	307,7316437	42,88064288	416,7557303	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
64	4	52,87843902	489,2864386	49,13078254	502,9270313	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
41	4	55,37994746	542,7738083	50,68469551	502,6958597	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0

TABLE 23 – Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite Equity (2)

Identifiant	Nb. variables	MSE.app	TVaR0.95.MSE.app	MSE.test	TVaR0.95.MSE.test	Intercept	M	T	M * T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² * T	T ² * M
78	7	23,3508697	230,0199458	53,5029779	671,8741379	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0
75	4	51,31697856	496,0193275	53,80297793	523,9838773	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
136	4	57,47317963	562,2774497	53,83060253	525,4867039	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
53	4	49,07365025	455,7178844	53,97161686	568,9998738	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
120	4	50,27734004	482,7753357	54,42414532	556,4596108	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
91	4	50,1518239	464,2257432	54,55924248	572,6332033	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
23	4	53,26812347	510,4142287	55,98369082	587,3473041	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
106	4	49,07382011	473,421804	61,17674058	632,5534144	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
4	4	46,00121506	438,3953652	63,35958348	672,4355736	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0
63	3	84,79953013	796,4556833	69,43065256	765,8083935	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
90	3	82,81690125	786,7029846	76,63962002	828,4959493	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
22	3	84,94330294	825,6121682	77,53783367	819,835456	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
40	3	84,5866093	813,6670685	78,21552699	812,8774664	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
52	3	78,66957955	735,7887885	83,27320322	913,7497353	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
135	3	90,97557317	906,7021567	86,64566054	914,8791271	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
74	3	79,51594861	780,9041343	88,12188276	923,2542943	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
105	3	77,41268026	748,3252337	88,14878491	932,008521	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
119	3	76,52066443	731,5173298	88,83006938	932,9796698	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	3	71,70809697	676,7473193	96,56486955	1025,323235	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
39	2	270,3996675	2484,733439	183,5447675	1676,084838	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
89	2	270,7679623	2527,03186	187,3256235	1811,979972	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
62	2	277,0070482	2598,398697	188,1498603	1970,285752	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
21	2	278,0968373	2614,830224	192,8577501	1952,832541	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
51	2	268,9398765	2555,615141	201,4150092	1973,688905	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
73	2	262,8340479	2479,753921	208,0194431	1956,051816	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
118	2	260,9867672	2507,921824	215,9493936	1972,964524	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	259,9201797	2477,734096	228,9969869	2297,008504	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
104	2	243,147973	2209,723799	259,7077532	2668,771371	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
132	2	267,3315152	2569,944779	268,8702973	2897,45704	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
134	2	596,7729228	3978,526302	367,2170696	2867,241514	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
133	2	500,7014302	3282,42465	367,9417868	2889,893363	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
61	1	1180,3183	8012,296903	583,2329305	4163,536376	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
103	1	1161,814629	8192,629175	623,1903033	4514,002368	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
50	1	1156,129848	7802,680807	635,913441	5060,553518	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1145,548032	7657,684419	668,1942936	5297,877925	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
88	1	1125,678464	7844,104518	710,6328398	5321,706796	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
117	1	1114,347754	7666,985693	734,656998	5443,055645	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
72	1	1096,55823	7442,920803	775,6984005	6169,68361	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
131	1	1112,622921	7790,653823	800,2424157	6167,660189	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
38	1	1076,035537	7757,708971	823,0231741	5365,981556	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20	1	1088,054454	7200,900991	827,1012089	6513,694504	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 24 – Sélection de modèle pour la nappe de volatilité implicite Equity (3)

Identifiant	Nb.variables	MSE.app	TVaRO.95.MSE.app	MSE.test	TVaRO.95.MSE.test	I	M	T	M * T	M ²	T ²	M ³	T ³	M ² * T	T ² * M
27	7	0,038014035	0,411544712	0,01893027	0,128434838	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0
1	7	0,037971746	0,410061792	0,019076118	0,131951825	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0
2	7	0,030254645	0,271239574	0,019195943	0,113028479	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
28	7	0,030192407	0,270146939	0,019427533	0,117745666	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0
3	7	0,024351693	0,173995939	0,020164706	0,123138392	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
29	7	0,024311793	0,174554908	0,020185685	0,122431541	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0
30	6	0,040126951	0,408384961	0,021819635	0,142323721	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
4	6	0,040152726	0,407282418	0,021839491	0,143685796	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
5	6	0,038652737	0,379100876	0,0222884906	0,151454832	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
31	6	0,038548371	0,377949204	0,023135936	0,156443829	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
6	5	0,051930428	0,561169009	0,024717245	0,168289302	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
32	5	0,051863117	0,560283973	0,024917256	0,173137715	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0
7	6	0,050209211	0,293557815	0,051326227	0,213204908	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0
33	6	0,050060735	0,292090647	0,051411976	0,211402433	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0
34	5	0,065833772	0,504399328	0,052388477	0,220386801	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
8	5	0,065935183	0,504612709	0,052453708	0,224564649	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0
9	6	0,051341449	0,278302904	0,053200905	0,216642024	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
35	6	0,051196567	0,277789085	0,053281044	0,214546968	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1
36	5	0,067402822	0,491355764	0,05464425	0,221285989	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
10	5	0,06749824	0,490503872	0,054695656	0,225228716	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
11	5	0,070806815	0,486416591	0,066309544	0,256986286	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
37	5	0,070676518	0,486515517	0,066317868	0,253269222	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1
12	6	0,049815218	0,291486601	0,075162045	0,345829891	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1
38	6	0,049740748	0,291248399	0,075225151	0,345790082	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1
13	5	0,068131817	0,486684646	0,075346079	0,305262651	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0
39	5	0,067958115	0,485738146	0,075384025	0,301759802	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0
14	6	0,049282107	0,296820486	0,079026673	0,334429402	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0
15	6	0,049134546	0,287079758	0,079173549	0,331911459	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
40	5	0,065455935	0,502128114	0,079361156	0,362061084	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
41	6	0,049139345	0,29612123	0,079376538	0,336554049	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0
16	5	0,065482522	0,501621097	0,079390052	0,362957099	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1
42	6	0,049016182	0,286980138	0,079445475	0,33424269	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
17	6	0,046351302	0,259693831	0,079523041	0,326593184	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
43	6	0,046216442	0,259819171	0,079871277	0,329283717	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
18	5	0,069966659	0,477787516	0,080118011	0,303052788	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
44	5	0,069794427	0,476884353	0,080216347	0,299400436	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
19	6	0,050320525	0,280322499	0,08075802	0,319323986	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1
45	6	0,05015403	0,279823953	0,081206838	0,324029865	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1
20	5	0,06083929	0,459773688	0,081325288	0,348724864	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
21	5	0,057333635	0,430903681	0,081705916	0,341217228	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
46	5	0,060627336	0,458371392	0,08184264	0,358110075	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
47	5	0,057124754	0,429224246	0,082219227	0,350505438	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0
22	5	0,060626979	0,451177374	0,083210742	0,332462812	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0
48	5	0,06041873	0,449175444	0,08373199	0,343644357	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0
23	5	0,058949469	0,35321659	0,086257051	0,363724857	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
49	5	0,058694722	0,351067257	0,086464083	0,362620151	1	1	0	1	0	0	0	1	1	0
24	5	0,05628624	0,33011735	0,087003055	0,361731381	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
50	5	0,056037754	0,327773138	0,087219633	0,360237239	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
25	5	0,06100607	0,352208719	0,088662384	0,357281696	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
51	5	0,060739217	0,349019652	0,088967643	0,356732488	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
26	5	0,063543497	0,344727519	0,092884666	0,354872243	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
52	5	0,063260679	0,341640881	0,093238617	0,352936741	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1

