

Mémoire présenté devant l'Université de Paris-Dauphine
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine
et l'admission à l'Institut des Actuaires

le

Par : ABID Mohamed

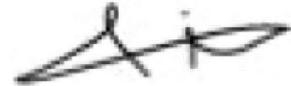
Titre : Allocation du capital : analyse et gestion des risques en assurance non-vie

Confidentialité : Non Oui (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaires :*

*Entreprise : Generali France
Nom : MANDHOUI Khouloud
Signature :*



*Membres présents du Jury du Certificat
d'Actuaire de Paris-Dauphine :*

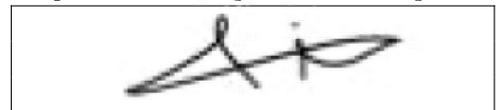
*Directeur de Mémoire en entreprise :
Nom : MANDHOUI Khouloud
Signature :*



*Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

Secrétariat :

Signature du responsable entreprise



Bibliothèque :

Signature du candidat



Résumé

Dans le secteur de l'assurance, le risque se matérialise par l'inversion du cycle de production pour l'assureur, et entraînant ainsi un besoin de maîtrise des aléas futurs. Depuis l'introduction de la réglementation Solvabilité 2, les organismes assurantiels sont tenus de mettre en place un cadre de gestion des risques pour l'évaluation qualitative des risques, et la prise de décision stratégiques liées au développement de l'organisme assurantiel.

Ce mémoire propose une nouvelle approche d'analyse et de gestion des risques en assurance non-vie qui repose sur l'implémentation des méthodes d'allocations du capital pour répartir la part du capital réglementaire associé aux risques de Souscription non-vie à la maille produit. Nous présentons la mise en œuvre de cette approche dans le cadre d'un Modèle Interne en s'appuyant sur les données d'assurance de Generali France. Cette approche permet d'identifier la méthode d'allocation adéquate par sous-module de risque, et l'affinement des indicateurs de solvabilité et de rentabilité à la maille produit. Dans ce sillage, nous exploitons ce cadre pour évaluer les conséquences sur la consommation en capital des produits d'assurance dommage et responsabilité civile impactés par la crise sanitaire de la Covid-19.

Mots-clés : Modèle Interne, Allocation du capital, Consommation en capital, Analyse de sensibilité, Covid-19, Management Actions.

Abstract

The risk in the insurance industry is materialized by the reversal of the production cycle for the insurer, thus leading to a need to control future contingencies. Since the introduction of the Solvency 2 regulation, insurers need to implement a risk management framework for qualitative risk assessment and strategic decision making related to the development of the insurer.

This paper proposes a new approach to the risk analysis and management in non-life insurance based on the implementation of capital allocation methods in order to allocate the share of regulatory capital associated with non-life underwriting risks at the product level. We present the implementation of this approach in the framework of an Internal Model using insurance data from Generali France. This approach allows us to identify the appropriate allocation method by risk sub-module, and the refinement of solvency and profitability indicators at the product level. In this context, we use this framework to assess the consequences on the capital consumption of property and casualty insurance products impacted by the Covid-19 crisis.

Keyword: Internal Model, Allocation of capital, Economic Combined Ratio, Sensitivity Analysis, Covid-19, Management Actions.

Note de Synthèse

Contexte et objectif

Dans un contexte de rendements financiers bas, les compagnies d'assurances sont tenues de revoir leurs sources de bénéfice dans le résultat technique. En particulier, les assureurs doivent porter une attention plus prononcée que par le passé aux marges réalisées par produit. Cet environnement constitue un cadre économique idéal pour mettre en œuvre une approche d'analyse et de gestion des risques d'une compagnie d'assurance non-vie.

La réglementation Solvabilité 2 entrée en vigueur en janvier 2016 établit des règles en matière d'exigence en capital qu'une compagnie d'assurance doit détenir de manière permanente pour exercer son activité. Les approches de calcul du capital réglementaire SCR (*Solvency Capital Requirement*) dans l'environnement Solvabilité 2, déterminent ce capital réglementaire au niveau de la ligne d'activité Solvabilité 2 mais ne permettent pas son allocation par produit. Ainsi pour optimiser son orientation stratégique, l'assureur a besoin de connaître la contribution de chaque produit à la consommation du capital réglementaire et les profits futurs qu'il génère.

Le Département Enterprise Risk Management (ERM) de Generali France a développé une réplique du Modèle Interne non-vie, appelé Modèle Miroir, pour les sous-modules du risque de Souscription non-vie suivants : risque de Primes, risque de Réserve, risque de Catastrophe et risque de Rachat non-vie. La méthode d'allocation actuelle utilisée dans le Modèle Miroir alloue le capital réglementaire associé aux risques de Primes et de Catastrophe à la maille produit, mais elle ne correspond à aucune approche théorique de la littérature des sciences actuarielles. Nous analyserons les limites de cette méthode à travers l'implémentation d'autres méthodes d'allocation du capital, puis nous étendrons notre étude au risque de Réserve.

L'étude de ce mémoire se restreint au périmètre non-vie de Generali France : Generali IARD, L'Équité et les entités d'outre-mer GFA Caraïbes et Prudence Créole. Pour déterminer le capital réglementaire, Generali France a recours à un Modèle Interne. Cependant le Modèle Interne n'intègre pas une dimension économique permettant de piloter les produits dans le référentiel risque-rentabilité. Pour orienter de manière plus fine les décisions stratégiques liées au développement de la compagnie, il faut pouvoir évaluer la consommation en capital et la rentabilité des produits.

Ce mémoire propose une revue de l'approche Modèle Interne pour le calcul du SCR, puis traite les principales méthodes d'allocation du capital présentes dans la littérature des sciences actuarielles. Après avoir rappelé les notions importantes, nous présentons l'approche de gestion des risques. Cette approche permet d'analyser la consommation en capital et la rentabilité par produit à l'aide des indicateurs introduits. Les organismes assurantiels peuvent employer cette approche dans diverses problématiques liées à la gestion des risques en assurance, notamment la supervision des portefeuilles, le lancement de nouveaux produits, la tarification, et la définition des stratégies de réassurance.

Cadre d'analyse et indicateurs

Les réflexions apportées dans ce mémoire reposent sur l'étude de trois méthodes d'allocation du capital (la méthode proportionnelle, la méthode d'Euler, et la méthode marginale). Cela dit, nous avons introduit des indicateurs de rentabilité et de solvabilité facile d'interprétation pour piloter les produits. Nous distinguons :

Indicateurs de solvabilité : En premier lieu, nous avons retenu le SCR alloué qui représente le capital à immobiliser par produit afin de garantir la solvabilité de l'entreprise. Puis, nous avons évalué un autre indicateur appelé *Risk Capital Ratio* (RCR), il représente la consommation de capital pour un euro de prime acquise.

Définition 1 (*Risk Capital Ratio*) Le *Risk Capital Ratio* d'un produit correspond au rapport entre le capital réglementaire associé au sous-module de risque i et les primes acquises. Plus précisément le *RCR* d'un risque i se définit par,

$$RCR = \frac{SCR_i}{P}. \quad (1)$$

Où SCR_i est le capital associé au risque i que l'on alloue au produit étudié, et P représente les primes acquises pour ce produit.

Indicateurs de rentabilité : La rentabilité d'un produit dépend principalement de la sinistralité, de la politique de provisionnement et de la consommation en capital. Nous avons défini deux indicateurs de rentabilité dont le Risk on Return Capital (RoRC) qui représente la rentabilité du capital réglementaire, immobilisé par l'assureur.

Définition 2 (*Return on Risk Capital*) Le RoRC (*Return on Risk Capital*) est un indicateur de performance économique mesurant la rentabilité du capital immobilisé. Il correspond aux profits attendus par la compagnie en immobilisant uniquement le capital réglementaire. L'indicateur *Return on Risk Capital* (RoRC) est défini par,

$$RoRC = \frac{(R_T + r \times P_T) \times (1 - T)}{SCR_{NV}}. \quad (2)$$

Où R_T correspond au résultat technique, P_T représente les provisions techniques non-vie, et SCR_{NV} la part du capital réglementaire associé au risque de Souscription non-vie. Le facteur r correspond au taux sans risque déterminé par la courbe des taux, il dépend de la durée des provisions techniques associées au produit étudié. Le terme T correspond au taux. Dans ce cas, l'indicateur *Return on Risk Capital* (RoRC) mesure la rentabilité des produits par rapport à la consommation en capital.

Le ratio combiné constitue l'indicateur de référence des assureurs, car il permet de mesurer la rentabilité par ligne d'activité et par produit. Nous formalisons ci-dessous la définition de cet indicateur.

Définition 3 (*Ratio Combiné (CoR)*) L'indicateur de rentabilité Ratio Combiné (CoR) correspond au rapport entre les dépenses relatives à l'activité d'assurance (sinistres et frais) et les primes acquises. Plus précisément, pour un risque considéré X nous supposons que le règlement des sinistres connus et la projection des sinistres inconnus sont représentés par une variable aléatoire S , les frais payés par l'assureur sont notés F et les primes acquises P . L'indicateur Ratio Combiné est défini par,

$$CoR(X) = \frac{\mathbb{E}(S) + F}{P}. \quad (3)$$

Néanmoins, cet indicateur n'est pas suffisant pour conclure quant à la rentabilité d'un produit. En effet, certains produits se caractérisent par un CoR inférieur à 100%, pourtant ils immobilisent une forte part du capital réglementaire. Il faut définir un nouvel indicateur qui reprend les notions citées précédemment, et en particulier la consommation en capital.

Le cadre d'analyse développé dans ce mémoire a permis d'introduire un indicateur dit combiné ECoR (*Economic Combined Ratio*) permettant de piloter les produits dans le référentiel risque-rentabilité. Formellement, le Ratio Combiné Économique (ECoR pour *Economic Combined Ratio*) correspond à un ajustement du ratio combiné par un facteur d'escompte financier et un facteur de coût en capital. C'est la définition que nous avons retenue dans ce mémoire pour une analyse efficace de l'activité d'assurance non-vie. Cette approche permet d'inclure l'immobilisation de capital, qui est une perte d'opportunité pour l'assureur. Au lieu d'investir ces capitaux et engendrer un rendement financier qui peut servir de « coussin » de sécurité pour faire face aux fluctuations de sinistralité, l'assureur doit immobiliser ce capital réglementaire pour garantir les engagements aux assurés et se protéger des risques encourus. Le Ratio Combiné Économique se définit par,

$$ECoR = CoR - \frac{r \times D \times \mathbb{E}(S)}{P} + CoC \times SCR_{alloue}. \quad (4)$$

Où CoC correspond au coût en capital, r correspond au taux sans risque et D est la durée des provisions techniques du produit étudié.

La création de cet indicateur permet de munir le cadre de gestion des risques d'un indicateur reflétant les dimensions solvabilité-rentabilité à la maille produit. Cette approche consiste à faire correspondre au niveau de risque associé à chaque produit un réel qui représente le couple risque-rendement.

Principaux résultats de l'approche de gestion des risques

Dans ce mémoire, nous nous sommes appuyés sur les données d'assurance non-vie de Generali France pour mettre en œuvre les méthodes d'allocation du capital réglementaire. Nous avons analysé les montants alloués avec chacune des méthodes d'allocations à la maille produit afin de caractériser la méthode adéquate par sous-module de risque. Ce cadre est exploité à nouveau dans le dernier chapitre pour présenter l'application numérique des sensibilités à la maille produit avec des scénarios de stress et de sensibilités reflétant les effets économiques de la crise de la Covid-19, en lien avec les recommandations de l'EIOPA dans EIOPA (2021).

Dans cette partie, nous présentons les caractéristiques de certains produits étudiés et la décomposition du SCR de Souscription non-vie. Nous analysons la consommation en capital des produits à l'aide des caractéristiques présentées dans le tableau 1. En premier lieu, nous nous intéressons à un produit ayant une durée courte (2 ans). Le produit 1 se distingue par un niveau de primes faible et une sinistralité élevée. Nous observons que les provisions techniques de ce produit sont faibles. Nous présentons la décomposition du risque du produit 1 avec la méthode actuelle dans le tableau 2. Cette méthode met en avant une consommation en capital plus importante pour le sous-module de risque de Primes.

Ligne d'activité	Produit	Duration (années)	CoR	Loss Ratio	Primes (M €)	Provisions (M €)
1	1	2	102%	70%	54	28
2	2	4	78%	46%	281	393
3	3	9	99%	63%	89	385

TABLE 1: Caractéristiques des produits

Le produit 2 présente un niveau de primes élevé et des provisions techniques plus importantes en raison de la cadence de règlement des sinistres (4 ans). De plus, ce produit se caractérise par une sinistralité moyenne avec un Combined Ratio de 78%. Nous observons dans le tableau 2 que la décomposition du risque avec la méthode actuelle fait apparaître une forte consommation en capital pour le risque de Réserve. Nous pouvons le justifier par la cadence de paiements des sinistres et la sinistralité associée à ce produit.

Ligne d'activité	Produit	SCR Primes	SCR Catastrophe	SCR Réserve	SCR total
1	1	18	3	1	22
2	2	16	31	57	104
3	3	28	0	46	74

TABLE 2: Montant de SCR en M € des produits par sous-module de risque

Le produit 3 se distingue par une cadence de règlement des sinistres longue (9 ans) et une sinistralité importante avec un Combined Ratio de 99%. De plus, nous observons que le niveau de prime de ce produit est élevé mais il reste moins important que les provisions techniques de ce produit. Ainsi, la décomposition du risque de ce produit se distingue par une forte consommation en capital pour le risque de Réserve.

Après avoir donné une vue d'ensemble des risques de Souscription non-vie à la maille produit à l'aide de la méthode actuelle, nous analysons les montants de SCR alloué obtenus à l'aide des autres méthodes d'allocation implémentées.

Risque de Primes

Nous rappelons que le produit 1 se caractérise par une cadence de règlement courte (2 ans). Ce produit se distingue par un niveau de primes faible (54 M €), une sinistralité élevée, et des provisions techniques faibles (28 M €). La décomposition du risque avec la méthode actuelle fait apparaître une consommation en capital plus élevée pour le risque de Primes. Toutefois, les méthodes d'allocations proportionnelle, marginale, et Euler aboutissent au même montant de SCR de Primes, qui est moins élevé qu'avec la méthode actuelle. Nous observons dans le tableau 3 que la méthode actuelle surestime le risque de Primes par rapport aux autres méthodes.

Produit	Méthode actuelle	Méthode proportionnelle	Méthode marginale	Méthode Euler
1	18	10	10	10
2	16	3	3	6
3	28	32	33	26
SCR agrégé	62	45	46	42

TABLE 3: Décomposition du risque de Primes (en M €)

Comme mentionné, la méthode actuelle ne correspond à aucune approche théorique de la littérature des sciences actuarielles. Ainsi, le montant alloué par les autres méthodes d'allocation fournissent une image fidèle du profil de risque de ce produit.

Risque de Réserve

Le produit 3 se distingue par une cadence de règlement des sinistres longue et un niveau de primes élevé (89 M €). La décomposition du risque avec la méthode actuelle fait apparaître une forte consommation en capital pour le risque de Réserve. Nous observons dans le tableau 4 que les méthodes marginales et d'Euler allouent le même montant que la méthode actuelle. Dans ce cas, l'allocation du capital avec la méthode proportionnelle est décalée par rapport aux autres méthodes.

Produit	Méthode actuelle	Méthode proportionnelle	Méthode marginale	Méthode Euler
1	1	4	1	1
2	57	57	56	56
3	46	50	46	46
SCR agrégé	104	111	103	103

TABLE 4: Décomposition du risque de Réserve (en M €)

Cependant, la méthode d'Euler est une allocation cohérente avec le profil de risque et elle prend en compte les corrélations de manière continue. Ainsi, la méthode d'Euler fournit une représentation fidèle du risque assuré. Nous pouvons répartir la part du capital réglementaire associée aux risques de Souscription non-vie en s'appuyant sur la méthode d'Euler.

L'allocation du capital a permis de définir les indicateurs de solvabilité et de rentabilité utilisés dans ce mémoire. Le choix de la méthode d'allocation se répercute sur les indicateurs introduits, par conséquent les décisions stratégiques sont susceptibles de varier en fonction de la méthode choisie. Cependant, nous avons établi des propriétés d'adéquation et de cohérence pour les méthodes d'allocation. Nous avons démontré que la méthode d'allocation d'Euler satisfait le critère de cohérence. De plus, les montants alloués à l'aide de la méthode d'Euler, reflètent correctement le profil de risque des produits et prennent en compte les mécanismes de corrélations de manière continue. Ainsi, nous avons choisi la méthode d'Euler combinée à la mesure de risque Value-at-Risk (VaR) pour répartir le capital réglementaire.

Évaluation des impacts de la crise sanitaire de la Covid-19 dans le cadre d'un processus ORSA

Depuis le début de l'année 2020, le secteur de l'assurance a été impacté par la pandémie de la Covid-19 sous l'effet de nombreux facteurs. La sinistralité a connu un effet ciseau entre la baisse des fréquences notamment en assurance automobile, et l'augmentation des indemnisations au titre de la garantie Pertes d'Exploitation. En effet, les contrats d'assurance dédiés aux particuliers et aux entreprises incluent une indemnisation en cas d'impossibilité d'exercer les activités professionnelles si elles sont non consécutives à la survenance d'un sinistre. Ces effets déforment le profil de risque de l'assureur, et se répercutent sur l'exigence de solvabilité qu'il doit respecter. S'ajoutent à cela les autres branches d'assurance directement liées à l'activité des entreprises comme l'assurance des loyers impayés ou l'assurance voyage qui ont vu leurs sinistralités rebondir de manière imprévisible. Il faut noter que les montants d'indemnisation pour les professionnels et les entreprises s'élèvent à plusieurs millions d'euros ce qui résorbe le bénéfice inattendu sur les contrats particuliers, engendré par la baisse de la fréquence des sinistres.

Ce bilan donne une vue d'ensemble des conséquences économiques en matière de solvabilité et de rentabilité de la crise sanitaire sur l'assurance non-vie. Désormais, il faut inclure ces conditions économiques dans l'approche de modélisation des risques pour en déduire les impacts en matière de consommation de capital et de rentabilité des produits étudiés. C'est en ce sens que l'EIOPA a émis des recommandations dans EIOPA (2021). La crise de la Covid-19 peut être considérée comme un nouveau risque. Il faut pouvoir identifier et quantifier les impacts engendrés dans le but d'améliorer la gestion des risques. Ainsi, l'EIOPA a exigé des assureurs d'évaluer les effets économiques de la crise de la Covid-19 dans l'ORSA par des scénarios stress-test et de sensibilités. L'analyse faite précédemment nous a conduit à retenir la sinistralité et le chiffre d'affaires comme facteurs de chocs pour évaluer les sensibilités en lien avec les recommandations de l'EIOPA. Notre étude a permis de chiffrer les incidences sur la consommation en capital des produits impactés par la crise sanitaire Covid-19 en exploitant le cadre de la gestion des risques développé précédemment. Nous retenons que la consommation en capital diminue pour les lignes d'activité à durée longue (9 ans), elles se distinguent par une sinistralité élevée et un niveau de primes inférieur aux provisions techniques. D'autre part, la consommation en capital augmente pour la ligne d'activité à durée courte (2 ans), car elle se caractérise par une sinistralité importante.

Par ailleurs, ce cadre peut être transposé afin de quantifier les effets du changement climatique tels que les tempêtes de vent, les inondations, et la sécheresse. En guise de conclusion, nous proposons les Management Actions visant à maîtriser les risques de Souscription non-vie, et nous montrons comment ces mesures permettent de revenir à un niveau de solvabilité qui correspond à l'appétence au risque de l'organisme assurantiel.

Conclusion, limites et ouvertures

Dans ce mémoire, nous avons pu décrire une méthodologie interne de gestion des risques afin de piloter les produits d'une compagnie d'assurance non-vie. La nouveauté proposée dans ce mémoire est la démarche permettant d'évaluer les sensibilités liées à la sinistralité et au chiffre d'affaires à la maille produit. D'autre part, nous avons pu décrire une approche de pilotage des produits dans le référentiel risque-rentabilité à l'aide des indicateurs introduits. Les indicateurs proposés dans ce mémoire ont pour but d'enrichir ceux déjà suivis par les assureurs en apportant une valeur ajoutée dans l'interprétation et la quantification des risques.

Cette approche de gestion des risques peut être abordée en respectant la démarche dont les principales étapes sont : le dispositif réglementaire Solvabilité 2, l'identification des risques (les risques de Primes, de Catastrophe et de Réserve), la modélisation des risques (le Modèle Miroir), et l'affinement

des indicateurs pertinents (RCR, ECoR et RoRC).

Le but de ce mémoire est de mettre en œuvre l'approche de gestion des risques pour trois raisons : présenter l'enjeu des méthodes d'allocation, proposer des indicateurs facilitant le pilotage des produits, et évaluer l'impact des scénarios de stress-test et de sensibilités liés à la crise sanitaire Covid-19.

L'évaluation des sensibilités permet de vérifier le respect permanent des exigences de solvabilité, et dans le cas échéant la mise en place de mesures correctives permet de revenir à un niveau confortable de solvabilité. Ce niveau est défini par les instances dirigeantes de façon à garantir un équilibre entre l'immobilisation de capital et la rentabilité.

Enfin, le lancement d'un produit d'assurance non-vie impacte le profil de risque de la compagnie d'assurance, son appétence au risque et le niveau de rentabilité fixée par le plan stratégique. L'étude d'une telle déformation induite par la création d'un nouveau produit n'a pas été traitée dans ce mémoire car elle aurait été trop coûteuse en temps mais elle reste un véritable sujet à explorer.

Synthesis note

Context and objectives

In the current low interest rate environment, insurance companies are required to review their sources of profit in their technical result. Insurers must pay closer attention than before to the profit achieved per product. This environment provides an ideal economic environment for implementing a risk analysis and management approach for a non-life insurance company.

The Solvency 2 regulations that came into effect in January 2016 establish rules for the capital requirements an insurance company must hold on to on a permanent basis to conduct its business. The approaches for calculating the regulatory capital SCR (Solvency Capital Requirement) in the Solvency 2 environment, determine this regulatory capital at the level of the Solvency 2 line of business but do not allocate it by product. Thus, to optimize its strategic orientation, the insurer needs to know the contribution of each product to the regulatory capital and the future profits it generates.

The Enterprise Risk Management Department of Generali France has developed a replication of the non-life Internal Model, called the Mirror Model, for the following non-life underwriting risks : Pricing risk, Reserving risk, Catastrophe risk and Non-life Lapse risk. The current allocation method used in the Mirror Model allocates the regulatory capital associated to Pricing and Catastrophe risks at the product level. We have analyzed the limitations of this method through the implementation of other methods.

This study is limited to the non-life entities of Generali France : Generali IARD, L'Equite and the overseas entities GFA Caraïbes and Prudence Créole. To determine this regulatory capital, Generali France uses an Internal Model. However, the Internal Model does not include an economic dimension that would enable to manage the products within a risk-return approach. To guide the strategic decisions related to the company's development in a more precise manner, it is necessary to evaluate the contribution to the regulatory capital and profitability of the products.