TABLE 25 – Résultats des indicateurs de sélection de modèle (5 à 7 variables) [Cap]

Id	Nb.var	MSE.a	TVar.a	MSE.t	TVar.t	I	M	T_α	T_β	MT_α	MT_β	$T_\alpha T_\beta$	M^2	T_α^2	T_β^2	$MT_\alpha T_\beta$	M^3	T_α^3	T_β^3	$M^2 T_\alpha$	$M^2 T_\beta$	$T_\alpha^2 M$	$T_\beta^2 M$	$T_\alpha^2 T_\beta$	$T_\alpha^2 M$	$T_\beta^2 M$	$T_\alpha^2 T_\beta$	
2892	18	0.041603878	0.476403891	0.002215265	0.027852254	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	
2860	19	0.041590862	0.477422152	0.002216486	0.027925963	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2890	20	0.041407035	0.473674585	0.002224655	0.02804612	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2896	17	0.042121387	0.486348098	0.002228821	0.027940517	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2869	18	0.042212066	0.476332991	0.002259179	0.028831018	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2894	16	0.048250519	0.583172179	0.002267295	0.029430839	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2861	15	0.048661751	0.586317106	0.002272979	0.029529293	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2866	13	0.053309343	0.653690675	0.002297201	0.030534475	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
775	12	0.118514038	1.883626271	0.00232368	0.03074286	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2859	15	0.044474424	0.504851501	0.002340609	0.029668719	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2862	14	0.050728509	0.609995657	0.002358544	0.030869527	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2404	12	0.116301483	1.855825603	0.002395461	0.031711046	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2408	12	0.05839534	0.687956868	0.00239987	0.031950081	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2495	12	0.07487591	1.05281408	0.002411742	0.031857923	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
774	11	0.121101119	1.915011655	0.002428385	0.032101318	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2395	11	0.064689959	0.76370057	0.002778467	0.03266802	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2717	11	0.083177936	1.118258008	0.002778467	0.035906793	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2419	10	0.129553294	1.974911075	0.002788769	0.03615183	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2643	12	0.0575965	0.681601833	0.002931475	0.03831849	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
766	12	0.0562173	0.661443066	0.00319633	0.039378686	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
763	11	0.060200221	0.717973661	0.003043966	0.039604577	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2528	10	0.125284037	1.932144446	0.003065938	0.039707621	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2398	10	0.092623109	1.211587129	0.003245612	0.042385881	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
128	9	0.138283748	2.049801198	0.003266192	0.042616378	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2500	10	0.072511379	0.841303216	0.003269365	0.042745913	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2707	12	0.057346816	0.658985699	0.003295057	0.043263149	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2539	11	0.061082145	0.70866004	0.003303661	0.043335942	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2439	12	0.05624192	0.638132838	0.003336082	0.043315524	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2422	10	0.070163354	0.796746423	0.00334929	0.043416887	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1286	9	0.136041498	2.014389446	0.003351203	0.043346065	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
131	9	0.095271338	1.244099098	0.003370676	0.043348236	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
777	11	0.06107788	0.707943589	0.003378634	0.043609273	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
777	11	0.140881263	2.079006397	0.003391534	0.04363236	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
132	9	0.07505201	0.874425386	0.003391584	0.043751131	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2741	11	0.059637009	0.689011302	0.003397301	0.044083852	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2442	10	0.063625087	0.740503592	0.003424591	0.044286504	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1355	8	0.130618098	1.582961691	0.003882993	0.052235636	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
158	9	0.06786589	0.775731809	0.00436344	0.056054765	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1461	8	0.118600531	1.347400432	0.004531605	0.057856882	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
194	9	0.065161401	0.739500962	0.004971179	0.063733273	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1381	8	0.106218907	1.175573374	0.005585284	0.069178911	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
39	7	0.224083593	2.938555935	0.005963109	0.077602139	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1	6	0.228478606	3.024465112	0.005999173	0.07775645	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
40	7	0.216794399	2.809366203	0.006339426	0.082045751	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2	6	0.22118939	2.893190515	0.006376486	0.082178221	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
304	9	0.064349313	0.690049455	0.006517757	0.083010883	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
778	8	0.103979741	1.047241757	0.006984413	0.085890018	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1501	7	0.16964119	2.213033842	0.007045343	0.086695035	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1498	7	0.160816041	1.772727566	0.007334241	0.093386223	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2877	5	0.340342244	4.239180142	0.009136917	0.113865426	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2867	5	0.297879969	3.663289942	0.009144037	0.120319257	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
1632	6	0.184816554	2.308384743	0.009571089	0.115135453	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2863	4	0.368608064	4.710066223	0.009741658	0.126659274	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
2880	3	0.474525279	5.881809813	0.00974688	0.139059109	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
67	7	0.171523																										

Id	Nb.var	MSE.CDS	TVaR0.95.MSE.CDS	Intercept	logit. λ	T	logit. λ * T	logit. λ^2	T ²	logit. λ^3	T ³	logit. λ^2 * T	T ² * logit. λ
14	8	7,92	32,76	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
13	7	8,08	33,32	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1
12	6	8,2	33,89	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0
11	5	8,42	35,04	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
8	4	8,53	35,66	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
10	4	8,55	35,62	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0
7	4	8,59	35,78	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
9	4	8,6	35,65	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0
6	3	8,62	35,81	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
5	3	8,64	35,89	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
4	2	8,67	36,06	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0
3	2	8,92	36,79	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
2	1	9,02	37,7	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	289,31	829,02	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 27 – Résultats des indicateurs de sélection de modèle [CDS Pays]