This paper proposes a review of the Internal Model approach for the calculation of the SCR, and then discusses the main allocation methods of the actuarial sciences. After recalling the important notions, we will present a new risk management approach for the non-life entities of Generali France. This approach allows the analysis of capital consumption and profitability by product using the introduced indicators. This approach can be used in many subjects related to risk management in insurance, including portfolio supervision, launching new product, pricing, and the definition of reinsurance programmes.

Framework of analysis and indicators

The reflections in this paper are based on the study of three methods (the proportional method, the Euler method, and the marginal method). We have introduced indicators of profitability and solvency

that are easy to interpret for managing the products.

Solvency indicators : First, we have retained the allocated SCR which represents the capital to be immobilized per product to guarantee the solvency of the company. Then, we evaluated another indicator defined at the level of the Generali Group called Risk Capital Ratio (RCR), it represents the consumption of capital for one euro of earned premium.

Definition 1 (*Risk Capital Ratio*) The *Risk Capital Ratio* of a product is the ratio of the regulatory capital associated with the risk sub-module i to the earned premiums. More precisely, the *RCR* of a risk i is defined as follow,

$$RCR = \frac{SCR_i}{P}. \quad (5)$$

Where SCR_i is the capital associated with risk i that is allocated to the product under consideration, and P represents the premiums earned for this product.

Profitability indicators : The profitability of a product depends mainly on the claims experience, the provisioning policy, and the capital consumption. For this purpose, we have defined two profitability indicators the combined ratio, and the Risk on Return Capital (RoRC), which represents the profitability of the regulatory capital.

Definition 2 (*Return on Risk Capital*) The RoRC (*Return on Risk Capital*) is an economic performance indicator measuring the profitability of the capital tied up. It corresponds to the profits expected by the company by immobilising only the regulatory capital. The indicator *Return on Risk Capital (RoRC)* is defined by,

$$RoRC = \frac{(R_T + r \times P_T) \times (1 - T)}{SCR_{NV}}. \quad (6)$$

Where R_T corresponds to the technical result, P_T represents the non-life technical provisions, and SCR_{NV} the share of the regulatory capital associated with the non-life underwriting risk. The factor r corresponds to the risk-free rate determined by the yield curve, and depends on the duration of the technical provisions associated with the product studied. The term T corresponds to the tax. Thus the indicator *Return on Risk Capital (RoRC)* measures the profitability of the products in relation to the consumption of capital, based on the operating result.

The combined ratio is the benchmark indicator for insurers, as it measures profitability by line of business and by product. The definition of this indicator is set out below.

Definition 3 (*Combined Ratio (CoR)*) The profitability indicator Combined Ratio (CoR) corresponds to the ratio between the expenses related to the insurance activity (claims and expenses) and the earned premiums. More precisely, for a given risk X we assume that the settlement of known claims and the projection of unknown claims are represented by a random variable S , the expenses paid by the insurer are noted F and the earned premiums P . The Combined Ratio indicator is defined by,

$$CoR(X) = \frac{\mathbb{E}(S) + F}{P}. \quad (7)$$

As mentioned, the CoR is an indicator of profitability that takes into account the technical result and the general expenses. When this ratio evaluated for a product is equal to 100%, we can conclude that the earned premiums balance the insurer's expenses insofar as this product generates neither a loss nor a profit for the insurer. Conversely, if the ratio is below (resp. above) the 100% threshold, this means

that the marketing of this product is technically profitable (resp. not profitable) for the insurance company. Nevertheless, this indicator is not sufficient to conclude on the profitability of a product. Indeed, some products are characterised by a CoR of less than 100%, yet they tie up a large share of regulatory capital. It is necessary to define a new indicator that takes up the notions mentioned above, and in particular capital consumption.

This framework allowed to introduce an indicator known as the ECoR (*Economic Combined Ratio*), which allows insurance companies to manage the products in a risk-return frame. Formally, the Economic Combined Ratio (ECoR) is an adjustment of the combined ratio by a financial discount factor and a cost of capital factor. This is the definition we have used in this paper for an effective analysis of the non-life insurance business. This approach allows for the inclusion of capital lock-up, which is an opportunity loss for the insurer. Instead of investing this capital and generating a financial return that can serve as a capital add-on against fluctuations in claims experience, the insurer must tie up this regulatory capital to guarantee commitments to policyholders and protect itself from the risks involved. The Combined Economic Ratio is defined as,

$$ECoR = CoR - \frac{r \times D \times \mathbb{E}(S)}{P} + CoC \times SCR_{allowe}. \quad (8)$$

Where CoC is the cost of capital, r is the risk-free rate and D is the duration of the technical provisions of the product under study.

The introduction of this indicator makes it possible to provide the risk management framework with an indicator reflecting the solvency-return dimensions at the product level. This approach consists of matching the level of risk associated with each product with a real value that represents the risk-return relationship.

Main results of the risk management approach

In this paper, we used Generali France's non-life insurance data to implement the regulatory capital allocation methods. We have discussed the amounts allocated with each of the allocation methods at the product level in order to characterise the appropriate method per risk sub-module. This framework is used again in the last chapter to present the numerical application of product mesh sensitivities with stress scenarios and sensitivities reflecting the economic effects of the Covid-19 crisis, in line with EIOPA's recommendations in EIOPA (2021).

In this section, we present the characteristics of some of the products studied and the decomposition of the non-life underwriting SCR. We analyse the capital consumption of the products with a focus on the risk profile obtained using the current method. The table 5 shows the characteristics of the products. First, we look at a product with a short duration (2 years). The product 1 is characterized by a high premium level and an average loss experience. The risk decomposition of this product shows a high capital consumption for the Premium risk sub-module. This can be explained by the estimated low technical provisions and the high premium level.

Line of Business	Product	Duration (year)	CoR	Loss Ratio	Premium (M €)	Technical Provisions (M €)
1	1	2	102%	70%	54	28
2	2	4	78%	46%	281	393
3	3	9	99%	63%	89	385

TABLE 5: Product features

Product 2 is characterised by a high level of premiums and higher technical provisions due to the claims settlement pattern (4 years). In addition, this product has a medium loss experience with a Combined Ratio of 78%. Thus, we can observe in the table 6 that the risk decomposition with the current method for this product shows a high capital consumption for the Reserve and Premium risk.

Line of Business	Product	SCR Premium	SCR Catastrophe	SCR Re-servicing	Total SCR
1	1	18	3	1	22
2	2	16	31	57	104
3	3	28	0	46	74

TABLE 6: Amount of SCR in M € by product and risk sub-module

Product 3 is characterised by a high loss experience with a Combined Ratio of 99%. However, the level of premiums for this product is lower than the technical reserves. Technical reserves are high due to the long claims settlement period (9 years). Thus, the risk decomposition for this product shows a high capital consumption for the Reserve risk.

After giving an overview of the non-life underwriting risks at the product level using the current method, we analyse the allocated SCR amounts obtained using the other implemented allocation methods.

Pricing risk

We recall that product 1 is a short duration product with a high premium and high loss experience. The risk decomposition of the product with the current allocation method shows a high capital consumption for the Premium risk sub-module. However, we observe in the table 7 the proportional, marginal, and Euler allocation methods allocate a low amount of capital to product 1.

Product	Actual method	Proportional method	Marginal method	Euler's method
1	18	10	10	10
2	16	3	3	6
3	28	32	33	26
Aggregate SCR	62	45	46	42

TABLE 7: Decomposition of Pricing risk (in M €)

As a result, the current method overestimates the insured risk compared to the other methods. The capital consumption of this product is explained by the high level of premiums and an average loss experience related to the underlying risks. Furthermore, we recall that the current allocation method does not correspond to any theoretical approach. Thus, the amounts allocated by the other methods of proportional, marginal, and Euler allocations seem to represent the underlying risks of the product.

Reserving risk

Product 3 has a long claims settlement rate, and in addition the premium level for this product is high. The risk decomposition for this product shows a high capital consumption for the reserve risk with the current method. In contrast, the table 8 shows that the other methods allocate the same amount as the current method for this product.

Product	Actual method	Proportional method	Marginal method	Euler's method
1	1	4	1	1
2	57	57	56	56
3	46	50	46	46
Aggregate SCR	104	111	103	103

TABLE 8: Decomposition of Reserving risk (in M €)

As a conclusion, the capital allocation with the Euler allocation method appears to be consistent with the insured risk of the products studied and allows us to obtain a reliable criterion of the insured risk per product.

Also, the Euler allocation method provides an effective picture of the risk profile of the products compared to other methods. Thus we can allocate the share of regulatory capital associated with non-life underwriting risks based on Euler's method.

The capital allocation was used to define the solvency and profitability indicators used in this thesis. The choice of allocation method affects the indicators introduced, and therefore strategic decisions are likely to vary depending on the method chosen. However, we have established suitability and consistency properties for the allocation methods. We have shown that Euler's allocation method satisfies the consistency criterion. Furthermore, the amounts allocated using Euler's method correctly reflect the risk profile of the products and take into account the diversification mechanisms. In this case, we chose the Euler method combined with the Value-at-Risk (VaR) risk measure to allocate regulatory capital.

Impact of the pandemic Covid-19 in the process ORSA

Since the beginning of 2020, the insurance sector has been impacted by the Covid-19 pandemic for a number of reasons. The claims experience has been affected by a scissor effect between the drop in frequencies, particularly in motor insurance, and the increase in compensation for business interruption coverage. These effects distort the insurer's risk profile, and have repercussions on the solvency requirements that he must respect. The guarantees that concern pecuniary losses have been strongly impacted : this is the case for business interruption. Indeed, insurance contracts dedicated to individuals and companies, and in particular products that include compensation in the event of the impossibility of carrying out professional activities if they are not consecutive to the occurrence of a disaster. In addition, other insurance branches directly linked to the activity of companies, such as unpaid rent insurance or travel insurance, have seen their claims rebound in an unpredictable manner. It should be noted that the compensation amounts for professionals and companies amount to several million euros, which absorbs the unexpected profit on personal contracts, generated by the drop in the frequency of claims.

This balance sheet gives an overview of the economic consequences of the health crisis on non-life insurance in terms of solvency and profitability. It is now necessary to include these economic conditions in the risk modelling approach in order to deduce the impact on capital consumption and profitability of the products studied. EIOPA has issued recommendations in EIOPA (2021). The Covid-19 crisis can be considered as a new risk. It is necessary to be able to identify and quantify the impacts in order to improve risk management. Thus, EIOPA has required insurers to assess the economic effects of the Covid-19 crisis in the ORSA through stress-test and sensitivity scenarios. The analysis made previously led us to retain the claims experience and the turnover as shock factors to assess the sensitivities in line with the EIOPA recommendations. Our study will identify the effects on capital consumption at the product level by using the risk management framework developed previously.

This framework allows us to analyze the impact on capital consumption at the product level of a particular event such as the Covid-19 health crisis. We are able to assess the consequences of the Covid-19 health crisis using stress-test scenarios and sensitivities, in line with EIOPA's recommendations. We find that capital consumption decreases for business lines 3 and 5, while it increases for business line 2. Finally, we propose Management Actions aimed at controlling non-life underwriting risks, and we show how these measures allow us to return to a level of solvency that corresponds to the insurer's risk appetite.

Conclusion, boundaries and openings

In this paper, we were able to describe an internal risk management methodology for steering the products of a non-life insurance company. The novelty proposed in this dissertation is the approach to evaluate the sensitivities linked to the loss experience and the turnover at the product level, and the steering of the products in the risk-return frame of reference using the indicators introduced. Our study of capital allocation methods leads us to adopt the Euler allocation method coupled with the VaR risk measure to allocate regulatory capital. The indicators proposed in this thesis aim to enrich those already followed by insurers by providing added value in the interpretation and quantification of risks. In addition, this thesis has analyzed the economic effects of sensitivities carried out at the product level. The analysis of the impacts of the health crisis made it possible to quantify the consequences in terms of profitability and solvency for the insurer.

This risk management approach can be approached by following the process whose main steps are : the Solvency 2 regulatory framework, the identification of risks (Premium, Catastrophe and Reserve

risks), the modelling of risks (the Mirror Model), and the refinement of the relevant indicators (RCR, ECoR and RoRC).

The aim of this thesis is to implement the risk management approach for three reasons : to present the issue of allocation methods, to propose indicators facilitating product management, and to evaluate the impact of stress-test scenarios and sensitivities linked to the Covid-19 health crisis.

The assessment of sensitivities makes it possible to verify the permanent respect of solvency requirements and, if necessary, the implementation of corrective measures to return to a comfortable level of solvency. This level is defined by the governing bodies in such a way as to guarantee a balance between capital commitment and profitability.

Finally, the study proposed in this paper does not deal with sensitivities in a prospective manner because it would have been very time-consuming. The study of the deformation of the risk profile and profitability over the horizon of the strategic plan requires additional hypotheses but it remains a real subject to be explored.

Remerciements

Je souhaite remercier toutes les personnes ayant contribué à la réalisation, ou à l'encadrement de ce mémoire.

Je remercie tout particulièrement ma tutrice d'entreprise, *M^{me}* Khouloud Mandhouj, pour sa disponibilité, son expertise, et ses sages recommandations, qui ont permis un bon encadrement et une bonne organisation générale.

Je tiens à remercier également *M^{me}* Anne Charlotte Bongard pour son suivi, ainsi que le temps qu'elle a su m'accorder notamment pour la relecture de mon mémoire.

Je remercie également la directrice des Risques de Generali France *M^{me}* Maria Perini, et *M.* Mehul Ghansam manager de l'ERM, pour leur suivi et l'intérêt porté à mes travaux.

Je profite aussi de cette occasion pour exprimer ma gratitude à ma mère, mon père, et à ma sœur Sara, pour m'avoir toujours soutenu, et pour tout ce que qu'ils ont fait qui aura marqué ce que je suis. Ce travail est le fruit de leur soutien indéfectible et de leurs encouragements tout au long de mes années d'études.

Table des matières

Résumé	3
Abstract	4
Note de Synthèse	5
Synthesis note	13
Remerciements	21
Table des matières	23
Introduction	25
1 Cadre réglementaire et gestion des risques	27
1.1 Cadre réglementaire	27
1.2 Gestion des risques	39
1.3 Décomposition du risque	47
2 Dispositif de la gestion des risques	59
2.1 Mesure de risque	59
2.2 Méthodes d'allocation	63
2.3 Indicateurs économiques	73
3 Approche de la gestion des risques	79
3.1 Contexte : Méthode actuelle du Modèle Miroir	79
3.2 Présentation des données d'assurance non-vie	82
3.3 Application numérique	87

4 Impacts des sensibilités Covid-19	95
4.1 Impacts de la crise sanitaire dans le processus ORSA	95
4.2 Démarche de l'évaluation des sensibilités	97
4.3 Evaluation des sensibilités Covid-19	99
4.4 Management Actions	103
4.5 Synthèse et limites	105
Conclusion	107
Bibliographie	109

Introduction

La gestion des risques en assurance s'appuie sur le renforcement du contrôle de risque et la limitation de la probabilité d'insolvabilité. Lorsque le niveau des fonds propres est inférieur à l'exigence en capital réglementaire, un plan de remédiation est élaboré pour s'assurer du respect permanent des obligations de solvabilité. Ce suivi de l'évolution du profil de risque permet de détecter rapidement les scénarios les plus adverses et promouvoir la sensibilisation aux risques au sein des organismes assurantiels.

L'allocation du capital permet de ventiler un montant de capital défini au niveau global sur les segments de risques sous-jacents, dans notre cas il s'agit des produits contenus dans les lignes d'activité. La démarche à suivre consiste à allouer les montants de capitaux réglementaires associés à chaque sous-module du risque de Souscription non-vie sur les produits. Pour ce faire, nous déterminons les capitaux diversifiés à répartir par le Modèle Interne non-vie à la maille ligne d'activité. La mise en œuvre des méthodes d'allocation du capital permet de répartir ces capitaux sur les produits en s'appuyant sur la modélisation des risques dans le Modèle Miroir. Nous avons recours à cette approche car le Modèle Miroir modélise les risques de Souscription non-vie à la maille produit.

L'allocation du capital est une notion clé pour évaluer les indicateurs de solvabilité et de rentabilité à la maille produit, et piloter les produits à forte consommation en capital. Cette approche de gestion des risques est mise au point afin d'appuyer les décisions opérationnelles en conciliant les perspectives commerciales de la compagnie d'assurance avec la gestion des risques.

En 2020, dans un environnement frappé par les conséquences systémiques de la pandémie Covid-19 (évolution de la sinistralité, dégradation de la situation financière, impact sur les affaires nouvelles), les assureurs sont amenés à évaluer ses effets sur l'activité d'une manière prospective pour mettre en œuvre des actions de maîtrise des risques connexes. Le processus d'évaluation des risques et de la solvabilité joue de ce point de vue un rôle clé pour analyser les incidences et alimenter la prise de décision pour diverses activités, notamment en matière de pilotage dans ce contexte de crise sanitaire.

Parallèlement, l'EIOPA a publié cette année « Consultation Paper on the Supervisory Statement on ORSA in the context of Covid-19 » EIOPA, 2021 qui suggère d'évaluer les déformations du profil de risque à travers des scénarios de sensibilités et stress tests reflétant l'impact de la pandémie. Les impacts considérables de la pandémie sur le secteur assurantiel a conduit le régulateur à demander aux organismes assurantiels de présenter les stratégies déployées pour la gestion de la pandémie, puis d'évaluer les impacts sur les passifs avec des probables répercussions sur les années suivantes. Parfois les résultats présentés pour les décisions stratégiques reposent sur des indicateurs peu pertinents souvent agrégés. L'affinement des indicateurs à travers l'allocation de capital permet de caractériser les effets sur la consommation en capital à la maille produit des scénarios de stress-test et de sensibilités réalisés.

Dans la gestion des risques, cette démarche est d'une extrême importance implémentée à des fins opérationnelles. L'obtention des indicateurs à la maille produit permet d'orienter les ressources limitées vers l'opportunité d'investissement économique la plus judicieuse. A titre d'exemple, la politique de réassurance vise à protéger le compte de résultat des conséquences d'une sinistralité d'extrême intensité ou de la fréquence des sinistres. La détermination des stratégies de réassurance de la compa-

gnie s'appuie sur la comparaison des indicateurs à la maille produit après l'application des traités de réassurance.

Le dernier volet de l'approche de gestion des risques s'appuiera sur ce cadre d'analyse pour évaluer l'impact des scénarios de sensibilités et stress-test sur la consommation en capital des produits. Nous proposons donc une revue des notions suivantes : la première partie sera dédiée à un bref rappel de la norme prudentielle Solvabilité 2, la détermination du capital réglementaire SCR, puis les limites de cette réglementation. Par la suite, nous introduirons le cadre de gestion des risques en assurance non-vie dans lequel a été développé cette étude. Nous présentons alors le Modèle Miroir et les enjeux de l'allocation de capital pour améliorer les dispositifs en matière de gestion des risques dans le cadre du pilotage des activités en assurance non-vie.

Dans la deuxième partie nous introduisons les principales méthodes d'allocation du capital présentes dans la littérature scientifique. Nous commencerons par définir les mesures de risques et leurs propriétés. Ensuite, les méthodes d'allocation du capital seront présentées ainsi que leur adéquation avec les propriétés recherchées, pour une répartition équitable du capital. Enfin, nous exposerons les indicateurs de solvabilité et de rentabilité, définis à la maille produit.

Les parties trois et quatre visent à illustrer l'application des deux premières parties sur les données d'assurance non-vie. La première application se concentre sur les différentes méthodes d'allocation introduites et les montants alloués aux produits. Cela prendra la forme d'une comparaison de l'allocation avec les différentes méthodes présentées, puis nous allons confronter les résultats des indicateurs créés pour identifier l'impact du changement de la méthode d'allocation. A partir de cette analyse nous allons déterminer la méthode d'allocation adéquate par risque pour répartir la part de capital réglementaire associée.

La deuxième application consiste à évaluer les effets des scénarios de stress-tests et de sensibilités reflétant le crise sanitaire de la Covid-19 sur la consommation en capital des produits. Cette étude s'inscrit dans la continuité de notre approche de gestion des risques, et nous amènera à proposer des stratégies (*Management Actions*) pour maîtriser les risques et améliorer le pilotage des produits.

Chapitre 1

Cadre réglementaire Solvabilité 2 et gestion des risques

L'assurance est une opération par laquelle l'assureur s'engage à payer une prestation au profit de l'assuré en cas de réalisation d'un événement de nature adverse en contrepartie d'une prime versée à la souscription du contrat. Cette caractéristique du secteur de l'assurance entraîne un cycle de production inversé et par conséquent un besoin de maîtrise des aléas futurs. La gestion des risques s'inscrit au cœur du métier notamment avec la mise en place du régime prudentiel Solvabilité 2.

Après avoir rappelé les principes généraux du dispositif réglementaire Solvabilité 2, l'approche Modèle Interne sera exposée puisque l'allocation du capital prend en compte le modèle de calcul du capital réglementaire. Dans un second temps, nous introduisons le cadre général de la gestion des risques en assurance non-vie et nous présentons le Modèle Miroir, qui correspond à une réplication du Modèle Interne non-vie de Generali France. Dans ce sillage, nous nous concentrons sur les enjeux de l'allocation de capital pour améliorer les dispositifs en matière de gestion des risques et le pilotage des activités en assurance non-vie. Enfin, nous présentons une revue de la littérature des méthodes de décomposition du risque, puis nous proposons une mise en oeuvre d'une nouvelle approche de décomposition du risque, appelé décomposition *Martingale Representation Theorem*.

1.1 Cadre réglementaire Solvabilité 2

1.1.1 Généralités sur le dispositif Solvabilité 2

La réglementation Solvabilité 2 est une réforme européenne du cadre réglementaire prudentiel appliqué dans le secteur de l'assurance. L'objectif principal de cette réforme est la protection des assurés en garantissant la solvabilité des organismes assurantiels. La démarche préconisée par ce régime prudentiel consiste à s'assurer de posséder un niveau suffisant de fonds propres pour éviter la ruine à horizon un an avec une probabilité 99,5 %. Le capital réglementaire est le montant de fonds propres nécessaire pour satisfaire à cette exigence. Pour mettre en oeuvre le calcul du capital réglementaire, de nombreuses études quantitatives permettent la détermination du SCR (*Solvency Capital Requirement*) et du MCR (*Minimum Capital Requirement*). En particulier, l'approche Modèle Interne évalue l'exigence en capital de l'organisme assurantiel en tenant compte du profil de risque en matière de granularité, de calibrage et de corrélations entre les différents facteurs de risque.

La réglementation Solvabilité 2 vise à harmoniser les exigences réglementaires pour les organismes

assurantiels des pays membres de l'Union Européenne. La structure de cette réglementation repose sur trois piliers chacun regroupant un ensemble de règles que nous résumons dans la figure [1.1](#).