Id	Nb.var	MSE.CDS	TVaR0.95.MSE.CDS	Intercept	logit. λ	T	logit. $\lambda * T$	logit. λ^2	T ²	logit. λ^3	T ³	logit. $\lambda^2 * T$	T ² * logit. λ
21	9	1,9	6,82	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
20	9	1,93	6,95	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
19	8	1,94	6,96	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1
18	8	1,94	6,96	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1
17	7	1,98	7,13	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
16	6	2,09	7,56	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
15	6	2,1	7,56	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
14	5	2,11	7,62	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
13	5	2,12	7,66	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
12	5	2,14	7,77	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1
11	4	2,24	8,14	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
10	4	2,33	8,63	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0
9	4	2,4	8,97	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
8	3	2,42	8,99	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
7	3	2,45	9,09	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	3	2,45	9,1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
5	2	2,68	10,05	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
4	2	2,69	10,05	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
3	2	3,08	11,96	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
2	1	3,15	12,17	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	206,56	596,83	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

TABLE 28 – Résultats des indicateurs de sélection de modèle [CDS Rating]

Annexe A

Cadre de l'étude

A.1 Théorie et socles financiers

A.1.1 Lemme d'Itô unidimensionnel

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et B un mouvement brownien sur cet espace. Soit $t > 0$ et $X(t)$ un processus d'Itô unidimensionnel qui suit l'Equation Différentielle Stochastique (EDS) suivante :

$$\begin{cases} dX(t) = b_t dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Avec :

- b un processus adapté tel que $\int_0^t |b_s| ds < \infty$ presque sûrement.
- σ un processus adapté continue à droite et admettant une limite à gauche vérifiant $\mathbb{E} \left[\int_0^t \sigma_s^2 ds \right] < \infty \forall t$

Soit $f : (x, t) \rightarrow f(x, t)$ une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ dans \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 par rapport à t et de classe \mathcal{C}^2 par rapport à x , à dérivées bornées. Ainsi, il vient que :

$$df(t, X_t) = f'_t(t, X_t)dt + f'_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X_t)d\langle X \rangle_t \quad (\text{A.2})$$

Annexe B

Construction du générateur de scénarios économiques

B.1 Implémentation de modèles financiers

B.1.1 Le modèle de Bachelier (ou modèle normal)

Pricing d'un caplet et floorlet

On se place dans le cadre du modèle de Bachelier (ou modèle normal). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet.

Nous considérons un ensemble de date $\{T_0, T_1, \dots, T_{n-1}\}$. Par défaut, T_0 correspond à la première date de fixation. Nous nous basons sur les notations déjà utilisées dans les chapitres précédents auxquelles nous ajoutons :

- τ_i la mesure du temps séparant, T_{i-1} et T_i , $i > 0$.
- $F_i(t)$ le taux Libor forward pour la période $[T_{i-1}, T_i]$, $F_i(t) := F(t, T_{i-1}, T_i)$.
- $\sigma_{i,N}(t)$ la volatilité du processus déplacé $F_i(t)$.

Aussi, nous avons démontré dans la partie *Théorie et socles financiers* que le $i^{\text{ème}}$ taux forward $F_i(t)$ fixé en T_{i-1} est une martingale sous la mesure \mathbb{Q}^{T_i} :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_i}} [F(t, T_{i-1}, T_i) | \mathcal{F}_u] = F(u, T_{i-1}, T_i), \text{ avec } 0 \leq u \leq t \leq T_{i-1} \leq T_i \quad (\text{B.1})$$

Soit la dynamique du taux forward dans l'univers \mathbb{Q}^{T_i} -forward neutre en composition simple : $\forall t \in [0, T_i]$,

$$dF_i(t) = \sigma_{i,N}(t) dW_i^{T_i}(t), \text{ où } i \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{B.2})$$

Avec :

- $\sigma_N(t)$ la volatilité du processus déplacé ou volatilité normale sur l'intervalle $[0, T_i]$ avec $\sigma_{i,N}(t) > 0$ et de carré intégrable.
- $W_i^{T_i}$ est un $(\mathbb{F}, \mathbb{Q}^{T_i})$ mouvement brownien avec $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_{T_i})$ la filtration associée au mouvement brownien $W_i^{T_i}$.

La solution de cette équation donne :

$$F_i(t) = F_i(0) + \int_0^t \sigma_{i,N}(s) dW(s) \text{ soit } F_i(t) \sim \mathcal{N}(F_i(0), \sigma_{i,N}^2 t) \text{ avec } \sigma_{i,N}(s) = \sigma_{i,N}, \text{ } s \in [0, T_i] \quad (\text{B.3})$$

On considère un caplet de maturité de l'option T_i à l'instant t avec $V_{caplet_i}(T_{i+1}) = (F_i(T_i) - K)^+$ où $V_{caplet_i}(T_{i+1})$ est le dénouement en T_{i+1} . On rappelle le payoff d'un caplet pour un nominal de $N = 1$: $(F_i(T_i) - K)^+$ et on note $\sigma_{i,N}$ la volatilité du $i^{\text{ème}}$ caplet.

On fait un changement de numéraire via le théorème de changement de numéraire énoncé dans la section *Théorie et socles financiers* en considérant le numéraire : $P(\cdot, T_{i+1})$.

On a donc d'après le théorème de valorisation des actifs financiers :

$$V_{caplet_i}(t) = P(t, T_{i+1}) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_i}}((F_i(T_i) - K)^+ | \mathcal{F}_t), \quad \forall t \leq T_i \quad (\text{B.4})$$

puis, nous avons :

$$V_{caplet_i}^{BACH}(t) = P(t, T_{i+1}) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_i}}((u + \sigma_{i,N}(W_{T_i}^{T_i} - W_t^{T_i}) - K)^+ / u = F_i(t)) \quad (\text{B.5})$$

$$= P(t, T_{i+1}) \int_{\{u + \sigma_{i,N}(W_{T_i}^{T_i} - W_t^{T_i}) \geq K\}} (u + \sigma_{i,N}(W_{T_i}^{T_i} - W_t^{T_i}) - K) d\mathbb{Q}^{T_i} / u = F_i(t) \quad (\text{B.6})$$

$$= \int_{\{u + \sigma_{i,N}\sqrt{T_i-t}W_1 \geq K\}} (u + \sigma_{i,N}\sqrt{T_i-t}W_1) dP - \int_{\{u + \sigma_{i,N}\sqrt{T_i-t}W_1 \geq K\}} K dP / u = F_i(t) \quad (\text{B.7})$$

car :

- $W_{T_i}^{T_i} - W_t^{T_i}$ sont indépendants sous \mathbb{Q}^{T_i} (puisque W^{T_i} est un mouvement brownien sous \mathbb{Q}^{T_i}).
- sous \mathbb{Q}^{T_i} , $W_{T_i}^{T_i} - W_t^{T_i}$ suit la même loi que $\sqrt{T_i-t}W_1$ sous P ($W_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$).

Ainsi, nous posons :

$$A = \int_{\{u + \sigma_{i,N}\sqrt{T_i-t}W_1 \geq K\}} (u + \sigma_{i,N}\sqrt{T_i-t}W_1) dP / u = F_i(t) \quad (\text{B.8})$$

$$B = - \int_{\{u + \sigma_{i,N}\sqrt{T_i-t}W_1 \geq K\}} K dP / u = F_i(t) \quad (\text{B.9})$$

Calculons A et B séparément :

$$A = \int_{\{u + \sigma_{i,N}\sqrt{T_i-t}W_1 \geq K\}} (u + \sigma_{i,N}\sqrt{T_i-t}W_1) dP / u = F_i(t) \quad (\text{B.10})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{u + \sigma_{i,N}\sqrt{T_i-t}W_1 \geq K\}} (u + \sigma_{i,N}\sqrt{T_i-t}y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy / u = F_i(t) \quad (\text{B.11})$$

$$= u \mathbb{P}\left(-W_1 \leq \frac{u - K}{\sigma_{i,N}\sqrt{T_i-t}}\right) + \sigma_{i,N}\sqrt{T_i-t} N' \left(\frac{u - K}{\sigma_{i,N}\sqrt{T_i-t}} \right) / u = F_i(t) \quad (\text{B.12})$$

$$= u N \left(\frac{u - K}{\sigma_{i,N}\sqrt{T_i-t}} \right) + \sigma_{i,N}\sqrt{T_i-t} N' \left(\frac{u - K}{\sigma_{i,N}\sqrt{T_i-t}} \right) / u = F_i(t) \quad (\text{B.13})$$

car sous P , $(-W_1)$ suit la même loi $\mathcal{N}(0, 1)$ que $W_{T_i}^{T_i} - W_t^{T_i}$

De même,

$$B = - \int_{\{u + \sigma_{i,N} \sqrt{T_i - t} W_1 \geq K\}} K dP \quad / u = F_i(t) \quad (\text{B.14})$$

$$= -K \mathbb{P} \left(-W_1 \leq \frac{u - K}{\sigma_{i,N} \sqrt{T_i - t}} \right) \quad / u = F_i(t) \quad (\text{B.15})$$

$$= -KN \left(\frac{u - K}{\sigma_{i,N} \sqrt{T_i - t}} \right) \quad / u = F_i(t) \quad (\text{B.16})$$

Finalement, $\forall t \leq T_i$

$$V_{\text{caplet}_i}^{BACH}(t) = P(t, T_{i+1}) \left[(F_i(t) - K)N \left(\frac{F_i(t) - K}{\sigma_{i,N} \sqrt{T_i}} \right) + \sigma_{i,N} \sqrt{T_i} N' \left(\frac{F_i(t) - K}{\sigma_{i,N} \sqrt{T_i}} \right) \right] \quad (\text{B.17})$$

On pose $d_i = \frac{F_i(t) - K}{\sigma_{i,N} \sqrt{T_i}}$ et $v_i = \sigma_{i,N} \sqrt{T_i}$ et on obtient :

$$V_{\text{caplet}_i}^{BACH}(t) = P(t, T_{i+1}) (d_i v_i N(d_i) + v_i N'(d_i)) \quad (\text{B.18})$$

Dans le cas où $F_i(t) = K$ alors $V_{\text{caplet}_i}^{BACH}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} P(t, T_{i+1}) v_i$.

Pour le pricing du floorlet, on adapte la preuve précédente (il suffit de remplacer d_i par $-d_i$ dans la formule finale) : $\forall t \leq T_i$

$$V_{\text{floorlet}_i}^{BACH}(t) = P(t, T_{i+1}) (-d_i v_i N(-d_i) + v_i N'(-d_i)) \quad (\text{B.19})$$

Pricing d'un cap et floor

Un cap étant une séquence de caplet décalés dans le temps, on obtient via le résultat précédent : $\forall t \leq T_i$

$$V_{\text{Cap}}^{BACH}(t, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} V_{\text{caplet}_{i-1}}^{BACH}(t, K, \sigma_{\alpha,\beta,N}) \quad (\text{B.20})$$

où :

- α est la date d'expiration du 1^{er} caplet.
- β est la date de réalisation du dernier caplet.
- $\sigma_{\alpha,\beta,N}$ est la volatilité normale auquel est côté le cap du marché ; $\sigma_{\alpha,\beta,N} = \sqrt{T_i} \sigma_{i,N}$ où $\sigma_{i,N}$ est la volatilité normale des caplet.

Pour le pricing d'un cap, il est soit possible de prendre la volatilité du cap de maturité T_α et de tenor $T_\beta - T_\alpha$ (une seule volatilité) soit une succession de volatilités de caplet pour chaque pas de temps (que l'on extrait par la méthode de *stripping*).

De manière analogue, un floor étant une séquence de floorlet décalé dans le temps, on obtient via le résultat précédent : $\forall t \leq T_i$

$$V_{Floor_i}^{BACH}(t, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} V_{floorlet_{i-1}}^{BACH}(t, K, \sigma_{\alpha, \beta, N}^f) \quad (\text{B.21})$$

où :

- α est la date d'expiration du 1^{er} floorlet.
- β est la date de réalisation du dernier floorlet.
- $\sigma_{\alpha, \beta, N}^f$ est la volatilité normale auquel est coté le floor du marché avec $\sigma_{\alpha, \beta, N}^f = \sqrt{T_i} \sigma_{i, N}^f$ où $\sigma_{i, N}^f$ est la volatilité normale des floorlet.

Vega d'un cap

On se place dans le cadre du modèle de Bachelier (ou modèle normal). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet.

Nous considérons un ensemble de date $\{T_0, T_1, \dots, T_{n-1}\}$. Par défaut, T_0 correspond à la première date de fixation. Nous nous basons sur les notations déjà utilisées dans les chapitres précédents auxquelles nous ajoutons :

- τ_i la mesure du temps séparant, T_{i-1} et T_i , $i > 0$.
- $F_i(t)$ le taux Libor forward pour la période $[T_{i-1}, T_i]$, $F_i(t) := F(t, T_{i-1}, T_i)$.
- $\sigma_{i, N}(t)$ la volatilité du processus déplacé $F_i(t)$.