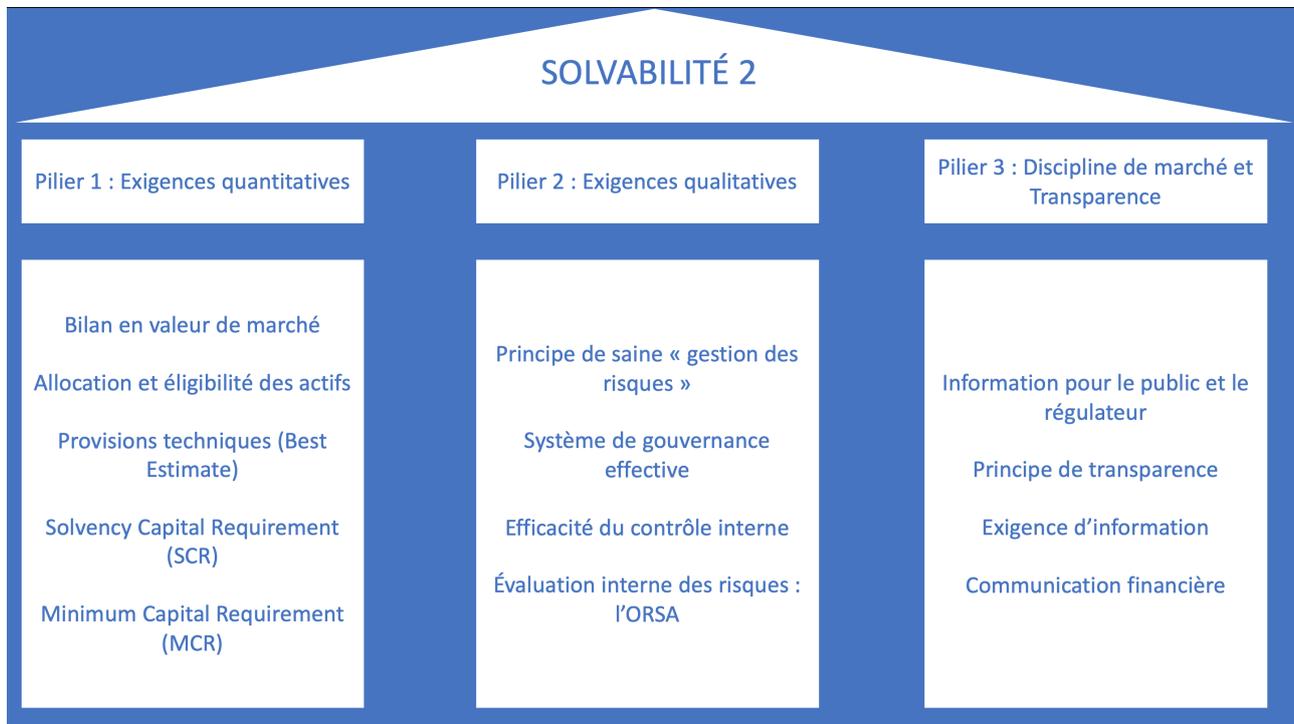


FIGURE 1.1: Les 3 piliers de la directive Solvabilité 2

- Pilier 1 : Exigences quantitatives** Ce premier pilier de la réforme définit les règles quantitatives de calcul de l'exigence en capital. La réglementation introduit deux seuils de capital de solvabilité. Le premier niveau est le Minimum de capital requis ou MCR, il est calculé par des méthodes identiques pour les compagnies d'assurance. Le second est le capital réglementaire requis ou SCR. Ce montant peut être déterminé soit par la Formule Standard, commune à l'ensemble des organismes d'assurance européens, soit par un Modèle Interne développé par l'organisme d'assurance qui reflète son profil de risque. Son utilisation doit être homologué par le superviseur.
- Pilier 2 : Exigences qualitatives - la gouvernance** Le deuxième pilier de Solvabilité 2 vise à renforcer la gestion des risques et à harmoniser le cadre de gouvernance interne. Cette structure de contrôle coordonne des activités de surveillance au niveau de l'entreprise et avec les organismes de contrôle. Au niveau interne, le pilier 2 de Solvabilité 2 renforce les mécanismes de contrôle et la politique de gestion interne des risques. Les activités avec le superviseur concernent l'élaboration d'un système propre d'évaluation permanente des risques auxquels l'organisme assurantiel est soumis et une vue d'ensemble sur l'état de solvabilité. Ce processus, appelé ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*) exige aux assureurs de mettre en place une culture solide de risque, qui concerne l'ensemble des parties prenantes. Il peut être considéré comme le cœur du pilier 2 de la réglementation, car il offre un regard global sur l'état instantané de la solvabilité et des risques auxquels est soumise la compagnie d'assurance. Plus précisément, l'ORSA est une démarche permettant aussi d'identifier et mesurer les nouveaux risques propres à l'organisme assurantiel, pour déterminer le besoin global de solvabilité, nommé aussi le capital ORSA. Ce

capital se distingue du SCR par la prise en compte de l'ensemble des risques, et par l'intégration d'une vision prospective. Cette évaluation prend en compte le plan stratégique de l'organisme assurantiel dans la gestion des risques à court terme et à long terme. Le suivi de l'état de solvabilité et du respect permanent des exigences est également au centre du processus, il passe par une analyse des indicateurs de solvabilité et de rentabilité avec la prise en compte de l'évolution de l'environnement et des risques. Enfin, l'évaluation des risques et la réalisation de stress-test permet de caractériser la tolérance aux risques de l'organisme assurantiel. Cela représente le niveau du risque maximum que l'entreprise peut accepter. Cette dernière étape trouve son intérêt pour mettre à jour les processus stratégiques majeurs en fonction des déformations du profil de risque, en particulier les stratégies de réassurance et la politique commerciale.

L'ORSA est finalement un processus d'appropriation de la gestion des risques à tous les niveaux de la prise de décision de l'organisme assurantiel. Les principaux objectifs du processus ORSA que la compagnie d'assurance poursuit dans ce cadre de gouvernance sont :

- évaluer son profil de risque à l'horizon du plan stratégique
- s'assurer du respect permanent des obligations de solvabilité et en matière de provisions techniques
- mettre en place une culture de gestion des risques
- assister les décisions stratégiques des instances dirigeantes (Conseil d'Administration, Comité Exécutif, ...)
- inclure la dimension risque dans le pilotage stratégique

Ce dernier point montre l'importance de l'allocation de capital, thème de ce mémoire, dans le cadre du dispositif ORSA. Les indicateurs introduits pour analyser la consommation en capital et la rentabilité des produits sont basés sur le capital alloué.

En résumé, ce pilier invite les assureurs à construire en parallèle du respect des exigences quantitatives, un système de gestion interne des risques. Son objectif principal est d'évaluer, gérer et remonter les risques en permanence permettant ainsi d'identifier le profil de risque de la compagnie. L'approche présentée dans ce mémoire s'inscrit dans la continuité de ce processus, car elle permet de piloter les produits dans un référentiel risque-rentabilité.

Ces nouvelles exigences apportent des changements profonds par rapport à Solvabilité 1, notamment par la création d'une réglementation qui repose sur des principes plutôt que sur des règles. Elle cherche à établir un marché de l'assurance fondé sur une concurrence juste et équitable en matière d'exigence réglementaire.

1.1.2 Le calcul du capital économique et agrégation des risques

L'objectif de cette partie est de définir la notion de capital réglementaire, puis de présenter les méthodologies de calcul dans l'environnement Solvabilité 2. Pour caractériser les besoins de solvabilité, l'organisme assurantiel peut choisir entre deux méthodes : la Formule Standard ou le Modèle Interne. Ces deux approches emploient des procédés d'agrégation de risque différents.

La réforme Solvabilité 2 a apporté une vision complémentaire de l'élaboration du bilan qui se caractérise par une approche économique. Les actifs détenus sont inscrits en valeur de marché, et les provisions techniques sont constituées du Best Estimate des passifs et d'une marge de risque par

prudence. Nous précisons ici qu'un Best Estimate correspond à l'espérance mathématique de la valeur actualisée des flux futurs. La marge de risque représente un montant qu'exigerait un autre assureur en contrepartie de lui céder la totalité des contrats de la compagnie d'assurance. La figure 1.2 donne un aperçu sur les différents postes du bilan d'un assureur sous l'environnement Solvabilité 2.

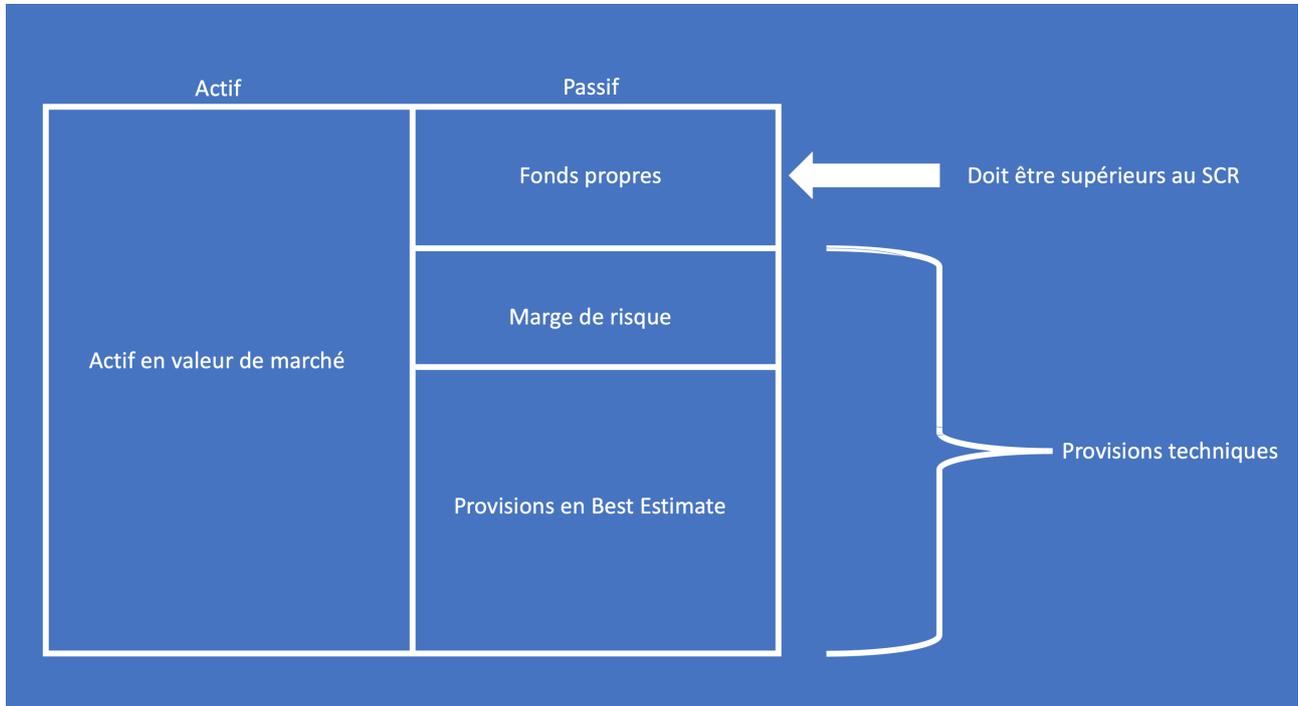


FIGURE 1.2: Bilan économique sous l'environnement Solvabilité 2

Définition 4 (Capital réglementaire Solvabilité 2) Le capital réglementaire Solvabilité 2 ou SCR représente le montant de fonds propres à immobiliser par l'organisme assurantiel, il est défini comme étant la Value-at-Risk de la distribution des fonds propres à horizon un an, au niveau de confiance 99,5 % actualisée.

Pour formaliser cette définition dans le langage mathématique, nous pouvons représenter l'exigence en capital réglementaire à travers une première équation de solvabilité que nous décrivons ci-dessous,

$$\text{Fonds Propres} = \text{Actif} - \text{Passif} \geq \text{SCR}.$$

Cette équation est dynamique dans la mesure où tous les impacts survenus sur les actifs ou les engagements en raison des risques encourus se répercutent sur le niveau de fonds propres de l'organisme assurantiel. La gestion des risques a pour principal objectif d'élaborer des stratégies permettant la maîtrise des risques qui peuvent affecter la solvabilité de l'assureur. Nous rappelons que le secteur de l'assurance se distingue par l'inversion du cycle de production. C'est la raison pour laquelle le contrôle de la solvabilité dans ce secteur est très exigeante.

Dans ce mémoire, nous considérons un espace probabilisé $\Delta = (\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, où \mathbb{P} est la probabilité historique, muni de la filtration \mathbb{F} engendrée par le processus stochastique $(F_t)_{t \leq 0}$ des fonds propres

passés. Nous introduisons les processus stochastiques \mathbb{F} -adaptés A_t , P_t et SCR_t qui représentent respectivement les actifs détenus en valeur de marché, les provisions techniques Solvabilité 2, et le capital réglementaire à la date t . Alors l'équation de solvabilité définie précédemment devient,

$$F_t = A_t - L_t \geq SCR_t, \quad (1.1)$$

et selon la définition du capital réglementaire donné par la réglementation Solvabilité 2,

$$SCR_t = F_t - VaR_{t,0.5\%}(F_{t+1}) \times B(t, t+1). \quad (1.2)$$

Où $B(t, t+1)$ correspond au taux d'actualisation entre t et $t+1$. $B(t, t+1)$ représente le prix à la date t d'un zéro-coupon de maturité $t+1$. L'enjeu de cette modélisation est d'obtenir une distribution de la variable aléatoire F_{t+1} pour évaluer le quantile au niveau 99,5%. C'est la procédure suivie pour calculer le capital réglementaire avec un Modèle Interne.

Calcul du capital économique via le Modèle Interne

Lorsque l'organisme assurantiel considère que la méthodologie de calcul du capital réglementaire par la Formule Standard ne couvre pas tous les risques auxquels il est exposé, il peut définir sa propre méthode d'évaluation du capital de solvabilité à partir d'un calibrage propre, des paramètres de chocs et des corrélations. Après le développement du Modèle Interne, l'organisme assurantiel doit obtenir une approbation de la part du régulateur pour l'utiliser. Dans ce cas, l'organisme assurantiel n'est plus obligé de continuer à déterminer ce montant par la Formule Standard.

Dans la méthodologie Modèle Interne, nous distinguons l'approche partielle par laquelle un organisme assurantiel se limite à modéliser un nombre restreint de risques. En revanche, l'assureur doit élaborer une nouvelle cartographie des risques, autre que celle proposée par la Formule Standard. Cette stratégie constitue un arbitrage entre un Modèle Interne souvent très coûteux et complexe à mettre en place et la Formule Standard qui ne reflète pas forcément le profil de risque de l'organisme assurantiel.

Dans la configuration Modèle Interne dit "Total", la détermination du capital de solvabilité de l'organisme assurantiel se base sur une approche simulateur qui prend en compte la totalité des risques auxquels est soumise l'entreprise. Cette méthode stochastique conformément à l'équation de solvabilité permet de modéliser les postes du bilan économique à horizon un an, à l'aide des modèles retenus pour projeter chaque risque. Ainsi, cette approche permet de construire une distribution des fonds propres projetés sur un horizon d'un an.

Pour mieux représenter son profil de risque, Generali France a recours à un Modèle Interne Total. Avant d'aller plus loin, nous présentons dans le schéma [1.3](#) la modélisation des risques dans le Modèle Interne de Generali France.

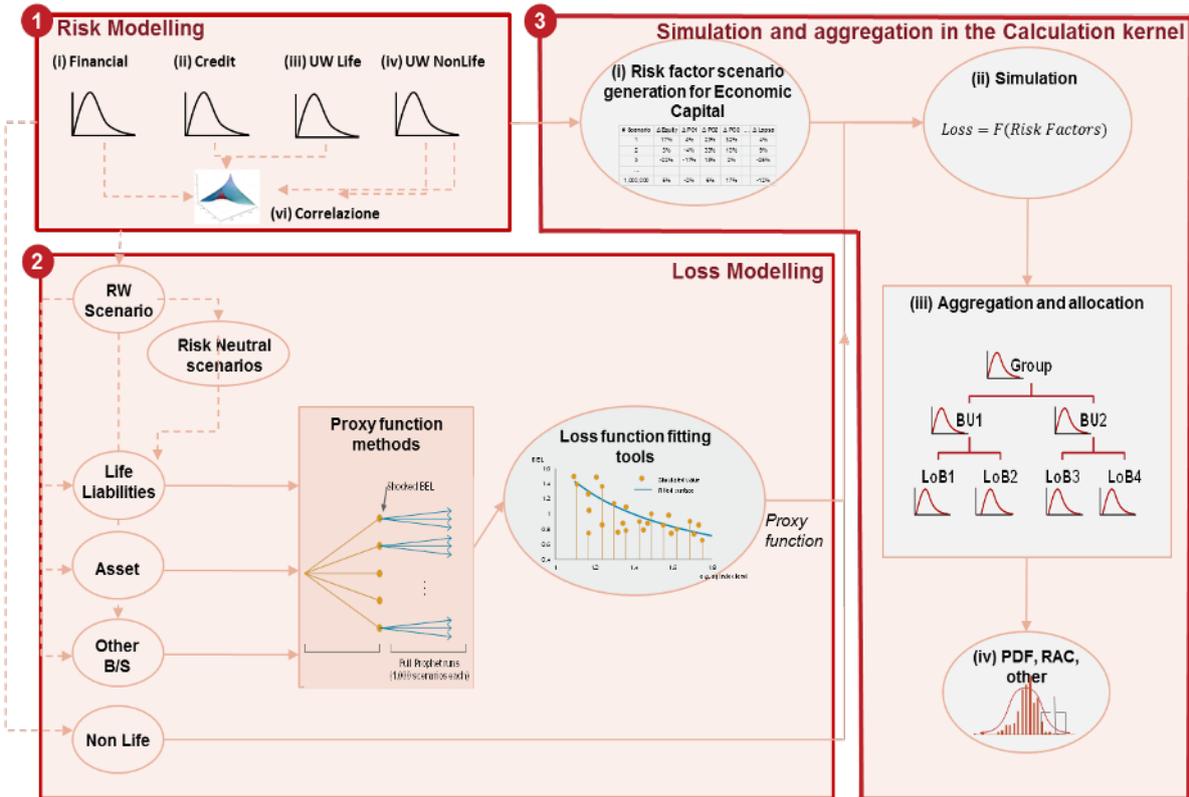


FIGURE 1.3: Approche de modélisation du Méthode Interne de Generali France

Dans ce mémoire, nous nous intéressons en particulier au Modèle Interne non-vie et nous décrivons les procédures et les étapes de calibrage pour le calcul des distributions empiriques des pertes associées aux sous-modules du risque de Souscription non vie que sont le risque de Primes, le risque de Catastrophe, le risque de Réserve, et le risque de Rachat.

Risque de Primes : Dans le Modèle Interne non-vie, les risques sont évalués à l'horizon d'un an, en conséquence nous déterminons une projection des pertes possibles sur les fonds propres à l'horizon d'un an. Le risque de Primes découle d'une insuffisance de primes futures encaissées au cours de l'année $N+1$ pour régler le montant des sinistres futurs. Cependant, le montant des sinistres de l'année en cours se compose du paiement de l'année en cours et de la réserve pour sinistres de l'année en cours. Lors de l'évaluation du risque de Primes, nous ne faisons pas de distinction entre les paiements et les provisions pour sinistres, mais nous déterminons une distribution pour le montant ultime des sinistres. Néanmoins, le montant final des sinistres d'une année d'expérience peut différer de la somme des paiements et des réserves après un an, en particulier lorsque l'on considère les segments à cadence de paiement longue. Ainsi, la volatilité du montant ultime des sinistres sera partiellement due à la volatilité du risque de Réserve de l'année en cours.

D'autre part, nous supposons que le risque de Primes est principalement lié à la volatilité des sinistres plutôt qu'à la volatilité des primes et des frais. Nous considérons que les primes et les frais doivent être modélisées de manière déterministe. Les estimations des valeurs déterministes des primes et des frais correspondent aux valeurs du plan stratégique commercial. En effet, ces valeurs nous semblent être les prédictes les plus fiables car elles sont produites sur la base de toutes les informations pertinentes concernant les activités futures (situation actuelle du marché, décisions stratégiques, ...).

Nous distinguons deux types de sinistres dans la modélisation de la sévérité.

- Sinistres attritionnels : ce type de sinistres se caractérise par un coût faible et une fréquence de sinistres élevée. Il faut noter que ce type de sinistre, est traité de manière globale et rapide. Par exemple, un sinistre lié à l'endommagement du pare-brise d'une voiture au cours d'un accident. Pour ce type de sinistre nous choisissons plutôt une modélisation par l'approche charge totale que l'approche fréquence-coût moyen.
- Sinistres graves : ce type de sinistre est moins fréquent que les sinistres attritionnels, en revanche ils sont plus coûteux. Par exemple lorsqu'un assuré renverse une personne, qui se retrouve partiellement voire totalement handicapée. Dans ce cas, le sinistre est classé grave, puisque son coût est assez important pouvant atteindre des millions d'euros. Pour modéliser cette catégorie de sinistre, dans la pratique nous avons recours à un modèle fréquence-coût moyen.

La modélisation du risque de Primes est basée sur l'identification des distributions de pertes qui représente la sévérité en s'appuyant sur l'historique de développement des sinistres.

En principe, l'approche fréquence-coût moyen est celle qui convient le mieux pour refléter les caractéristiques des sinistres et elle permet de capter les effets liés à la fréquence. Lorsqu'il existe des dépendances entre les coûts de sinistres et leur fréquence alors nous modélisons ces segments avec l'approche charge totale. Après avoir choisi le modèle approprié, l'étape suivante est le calibrage des distributions en supposant que les sinistres observés pour une même année d'expérience sont indépendants. Cette hypothèse permet d'ajuster les observations à l'aide d'une analyse qualitative des tendances observés sur l'historique des sinistres. Ensuite, les données corrigées de leurs tendances sont inflatées et incorporées dans les triangles de développement pour capter la volatilité du développement des sinistres par année d'expérience. L'étape suivante correspond à la projection des triangles de développement des sinistres inflatés. Concrètement, nous déterminons les facteurs de développement à l'aide de la méthode Chain-Ladder afin de projeter les triangles de sinistres et de fréquence. Enfin, la dernière étape consiste à calibrer les distributions empiriques. Dans le cas d'une approche fréquence-coût moyen, nous choisissons une distribution pour la sévérité et une autre distribution pour la fréquence en les comparant avec les distributions empiriques. Les distributions retenues sont celles qui présentent les caractéristiques de lois les plus proches des distributions empiriques (espérance, écart-type, et coefficient de variation) ainsi que la convergence des quantiles aux queues de distribution. Cependant, nous vérifions l'adéquation du choix des distributions en s'appuyant sur les tests d'égalité des lois (test Chi-squared) et nous choisissons la loi ayant la p-value la plus élevée. L'estimation des paramètres de lois nous permet de modéliser la distribution des pertes par segment avant de prendre en compte les mécanismes de diversification à l'aide d'une copule gaussienne pour obtenir une distribution des pertes au niveau entité. Ainsi, le capital réglementaire associé au risque de Primes correspond au quantile 99,5% de la distribution du résultat technique corrigé de l'espérance mathématique de cette dernière.

Risque de Catastrophe : Le risque de Catastrophe est défini comme la moins-value pouvant découler d'événements exceptionnels telles que les catastrophes naturelles (tempêtes, séismes, ...) et les catastrophes d'origine humaine (terrorisme, ...). Pour modéliser les pertes inattendues liées aux catastrophes dans le Modèle Interne, nous avons recours à la même démarche utilisée dans la modélisation du risque de Primes. Cependant, le calibrage des distributions de pertes associées au risque de Catastrophe est précédé d'une étape d'identification et d'évaluation de la matérialité des événements

catastrophiques en fonction du profil de risque de l'assureur tels que les inondations, les tempêtes de vent, les tremblements de terres, la grêle, et la sécheresse qui peuvent impactés son résultat technique. Ce processus repose sur les étapes suivantes :

- Extraction des montants d'exposition par type d'évènement catastrophique et par territoire de la base des données à la fin de l'année comptable N-1.
- Traitement des indicateurs tels que les montants assurés, les franchises, et les pertes maximales possibles.
- Contrôle des fonctions actuarielles des unités commerciales et des méthodes de mise à jour des données.

Toutefois, les paramètres des distributions sont calibrés sur des sinistres catastrophiques. Nous rappelons que les sinistres catastrophes sont très rares du fait que leur fréquence est très faible. Néanmoins, lorsque ce type d'évènement se produit, les sinistres associés sont extrêmement coûteux et cela justifie le recours à des traités de réassurance pour réduire la volatilité des sinistres. En effet, cette catégorie de sinistre entraîne des dommages qui peuvent concerner plusieurs garanties, nous pouvons penser notamment au déclenchement d'un ouragan qui endommage tous les bâtiments et voitures sur un rayon de 1 km.

Risque de Réserve : Le risque de Réserve, ou risque de mali, correspond au déficit probable lié à des provisions pour sinistres estimées faible pour faire face aux engagements à horizon 1 an. La modélisation de ce risque se fait par la projection des engagements d'assurance non-vie à la maille Catégorie Ministérielle, en particulier les provisions en stock et celles qui découlent des affaires nouvelles, car un sinistre n'est pas toujours réglé à sa déclaration et son coût peut évoluer. Nous pouvons imaginer un sinistre corporel responsable de l'invalidité d'une personne, l'indemnisation se déroulera tant que la personne n'est pas décédée. En règle générale, le coût d'un dossier sinistre se décompose en plusieurs règlements, notamment d'une Provision pour Sinistre A Payer (ou PSAP) qui sert à indemniser en fonction de la cadence de développement des sinistres de la compagnie d'assurance. Parfois, les sinistres sont déclarés quelques années après la survenance de l'évènement générateur, et cela pose la question de l'estimation du coût des engagements. Dans ce cas, la compagnie d'assurance prévoit une provision pour les sinistres survenus mais non-déclarés appelé IBNR pour (Incurred But Not Reported). Ainsi, il arrive que ces deux provisions soient confondues en raison d'un historique de sinistre très limité. Dans le Modèle Interne les engagements projetés correspondent à la somme de ces deux provisions.

La détermination de ces provisions repose sur des modèles actuariels stochastiques ou déterministes, les méthodes les plus utilisées dans la pratique sont : la méthode Chain Ladder, la méthode de Bornhuetter-Ferguson, la méthode London Chain ou le modèle de Mack. Une présentation plus complète de ces modèles est fournie par DENUIT et CHARPENTIER (2005) dans Mathématique de l'assurance non-vie Tome 2.

Dans le Modèle Interne non-vie de Generali France, le coût ultime global associé au risque de Réserve à la maille Catégorie Ministérielle est évalué par une approche stochastique de type Bootstrap. Un

échantillon bootstrap est obtenu par un tirage aléatoire avec remise. L'échantillon dans ce cas de figure représente les volatilités des triangles décumulés, et chaque simulation du bootstrap permet de calculer le Best Estimate. Cette hypothèse est fréquemment retenue pour modéliser, dans un Modèle Interne Total, le risque de Réserve. Une présentation des méthodes de calcul du capital élémentaire associé au risque de Réserve en assurance non-vie est fournie par BOUMEZOUED et al. (2011) et dans les travaux de NAPOLEON (2019). Nous présentons dans la figure 1.4 les étapes de calcul du capital réglementaire associé à ce sous-module du risque de Souscription non-vie dans le Modèle Interne non-vie.

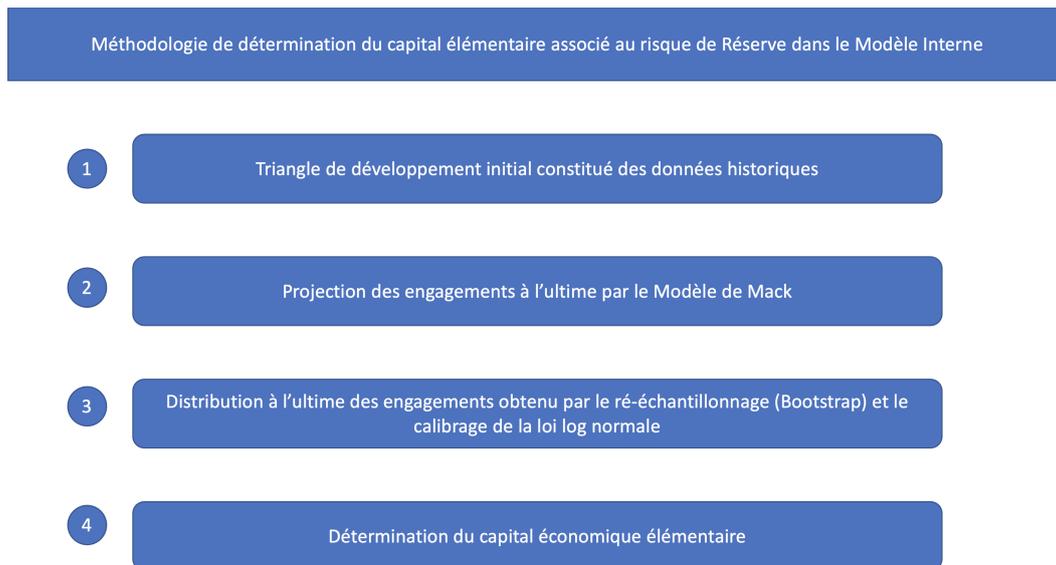


FIGURE 1.4: Calcul du capital réglementaire lié au risque de Réserve dans le Modèle Interne de Generali France

Risque de Rachat : Le risque de Rachat non-vie représente la perte possible résultant de la marge perdue sur les primes futures à encaisser par la compagnie dans la mesure où les assurés résiliaient leurs contrats. Ce déficit probable induit une baisse de l'activité de l'assureur, et la diminution du chiffre d'affaires de la compagnie.

Dans le Modèle Interne de Generali France, le risque de Rachat non-vie est modélisé en faisant varier le taux de rachat de manière stochastique. En premier lieu, nous commençons par le traitement de l'historique de rachat constatés les années précédentes et l'évaluation des provisions pour primes. Les provisions pour primes correspondent à deux provisions chacune incluant les frais de règlement des sinistres que nous détaillons ci-dessous :

- Les provisions sur les sinistres et frais futurs provenant des contrats en cours et dont les primes ont été émises mais ne sont pas totalement acquises. Ces provisions par segment correspondent au produit entre la part des primes émises et non acquises, et la somme du ratio de sinistres et du ratio des frais administratifs.
- Les provisions sur les affaires existantes qui portent sur la frontière des contrats concernent les primes qui restent à émettre. Ces provisions de primes sont obtenues par la somme des sinistres futurs et des frais de règlement futurs, auxquelles nous retranchons les primes futurs.

Formellement, nous calibrons une distribution de probabilité bêta sur les taux d'historique de rachat. Ensuite, nous estimons l'impact de chaque simulation sur les bénéfices futurs et puis nous agrégeons les effets au niveau de l'entité en s'appuyant sur des hypothèses de corrélations appropriées.

Cependant, la valorisation des actifs comme des passifs à horizon un an de l'organisme assurantiel peut reposer sur la méthode des « simulations dans les simulations » secondaires dans un univers risque-neutre. Étant donnée le cadre d'étude de ce mémoire, voici l'illustration de cette méthodologie dans la figure 1.5 proposée par DEVINEAU et LOISEL (2009).

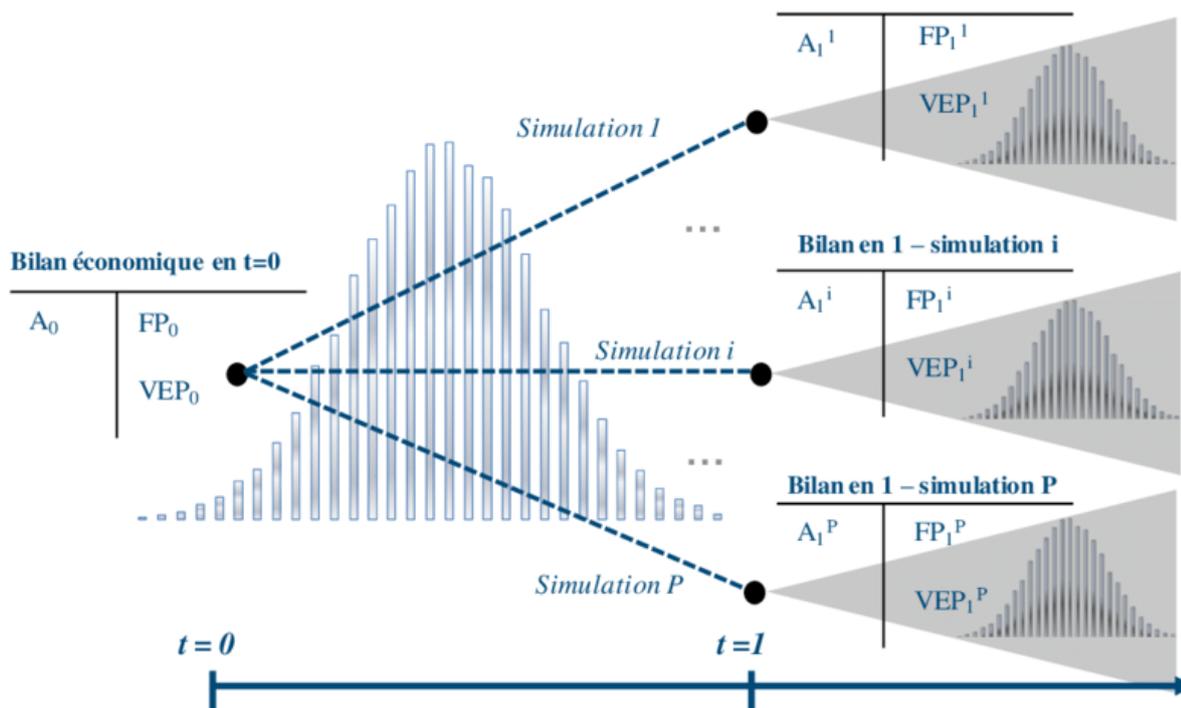


FIGURE 1.5: Méthodes des simulations dans les simulations

En choisissant cette approche, les coefficients de corrélation entre les risques ne suffisent plus pour modéliser plusieurs niveaux d'agrégations. Dans la pratique, les dépendances entre les risques sont modélisées à travers le choix d'une copule calibrée sur les données de sinistralité dont dispose l'organisme assurantiel. De cette façon, le montant de fonds propres obtenu tient compte de l'effet diversification entre les risques.

Utilisation des copules gaussiennes Pour modéliser des lois multivariées, étape cruciale pour l'allocation de capital, nous avons recours aux copules. Cette pratique permet de simuler un vecteur aléatoire dont les composantes ne sont pas indépendantes. La théorie des copules a été introduite dans ce sens, elle trouve son intérêt dans l'étape d'agrégation des risques pour calculer le capital réglementaire avec l'approche Modèle Interne. A ce stade, nous proposons de définir les démarches importantes de cette étape.

- La copule choisie est la copule gaussienne pour être cohérent avec les hypothèses du cadre gaussien suggérées par le superviseur, même si elle n'est pas la copule la plus adaptée pour modéliser la dépendance aux extrêmes. Nous invitons le lecteur à se référer à DEVINEAU (2014) et à DECUPÈRE (2011) pour plus d'informations sur l'approche d'agrégation des risques en assurance.

- Pour paramétrer les copules utilisées dans la modélisation, les coefficients de corrélation déterminés lors de l'étape de calibrage sont intégrés au moment de simuler la fonction caractéristique. Pour plus d'informations sur l'estimation des paramètres des copules nous invitons le lecteur à se référer à SLIMANI (2019).

Une présentation plus complète sur l'utilisation des copules est fournie par EMBRECHTS et al. (2001) et par ARBENZ (2018).

Cependant, les organismes assurantiels qui ont recours à l'approche Modèle Interne pour déterminer le capital réglementaire doivent s'assurer de l'exhaustivité, de la robustesse et de la fiabilité du modèle dans le temps. De ce fait, la directive Solvabilité 2 oblige les organismes assurantiels d'implémenter et documenter une série d'évaluation quantitative et qualitative des composantes du modèle, appelé « Use tests ». Nous proposons ici une revue de l'importance de ces tests qui s'inspire de la documentation Orientations sur l'utilisation de modèles internes EIOPA (2014).

Nous distinguons les tests exécutés par les organismes assurantiels qui permettent une évaluation relative à l'utilisation de celui-ci et également lors de modification du Modèle Interne (Model Change). En effet, les modifications apportées au modèle ont pour objectif d'améliorer la qualité des résultats du Modèle Interne. Par conséquent les organismes assurantiels sont tenus de démontrer que la mise en œuvre de la modification découle d'une nécessité opérationnelle, et que son déploiement est conforme aux exigences du superviseur et à la directive Solvabilité 2 au sens plus large. D'autre part, l'organisme assurantiel doit s'assurer de la compréhension du modèle interne à des fins décisionnelles, et intégrer son utilisation dans la gestion des risques. Le superviseur peut contrôler la compréhension du modèle par les organes d'administration au travers des interviews avec les personnes dirigeantes.

Le capital élémentaire a été obtenu par l'agrégation de capitaux élémentaires issus des mailles de risque encore plus fines. Par exemple, dans la modélisation du risque de Catastrophe, nous pouvons isoler les catastrophes naturelles de celle d'origine humaine (Man Made) pour caractériser le capital élémentaire.

Dans le cadre d'un Modèle Interne, le choix de la segmentation est important dans la modélisation des risques et des dépendances entre les branches d'activités. Parmi les découpages présents dans la littérature des sciences actuarielles nous retenons les quatre découpages suivants :

- La maille Ligne d'Activité LoB (Line of Business), cette segmentation est imposée par la directive Solvabilité 2. Cependant, l'inconvénient de cette maille est qu'elle regroupe des garanties commercialisées dans différents produits. Nous pouvons citer la ligne d'activité (LoB) Dommages aux biens, cette ligne d'activité réunit des garanties Multirisque Habitation et des garanties Dommage Ouvrage avec des durations plus longues.
- La maille Catégorie Ministérielle (CatMin), il s'agit d'une maille plus fine que la maille ligne d'activité. Cependant elle associe également des produits ayant des cadences de développement des règlements différentes. Malgré la complexité à cartographier les produits entre LoB et CatMin, nous avons introduit cette segmentation uniquement dans le cadre d'étude du mémoire. Toutefois nous précisons qu'il existe bien un lien entre la maille ligne d'activité (LoB) et la maille Catégorie ministérielle (i.e. une LoB regroupe une ou plusieurs catégories ministérielles).
- La maille Portefeuille de contrats présente un niveau de granularité plus fin que la maille Catégorie Ministérielle, néanmoins deux Portefeuilles de contrats peuvent contenir les mêmes produits. La représentation des données sous forme de Portefeuille de contrats permet de regrouper les contrats homogènes par leurs caractéristiques (coût des sinistres, primes acquises, durée, cadence de développement, ...). En outre, pour un Portefeuille de contrats considéré,

nous distinguons dans la modélisation les types de sinistres associés à ce Portefeuille (attritionnels, graves, catastrophiques). Pour les portefeuilles attritionnels, le calibrage des distributions des pertes en Brut et en Net de réassurance repose sur les triangles de développement des montants cumulés. En revanche, les portefeuilles de type graves ou catastrophiques sont calibrés sur les coûts individuels de sinistres. Il convient alors de chercher un niveau de granularité plus fin sur lequel s'appuiera notre analyse.

- La maille produit (ou Business) permet la séparation des produits commercialisés. Cette vision claire est plus exploitable car elle offre des perspectives de modélisation adaptées et réalistes adaptées aux business. Néanmoins, elle regroupe différentes garanties dont les caractéristiques ne sont pas toujours les mêmes.

Remarque 1 (Capital réglementaire Solvabilité 2) Après avoir déterminé le capital SCR défini au niveau global de l'entité, l'intérêt de notre approche de gestion des risques est de répartir la part de ce capital associé aux sous-modules du risque de Souscription non-vie à la maille produit. Pour chacun des risques de Souscription non-vie, la part du capital réglementaire qui lui est associée, est différente du capital élémentaire obtenu par l'approche simulateur car il tient compte des effets de diversification. Le capital réglementaire est obtenu en deux étapes, il faut d'abord agréger les capitaux élémentaires au moyen de la copule avant de prendre en compte les ajustements par les impôts différés et le risque opérationnel. Pour éviter toute confusion, dans la suite de notre étude la notion de capital désignera la part du capital réglementaire par produit, défini pour chaque sous-module de risque. En revanche, le SCR agrégé désignera la part du capital réglementaire à la maille produit, obtenu par l'agrégation des capitaux associés aux risques de Souscription non-vie.

Après avoir donné une vue d'ensemble du régime prudentiel Solvabilité 2 et des méthodes de calcul du capital économique, on se propose à présent de décrire les limites de cette directive dans la section suivante.

1.1.3 Les limites du régime prudentiel

La détermination du capital réglementaire est basée sur une vision générale de la gestion du risque et s'appuie sur une architecture de risques bien déterminée. L'étape d'agrégation permet de prendre en compte les dépendances entre les risques soit au moyen de matrice de corrélation dans la Formule Standard, soit par le calibrage d'une copule dans le Modèle Interne. Néanmoins le montant de SCR obtenu par la Formule Standard reste contestable pour plusieurs raisons. La composition du portefeuille de l'organisme assurantiel n'est pas prise en compte dans cette méthodologie, ce qui entraîne un besoin d'évaluation de solvabilité et des risques à partir du profil de risque de l'organisme assurantiel. De plus, le SCR offre une vision prospective seulement à court terme. Par conséquent, la détermination de ce capital ne suffit pas à couvrir le risque de solvabilité de manière permanente et continue. Il est nécessaire d'actualiser le profil de risque de l'organisme assurantiel et de recalculer les besoins de solvabilité après chaque procédure d'identification des risques. Le montant de fonds propres à détenir par l'organisme assurantiel est l'un des principaux objectifs de la réglementation Solvabilité 2. A présent, nous introduisons le cadre de gestion des risques de Souscription non-vie sur lequel s'appuie l'étude de ce mémoire.

1.2 Cadre de gouvernance pour la gestion des risques en assurance non-vie : présentation du Modèle Miroir

1.2.1 Enterprise Risk Management : environnement de gestion des risques

L'ERM (Enterprise Risk Management), ou la gestion des risques est une démarche par laquelle une entreprise déploie un cadre formalisé pour gérer ses risques. Les principes sous-jacents de ce processus permettent d'identifier les risques, quantifier leurs impacts et mettre en place des stratégies de maîtrise afin de protéger le bilan de l'organisme assurantiel. Ce processus trouve son intérêt pour aligner l'appétence aux risques avec les stratégies, pour améliorer le déploiement des capitaux, ou encore pour réduire les pertes opérationnelles et les risques associés. A travers la mise en place du processus ERM, l'organisme assurantiel effectue des activités pour poursuivre les objectifs suivants :

- Identification des risques : l'organisme identifie les facteurs de risques, de manière systémique et complète, pouvant affecter son bilan économique.
- Évaluation et hiérarchisation des risques : l'organisme évalue la probabilité et l'impact d'événements potentiels sur la solvabilité.
- Conciliation entre gestion des risques et stratégie commerciale : l'organisme s'assure de la prise en compte des risques encourus dans les stratégies pour immuniser le bilan économique des événements pouvant compromettre la pérennité de son activité.
- Contrôle et suivi des risques : l'organisme élabore des activités de contrôle et s'assure de la mise en œuvre des stratégies, notamment le suivi régulier des risques.
- Information et Communication : les structures dirigeantes vérifient que la stratégie en matière de gestion des risques est communiquée à l'ensemble des parties prenantes. Il faut rappeler que ces dernières sont tenues responsables par leur rôle.

Pour chaque entité, les résultats de la procédure ORSA sont exploités pour instaurer une culture du risque. Le but est de définir les mesures de limitation de risque et à s'assurer de les communiquer à l'ensemble des parties prenantes.

Ce dispositif vise à développer une approche permettant d'inclure les risques identifiés à mesure que l'on sait plus et ajouter des nouveaux risques à mesure que l'on acquiert une meilleure connaissance. Nous soulignons que cette approche doit aussi comprendre la dimension prospective pour anticiper les risques qui peuvent survenir.

Après avoir catégorisé les risques, l'étape suivante du processus ERM est l'élaboration d'un plan de remédiation pour contrôler la probabilité et l'impact des événements incertains. Cette pratique permet à la compagnie de gérer sa tolérance aux risques pour réaliser les objectifs du plan stratégique.

Le processus ERM n'est pas spécifiquement lié à l'assurance. Il regorge de principes comme ceux présentés ici mais qui peuvent également être différents d'un organisme à l'autre. Cependant, ce processus permet de mieux contrôler les risques liés au secteur d'activité dans lequel elle a été implémentée. Une fois les risques identifiés, il vient l'évaluation de la probabilité et l'impact potentiel découlant de chaque risque. La dernière étape de l'ERM est l'élaboration de plan de remédiation. Ce dernier consiste à définir une procédure à suivre en cas de réalisation d'un événement incertain. Par exemple, un plan de remédiation peut être une mesure permettant de sensibiliser les parties prenantes pour maîtriser un risque propre à l'activité de l'entreprise.

D'autre part, le cadre d'appétence au risque appelé Risk Appetite Framework (RAF) est une composante clé du cadre de la gestion des risques dont l'objectif est de définir, suivre et gérer l'appétence

au risque de l'organisme assurantiel. Le contrôle du risque étant un exercice important pour les organismes assureurs, celles-ci mettent en place une gouvernance appropriée qui se traduit par un processus de gestion de l'appétence au risque. Nous invitons le lecteur à se référer à AGENOS (2010) pour plus de détails sur processus d'appétence au risque en assurance.

Le Risk Appetite Framework (RAF) se structure autour de la définition d'un niveau d'appétence au risque, jugé acceptable par les instances dirigeantes de manière à atteindre les objectifs stratégiques de l'organisme assurantiel. Cependant, l'encadrement de l'appétence au risque nécessite l'introduction des notions liés à ce processus. Nous proposons les définitions suivantes pour définir le cadre de l'appétence au risque.

- Le niveau d'appétence au risque d'un organisme assurantiel traduit le niveau agrégé de risque qu'elle juge acceptable à horizon 1 an.
- Les préférences de risques sont des déclarations qualitatives qui guident l'organisme assurantiel dans la sélection individuelle des risques pour maintenir un portefeuille d'assurance équilibré, diversifié et durable, en accord avec les objectifs stratégiques et le niveau d'appétence au risque.
- Les tolérances de risques permettent à l'organisme assurantiel de s'assurer du respect de son appétence et de cadrer son activité. Ces mesures sont définies par les structures dirigeantes, mais elles peuvent être modifiées, en particulier en cas de déformation du profil de risque de l'organisme assurantiel.
- Les limites de risque sont seuils opérationnels permettant à l'organisme assurantiel de gérer son profil de risque dans le cadre de son appétence au risque.