Aussi, nous avons démontré dans la partie *Théorie et socles financiers* que le $i^{\text{ème}}$ taux forward $F_i(t)$ fixé en T_{i-1} est une martingale sous la mesure \mathbb{Q}^{T_i} :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_i}} [F(t, T_{i-1}, T_i) | \mathcal{F}_u] = F(u, T_{i-1}, T_i), \quad \text{avec } 0 \leq u \leq t \leq T_{i-1} \leq T_i \quad (\text{B.22})$$

Soit la dynamique du taux forward dans l'univers \mathbb{Q}^{T_i} -forward neutre en composition simple : $\forall t \in [0, T_i]$,

$$dF_i(t) = \sigma_{i, N}(t) dW_i^{T_i}(t), \quad \text{où } i \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{B.23})$$

Avec :

- $\sigma_N(t)$ la volatilité du processus déplacé ou volatilité normale sur l'intervalle $[0, T_i]$ avec $\sigma_{i, N}(t) > 0$ et de carré intégrable.
- $W_i^{T_i}$ est un $(\mathbb{F}, \mathbb{Q}^{T_i})$ mouvement brownien avec $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_{T_i})$ la filtration associée au mouvement brownien $W_i^{T_i}$.

La solution de cette équation donne :

$$F_i(t) = F_i(0) + \int_0^t \sigma_{i, N}(s) dW(s) \quad \text{soit } F_i(t) \sim \mathcal{N}(F_i(0), \sigma_{i, N}^2 t) \quad \text{avec } \sigma_{i, N}(s) = \sigma_{i, N}, \quad s \in [0, T_i] \quad (\text{B.24})$$

On considère un caplet de maturité de l'option T_i à l'instant t avec $V_{caplet_i}(T_{i+1}) = (F_i(T_i) - K)^+$ où $V_{caplet_i}(T_{i+1})$ est le dénouement en T_{i+1} . On rappelle le payoff d'un caplet pour un nominal de $N = 1$: $(F_i(T_i) - K)^+$ et on note $\sigma_{i, N}$ la volatilité du $i^{\text{ème}}$ caplet.

D'après le paragraphe précédent : $\forall t \leq T_i$

$$V_{Cap}^{BACH}(t, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} V_{caplet_{i-1}}^{BACH}(t, K, \sigma_{i,N}) \quad (\text{B.25})$$

Donc le vega d'un cap est tout simplement la composition linéaire de vega de caplet. D'où :

$$v_{Cap} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} v_{caplet_i} \quad (\text{B.26})$$

Cela revient donc à calculer le vega d'un caplet et on utilise alors la formule plus explicite :

$$V_{caplet_i}^{BACH}(0) = P(0, T_{i+1})((F_i(0) - K)N(d_i) + \sigma_{i,N}\sqrt{T_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_i^2}{2}}) \quad (\text{B.27})$$

Avec : $d_i = \frac{F_i(0) - K}{\sigma_{i,N}\sqrt{T_i}}$ et $v_i = \sigma_{i,N}\sqrt{T_i}$ ($\sigma_{i,N}$ est la volatilité du $i^{\text{ème}}$ caplet).

On pose :

$$I_1 = (F_i(0) - K)N(d_i) \quad (\text{B.28})$$

$$I_2 = \sigma_{i,N}\sqrt{T_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_i^2}{2}} \quad (\text{B.29})$$

Calculons $\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{i,N}}$ et $\frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{i,N}}$ séparément :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{i,N}} = -(F_i(0) - K)\frac{\partial d_i}{\partial \sigma_{i,N}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_i^2}{2}} \quad (\text{B.30})$$

$$= -(F_i(0) - K)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_i^2}{2}}\frac{(F_i(0) - K)}{\sigma_{i,N}^2\sqrt{T_i}} \quad (\text{B.31})$$

$$= -\frac{(F_i(0) - K)^2}{\sigma_{i,N}^2\sqrt{T_i}}N'(d_i) \quad (\text{B.32})$$

$$= -\sqrt{T_i}d_i^2N'(d_i) \quad (\text{B.33})$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{i,N}} = \sqrt{T_i}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_i^2}{2}} - \sigma_{i,N}d_i\frac{\partial d_i}{\partial \sigma_{i,N}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_i^2}{2}} \quad (\text{B.34})$$

$$= \sqrt{T_i}N'(d_i) + \frac{(F_i(0) - K)^2}{\sigma_{i,N}^2T_i}N'(d_i) \quad (\text{B.35})$$

$$= \sqrt{T_i}N'(d_i) + d_i^2\sqrt{T_i}N'(d_i) \quad (\text{B.36})$$

$$= \sqrt{T_i}N'(d_i)(1 + d_i^2) \quad (\text{B.37})$$

On obtient alors :

$$v_{caplet_i} = \frac{\partial V_{caplet_i}^{BACH}(0)}{\partial \sigma_{i,N}} = P(0, T_{i+1})\left(\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{i,N}} + \frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{i,N}}\right) \quad (\text{B.38})$$

$$(\text{B.39})$$

$$v_{caplet_i} = P(0, T_{i+1}) \sqrt{T_i} N'(d_i) \quad (\text{B.40})$$

Finalement, on obtient la formule du Vega d'un caplet en 0 de formule explicite :

$$v_{caplet_i} = P(0, T_{i+1}) \sqrt{T_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{(F_i(0)-K)}{\sigma_{i,N}\sqrt{T_i}}\right)^2/2} \quad (\text{B.41})$$

Par composition linéaire de vega de caplet, on en déduit le vega d'un cap en 0 :

$$v_{Cap} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} P(0, T_{i+1}) \sqrt{T_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{(F_i(0)-K)}{\sigma_{i,N}\sqrt{T_i}}\right)^2/2} \quad (\text{B.42})$$

Pricing d'une swaption

On se place dans le cadre du modèle de Bachelier (ou modèle normal). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet. Nous supposons également que le taux swap de maturité T_α et de tenor $T_\beta - T_\alpha$ suit une distribution normale d'écart-type $\sigma_{\alpha,\beta,N}$ ($S_{\alpha,\beta} \sim \mathcal{N}(S_{\alpha,\beta}(0), \sigma_{\alpha,\beta,N}^2 T_\alpha)$) et nous nous plaçons sous la mesure $\mathbb{Q}^{\alpha,\beta}$ dont le numéraire est : $C_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i)$.

Dans cet univers $(S_{\alpha,\beta})_{t>0}$ est une martingale.

Nous travaillons alors avec le modèle suivant :

$$dS_{\alpha,\beta}(t) = \sigma_{\alpha,\beta,N}(t) dW^{\alpha,\beta}(t), \quad t \leq T_\alpha \quad (\text{B.43})$$

Avec : $\sigma_{\alpha,\beta,N}$ la volatilité normale du taux swap.

La solution de cette équation donne :

$$S_{\alpha,\beta}(t) = S_{\alpha,\beta}(0) + \int_0^t \sigma_{\alpha,\beta,N}(s) dW^{\alpha,\beta}(s) \text{ soit } S_{\alpha,\beta}(t) \sim \mathcal{N}(S_{\alpha,\beta}(0), \sigma_{\alpha,\beta,N}^2 t) \quad (\text{B.44})$$

avec $\sigma_{\alpha,\beta,N}(s) = \sigma_{\alpha,\beta,N}$, $s \leq T_\alpha$.