1.2.2 Modèle Miroir : définitions et hypothèses de modélisation des risques de Souscription non-vie

Dans le cadre de ce mémoire, l'analyse des indicateurs de solvabilité et de performance économique est développée uniquement pour les sous-modules de risques de Souscription non-vie. Le Modèle Miroir est une réplique du Modèle Interne non-vie, utilisé pour la gestion du risque de Souscription non-vie des entités non-vie de Generali France. Nous avons intégré le développement des méthodes d'allocation afin de pouvoir analyser les indicateurs à la maille produit. Le risque de Souscription non-vie est intimement lié au passif du bilan de la compagnie d'assurance. Rappelons-le, il découle essentiellement des engagements d'assurance non-vie, les principales sources de ce risque sont le risque de Primes (Tarification), le risque de Catastrophe et le risque de Réserve (Provisionnement). A présent, on propose de décrire l'approche de modélisation des sous-modules de risque de Souscription non-vie dans le Modèle Miroir.

● **Risque de Primes** Le risque de Primes, consiste à quantifier les pertes inattendues liées à l'insuffisance de primes futures encaissées au cours de l'année $N+1$ pour régler le montant des sinistres futurs engendrés par les contrats. Pour modéliser ce risque, nous distinguons deux types de sinistres :

- Les sinistres attritionnels, ce type de sinistres se caractérise par un coût faible et une fréquence de sinistres élevée. Il faut noter que ce type de sinistre, est traité de manière globale et rapide. Par exemple, un sinistre lié à l'endommagement du pare-brise d'une voiture au cours d'un accident.

Pour ce type de sinistre nous choisissons plutôt une modélisation par l'approche charge totale que l'approche fréquence-coût moyen.

- Les sinistres graves, ils sont moins fréquents que les sinistres attritionnels, en revanche ils sont plus coûteux. Par exemple lorsqu'un assuré renverse une personne, qui se retrouve partiellement voire totalement handicapée. Dans ce cas, le sinistre est classé grave, puisque son coût est assez important pouvant atteindre des millions d'euros. Pour modéliser cette catégorie de sinistre, dans la pratique nous avons recours à un modèle fréquence-coût moyen.

La projection du risque de Primes dans le Modèle Miroir repose sur la modélisation des distributions de pertes en Brut et en Net de réassurance à la maille Portefeuille de contrats. Les modèles de sinistralité fréquemment utilisés sont l'approche fréquence-coût moyen et l'approche charge totale. Les paramètres des distributions tiennent compte des calibrages du Modèle Interne non-vie et l'application des copules correspond à l'étape de corrélations entre les portefeuilles. Lorsque l'approche fréquence-coût moyen est la plus adaptée pour représenter les coûts associés à ce risque, il convient de choisir une loi pour modéliser la fréquence puis d'utiliser une distribution de charge adaptée pour refléter l'historique des données. Le capital élémentaire associé à ce sous-module correspond à la différence entre le quantile à 99,5% de cette distribution et l'espérance mathématique de cette dernière.

● **Risque de Catastrophe** Le risque de Catastrophe est défini comme la moins-value pouvant découler d'évènements exceptionnels telles que les catastrophes naturelles (tempêtes, séismes, ...) et les catastrophes d'origine humaine (terrorisme, ...). Pour modéliser les pertes inattendues liées aux catastrophes dans le Modèle Interne, nous avons recours à la même démarche utilisée dans la modélisation du risque de Primes. Toutefois, les paramètres des distributions sont calibrés sur des sinistres catastrophiques. Nous rappelons que les sinistres catastrophes sont très rares du fait que leur fréquence est très faible. Néanmoins, lorsque ce type d'événement se produit, les sinistres associés sont extrêmement coûteux et cela justifie le recours à des traités de réassurance pour réduire la volatilité des sinistres. En effet, cette catégorie de sinistre entraîne des dommages qui peuvent concerner plusieurs garanties, nous pouvons penser notamment au déclenchement d'un ouragan qui endommage tous les bâtiments et voitures sur un rayon de 1 km.

● **Risque de Réserve** Le risque de Réserve, ou risque de mali, correspond au déficit probable lié à des provisions pour sinistres estimées faible pour faire face aux engagements à horizon 1 an. La modélisation de ce risque se fait par la projection des engagements d'assurance non-vie à la maille Catégorie Ministérielle, en particulier les provisions en stock et celles qui découlent des affaires nouvelles, car un sinistre n'est pas toujours réglé à sa déclaration et son coût peut évoluer. Nous pouvons imaginer un sinistre corporel responsable de l'invalidité d'une personne, l'indemnisation se déroulera tant que la personne n'est pas décédée. En règle générale, le coût d'un dossier sinistre se décompose en plusieurs règlements, notamment d'une Provision pour Sinistre A Payer (ou PSAP) qui sert à indemniser en fonction de la cadence de développement des sinistres de la compagnie d'assurance. Parfois, les sinistres sont déclarés quelques années après la survenance de l'événement générateur, et cela pose la question de l'estimation du coût des engagements. Dans ce cas, la compagnie d'assurance prévoit une provision pour les sinistres survenus mais non-déclarés appelé IBNR pour (Incurred But Not Reported). Ainsi, il arrive que ces deux provisions soient confondues en raison d'un historique de sinistre très limité. Dans le Modèle Miroir les engagements projetés correspondent à la somme de ces deux provisions.

Le risque de Réserve dans le Modèle Miroir est modélisé par le calibrage des distributions de réserve en Brut et en Net de réassurance à la maille produit sur la loi log normale, en s'appuyant

sur le calibrage du Modèle Interne. Cette hypothèse, trouve sa justification car la distribution des réserves déterminée par le bootstrapping converge vers une loi log normale pour un nombre de simulation suffisamment grand. Nous invitons le lecteur à se référer à BENCTUEUX (2015) ou bien CENTENO (2003) pour plus de détails sur la modélisation du risque de Réserve par l'approche de bootstrap. Nous illustrons les distributions des réserves obtenues par le Modèle Interne non-vie et le Modèle Miroir des quatre lignes d'activité à l'étude dans les figures 1.6, 1.7, 1.8, et 1.9.

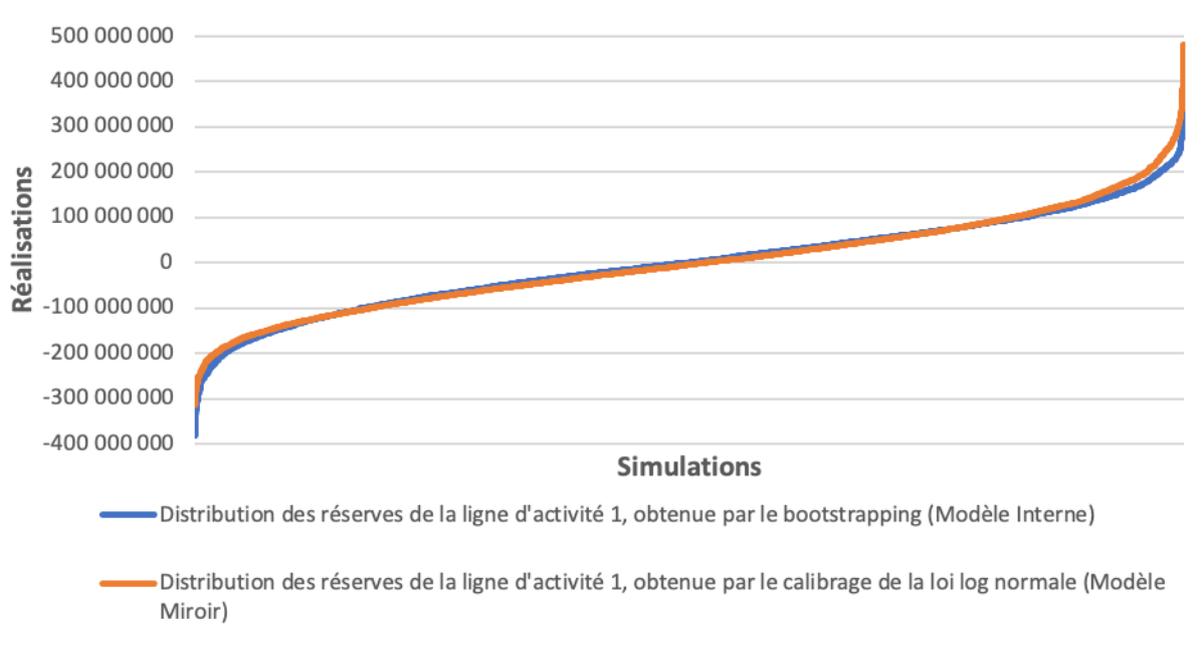


FIGURE 1.6: Convergence des distributions de réserves de la ligne d'activité 1

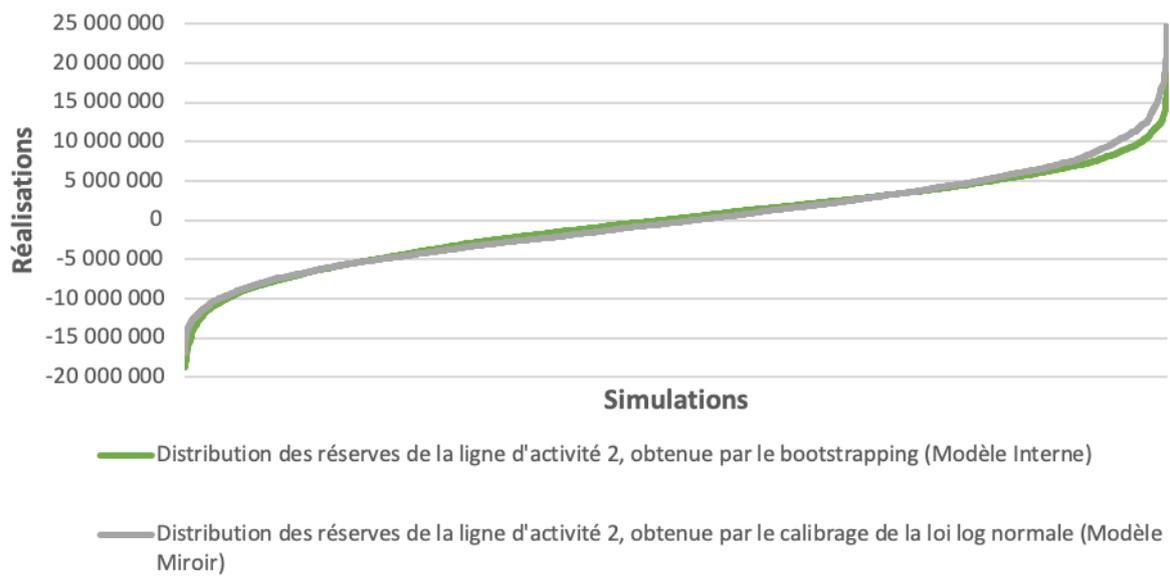


FIGURE 1.7: Convergence des distributions de réserves de la ligne d'activité 2

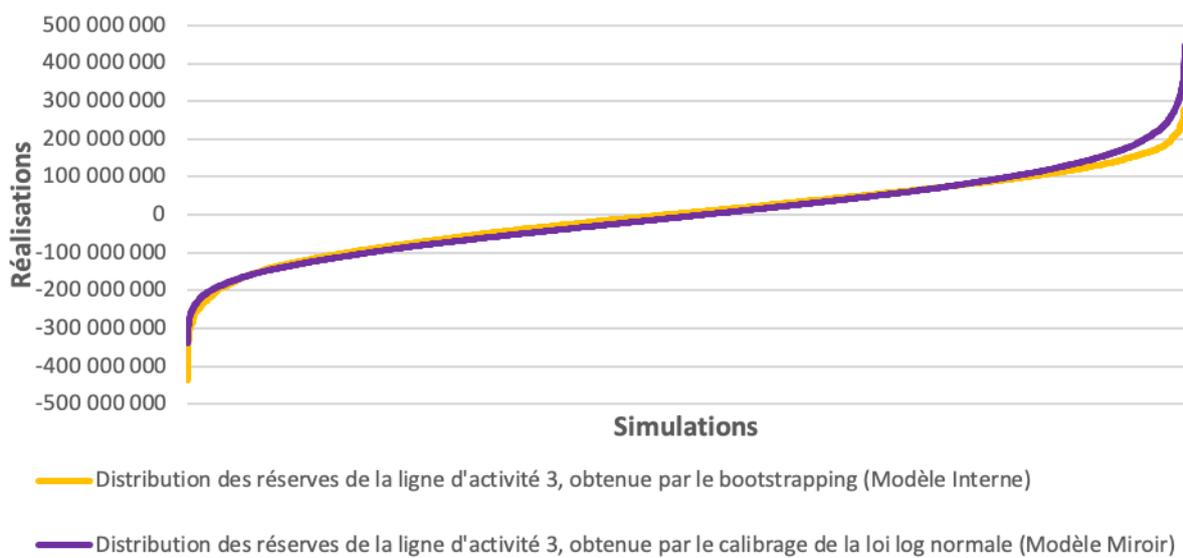


FIGURE 1.8: Convergence des distributions de réserves de la ligne d'activité 3

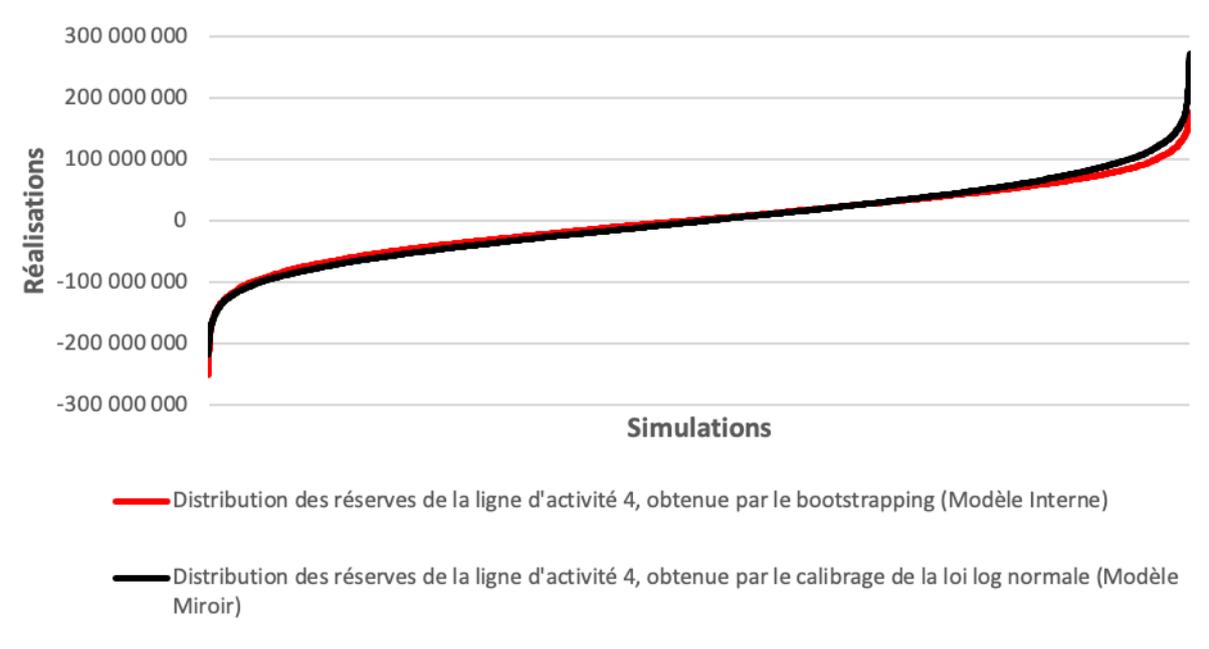


FIGURE 1.9: Convergence des distributions de réserves de la ligne d'activité 4

Le calibrage de la volatilité des sinistres permet d'estimer correctement le coût des engagements associés à ce risque. La volatilité des engagements est essentiellement liée à l'inversion du cycle de production et aux facteurs conjoncturels externes, comme par exemple la sinistralité durant la période de confinement causée par la pandémie de la Covid-19. Cette mesure de restriction préventive, a conduit à une baisse de la sinistralité en particulier la fréquence des sinistres, sur l'ensemble des produits Auto. Il est nécessaire d'ajuster les niveaux de volatilités associées aux engagements, pour prendre en compte l'évolution des phénomènes intrinsèques au risque de Réserve, comme les méthodes de gestion des dossiers, les montants d'exposition pour un portefeuille, ou encore les nouvelles garanties ajoutées dans les polices d'assurance.

A présent, nous présentons le dernier sous-module du risque de Souscription non-vie, à savoir le risque de Rachat non-vie.

● **Risque de Rachat** Le risque de Rachat non-vie représente la perte possible résultant de la marge perdue sur les primes futures à encaisser par la compagnie dans la mesure où les assurés résiliaient leurs contrats. Ce déficit probable induit une baisse de l'activité de l'assureur, et la diminution du chiffre d'affaires de la compagnie.

Ce dernier risque immobilise peu de capital réglementaire pour les entités non-vie de Generali France, par rapport aux autres sous-modules du risque de Souscription non-vie. Les méthodes d'allocation du capital seront développées et analysées sur l'ensemble des sous-modules du risque de Souscription non-vie sauf le risque de Rachat non-vie.

Par ailleurs, le Modèle Miroir ne permet pas d'aboutir aux distributions des pertes à la maille produit pour les risques de Primes et de Catastrophe. Il faut affiner davantage la modélisation de ces risques en tenant compte des caractéristiques des produits. C'est pourquoi l'approche par laquelle nous avons abouti aux distributions des pertes à la maille produit pour ces risques n'est pas anodine, elle permet de prendre en compte l'exposition de chaque produit pour répartir équitablement chaque sous-module de risque.

Dans ce cadre, la mise en œuvre de l'approche de gestion des risques nous permettra d'évaluer la

consommation du capital réglementaire à la maille produit. Ce montant de capital que nous cherchons à répartir tient compte des bénéfices liés à la diversification entre le risque de Souscription non-vie et les autres modules de risques y compris le risque opérationnel. Le capital de chaque sous-module du risque de Souscription non-vie est déterminé par le Modèle Interne à la maille ligne d'activité (LoB). Les méthodes d'allocation sont développées dans le Modèle Miroir pour répartir ce montant de capital sur les produits. Toutefois, l'allocation du capital s'appuie sur la contribution individuelle des produits au risque défini au niveau de la ligne d'activité qui les contient. Avant de définir l'allocation du capital pour les produits commercialisés, la partie suivante donne une vue d'ensemble sur les perspectives offertes par l'approche de gestion des risques développée ici.

1.2.3 Amélioration du dispositif de pilotage des activités et des produits en assurance non-vie

Après avoir déterminé le capital réglementaire, l'allocation du capital consiste à le répartir entre les produits. La détermination du capital réglementaire Solvabilité 2 repose sur une approche bottom-up, qui consiste à étudier chaque risque séparément, puis d'agréger l'ensemble des risques à l'aide des corrélations. A l'inverse, l'allocation du capital nécessite une approche top-down pour identifier l'importance de chaque risque en matière de participation au risque global. Ce mémoire vise à exposer un cadre d'analyse et de gestion des risques de Souscription non-vie qui repose sur l'allocation du capital. Pour éclairer davantage le lecteur sur l'utilité de notre étude, cette section décrit quelques activités concrètes en assurance non-vie connexes à cette pratique.

Depuis l'introduction du régime prudentiel Solvabilité 2, le pilotage des activités commerciales des compagnies d'assurances repose sur l'évaluation des indicateurs de rentabilité à la maille produit. Pourtant cette pratique interne ne figure pas dans les exigences de la réglementation. Solvabilité 2 a amené les assureurs à repenser leurs procédures en matière de pilotage pour inclure une vision risque. Les décisions stratégiques concernant un produit déjà commercialisé sur le marché ou un nouveau produit portent sur l'élaboration d'un processus interne associé, défini au niveau du Groupe Generali, et qui permet de mieux les analyser.

En particulier, deux procédures opérationnelles reflètent le cadre de gouvernance décrit par GENERALI (2020) : le processus de lancement d'un nouveau produit (ou *Product Authorization Process*, dit PAP) et le processus de suivi d'un produit (ou *Portfolio Monitoring Process*, dit PMP). Le PAP est une démarche opérationnelle d'autorisation de lancement d'un nouveau produit d'assurance non-vie tandis que, le PMP est une procédure opérationnelle de suivi des plans de remédiation élaborés pour les produits commercialisés.

Au niveau du Groupe, les indicateurs sont déterminés à la maille ligne d'activité (LoB). Tandis qu'à Generali France, l'approche développée dans ce mémoire permet d'évaluer les indicateurs de solvabilité et de rentabilité à la maille produit pour améliorer les dispositifs en matière de gestion des risques. La définition des seuils permet de faciliter l'analyse des indicateurs et le pilotage des produits à forte consommation en capital. Certaines lignes d'activité (LoB) présentent une forte consommation en capital réglementaire. Pour identifier les produits responsables de la hausse en matière de consommation en capital, il faut affiner les indicateurs pour identifier les produits franchissant des seuils prédéfinis. Une fois cette étape terminée, l'analyse qui en ressort doit permettre à la compagnie d'élaborer des stratégies afin d'améliorer la rentabilité des produits concernés. Par exemple, une ligne d'activité contenant des produits commercialisés à déroulement long, comme la ligne d'activité *TPL Third Party Liability*, consomme une part importante du capital réglementaire, en particulier pour le risque de Réserve. La ligne d'activité TPL regroupe des produits ayant des profils de risques différents et cela se répercute sur la consommation en capital. Le risque de Réserve est le plus consommateur de capital pour cette LoB, car elle contient des produits à déroulement long (pouvant dépasser 30

ans) comme les produits Construction. Afin de comprendre la contribution des risques importants au risque globale associé à chaque produit de cette ligne d'activité, l'allocation du capital constitue un outil important pour y parvenir. Parmi les évaluations élaborées par la compagnie en matière de pilotage, nous retrouvons les stratégies de réassurance, et la tarification technique.

L'évaluation des stratégies de réassurance consiste à comparer les indicateurs à la maille produit en Net de réassurance, puis de les confronter aux seuils. Cette comparaison permet de mieux piloter les produits, dans la mesure où nous parvenons à relever le ou les traité(s) de réassurance qui semble adapté(s) pour commercialiser le produit en question.

Par ailleurs, l'ajustement du ratio combiné par un facteur d'escompte financier et un facteur de coût en capital, est une nouvelle approche employée pour les entités non-vie de Generali France. Elle permet d'améliorer la prise de décision concernant la stratégie de réassurance à envisager. Par conséquent, nous identifions un réel axe de développement pour les compagnies d'assurance non-vie. Cette démarche est importante dans le cadre du suivi d'un portefeuille existant pour le renouvellement annuel des traités de réassurance et aussi pour le lancement d'un nouveau produit.

Dans la tarification technique, une nouvelle méthode propre à Generali France permettant d'inclure la rémunération du capital à la maille produit. Cette méthode repose sur la prise en compte du coût en capital comme un facteur, pour « tarifier » les produits non-vie. Le tarif technique d'un produit peut inclure par exemple un chargement supplémentaire lié à la consommation en capital afin de soutenir l'activité et verser les dividendes promis aux actionnaires. Cette pratique prend la forme d'une actualisation à l'aide d'un taux de rémunération du capital défini au niveau du Groupe Generali. Là encore, le taux de rémunération doit être déterminé à la maille produit en s'appuyant sur l'allocation du capital, conformément à la politique de tarification GENERALI (2019). Cette méthode est adaptée à la fois pour la révision tarifaire d'un produit déjà commercialisé sur le marché et lors de la tarification d'un nouveau produit.