On considère une swaption payeuse de maturité T_α de tenor $T_\beta - T_\alpha$ et de strike K . On rappelle le payoff d'une swaption payeuse en t pour un nominal de $N = 1$:

$$D(t, T_\alpha)(S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K)^+ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i) \quad (\text{B.45})$$

On fait un changement de numéraire via le théorème de changement de numéraire énoncé dans la section *Théorie et socles financiers* en considérant le numéraire : $\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(\cdot, T_i)$ que l'on avait noté $C_{\alpha,\beta}(\cdot)$ avec $\tau_i = T_i - T_{i-1}$.

On a donc d'après le théorème de valorisation des actifs financiers : $\forall t \leq T_\alpha$

$$PS_P^{BACH}(t) = C_{\alpha,\beta}(t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{\alpha,\beta}}((S_{\alpha,\beta}(T_\alpha) - K)^+ | \mathcal{F}_t) \quad (\text{B.46})$$

puis, si on utilise que W_1 a la densité $\phi_{0,1}(y)$, nous avons :

$$PS_P^{BACH}(t) = C_{\alpha,\beta}(t) \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{\alpha,\beta}}((u + \sigma_{\alpha,\beta,N}(W_{T_\alpha}^{\alpha,\beta} - W_t^{\alpha,\beta}) - K)^+) / u = S_{\alpha,\beta}(t) \quad (\text{B.47})$$

$$= C_{\alpha,\beta}(t) \int_{\{u + \sigma_{\alpha,\beta,N}(W_{T_\alpha}^{\alpha,\beta} - W_t^{\alpha,\beta}) \geq K\}} (u + \sigma_{\alpha,\beta,N}(W_{T_\alpha}^{\alpha,\beta} - W_t^{\alpha,\beta}) - K) d\mathbb{Q}^{\alpha,\beta} / u = S_{\alpha,\beta}(t) \quad (\text{B.48})$$

$$= \int_{\{u + \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}y \geq K\}} (u + \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}y) dP - \int_{\{u + \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}y \geq K\}} K dP / u = S_{\alpha,\beta}(t) \quad (\text{B.49})$$

car :

- $W_{T_\alpha}^{\alpha,\beta} - W_t^{\alpha,\beta}$ sont indépendants sous $\mathbb{Q}_{\alpha,\beta}$ (puisque $W^{\alpha,\beta}$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}_{\alpha,\beta}$).
- sous $\mathbb{Q}_{\alpha,\beta}$, $W_{T_\alpha}^{\alpha,\beta} - W_t^{\alpha,\beta}$ suit la même loi que $\sqrt{T_\alpha - t}W_1$ sous P ($W_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$).

Ainsi, nous posons :

$$A = \int_{\{u + \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}y \geq K\}} (u + \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}y) dP / u = S_{\alpha,\beta}(t) \quad (\text{B.50})$$

$$B = - \int_{\{u + \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}y \geq K\}} K dP / u = S_{\alpha,\beta}(t) \quad (\text{B.51})$$

Calculons A et B séparément :

$$A = \int_{\{u + \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}W_1 \geq K\}} (u + \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}W_1) dP / u = S_{\alpha,\beta}(t) \quad (\text{B.52})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{u + \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}W_1 \geq K\}} (u + \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy / u = S_{\alpha,\beta}(t) \quad (\text{B.53})$$

$$= u\mathbb{P}\left(-W_1 \leq \frac{u - K}{\sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}}\right) + \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}N'\left(\frac{u - K}{\sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}}\right) / u = S_{\alpha,\beta}(t) \quad (\text{B.54})$$

$$= uN\left(\frac{u - K}{\sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}}\right) + \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}N'\left(\frac{u - K}{\sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}}\right) / u = S_{\alpha,\beta}(t) \quad (\text{B.55})$$

Car sous P ($-W_1$) suit la même loi $\mathcal{N}(0, T_\alpha - t)$ que $W_{T_\alpha}^{\alpha,\beta} - W_t^{\alpha,\beta}$

De même,

$$B = - \int_{\{u + \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}W_1 \geq K\}} K dP / u = S_{\alpha,\beta}(t) \quad (\text{B.56})$$

$$= -K\mathbb{P}\left(-W_1 \leq \frac{u - K}{\sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}}\right) / u = S_{\alpha,\beta}(t) \quad (\text{B.57})$$

$$= -KN\left(\frac{u - K}{\sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha - t}}\right) / u = S_{\alpha,\beta}(t) \quad (\text{B.58})$$

Finalement, $\forall t \leq T_\alpha$:

$$PS_P^{BACH}(t) = C_{\alpha,\beta}(t) \left[(S_{\alpha,\beta}(t) - K)N \left(\frac{S_{\alpha,\beta}(t) - K}{\sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha}} \right) + \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha}N' \left(\frac{S_{\alpha,\beta}(t) - K}{\sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha}} \right) \right] \quad (\text{B.59})$$

On pose $d_{\alpha,\beta} = \frac{S_{\alpha,\beta}(t) - K}{\sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha}}$ et $v_{\alpha,\beta} = \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha}$ et on obtient :

$$PS_P^{BACH}(t) = C_{\alpha,\beta}(t)(d_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}N(d_{\alpha,\beta}) + v_{\alpha,\beta}N'(d_{\alpha,\beta})) \quad (\text{B.60})$$

Où $\sigma_{\alpha,\beta,N}$ est la volatilité normale de la swaption de maturité T_α et de tenor $T_\alpha - T_\beta$.

Dans le cas où $S_{\alpha,\beta}(t) = K$ alors $PS_P^{BACH}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}C_{\alpha,\beta}(t)v_{\alpha,\beta}$. (valable aussi pour la swaption receveuse)

Pour le pricing de la swaption receveuse, on adapte la preuve précédente (il suffit de remplacer $d_{\alpha,\beta}$ par $-d_{\alpha,\beta}$ dans la formule finale) :

$$PS_R^{BACH}(t) = C_{\alpha,\beta}(t)(-d_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}N(-d_{\alpha,\beta}) + v_{\alpha,\beta}N'(-d_{\alpha,\beta})) \quad (\text{B.61})$$

Vega d'une swaption

On se place dans le cadre du modèle de Bachelier (ou modèle normal). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé complet. Comme précédemment, nous supposons que le taux swap de maturité T_α et de tenor $T_\beta - T_\alpha$ suit une distribution normale d'écart-type $\sigma_{\alpha,\beta,N}$ ($S_{\alpha,\beta} \sim \mathcal{N}(S_{0,\alpha,\beta}, \sigma_{\alpha,\beta,N}^2 T_\alpha)$) et nous nous plaçons sous la mesure $\mathbb{Q}^{\alpha,\beta}$:

$$dS_{\alpha,\beta}(t) = \sigma_{\alpha,\beta,N}(t)dW^{\alpha,\beta}(t) \quad (\text{B.62})$$

Avec : $\sigma_{\alpha,\beta,N}$ la volatilité normale du taux swap.