Ainsi l'allocation du capital nous paraît essentiel pour améliorer les politiques dans le cadre du lancement d'un produit ou pour le suivi d'un portefeuille de contrats d'assurance non-vie. Comme mentionné, elle trouve son intérêt pour choisir les stratégies de réassurance et améliorer la tarification technique d'un nouveau produit.

Dans le cas du suivi d'un portefeuille de contrats, elle sera pertinente pour le renouvellement annuel des traités de réassurance et la révision tarifaire. Nous pouvons conclure que l'allocation du capital présente des perspectives pour améliorer le pilotage des activités d'une compagnie d'assurance non-vie et elle ouvre de nombreux axes de progrès.

Les exemples cités ci-dessus constituent une liste non-exhaustive quant à l'utilité de l'allocation du capital dans le secteur assurantiel. En règle générale, l'allocation du capital permet de caractériser les segments de risque trop consommateurs de capitaux, ou au contraire les segments les plus rentables.

Dans ce chapitre, nous avons établi le cadre réglementaire sous laquelle l'approche de gestion des risques est développée. Cette pratique trouve son intérêt pour améliorer le pilotage des produits, et à ce titre nous introduisons le dispositif de notre approche dans le chapitre suivant, qui se caractérise par la définition de l'allocation du capital et les indicateurs permettant d'analyser les produits dans le référentiel risque-rentabilité. Par ailleurs, nous avons recours à cette approche dans l'application numérique présentée au chapitre 3 et pour évaluer les conséquences sur la consommation en capital des sensibilités réalisées en lien avec les recommandations de l'EIOPA dans EIOPA (2021). Cette étude est présentée dans le chapitre 4. Dans la section suivante, nous nous intéressons aux différentes approches de décomposition du risque présentes dans la littérature des sciences actuarielles.

1.3 Décomposition du risque

Dans le secteur assurantiel, la décomposition des risques n'est pas un sujet nouveau. Le principe de la décomposition des risques consiste à étudier les sources de risque (risques financiers, risques industriels, ...) pouvant déformer le profil de risque de l'organisme assurantiel afin de définir des stratégies de gestion des risques adéquates. Étant donné la problématique de notre mémoire, on s'intéresse à étudier qualitativement les approches de la décomposition du risque utilisées par les organismes assurantiers. Nous aborderons les différentes approches de la littérature scientifique et notamment une nouvelle approche de décomposition dans un cadre gaussien similaire à celui de notre étude. Nous commençons par introduire les propriétés d'une décomposition significative du risque. Dans un second temps, nous présentons l'analyse qualitative des méthodes de décompositions des risques présentes dans la littérature des sciences actuarielles. Dans la suite, nous aborderons une nouvelle approche de décomposition introduite pour la première fois dans *Decomposing Dynamic Risks into Risk Components* SCHILLING et al. (2020), appelé décomposition MRT. La décomposition MRT (*Martingale Representation Theorem*) repose sur le théorème de représentation martingale, et elle satisfait les propriétés d'une décomposition significative du risque, d'où sa pertinence d'utilisation.

1.3.1 Définition

Dans cette partie, nous commençons par introduire les propriétés qui définissent une décomposition significative du risque. En particulier, nous supposons qu'une décomposition significative doit prendre en compte la distribution complète du risque supporté par l'organisme assurantiel (P1). Nous considérons que les décompositions du risque sont uniques (P3) et indépendantes de l'ordre des sources de risque considérées (P4). Les composantes du risque peuvent être attribuées aux différentes sources de risque considérées (P2). Nous considérons que les composantes du risque sont invariantes par le changement d'échelle (P5), et l'agrégation des composantes résultantes de la décomposition égalise le risque total supporté par l'organisme assurantiel (P6). Nous discutons de la pertinence des propriétés de la décomposition significative du risque dans le contexte de la gestion des risques.

Définition 5 (Espace de probabilité filtré Δ) Soit \tilde{T} un horizon de temps fixé, nous considérons un espace de probabilité filtré $\Delta = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$, où $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_{0 \leq t \leq \tilde{T}})$ la filtration engendrée par \mathcal{F}_t l'information à l'instant t et où \mathbb{P} est la probabilité historique. De plus, nous supposons que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\tilde{T}}$ et \mathcal{F}_0 est la tribu triviale.

Définition 6 (Fonction d'exposition L) Soit $T \in [0, \tilde{T}]$ une durée d'exposition, nous supposons que L est une fonction des composantes du risque et elle représente la somme des expositions sur l'intervalle $[0, T]$.

Définition 7 (Risque total R) Le risque total est représenté par la variable aléatoire normalisée $R = L - E(L)$. Autrement dit, nous considérons que le risque correspond à la déviation entre l'exposition initiale à $t=0$ par rapport à l'espérance mathématique de cette dernière.

L'objectif d'une décomposition du risque est de formaliser la variable R à l'aide de composantes de risque. Nous supposons qu'il existe k facteurs de risque chacun représenté par un processus stochastique $Z_i = (Z_{i,t})_{0 \leq t \leq \tilde{T}}$ adapté à la filtration \mathbb{F} . De manière générale, on note $Z = (Z_t)_{0 \leq t \leq \tilde{T}}$ où

$Z_t = (Z_1, \dots, Z_k)$ et on suppose que la variable R est $\sigma(Z)$ -mesurable. De plus, nous supposons que chaque facteur de risque Z_i se matérialise par une variable aléatoire R_i $\sigma(Z_i)$ -mesurable. Après avoir fixé l'horizon de temps T , R ne dépend plus de cette variable. Ainsi notre étude se place dans un cadre de décomposition statique bien que les facteurs de risques soient dynamiques.

Pour définir une décomposition de risque, nous nous appuyons sur les propriétés introduites dans SCHILLING et al. (2020). Cette définition repose sur l'hypothèse d'une relation presque sûre entre Z_1, \dots, Z_k et les composantes du risque globale correspondantes R_1, \dots, R_k .

Définition 8 (Décomposition significative du risque R) Une décomposition de risque est dite significative si elle vérifie les axiomes suivants :

- P1 Aléatoire : Les composantes individuelles du risque sont données par les variables aléatoires R_1, \dots, R_k . Nous introduisons la relation \leftrightarrow pour une décomposition de risque et nous notons $(R, Z_1, \dots, Z_k) \leftrightarrow (R_1, \dots, R_k)$ pour indiquer que le risque R correspond à la décomposition (R_1, \dots, R_k) et qu'il dépend de (Z_1, \dots, Z_k) .
- P2 Attribution : R_i représente la composante de risque liée au facteur de risque i . Autrement dit, lorsque le risque R est $\sigma(Z_i)$ -mesurable et que R_i est indépendante de $(Z_1, \dots, Z_{i-1}, Z_{i+1}, \dots, Z_k)$, alors $R_j = 0$ pour tous les $j \neq i$.
- P3 Unicité : L'approche de décomposition fournit une décomposition unique des risques. Formellement, si $(R, Z_1, \dots, Z_k) \leftrightarrow (R_1, \dots, R_k)$ et $(R, Z_1, \dots, Z_k) \leftrightarrow (N_1, \dots, N_k)$ alors $R_i = N_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.
- P4 Invariance : La décomposition est invariante par rapport à l'ordre des facteurs de risques $1, \dots, k$. Autrement dit, soit π une permutation $\pi : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ et supposons que $(R, Z_1, \dots, Z_k) \leftrightarrow (R_1, \dots, R_k)$. Alors la décomposition est invariante si,

$$(R, Z_{\pi(1)}, \dots, Z_{\pi(k)}) \leftrightarrow (R_{\pi(1)}, \dots, R_{\pi(k)}) . \quad (1.3)$$

- P5 Invariance d'échelle : La décomposition est invariante aux changements d'échelle des sources de risque. Formellement, supposons que $(R, Z_1, \dots, Z_k) \leftrightarrow (R_1, \dots, R_k)$, et que $P_{i,t} = f_i(Z_i(t))$ pour tous les éléments suivants $i = 1, \dots, k$, et $t \in [0, \tilde{T}]$, avec $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse \square et bijective. Si $(R, P_1, \dots, P_k) \leftrightarrow (N_1, \dots, N_k)$, alors nous exigeons que $R_i = N_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.
- P6 Agrégation : Le risque total correspond à l'agrégation des composantes résultant de la décomposition des risques. Concrètement, soit R le risque total composé des facteurs de risque Z tel que $(R, Z_1, \dots, Z_k) \leftrightarrow (R_1, \dots, R_k)$, alors il existe une fonction $A_{R,Z} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $R = A_{R,Z}(R_1, \dots, R_k)$.
- P7 Agrégation additive (Cas particulier de la propriété P6) : La fonction d'agrégation est additive. Dans ce cas R est donné par la somme des composantes individuelles du risque $R = \sum_{i=1}^{i=k} R_i$.

Remarque 2 La propriété P3 stipule que la relation \leftrightarrow est une fonction. Si de plus la propriété P6 est vérifiée, alors la relation \leftrightarrow est une fonction injective. La démonstration de celle-ci consiste à supposer

*Une fonction lisse est une fonction dérivable infiniment, autrement dit de classe C^∞ .

qu'il existe deux risques totaux R et S tels que $R = S$. Dans ce cas, il existe deux vecteurs aléatoires (R_1, \dots, R_k) et (S_1, \dots, S_k) qui vérifient l'équation suivante,

$$R = A_{R,Z}(R_1, \dots, R_k) = A_{R,Z}(S_1, \dots, S_k) = S, \quad (1.4)$$

alors $(R_1, \dots, R_k) = (S_1, \dots, S_k)$.

En premier lieu, nous retenons les propriétés de l'aléa (P1) et de l'additivité (P6) car elles représentent le principe de la décomposition du risque. Autrement dit, elles stipulent que nous pouvons décomposer le risque total en k composantes du risque de sorte que l'agrégation de ceux-ci égalise le risque total. D'autre part, une décomposition du risque reflète le caractère aléatoire des composantes du risque. Il est naturel d'émettre l'hypothèse que les composantes de risque soient des variables aléatoires.

Les propriétés de l'attribution (P2), l'unicité (P3) et l'invariance de l'ordre (P4) établissent un lien entre la source du risque et la composante qui en résulte.

La propriété de l'unicité (P3) garantit qu'une source exogène comme un paramètre ne peut avoir un impact sur la décomposition.

La propriété de l'attribution (P2) traduit le fait qu'une source de risque impertinente ne devrait pas être considérée dans la décomposition du risque total. Enfin l'ordre des sources de risque ne peut pas impacter la décomposition du risque (P4).

L'invariance d'échelle (P5) permet d'assurer que les composantes du risque ne soient pas affectées par un changement de devise ou un passage à l'échelle logarithmique.

La décomposition additive (P7) est souhaitable pour de multiples raisons. Elle permet l'interprétation naturelle du risque total, selon laquelle les composantes du risque s'additionnent pour constituer le risque total. De plus, cette décomposition permet d'estimer facilement les clés d'allocation du capital par l'approximation du taux d'accroissement des mesures de risque.

1.3.2 Analyse qualitative des approches de décomposition

Dans cette partie nous analysons les approches de décomposition de risque présentes dans la littérature des sciences actuarielles, pour déterminer si elles satisfont ou non les critères d'une décomposition significative du risque. En premier lieu, nous présentons ci-dessous le formalisme de la décomposition MRT (Martingale Representation Theorem). Pour simplifier, nous supposons dans la suite que l'horizon de temps $T = 1$ et la variable aléatoire L dépend de deux sources de risque $Z_1 = (Z_1(t))_{0 \leq t \leq 1}$ et $Z_2 = (Z_2(t))_{0 \leq t \leq 1}$ définis par,

$$Z_1(t) = \lambda_1 \times t + \mu_1 \times W_1(t), \quad (1.5)$$

et

$$Z_2(t) = \lambda_2 \times t + \mu_2 \times \left(\nu \times W_1(t) + \sqrt{1 - \nu^2} \times W_2(t) \right). \quad (1.6)$$

Où $W_1 = (W_1(t))_{0 \leq t \leq 1}$ et $W_2 = (W_2(t))_{0 \leq t \leq 1}$ sont deux mouvements Brownien indépendants. De plus, nous supposons que $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq \nu \leq 1$, et $\mu_i \geq 0$ pour $i \in \{0, 1\}$. Dans ce cas, Z_i suit une distribution normale $N(\lambda_i, \mu_i)$ et $\rho(Z_1, Z_2) = \nu$ représente la corrélation entre Z_1 et Z_2 . Enfin, nous supposons que le risque total est défini par $R = L - E(L)$.

Remarque 3 (Extension du cas $k \geq 2$) Dans ce cas, les facteurs de risques peuvent être définis de manière analogue à l'aide de mouvement Brownien indépendants $W_i = (W_i(t))_{0 \leq t \leq 1}$ pour $i = 1, \dots, k$ en supposant que,

$$Z_i(t) = \lambda_i \times t + \mu_i \times W_i(t), \quad (1.7)$$

$\forall i = 1, \dots, k-1$ et

$$Z_k(t) = \lambda_k \times t + \mu_k \times \left(\nu \times \sum_{i=1}^{k-1} W_i(t) + \sqrt{1-\nu^2} \times W_k(t) \right). \quad (1.8)$$

A présent, nous étudions qualitativement les différentes approches de décomposition du risque en s'appuyant sur les axiomes d'une décomposition significative de risque.

Décomposition variance

L'approche de décomposition par la variance consiste à étudier les composantes du risque total R en s'appuyant sur la définition de l'espérance conditionnelle. Nous invitons le lecteur à se référer à CHRISTIANSEN et HELWICH (2008), et FISCHER (2004) pour plus d'informations sur la décomposition variance du risque. Nous supposons que $R_1 = E(R|Z_1)$ pour saisir l'aléa généré par la tribu naturelle engendrée par le processus Z_1 , et nous définissons $R_2 = R - R_1$. Dans ce cas, la décomposition $R = L - E(L)$ se réécrit,

$$R = L - E(L) = E(R|Z_1) + [R - E(R|Z_1)] = [E(L|Z_1) - E(L)] + [L - E(L|Z_1)] = R_1 + R_2. \quad (1.9)$$

Où R_1 et R_2 représentent les deux composantes du risque considérées. En particulier, la propriété d'orthogonalité de l'espérance conditionnelle conduit à l'équation de la décomposition variance définie par,

$$Var(R) = Var(R_1) + Var(R_2). \quad (1.10)$$

Considérons R un risque total, la décomposition variance conduit à l'équation $E(R) = E(R_1)$ et $E(R_2) = 0$. Ce résultat souligne le besoin de supposer que le risque total s'écrit $R = L - E(L)$, ou de manière équivalente que L est une variable aléatoire centrée. Dans ce cas, cette approche de décomposition conduit au résultat suivant,

$$E(R_1) = E(R_2) = 0. \quad (1.11)$$

Les composantes du risque total R_1 et R_2 sont des variables aléatoires, ainsi le risque total se caractérise par une distribution de probabilité donc la propriété P1 est vérifiée.

De plus, la somme des composantes R_1 et R_2 correspond au risque total R , alors la propriété P6 ainsi que son cas particulier P7 sont vérifiées.

L'unicité de l'espérance conditionnelle assure la propriété P3. Pour vérifier la propriété de l'attribution (P2), nous supposons deux processus stochastiques indépendants Z_1 et Z_2 , et nous considérons un risque total R $\sigma(Z_1)$ -mesurable. Dans ce cas, $R_2 = R - E(R|Z_1) = 0$, et inversement. Ainsi la propriété P2 est vérifiée.

A présent nous nous intéressons à la propriété d'invariance d'échelle. Supposons que f_1 et f_2 soient deux fonctions lisses et bijectives, nous introduisons deux variables aléatoires N_1 et N_2 telles que $N_i(t) = f_i(Z_i(t))$ pour $i = 1, 2$. Dans ce cas, nous aboutissons à $S_1 = E(R|N_1) = E(R|Z_1) = R_1$ et

$S_2 = R - E(R|Z_1) = R_2$. En revanche, la décomposition variance ne vérifie pas la propriété d'invariance P4. Pour le montrer nous considérons ci-dessous que $L = Z_1(1) + Z_2(1)$ et $\nu \geq 0$. Dans ce cas, la décomposition variance $R = L - E(L)$ se réécrit avec respectivement $Z = (Z_1, Z_2)$ comme suit,

$$R = [Z_1(1) - E(Z_1(1))] + E(Z_2(1)|Z_1) - E(Z_1(1)) + [Z_2(1) - E(Z_2(1)|Z_1)], \quad (1.12)$$

autrement dit,

$$R = \lambda_1 + \mu_1 \times W_1(1) - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2 + \mu_2 \times \left(\nu \times W_1(1) + \sqrt{1 - \nu^2} \times W_2(1) \right). \quad (1.13)$$

Ainsi, nous obtenons l'égalité suivante,

$$R = (\mu_1 + \mu_2 \times \nu) \times W_1(1) + \mu_2 \times \sqrt{1 - \nu^2} \times W_2(1) = R_1 + R_2. \quad (1.14)$$

Cependant, si nous permutons les variables aléatoires Z_1 et Z_2 nous définissons le vecteur aléatoire $S = (Z_2, Z_1)$, et puis nous aboutissons à la décomposition suivante,

$$R = N_1 + N_2, \quad (1.15)$$

où N_1 et N_2 sont définis ci-dessous,

$$N_1 = (\mu_2 + \mu_1 \times \nu) \times \left(\nu \times W_1(1) + \sqrt{1 - \nu^2} \times W_2(1) \right), \quad (1.16)$$

et,

$$N_2 = \mu_1 \times (1 - \nu^2) \times W_1(1) - \mu_1 \times \nu \times \sqrt{1 - \nu^2} \times W_2(1). \quad (1.17)$$

Comme $N_1 \neq R_1$ et $N_2 \neq R_2$, alors la propriété P4 n'est pas satisfaite par la décomposition variance.

Après avoir exposé l'étude qualitative de la décomposition variance, il apparaît que cette décomposition ne vérifie pas la propriété P4, en conséquence la décomposition variance n'est pas une décomposition significative du risque. A présent, nous nous intéressons à l'approche de décomposition Hoeffding.

Décomposition Hoeffding

La décomposition Hoeffding est une approche basée sur la décomposition de l'ANOVA dite de Hoeffding ou fonctionnelle. Pour plus de détails sur cette décomposition nous invitons le lecteur à se référer à Hoeffding (1992). Similairement à l'approche précédente, cette décomposition s'appuie sur l'espérance conditionnelle. Considérons un risque total qui s'écrit $R = L - E(L)$, la décomposition de Hoeffding se définit comme suit,

$$R = E(R|Z_1) + E(R|Z_2) + [R - E(R|Z_1) - E(R|Z_2)] = R_1 + R_2 + R_{1,2}. \quad (1.18)$$

Où R_1 et R_2 correspondent aux composantes du risque total associées à Z_1 et Z_2 . La variable aléatoire $R_{1,2}$ représentent les interactions entre les composantes du risque total R_1 et R_2 . Le dernier terme de l'équation souligne que l'agrégation des composantes individuelles n'égalise pas le risque total R. De

plus, on observe que chaque facteur de risque est représenté par deux composantes de risque R_i et $R_{1,2}$. Ainsi la décomposition Hoeffding ne satisfait pas les propriétés de l'additivité et de l'aléa (P1 et P6).

Une approche alternative consiste à négliger la variable aléatoire $R_{1,2}$, elle correspond à un arbitrage entre la décomposition de Hoeffding et la décomposition variance. Néanmoins cette dernière vérifie les propriétés P1 à P5. En effet, les variables R_1 et R_2 sont aléatoires par conséquent on peut caractériser la distribution de probabilité du risque total (P1). D'autre part, les propriétés de l'invariance d'échelle (P5) et attribution (P2) sont vérifiées en s'appuyant sur le même raisonnement que précédemment. La propriété de l'unicité P3 découle de la définition de l'espérance conditionnelle. De plus, la propriété de l'invariance est satisfaite.

Cependant, la décomposition Hoeffding ne vérifie pas le critère de l'additivité. Nous nous appuyons sur le contre-exemple suivant pour le démontrer. Nous considérons $L = Z_1(1) \times Z_2(1)$ et nous supposons que les deux risques Z_1 et Z_2 sont d'espérance nulle i.e $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Dans ce cas, les composantes du risque total sont nulles presque sûrement. Autrement dit, le risque total résulte seulement des effets conjoints. En particulier, cet exemple montre que la propriété d'agrégation (P6) n'est généralement pas satisfaite puisque pour toute fonction $A_{R,Z} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, naturellement nous avons que $A_{R,Z}(R_1, R_2) = A_{R,Z}(0, 0) \neq R$ tandis que L est un processus stochastique.

L'étude qualitative de la décomposition Hoeffding montre qu'elle ne satisfait pas les critères d'une décomposition significative. Dans la suite, nous analysons une approche de décomposition du risque qui repose sur le théorème de développement Taylor.

Décomposition Taylor

L'approche que nous présentons ici s'inspire des travaux de CHRISTIANSEN (2006), qui se concentre sur l'approximation des fonctions de variables aléatoires par leur développement de Taylor au premier ordre. Formellement, nous supposons que L est de la forme $F(Z_1(1), Z_2(1))$ où $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne et différentiable. Alors on peut écrire,

$$R = L - E(L) \approx [F(z_1, z_2) - E(L)] + \frac{dF(z_1, z_2)}{dz_1} \times (Z_1(1) - z_1) + \frac{dF(z_1, z_2)}{dz_2} \times (Z_2(1) - z_2), \quad (1.19)$$

où (z_1, z_2) représente le point de développement avec $R_1 = \frac{dF(z_1, z_2)}{dz_1} \times (Z_1(1) - z_1)$ et $R_2 = \frac{dF(z_1, z_2)}{dz_2} \times (Z_2(1) - z_2)$. Néanmoins cette décomposition présente deux inconvénients : d'une part l'équation ci-dessus n'est pas vérifiée dans le cas des fonctions non linéaires. D'autre part, l'erreur d'approximation pour une réalisation donnée est fortement corrélée au point de développement. Autrement dit, le développement de Taylor est local et cela représente des limitations.

Par ailleurs, nous avons relevé quelques inconvénients de la décomposition basé sur le développement de Taylor. Cette approche ne vérifie pas les propriétés d'agrégation (P6) et d'invariance (P5), nous nous appuyons sur les contre-exemples suivants pour le démontrer. D'une part, l'approximation du risque total R donnée par $L = Z_1(1) \times Z_2(1)$ se réécrit,

$$R = L - E(L) \approx L - E(L) - (Z_1(1) - z_1) \times (Z_2(1) - z_2). \quad (1.20)$$

Nous pouvons observer à l'aide de l'équation ci-dessus que l'erreur d'approximation est d'autant plus grande que la distance séparant les points $Z_1(1)$ et $Z_2(1)$ de z_1 et z_2 est importante. En particulier, si nous choisissons $(z_1, z_2) = (0, 0)$ nous aboutissons à la décomposition $R_1 = R_2 = 0$. Autrement dit, les sources de risque Z_1 et Z_2 ne sont pas pertinentes pour aboutir à une décomposition du risque total R. Nous pouvons en déduire que la propriété d'agrégation (P6) n'est pas satisfaite, car le risque

total n'est attribué ni à Z_1 ni à Z_2 .

De manière générale, pour toute fonction $A_{R,Z} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, nous aboutissons à la contradiction suivante : $A_{R,Z}(R_1, R_2) = A_{R,Z}(0, 0) \neq R$ alors que Z_1 et Z_2 sont des processus stochastiques. Notons que le développement de Taylor dépend du point de développement, en conséquence la décomposition n'est pas unique (P3).

D'autre part, si nous supposons que $L = e^{Z_1(1)}$ le risque total R au point $(z_1, 0)$ est estimé par,

$$R \approx L - E(L) + e^{Z_1(1)} \times (Z_1(1) - z_1) \approx e^{Z_1(1)} - E(e^{Z_1(1)}) + e^{Z_1(1)} \times (Z_1(1) - z_1). \quad (1.21)$$

On pose $Y_1(1) = e^{Z_1(1)}$ et $y_1 = e^{z_1}$, dans ce cas,

$$R \approx L - E(L) = y_1 - E(Y_1(1) + (Y_1(1) - y_1)). \quad (1.22)$$

Or la décomposition $R_1 = e^{z_1} \times (Z_1(1) - z_1) \neq e^{Z_1(1)} - e^{z_1} = Y_1(1) - y_1 \approx S_1$, ainsi nous pouvons en déduire que la propriété d'invariance d'échelle (P5) n'est pas satisfaite.

Par ailleurs, la décomposition obtenue par l'approche de développement Taylor satisfait les propriétés de l'aléatoire (P1), l'attribution (P2), et l'invariance (P4). En effet, il suffit de remarquer que les composantes sont des processus stochastiques et la décomposition est invariante par une permutation de l'ordre des sources de risques considérées. L'indépendance des sources de risque induit que le taux d'accroissement de la fonction F en z_2 est nul et dans ce cas la composante de risque n'est pas prise en compte dans la décomposition du risque total.

Décomposition OAT (One-At-a-Time)

La décomposition OAT (One-At-a-Time) du risque consiste à analyser les sources de risque une à une. Cette approche est équivalente à la Formule Standard utilisée dans le cadre de la directive Solvabilité II pour la détermination du capital réglementaire. Formellement, nous supposons que L est de la forme $F(Z_1(1), Z_2(1))$, où $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne. Nous considérons que le risque total est représenté par la variable aléatoire $R = L - E(L)$. Alors, les composantes du risque total s'écrivent $R_1 = F(Z_1(1), z_2) - E(L)$ et $R_2 = F(z_1, Z_1(1)) - E(L)$, où $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

Cependant, nous pouvons observer que cette approche de décomposition est conditionnée au choix de z_1 et z_2 . En conséquence la décomposition OAT ne vérifie pas la propriété d'unicité (P3) car la décomposition obtenue dépend de z_1 et z_2 .

D'autre part, les composantes du risque ne s'agrègent pas (P6). Pour le voir, nous considérons que $L = Z_1(1) \times \max\{K - Z_2(1), 0\}$, avec K tel que $K \leq E(Z_2(1)) = \lambda_2$. Dans ce cas, nous obtenons que $R_1 = Z_1(1) \times \max\{K - \lambda_2, 0\} - E(L) = -E(L)$ avec $Z_2(1) = E(Z_2(1))$. En supposant que R soit une variable strictement positive presque sûrement et que R soit une fonction croissante de $Z_1(1)$, le risque attribué à Z_1 est constant et peut-être même négatif puisque la variable $R = Z_1(1) \times \max\{K - Z_2(1), 0\} - E(Z_1(1) \times \max\{K - Z_2(1), 0\})$ est une loi normale. L'hypothèse selon laquelle $Z_2(1) = z_2 \leq K$ nous conduit à l'équation suivante : $R_1 = Z_1(1)(K - z_2) - E(L)$. Cependant, la distribution de R_1 dépend du choix de z_2 , alors la propriété d'unicité n'est pas vérifiée. De plus, l'approche OAT ne satisfait plus la propriété d'agrégation (P6). En effet, nous supposons que $z_2 = E(Z_2(1)) = \lambda_2 \geq K$ et que le processus stochastique Z_1 est indépendant de Z_2 (autrement dit $\nu = 0$). Alors, pour toute fonction $A_{R,Z} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $A_{R,Z}(R_1, R_2)$ est $\sigma(Z_2)$ -mesurable et donc $A_{R,Z}(R_1, R_2) \neq R$.

Par ailleurs, nous avons relevé que la décomposition ne vérifie pas la propriété de l'attribution (P2). Nous supposons à nouveau que $R = e^{Z_1(1)} - E(L)$ et que $Z_1(1) = z_1$ avec $z_1 \neq \log(E(L))$, dans ce cas nous aboutissons à l'égalité suivante,

$$R_2 = F(z_1, Z_2(1)) - E(L) = e^{Z_1(1)} - E(L) \neq 0. \quad (1.23)$$

Néanmoins, la décomposition OAT satisfait les propriétés P1, P4 et P5 pour des fonctions spécifiques. Les composantes de risque sont naturellement des variables aléatoires (P1), et la propriété d'invariance d'ordre est vérifiée pour une permutation quelconque (P4).

La démonstration de la propriété de l'invariance d'échelle (P5) repose sur le choix de deux fonctions lisses et bijective f_1 et f_2 . Nous définissons $N_i(1) = f_i(Z_i(1))$ et les réalisations $n_i = f_i(z_i)$, $i = 1, 2$. Nous considérons que $L = F(Z_1(1), Z_2(1))$ et nous introduisons la fonction G telle que,

$$F(f^{-1}(N_1(1)), f^{-1}(N_2(1))) = G(N_1(1), N_2(1)). \quad (1.24)$$

Alors, nous obtenons que $S_1 = G(N_1(1), N_2(1)) - E(L) = F(Z_1(1), z_2) - E(L) = R_1$ et inversement.

Ceci conclut notre analyse qualitative de la décomposition OAT. Nous pouvons conclure que les approches de décomposition Variance, Hoeffding, Taylor et OAT ne vérifient pas les propriétés de la décomposition significative du risque. Par conséquent, il convient de retenir que seul l'approche de décomposition MRT (Martingale Representation Theorem) satisfait les axiomes d'une décomposition significative du risque.

1.3.3 Décomposition MRT en assurance non-vie

Dans cette section, nous formalisons la décomposition du risque MRT dans le cadre de l'assurance non-vie. Cette approche s'inscrit dans la continuité de notre étude, et nous présentons les principaux résultats de cette approche.

Le sujet de la décomposition du risque trouve son intérêt dans la gestion des risques en assurance, la tarification, la conception de nouveaux produits et dans la détermination du capital réglementaire. Bien que l'étude de la décomposition MRT ait été développé initialement dans le cadre de l'assurance vie. Nous nous inspirons de cette étude pour illustrer l'adaptation de cette approche de décomposition MRT en assurance non-vie.

En s'appuyant sur le cadre exposé précédemment, nous supposons qu'il existe k facteurs de risque Z_1, \dots, Z_k et une fonction L qui représente les pertes de l'assureur. De plus, nous considérons que l'évolution futur de la fonction de pertes L dépend des composantes du risque global R liées aux risques financiers et risques de Souscription non-vie. Nous introduisons un processus stochastique de dimensions n noté $X = (X_1(t), \dots, X_n(t))_{0 \leq t \leq \tilde{T}}$ localement borné dont les composantes représentent les facteurs de risques considérés. Puis, nous supposons que les facteurs de risque s'expriment en fonction du processus X . Cette hypothèse permet d'exprimer les prix des produits financiers à la date t en fonction du processus stochastique X et nous définissons le taux d'intérêt à la date t que l'on note $r(t)$ en fonction du vecteur aléatoire $X(t)$ comme suit : $r(t) = r(t, X(t))$. D'autre part, nous considérons que les composantes du processus stochastique X s'expriment en fonction d'un mouvement Brownien de dimension d noté $W = (W_1(t), \dots, W_d(t))$ pour $0 \leq t \leq \tilde{T}$ muni de sa filtration naturelle \mathbb{G} . Nous commençons par décrire le cadre gaussien dans lequel s'inscrit notre étude.

Hypothèse 1 : Le processus stochastique $X = (X_1(t), \dots, X_n(t))_{0 \leq t \leq \tilde{T}}$ est un processus d'Itô de dimension n qui satisfait la relation suivante,

$$dX(t) = \theta(t) dt + \sigma(t) dW(t), \quad (1.25)$$

en supposant que $X(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ est l'état initial du processus stochastique X , le vecteur $\theta = (\theta(t))_{0 \leq t \leq \tilde{T}}$ correspond au drift et on considère que la matrice volatilité $\sigma = (\sigma(t))_{0 \leq t \leq \tilde{T}}$ est

adaptée par rapport à la filtration naturelle \mathbb{G} et continue par rapport à la variable temporelle t .

Sans perte de généralité, nous supposons qu'il existe $m \geq 1$ assurés homogènes à la date initiale $t = 0$. De plus, nous considérons que ces assurés sont exposés aux mêmes risques et reçoivent les mêmes indemnités. Dans ce cas, nous omettons la frontière des contrats et nous supposons que la durée de vie du contrat d'assurance de l'assuré i à la date initiale $t = 0$ correspond au premier saut d'un processus de Cox avec intensité $(\mu(t))_{0 \leq t \leq \tilde{T}}$ tel que $\mu(t) = \mu(t, X(t))$ est une variable aléatoire continue et positive. Nous introduisons la variable aléatoire τ_i qui représente la durée du contrat de l'assuré i et l'on définit comme suit,

$$\tau_i = \inf\{t \in [0, \tilde{T}] : \int_0^t \mu(s) ds \geq E_i\}, \quad (1.26)$$

pour $i = 1, \dots, m$. Nous supposons que $(E_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle avec la convention $\inf\{0\} = \infty$ pour les contrats qui ne seront pas résiliés avant l'horizon de temps \tilde{T} i.e $\tau_i \geq \tilde{T}$. En particulier, les durées résiduelles des contrats τ_i pour $i = 1, \dots, m$ des assurés supposés homogènes sont par construction des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Dans ce cas, nous définissons la tribu produit $\mathbb{J} = \bigcap_i \mathbb{J}_i$ avec $\mathbb{J}_i = (\mathcal{I}_t^i)_{0 \leq t \leq \tilde{T}}$ est la filtration engendrée par les indicatrices définies par $(\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}})_{0 \leq t \leq \tilde{T}}$ et naturellement nous supposons que la filtration \mathbb{F} correspond au produit des filtrations \mathbb{G} et \mathbb{J} . À ce stade nous définissons la fonction $\Gamma(t) = \int_0^t \mu(s) ds$ qui représente la durée du contrat cumulée et nous obtenons les résultats ci-dessous.

Proposition 1 En notant la filtration $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{0 \leq t \leq \tilde{T}}$, pour tous $t, s \in [0, \tilde{T}]$ vérifiant $t \leq s$, et $i = 1, \dots, m$,

- $\mathbb{P}(\tau_i \geq t | \mathcal{G}_t) = \exp(-\Gamma(t))$ et en particulier $\mathbb{P}(\tau_i \geq 0) = 1$,
- $\mathbb{P}(\tau_i \geq t | \mathcal{G}_{\tilde{T}}) = \mathbb{P}(\tau_i \geq t | \mathcal{G}_s)$,
- $\mathbb{P}(\tau_i \geq T | \mathcal{F}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}} \times \mathbb{E}\left(\exp\left(-\int_t^T \mu(s) ds\right) | \mathcal{G}_t\right)$.

Nous introduisons le processus de comptage $N = (N(t))_{0 \leq t \leq \tilde{T}}$ qui représente le nombre de contrat restant à la date t comme suit,

$$N(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{\tau_i \geq t}. \quad (1.27)$$

Ainsi, le processus de comptage $N(t)$ permet de définir le risque qui découle de la marge perdue si les m assurés résilient leur contrat avant la date $t = \tilde{T}$. Nous définissons la filtration $\mathbb{F}^{W,N} = (\mathcal{F}_t^{W,N})_{0 \leq t \leq \tilde{T}}$ qui représente la filtration générée par les processus W et N et dans ce cas la filtration $\mathbb{F}^{W,N}$ est inclus dans la filtration \mathbb{F} .

Nous rappelons que l'objectif de cette section est de formaliser la fonction de perte L . Nous considérons que les flux financiers associées à chaque contrat sont effectués aux dates $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_l = T$, avec l un entier positif. Nous définissons la fonction de perte L à l'aide des notations

comme suit,

$$L = C_T + \sum_{j=0}^l (m - N(t_j)) \times C_j. \quad (1.28)$$

Où C_T correspond à la somme des flux financiers perçus par l'assuré indépendamment de la durée de vie résiduelle du contrat et C_j représente les flux financiers perçus par l'assuré et dépendent de la durée de vie du contrat. De plus, nous supposons que ces flux financiers sont mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{G}_{\tilde{T}}$. En général, cette définition nous permet d'affirmer que la fonction de perte L est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{\tilde{T}}^{W,N}$.

À présent, nous présentons l'approche de décomposition du risque globale $R = L - \mathbb{E}(L)$ en fonction des composantes du risque qui représente les sources de risque auxquelles l'assureur est exposé. Nous rappelons que cette approche repose sur le théorème de représentation martingale, en conséquence nous présentons une décomposition du risque global R en intégrales stochastiques par rapport aux composantes du risque « compensées ». Dans cette section, la notion de composante de risque « compensée » signifie que les composantes du risque sont corrigées des tendances prévisibles. Nous considérons que les tendances soustraites des composantes du risque globale sont appelés compensateurs.

Par ailleurs, nous supposons que les composantes du risque global R sont identifiées à l'aide des processus stochastiques $X_i = (X_i(t))_{0 \leq t \leq \tilde{T}}$ et par le processus de comptage $N(t)$. Cependant, nous définissons les processus stochastiques « compensateurs » adaptés par rapport à la filtration \mathbb{F} que nous notons $M_i^W = (M_i^W(t))_{0 \leq t \leq \tilde{T}}$ pour $i = 1, \dots, m$. Dans ce cas, la décomposition MRT du risque global MRT est définie comme suit.

Définition 9 Supposons que la fonction de pertes L est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{\tilde{T}}^{W,N}$ et nous considérons que le risque global R s'exprime à l'aide de la relation $R = L - \mathbb{E}(L)$. La décomposition MRT du risque global R s'écrit,

$$R = \sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{T}} \psi_i^W(t) dM_i^W(t) + \int_0^{\tilde{T}} \psi^N(t) dM^N(t). \quad (1.29)$$

Où $\psi_i^W(t)$ pour $i = 1, \dots, n$ et $\psi^N(t)$ sont des processus stochastiques mesurables par rapport à la filtration \mathbb{F} et permettent de caractériser la décomposition MRT du risque global R . De plus, la décomposition MRT du risque global R est donnée par,

$$R_i = \int_0^{\tilde{T}} \psi_i^W(t) dM_i^W(t), \quad (1.30)$$

pour $i = 1, \dots, n$ et nous aboutissons à

$$R_{n+1} = \int_0^{\tilde{T}} \psi^N(t) dM^N(t). \quad (1.31)$$

Enfin, nous obtenons la relation suivante $(R, X_1, \dots, X_n) \longleftrightarrow_{MRT} (R_1, \dots, R_{n+1})$.

Dans ce chapitre, nous avons rappelé le cadre réglementaire de la gestion des risques et les approches de modélisation des risques de Souscription non-vie dans le Modèle Interne non-vie et dans le Modèle Miroir. Les enjeux de l'allocation de capital ont été présenté afin de mettre en lumière les

pistes d'amélioration dans le cadre du suivi d'un produit existant ou pour le lancement d'un nouveau produit d'assurance non-vie. La dernière section de ce chapitre constitue une revue des méthodes de décomposition du risque présentes dans la littérature des sciences actuarielles. Le chapitre suivant a pour but de construire l'allocation du capital à la maille produit, et introduire les méthodes d'allocation ainsi que leurs propriétés d'adéquation. Dans ce sillage, nous présenterons les indicateurs de solvabilité et de rentabilité permettant d'améliorer la gestion des risques et le pilotage des produits. L'approche de gestion des risques est décrite par le cadre réglementaire et la modélisation des risques de Souscription non vie, ainsi que les indicateurs introduits dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Dispositif de l'approche de gestion des risques

L'objectif de ce chapitre est de présenter le dispositif de l'approche de gestion des risques qui repose sur l'allocation du capital et les indicateurs de solvabilité et de rentabilité. Dans un premier temps, nous construisons la démarche d'allocation du capital permettant de ventiler les capitaux définis à la maille ligne d'activité sur les produits commercialisés. Dans la suite, nous présentons une revue de la littérature des méthodes d'allocation présentes dans la littérature des sciences actuarielles. La définition du capital alloué nous permettra de définir les indicateurs de solvabilité et de rentabilité à la maille produit. Ces derniers permettent de piloter les produits dans le référentiel risque-rentabilité. Cependant, l'allocation du capital permet la comparaison des produits en matière de risque. Pour cela, il faut pouvoir quantifier les risques sous-jacents et en déduire le montant de capital alloué aux produits. Nous introduisons les mesures Value-at-Risk (VaR) et Tail-Value-at-Risk (TVaR) et leurs propriétés. Celles-ci nous aideront à construire les méthodes d'allocation du capital et à démontrer des propriétés intéressantes. La dernière partie sera dédiée aux indicateurs de rentabilité et de solvabilité définis à la maille produit. Toutefois, le choix de la méthode d'allocation du capital conditionne l'obtention d'indicateurs performants.

2.1 Mesure de risque

Cette section a pour but de définir ce qu'est une mesure de risque, et les propriétés souhaitables pour l'allocation du capital réglementaire. Nous présentons les mesures de risques les plus utilisées pour répartir le capital à savoir : la Value-at-Risk (VaR) et la Tail-Value-at-Risk (TVaR). La TVaR sera introduite pour montrer des propriétés intéressantes sur les méthodes d'allocation.

2.1.1 Définition et propriétés

Les mesures de risques sont un outil pour la prise de décision dans un environnement risqué. Selon la nature de décision, une mesure de risque pourra être établie de manière à fournir au décideur un critère adapté pour qu'il puisse se positionner. Par exemple, un assureur peut chercher à optimiser les besoins en fond propres pour satisfaire aux exigences en matière de solvabilité, et adapter sa

stratégie commerciale. Une mesure de risque classique sera usuellement la variance ou l'écart-type du risque considéré. La VaR et la TVaR sont des mesures de risques pour évaluer la charge en capital à immobiliser pour faire face aux conséquences financières auxquelles un organisme assurantiel est exposé. Dans le secteur assurantiel, un risque est caractérisé par trois éléments : le facteur de risque, la probabilité de survenance et les pertes inattendues. Après avoir identifié les risques, l'étape suivante consiste à les évaluer au moyen d'une mesure de risque. Pour définir une mesure de risque, nous considérons un ensemble de variables aléatoires réelles définis sur l'espace de probabilité $\Delta = (\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, où \mathbb{P} est la probabilité historique.

Définition 10 (Mesure de risque) Une application ρ définie sur l'espace de probabilité $\Delta = (\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R} , est dite mesure de risque si elle attribue pour chaque risque représenté par une variable aléatoire X , un réel $\rho(X) \in \mathbb{R} \cup +/\infty$. Autrement dit, $\rho : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ associée à un risque X , une valeur réelle $\rho(X)$.

La quantité $\rho(X)$ représente un montant de capital, que la compagnie d'assurance doit immobiliser pour se couvrir contre le risque X . Ce dernier représente un gain s'il s'agit d'une valeur négative ou d'une perte dans le cas contraire. Les mesures de risques permettent de mieux caractériser ces derniers, dans le sens où la valeur $\rho(X)$ désigne la gravité du risque X , plus elle est grande et plus le risque est nuisible, en conséquence il faut immobiliser plus de capital pour s'en prémunir.

A ce stade nous retenons deux éléments importants, la mesure de risque est une fonction réelle quelconque dans l'espace Δ muni de la tribu \mathbb{F} , c'est-à-dire toute fonction réelle des variables aléatoires est une mesure de risque. Le deuxième élément à souligner est qu'une mesure de risque associée à une variable aléatoire X un réel, permettant ainsi de faciliter la comparaison entre plusieurs variables aléatoires. En effet, l'exercice peut s'avérer parfois difficile sans aucun outil comme la mesure de risque.

Pourtant, les opérateurs usuels de l'espérance et la variance ne suffisent pas à garantir une comparaison pertinente entre les risques, il faut que la mesure de risque vérifie certaines propriétés supplémentaires. Les propriétés présentées ci-dessous sont usuellement utilisées en sciences actuarielles pour caractériser les mesures de risques dites cohérentes.

Définition 11 (Propriétés des mesures de risque) Supposons que X et Y soient deux variables aléatoires et ρ une mesure de risque. Nous introduisons les propriétés suivantes,

- Invariance en loi : $X \stackrel{Loi}{=} Y \implies \rho(X) = \rho(Y)$,
- Invariance par translation (stabilité) : pour $\omega \in \mathbb{R}$, $\rho(X + \omega) = \rho(X) + \omega$,
- Monotonie : $X \leq Y \mathbb{P}\text{-p.s} \implies \rho(X) \leq \rho(Y)$,
- Convexité : pour $\omega \in [0, 1]$, $\rho(\omega \times X + (1 - \omega) \times Y) \leq \omega \times \rho(X) + (1 - \omega) \times \rho(Y)$,
- Homogénéité : pour $\omega \geq 0$, $\rho(\omega \times X) = \omega \times \rho(X)$,
- Sous-additivité : $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$,
- Normalisation : $\rho(0) = 0$.

Interprétation des propriétés

L'invariance en loi assure que le risque est identique pour des variables aléatoires de mêmes distributions, car l'aléa qui réside dans l'occurrence des événements est similaire pour toutes ces variables aléatoires.

L'invariance par translation traduit le fait qu'ajouter un montant déterministe ω ne déforme pas la structure du risque, et ne fait qu'augmenter cette quantité.

L'homogénéité implique que le risque n'est pas déformé par un changement d'échelle (i.e. lorsque l'on change le numéraire avec un taux de change fixe, un risque initialement exprimé en euros peut être converti en monnaie étrangère pour être comparé à un risque dans un autre pays).

La monotonie, est dite autrement si les pertes causées par le risque X sont plus faibles que celles engendrées par Y, alors la mesure du risque X est moindre que la mesure du risque Y. Dans ce cas, le segment Y est plus risqué que le segment X. Une méthode d'allocation du capital juste et équitable doit permettre d'allouer plus de capital pour le risque X pour s'en prémunir qu'on en allouera pour le risque Y.

La propriété de sous-additivité illustre le principe de la diversification introduit dans le premier chapitre, une mesure de risque sous-additive diversifie des risques agrégés. L'intuition vient du fait qu'un risque associé à deux variables aléatoires qui se mutualisent, est naturellement plus faible que les risques pris individuellement. Ainsi, un organisme assurantiel exposé à deux risques différents immobilise au plus un capital équivalent à la somme des capitaux élémentaires par risque.