Et de solution :

$$S_{\alpha,\beta}(t) = S_{\alpha,\beta}(0) + \int_0^t \sigma_{\alpha,\beta,N}(s)dW^{\alpha,\beta}(s) \text{ soit } S_{\alpha,\beta}(t) \sim \mathcal{N}(S_{\alpha,\beta}(0), \sigma_{\alpha,\beta,N}^2 t) \quad (\text{B.63})$$

avec $\sigma_{\alpha,\beta,N}(s) = \sigma_{\alpha,\beta,N}$, $s \in [0, T_\alpha]$ On rappelle le prix d'une swaption payeuse de maturité T_α de tenor $T_\beta - T_\alpha$ et de strike K en 0 pour un nominal de $N = 1$:

$$PS_P^{BACH}(0) = C_{\alpha,\beta}(0)(d_{\alpha,\beta}v_{\alpha,\beta}N(d_{\alpha,\beta}) + v_{\alpha,\beta}N'(d_{\alpha,\beta})) \quad (\text{B.64})$$

Avec : $d_{\alpha,\beta} = \frac{S_{\alpha,\beta}(0) - K}{\sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha}}$, $v_{\alpha,\beta} = \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha}$ et $C_{\alpha,\beta}(0) = \sum_{i=\alpha+1}^\beta \tau_i P(0, T_i)$

Pour calculer le vega d'une swaption payeuse, on travaille avec la formule suivante plus explicite :

$$PS_P^{BACH}(0) = C_{\alpha,\beta}(0)((S_{\alpha,\beta}(0) - K)N(d_{\alpha,\beta}) + \sigma_{\alpha,\beta,N}\sqrt{T_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d_{\alpha,\beta}^2}{2}}) \quad (\text{B.65})$$

On pose :

$$I_1 = (S_{\alpha,\beta}(0) - K)N(d_{\alpha,\beta}) \quad (\text{B.66})$$

$$I_2 = \sigma_{\alpha,\beta,N} \sqrt{T_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{\alpha,\beta}^2}{2}} \quad (\text{B.67})$$

Calculons $\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{\alpha,\beta,N}}$ et $\frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{\alpha,\beta,N}}$ séparément :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{\alpha,\beta,N}} = -(S_{\alpha,\beta}(0) - K) \frac{\partial d_{\alpha,\beta}}{\partial \sigma_{\alpha,\beta,N}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{\alpha,\beta}^2}{2}} \quad (\text{B.68})$$

$$= -(S_{\alpha,\beta}(0) - K) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{\alpha,\beta}^2}{2}} \frac{(S_{\alpha,\beta}(0) - K)}{\sigma_{\alpha,\beta,N}^2 \sqrt{T_\alpha}} \quad (\text{B.69})$$

$$= -\frac{(S_{\alpha,\beta}(0) - K)^2}{\sigma_{\alpha,\beta,N}^2 \sqrt{T_\alpha}} N'(d_{\alpha,\beta}) \quad (\text{B.70})$$

$$= -d_{\alpha,\beta}^2 \sqrt{T_\alpha} N'(d_{\alpha,\beta}) \quad (\text{B.71})$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{\alpha,\beta,N}} = \sqrt{T_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{\alpha,\beta}^2}{2}} - \sigma_{\alpha,\beta,N} d_{\alpha,\beta} \frac{\partial d_{\alpha,\beta}}{\partial \sigma_{\alpha,\beta,N}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_{\alpha,\beta}^2}{2}} \quad (\text{B.72})$$

$$= \sqrt{T_\alpha} N'(d_{\alpha,\beta}) + \frac{(S_{\alpha,\beta}(0) - K)^2}{\sigma_{\alpha,\beta,N} \sqrt{T_\alpha}} N'(d_{\alpha,\beta}) \quad (\text{B.73})$$

$$= \sqrt{T_\alpha} N'(d_{\alpha,\beta}) + d_{\alpha,\beta}^2 \sqrt{T_\alpha} N'(d_{\alpha,\beta}) \quad (\text{B.74})$$

$$= \sqrt{T_\alpha} N'(d_{\alpha,\beta}) (1 + d_{\alpha,\beta}^2) \quad (\text{B.75})$$

On obtient alors :

$$v_{\text{Swaption}} = \frac{\partial PS_P^{\text{BACH}}(0)}{\partial \sigma_{\alpha,\beta,N}} = C_{\alpha,\beta}(0) \left(\frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{\alpha,\beta,N}} + \frac{\partial I_2}{\partial \sigma_{\alpha,\beta,N}} \right) \quad (\text{B.76})$$

$$v_{\text{Swaption}} = C_{\alpha,\beta}(0) \sqrt{T_\alpha} N'(d_{\alpha,\beta}) \quad (\text{B.77})$$

Finalement, on obtient la formule du Vega d'une swaption payeuse en 0 de formule explicite :

$$v_{\text{Swaption}} = \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i) \sqrt{T_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{(S_{\alpha,\beta}(0)-K)}{\sigma_{\alpha,\beta,N} \sqrt{T_\alpha}}\right)^2 / 2} \quad (\text{B.78})$$

B.1.2 Algorithme de Newton

Théorème d'optimisation général

Soit f une fonction définie sur un intervalle \mathcal{I} et $n \in \mathbb{N}$. Un point de départ doit être choisi dans l'algorithme de Newton. Soit x_n ce point de départ, supposé proche de l'optimum de la fonction. Le point cherché est x_{n+1} tel que $f(x_{n+1}) = 0$.

En effectuant un développement de Taylor du premier ordre de la fonction, nous avons :

$$f(x_{n+1}) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \quad (\text{B.79})$$

D'où :

$$f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \approx 0 \quad (\text{B.80})$$

La relation de récurrence est donc :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (\text{B.81})$$

L'algorithme s'arrête lorsque la condition suivante est réalisée (convergence de l'algorithme de Newton) : $\epsilon > 0$ tel que

$$|x_{n+1} - x_n| < \epsilon \quad (\text{B.82})$$

Application à la volatilité implicite

Soit $C(S, K, \sigma)$ le prix d'une option d'achat de strike K sur le sous-jacent S avec comme volatilité implicite σ noté $C(\sigma)$ pour la suite.

Le vega de l'option est :

$$\partial_\sigma C(\sigma) := \frac{\partial}{\partial \sigma} C(\sigma) \quad (\text{B.83})$$

L'intérêt est de trouver σ_{imp} tel que $C(\sigma_{imp}) = C^{marché}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, le point de départ de l'algorithme de Newton est σ_0 , supposé proche de σ_{imp} et nous utilisons la fonction de récurrence appliquée à la volatilité implicite :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{C(\sigma_n) - C^{marché}}{\partial_\sigma C(\sigma_n)} \quad (\text{B.84})$$

Si $|\sigma_{n+1} - \sigma_n| > \epsilon$, nous calculons σ_{n+2} .

Sinon l'algorithme s'arrête et nous avons $\sigma_{impl} \approx \sigma_{n+1}$

B.2 Calibration paramétrique de l'intensité de défaut

Le cadre théorique est celui mentionné dans le mémoire dans la théorie du LMN. Par analogie aux autres études réalisées sur les nappes de volatilité implicite, l'utilisation de la dérivée du prix de la prime de CDS par rapport à l'intensité de défaut est sollicitée. Nous rappelons l'expression du prix de la prime de CDS :

$$s = \frac{w \int_0^T e^{B(t)\lambda_0} D(0, t)(G(t) + H(t)\lambda_0) dt}{\int_0^T A(t) e^{B(t)\lambda_0} D(0, t) dt} \quad (\text{B.85})$$

Ainsi :

$$\frac{\partial s}{\partial \lambda_0} = \frac{w \left[\int_0^T B(t) e^{B(t)\lambda_0} D(0, t) (G(t) + H(t)\lambda_0) dt + \int_0^T e^{B(t)\lambda_0} D(0, t) H(t) dt \right]}{\int_0^T A(t) e^{B(t)\lambda_0} D(0, t) dt} \quad (\text{B.86})$$

$$- \frac{w \left[\int_0^T e^{B(t)\lambda_0} D(0, t) (G(t) + H(t)\lambda_0) dt * \int_0^T A(t) B(t) e^{B(t)\lambda_0} D(0, t) dt \right]}{\left(\int_0^T A(t) e^{B(t)\lambda_0} D(0, t) dt \right)^2} \quad (\text{B.87})$$

$$= \frac{w \int_0^T B(t) e^{B(t)\lambda_0} D(0, t) [B(t)G(t) + B(t)H(t)\lambda_0 + H(t)] dt - s \int_0^T A(t) B(t) e^{B(t)\lambda_0} D(0, t) dt}{\int_0^T A(t) e^{B(t)\lambda_0} D(0, t) dt} \quad (\text{B.88})$$

$$= \frac{\int_0^T e^{B(t)\lambda_0} D(0, t) (w(B(t)[G(t) + H(t)\lambda_0] + H(t)) - sA(t)B(t)) dt}{\int_0^T A(t) e^{B(t)\lambda_0} D(0, t) dt} \quad (\text{B.89})$$

Finalement, la dérivée de la prime de CDS par rapport à l'intensité de défaut donne :

$$\frac{\partial s}{\partial \lambda_0} = \frac{\int_0^T e^{B(t)\lambda_0} D(0, t) (w(B(t)[G(t) + H(t)\lambda_0] + H(t)) - sA(t)B(t)) dt}{\int_0^T A(t)e^{B(t)\lambda_0} D(0, t) dt} \quad (\text{B.90})$$

Bibliographie

[1] Brigo Damiano et Mercurio Fabio [2005], Interest Rate Models - Theory and Practise. *With Smile, Inflation and Credit.*, Springer Finance.

[2] Francis X. Diebold et Canlin Li [2009]. Forecasting the Term Structure of Government Bond Yields.

[3] Alentorn [2004] - Modelling the implied volatility surface : an empirical study for FTSE options, Working paper, University of Essex, UK.

[4] Bernales et Guidolin [2014] - Can we forecast the implied volatility surface dynamics of equity options? Predictability and economic value tests.

[5] Christoffersen et Jacobs [2003] - The importance of the loss function in option valuation.

[6] Zomerdijk [2017] - Forecasting the implied volatility surface dynamics of equity options.

[7] Dumas et al. [2001] - Implied Volatility Functions : Empirical Tests.

[8] Berggren et Blomkvist [2010] - Predicting the smile.

[9] Harshvardhan et al. [2002] - Modeling the Dynamics of Implied Volatility Surface Of S&P CNX NIFTY.

[10] Kearney et al. [2017] - Implied Volatility Surface Predictability : The Case of Commodity Markets.

[11] Gonçalves et Guidolin [2006] - Predictable dynamics in the S&P 500 index options implied volatility surface.

[12] Katja Ahoniemi [2009] - Modeling and Forecasting Implied Volatility.

[13] Matthias R.Fengler [2004] - Semiparametric Modeling of Implied Volatility.

[14] Ihsan Ullah Badshah [2008] - Modelling the Dynamics of Implied Volatility Surfaces.

[15] François QUITTARD-PINON [2003] - Evaluation de produits dérivés de taux d'in-

térêt par arbitrage dans l'approche martingale.

[16] FRANCIS A. LONGSTAFF, SANJAY MITHAL, and ERIC NEIS [2005] - Corporate Yield Spreads : Default Risk or Liquidity? New Evidence from the Credit Default Swap Market.

[17] Mohamed Ayoub OUAJJOU [2010] - Risque de crédit.

[18] Jean-Baptiste Gossé, Cyriac Guillaumin [2011] - Christopher A. Sims et la représentation VAR.

[19] Bastien MARBACH [2013] - Détermination et impact du coût du capital dans le cadre d'une étude d'allocation stratégique d'actifs : Exemple du Fonds Général de Cardif Assurance Vie.

[20] Hamilton, J.D. [1994] - Time Series Analysis. Princeton University Press, Princeton.

[21] Björk, T. and B. Christensen [1999] - Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves, *Mathematical Finance*, 323–348.

[22] Alexander, Carol [2001] - Principal component analysis of implied volatility smiles and skews, ISMA discussion paper, University of Reading, UK.

[23] Carr, P., Helyette, G., Delip, M., and Marc Y [2001] - The Fine structure of asset returns, an empirical investigation, *Journal of Business* forthcoming.

[24] Cassese, G., and Guidolin, M., [2006] - Modelling the implied surface : Does market efficiency matter? An application to MIB30 index options” *International review of financial analysis* 15, 145-178.

[25] Christensen, B. J., and Prabhala , N. R, [1998] - The relation between implied and realized volatility , *Journal of Financial Economics* 50, 125-150.

[26] Heston, Steven, [1993] - A closed form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies* 6, 327-343.

[27] Leland, Hayne, [1985] - Option pricing and replications with transaction costs, *Journal of Finance* 40, 1283-1301.

[28] Merton, R.C, [1973] - Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management sciences* 4, 141-183.

[29] Paul SAUVEPLANE [2010] - Les Déflateurs stochastiques : quelle utilisation en assurance ?

[30] Bastien ROSSPOPOFF [2013] - Modèles historique et risque neutre de taux et d'inflation pour l'assurance