Nous nous intéressons plus particulièrement au cas des mesures de risque dites cohérentes, car cette propriété nous sera utile dans la suite.

Définition 12 (Mesure de risque cohérente) Une mesure de risque normée et sous-additive est dite cohérente si elle vérifie les propriétés d'invariance, et l'homogénéité.

Remarque 4 (Mesure de risque cohérente) Une mesure de risque normée qui satisfait la propriété de convexité est aussi une mesure de risque cohérente.

Nous invitons le lecteur à se référer à ARTZNER et al. (1999) ou bien DENAULT (2001) pour plus d'informations sur la notion de mesure de risque cohérente. A présent, nous introduisons les mesures de risques les plus classiques dans le secteur assurantiel que sont la Value-at-Risk et la Tail-Value-at-Risk. Dans un Modèle Interne, elles sont usuellement employées pour déterminer les indicateurs économiques utilisés dans la pratique pour le pilotage des activités en assurance non-vie. Nous rappelons que la dernière section de ce chapitre est dédiée à la définition des indicateurs qui faciliteront la gestion des risques.

2.1.2 Value-at-Risk

La Value-at-Risk (VaR) ou « valeur ajustée au risque » est la mesure de risque préconisée par la réglementation Solvabilité 2, pour évaluer les besoins en capitaux d'un organisme assurantiel. Par ailleurs, elle constitue un outil crucial dans la gestion des risques pour orienter les décisions des structures dirigeantes de l'organisme, car elle est facile d'interprétation et intuitive. Elle est définie comme suit :

Définition 13 (Value-at-Risk) La Value-at-Risk (VaR) de niveau α correspond au quantile d'ordre α associé à un risque X i.e. $VaR_\alpha(X) = q_\alpha(X) = \inf \{x \in \mathbb{R}, |\mathbb{P}(X \leq x) \geq \alpha\}$.

Cette mesure de risque fait correspondre à chaque risque X , le quantile d'ordre α . Dans l'environnement Solvabilité 2, la modélisation de la distribution des pertes associées à un risque X par l'approche Modèle Interne conduit à retenir le quantile à l'ordre $\alpha = 99,5\%$. Ce capital représente les besoins en fonds propres à immobiliser par la compagnie d'assurance afin de couvrir ses pertes avec la probabilité 99.5% (ou une période de retour de 1 sur 200 ans).

Proposition 2 (Propriété de la VaR) La Value-at-Risk est une mesure invariante par translation et homogène, mais ne vérifie pas la propriété de convexité. Cependant, elle satisfait la propriété de sous-additivité dans le cadre gaussien.

Bien que cette mesure permette d'éclairer l'assureur sur la gravité des risques auxquels il est soumis, nous distinguons quelques inconvénients pouvant être apportés. Tout d'abord cette mesure de risque ne satisfait pas la propriété de sous-additivité dans le cas général. Ainsi elle ne prend en compte la diversification entre les risques que dans le cadre gaussien. De plus, cette mesure de risque ne dépend pas du comportement de la distribution au-delà du seuil α . En effet, pour les distributions à queue fines, cette mesure sous-estime le risque du fait qu'elle ne s'intéresse pas aux autres pertes inattendues au-delà du quantile α .

2.1.3 Tail-Value-at-Risk

La mesure de risque Tail-Value-at-Risk (TVaR) est celle qui aurait pu être utilisée pour la détermination du capital sous Solvabilité 2. En effet, la VaR de niveau élevé permet d'examiner la fréquence d'événements rares comme la ruine d'une compagnie d'assurance. Ceci peut paraître réducteur dans le sens où elle n'évalue pas les conséquences des événements au-delà du seuil VaR lorsqu'ils surviennent. Dans ce cas, nous allons privilégier une autre mesure de risque comme la TVaR qui permet de considérer un coussin de sécurité au-delà du quantile α .

Définition 14 (Tail-Value-at-Risk) La Tail-Value-at-Risk (TVaR) de niveau α associée au risque X est définie par,

$$TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \times \int_\alpha^1 VaR_u(X) du. \quad (2.1)$$

Proposition 3 (Décomposition de la TVaR) La mesure de risque $TVaR$ de niveau α correspond à la somme de la VaR de même niveau α et de la moyenne des pertes au-dessus de la VaR,

$$TVaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X) + \mathbb{E}[\max(X - VaR_\alpha(X); 0)].$$

La TVaR dépend de la queue de la distribution associée au risque, d'où sa pertinence d'utilisation dans l'approche Modèle Interne. Néanmoins cette mesure de risque tend à surestimer le besoin en fonds propres de la compagnie d'assurance, du fait qu'elle tient compte des valeurs extrêmes.

Proposition 4 (Propriété de la TVaR) La TVaR est une mesure de risque cohérente i.e. invariante par translation, homogène, monotone et sous-additive.

Remarque 5 (Cas particulier des lois continues) Lorsque la distribution associée au risque X est continue, la mesure de risque TVaR coïncide avec une autre mesure de risque Conditionnal Tail Expectation (CTE) définie par,

$$CTE_{\alpha}(X) = \mathbb{E}(X|X \geq VaR_{\alpha}(X)).$$

Cette deuxième définition de la mesure de risque TVaR offre une méthode simple à implémenter pour le calcul du capital réglementaire dans le Modèle Interne. Cependant, pour pouvoir déterminer la TVaR associée à un risque X , cette quantité doit être finie ce qui n'est pas toujours le cas pour les distributions à queue fine. C'est d'ailleurs la mesure de risque VaR qui est utilisée dans l'environnement Solvabilité 2. Bien qu'il existe des mesures de risques plus pertinentes comme la TVaR, dans ce mémoire nous nous intéressons particulièrement à la mesure de risque VaR pour être cohérent avec le dispositif défini par la réglementation Solvabilité 2.

2.2 Méthodes d'allocation du capital réglementaire

L'approche de gestion des risques proposée dans ce mémoire repose sur le calcul des capitaux alloués aux produits. Notre approche est originale dans la mesure où elle permet de définir des indicateurs affinis et elle comprend l'implémentation de la méthode d'Euler avec les données du Pilier 1 à la disposition de Generali France en Modèle Interne Total. Dans cette section, nous construisons les différentes méthodes d'allocation du capital implémentées pour répartir le capital réglementaire à la maille produit. Nous exposons la démarche à suivre et les propriétés désirables pour allouer le capital de manière équitable. Nous rappelons que les capitaux alloués sont déterminés par le Modèle Interne non-vie. Notre approche consiste à répartir ces montants en s'appuyant sur les distributions du résultat technique à la maille produit fournit par le Modèle Miroir. Nous avons choisi cette démarche car d'une part le Modèle Interne ne modélise pas les risques non-vie à la maille produit, et d'autre part le Modèle Miroir ne tient pas compte des bénéfices de diversification avec les autres risques auxquels l'organisme assurantiel est exposé (Risque de Marché, Risque de Crédit, Risque de Défaut de la Contrepartie ...). Néanmoins, l'avantage d'utiliser un Modèle Interne est de pouvoir implémenter les méthodes stochastiques avancées présentes dans la littérature pour allouer le capital de manière pertinente.

2.2.1 Processus d'allocation et critère de cohérence

Une méthode d'allocation consiste à ventiler un montant de capital associé à un risque sur les segments sous-jacents. Dans notre cas, le capital reflète le risque associé à une ligne d'activité X , et nous souhaitons le répartir sur les produits qu'elle contient notés X_i pour $i = 1, \dots, N$ et tels que $X = \sum_{i=1}^N X_i$. Ce processus repose sur une approche top-down qui consiste à partir du montant de SCR puis de le ventiler à la maille produit. Aussi, l'objectif de cette démarche est d'allouer le bénéfice de diversification de sorte que la somme des capitaux alloués corresponde au capital SCR défini au niveau global de l'entité. Nous formalisons ci-dessous la procédure d'allocation du capital associé au risque de Souscription non-vie.

Remarque 6 Les méthodes d'allocation du capital concernent seulement les risques divisibles. En effet, il n'est pas possible de répartir tous les modules de la cartographie des risques sur les produits

pour obtenir un montant de SCR agrégé à la maille produit. A titre d'exemple, le module de Risque Marché ne peut être décliné à cette maille en découpant le portefeuille d'actifs. De plus, certains risques comme le Risque Opérationnel ou le Risque de Défaut de la Contrepartie sont complètement indépendants de la segmentation et ainsi ne peuvent être répartis à la maille produit. Autrement il faudrait tenir compte des phénomènes complexes telle que la durée et les cadences de développements, pour aboutir à un montant de capital réglementaire par produit. C'est la raison pour laquelle nous abordons dans ce mémoire l'allocation du capital seulement pour les risques de Souscription non-vie.

Considérons l'un des risques de Souscription non-vie et une ligne d'activité (LoB) notée X représentant N produits commercialisés. Par la suite, nous nous plaçons dans l'étape d'allocation du capital sur les N produits, et nous introduisons les notations suivantes.

- X est l'agrégation de variables aléatoires qui représente les pertes associées aux produits faisant partie de la ligne d'activité, pour le sous-module de risque considéré.
- ρ une mesure de risque.
- X_i représente les pertes individuelles associées au produit i pour $i = 1, \dots, N$ (i.e. les engagements par produit).
- C le capital associé au sous-module de risque qu'il faut allouer. Nous rappelons qu'il est défini à la maille ligne d'activité (LoB).
- C_i le capital alloué au produit i , (nous rappelons que le montant C_i est différent du capital élémentaire K_i déterminé par l'approche bottom-up, du fait qu'il tient compte du bénéfice de diversification).

Remarque 7 Comme mentionné dans la première partie, les engagements représentent les sinistres pour les risques de Primes et de Catastrophe. Cependant, ces engagements correspondent aux provisions projetées pour le risque de Réserve.

Avant d'aller plus loin, la décomposition OAT (One-at-Time) du risque global X correspond à la décomposition du risque dans l'environnement Solvabilité 2. Cependant, cette approche de décomposition du risque ne satisfait pas la définition d'une décomposition significative telle que nous l'avons introduit à la section 1.3.1. Nous invitons le lecteur à se référer à la section 1.3.2 pour plus de détails sur cette approche de décomposition du risque global X .

Considérons l'étape de l'allocation du capital qui consiste à répartir le capital C sur les N produits, tout l'enjeu de l'allocation du capital est de pouvoir déterminer les montants C_i associés aux produits commercialisés à l'aide de la mesure de risque ρ et d'une méthode d'allocation λ . Nous présentons dans cette partie les différentes méthodes d'allocation étudiées dans ce mémoire. Nous rappelons que la mesure $\rho(X_i)$ associée au risque X_i s'appuie sur la modélisation de la distribution des pertes du produit i à l'horizon d'un an actualisée. Dans un Modèle Interne, nous choisissons une mesure de risque qui satisfait les propriétés d'homogénéité et d'invariance par translation pour calculer le capital réglementaire (en l'occurrence la VaR). Nous pouvons donc caractériser la distribution des pertes selon l'équation de solvabilité définie précédemment, que nous rappelons ci-dessous,

$$X_i = F_i(0) - B(0, 1) \times F_i(1). \quad (2.2)$$

Dans ce cas, la mesure de risque considérée pris au niveau α de la variable aléatoire $F_i(0) - B(0,1) \times F_i(1)$, correspond bien au besoin de fonds propres à immobiliser pour se couvrir contre le risque X_i avec une probabilité α . Ce besoin de fonds propres déterminé en vision univariée appelée capital élémentaire est défini à la maille produit, et nous le notons K_i .

Pour déterminer le montant de capital C_i alloué au produit i , nous commençons par calculer la contribution individuelle du risque X_i au risque global X , notée $\rho^\lambda(X_i|X)$. Le terme $\rho^\lambda(X_i|X)$ dépend à la fois de la mesure de risque ρ et de la méthode d'allocation λ . Ainsi pour une mesure de risque bien choisie, les différentes méthodes d'allocation implémentées conduisent à des contributions individuelles différentes pour les produits.

Nous verrons par la suite la particularité de chaque méthode d'allocation pour en déduire l'approche adaptée pour améliorer le pilotage des produits dans le sens où le capital alloué reflète le profil de risque des produits. Dans la suite de notre étude, nous considérons une mesure de risque vérifiant les propriétés d'homogénéité et d'invariance par translation notée ρ .

Avant d'introduire les méthodes à l'étude, nous définissons l'opérateur d'allocation du capital.

Définition 15 (Opérateur de l'allocation du capital) Soit λ une méthode d'allocation et X le risque associé à une ligne d'activité composé de N produits X_i , l'opérateur d'allocation du capital Ψ est une fonction $\Psi^{\{\lambda, X\}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ qui à chaque méthode d'allocation λ associe un unique vecteur de contributions des risques associées aux produits X_i , que l'on note $(\rho^\lambda(X_1|X), \dots, \rho^\lambda(X_N|X))$.

Nous nous plaçons à l'étape d'allocation du capital C associé à un sous-module du risque de Souscription non-vie sur les produits appartenant à une même ligne d'activité (LoB) représentée par le risque X .

Définition 16 (Clés d'allocation) Soit λ une méthode d'allocation et X un risque associé à la ligne d'activité, la contribution du risque X_i au risque global correspond à la clé d'allocation définie pour $i = 1, \dots, N$, par,

$$\pi_i = \frac{\rho^\lambda(X_i|X)}{\rho\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)}. \quad (2.3)$$

Après avoir déterminé les clés d'allocation, il vient le calcul du capital C_i que nous souhaitons allouer sur les produits étudiés.

Définition 17 (Capital alloué au produit i) Supposons C le capital associé à un sous-module du risque de Souscription non-vie. Le capital alloué au produit i , noté C_i est obtenu par l'équation suivante,

$$C_i = \pi_i \times C = \frac{\rho^\lambda(X_i|X)}{\rho\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)} \times C. \quad (2.4)$$

La démarche présentée ci-dessus décrit une étape d'allocation du capital à la maille produit, en partant du capital C défini à la maille ligne d'activité (LoB) et qui représente le capital associé à un sous-module du risque de Souscription non-vie. Néanmoins, nous déterminons le capital à répartir par ligne d'activité à l'aide du Modèle Interne car ils prennent en compte les bénéfices de diversification avec les autres risques (Risque de Marché, Risque de Crédit, Risque de Défaut de la Contrepartie, ...).

A proprement parlé l'allocation du capital réglementaire passe par plusieurs étapes intermédiaires. La première étape consiste à déterminer le capital réglementaire SCR au niveau de l'entité, après nous

répartirons ce montant de capital sur les modules de risques, on parle d'une allocation intra-modulaire. Par la suite, nous allouons le capital sur les sous-module de risque puis nous appliquerons cette démarche.

Ce capital à allouer est défini à la maille ligne d'activité car il est obtenu par le Modèle Interne non-vie. Dans le Modèle Miroir la modélisation des risques de Primes et de Catastrophe est faite à la maille Portefeuille de contrat. Comme mentionné en section 1.2.2, il a fallu affiner la modélisation pour obtenir les distributions de pertes à la maille produit en tenant compte des montants d'exposition, et implémenter les méthodes d'allocation. A ce stade, nous présentons les propriétés souhaitables de l'allocation du capital. Etant donné que chaque méthode conduit à différents montants alloués, le choix de la méthode d'allocation peut reposer sur les propriétés d'adéquation satisfaites par celle-ci. Nous introduisons des propriétés telles que la RORAC-compatibilité et la cohérence permettant de garantir une allocation équitable.

Propriétés des méthodes d'allocation du capital réglementaire

La définition d'une méthode d'allocation est très générale pour pouvoir être exploitée sans exiger certaines propriétés. Nous distinguons ci-dessous les propriétés importantes vérifiées par les méthodes d'allocation cohérentes. Ces propriétés assurent une répartition juste du capital réglementaire sur les différents produits.

Définition 18 (Impact marginal du risque X_i sur le risque global X) Soit X un risque associé aux N produits d'une ligne d'activité (LoB), l'impact marginal du risque X_i sur le risque global X est défini par,

$$IM_i(h, X) = \frac{\rho(X) - \rho(X - h \times X_i)}{h}. \quad (2.5)$$

La définition d'une méthode d'allocation cohérente a été introduite dans DENAULT (2001) à partir des propriétés définis ci-dessous.

Définition 19 (Méthode d'allocation cohérente) Une méthode d'allocation est cohérente si elle vérifie les propriétés suivantes,

- Additivité ou « Full allocation » : $\sum_{i=1}^{i=N} \rho^\lambda(X_i|X) = \rho(X)$.
- Symétrie : Si l'impact marginal pour deux risques X_i et X_j sont identiques, alors ils ont la même clé d'allocation i.e. $\pi_i = \pi_j$.
- Sous-additivité ou « No undercut » : $\sum_{i=1}^{i=N} \rho^\lambda(X_i|X) \leq \rho\left(\sum_{i=1}^{i=N} X_i\right) = \rho(X)$.
- Neutralité ou « Riskless allocation » : l'allocation du capital sur un produit non-risqué est nulle i.e. si $\rho(X_i) = 0$ alors $\rho^\lambda(X_i|X) = 0$.

Interprétation des propriétés

La première propriété stipule que la totalité du capital réglementaire est allouée aux différents

produits, comme nous l'avons souligné précédemment, d'où la notion de « Full allocation ».

La propriété de symétrie garantit que pour des produits ayant un impact marginal similaire se voient allouer une même part de ce capital réglementaire. Le principe de l'impact marginal est qu'une augmentation du risque associée à un produit se répercute naturellement sur le risque global.

La propriété « No undercut » représente l'effet de diversification dans l'allocation du capital sur les différents produits. Autrement dit, le capital à allouer est plus faible que le capital élémentaire déterminé par l'approche bottom-up. Nous précisons ici qu'avec une modélisation à la maille produit, il faut tenir compte des dépendances avec les autres produits pour obtenir un niveau de capital alloué réduit.

En outre, il arrive que d'autres propriétés soient exigées pour allouer le capital réglementaire, nous retenons ici une dernière propriété dite RORAC-compatibilité. Les indicateurs économiques seront présentés dans la dernière sous-partie du chapitre, cependant nous commençons par la définition de l'indicateur de rentabilité RORAC pour exploiter cette propriété dans la suite.

Définition 20 (Indicateur de rentabilité RORAC) Le RORAC (Return On Risk-Adjusted Capital) permet de donner une espérance de rendement pondéré d'une mesure de risque. Soit X la variable aléatoire qui modélise les pertes associées à un risque considéré. Le RORAC se définit par,

$$RORAC(X) = \frac{\mathbb{E}(X)}{\rho(X)}. \quad (2.6)$$

Remarque 8 (Généralisation de la définition du RORAC) Pour définir le RORAC à la maille produit, nous nous inspirons de la définition précédente en s'appuyant sur les contributions individuelles au risque global, défini par l'allocation du capital. Concrètement, pour le risque X_i nous remplaçons la mesure de risque $\rho(X_i)$ par la contribution individuelle $\rho^\lambda(X_i|X)$, et nous notons,

$$RORAC(X_i|X) = \frac{\mathbb{E}(X_i)}{\rho^\lambda(X_i|X)}. \quad (2.7)$$

A présent, nous définissons ci-dessous une propriété importante de l'allocation du capital, qu'est la RORAC-compatibilité.

Définition 21 (RORAC-compatibilité) Les contributions individuelles au risque global X notées $\rho^\lambda(X_i|X)$, obtenues par toute méthode d'allocation λ , sont RORAC-compatibles s'il existe un réel ϵ tel que,

$$RORAC(X_i|X) \geq RORAC(X) \implies RORAC(X + h \times X_i|X) \geq RORAC(X) \forall 0 \leq h \leq \epsilon.$$

Ainsi une méthode d'allocation λ vérifie cette propriété si elle fournit des contributions au risque RORAC-compatibles.

Cette propriété permet d'analyser la rentabilité du capital alloué. Une méthode d'allocation RORAC-compatibilité stipule que si la rentabilité d'un produit est supérieure à celle de la ligne d'activité qui le contient, il est possible d'améliorer la rentabilité au niveau global par l'ajout d'une petite quantité h du produit. Autrement dit, la méthode garantit la cohérence des indicateurs économiques issus de l'allocation du capital. Les indicateurs de rentabilité issus d'une méthode d'allocation RORAC-compatibilité sont fiables, et peuvent être utilisés par les structures dirigeantes sans commettre d'erreur dans le pilotage des activités en assurance non-vie.

Remarque 9 (RORAC-compatibilité) La propriété de RORAC-compatibilité est démontrée dans DECUPÈRE (2011), en supposant que la cadence de règlements des provisions techniques global et individuels sont identiques. L'indicateur RORAC n'étant pas utilisé dans le cadre de ce mémoire car nous avons choisi d'autres indicateurs de rentabilité pour le pilotage des produits, la démonstration n'est pas reprise ici.

Après avoir présenté la procédure d'allocation, nous étudions les différentes méthodes implémentées dans le Modèle Miroir. Nous soulignons que plusieurs formules seront présentées afin de décrire leurs utilisations dans l'approche Modèle Interne.

Des approches simplifiées constituent la base de développement des méthodes proportionnelle et marginale. Cependant, ces méthodes négligent des aspects importants liés à la structure de dépendance. La méthode d'Euler représente une généralisation continue de la méthode marginale, car elle prend en compte la notion de l'impact marginal infinitésimal des risques X_i . Il sera intéressant de montrer que cette méthode vérifie les propriétés de cohérence, et la RORAC-compatibilité pour certaines mesures de risque, en particulier la VaR dans un cadre gaussien.

2.2.2 Méthode proportionnelle

La méthode proportionnelle est une approche par laquelle nous mesurons le risque avec la vision univariée (standalone). La démarche pour allouer le capital réglementaire associé à un sous-module de risque sur les produits s'appuie sur le choix d'une mesure de risque. Nous invitons le lecteur à se référer à GONDRAN (2013) pour plus d'informations sur la démarche de l'allocation proportionnelle. La contribution du risque X_i au risque globale X pour $i = 1, \dots, N$ est définie par,

$$\rho^{Prop}(X_i|X) = \rho(X_i).$$

Nous introduisons la clé d'allocation pour cette méthode,

$$\pi_i^{Prop} = \frac{\rho(X_i)}{\rho\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)}. \quad (2.8)$$

La participation au capital réglementaire du produit i , notée C_i correspond à,

$$C_i^{Prop} = \frac{\rho(X_i)}{\rho\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)} \times C.$$

Où C est le capital associé au sous-module de risque considéré. Pour rappel, ce montant de capital est défini à la maille ligne d'activité par le Modèle Interne.

Nous soulignons que la méthode d'allocation actuelle utilisée dans le Modèle Miroir s'apparente à la méthode proportionnelle avec la mesure de risque capital SCR défini par,

$$SCR(X) = VaR_\alpha(X) - \mathbb{E}(X). \quad (2.9)$$

Bien que la méthode proportionnelle soit facile à implémenter, le défaut de cette méthode est qu'elle n'intègre pas la structure de dépendance entre les produits commercialisés. Cela explique le recours à des méthodes plus efficaces permettant de prendre en compte les corrélations entre les différents produits.

2.2.3 Méthode marginale

La méthode marginale ou incrémentale quantifie l'apport d'un segment de risque sur le risque global. Dans notre cas, l'allocation du capital associé à un sous-module de risque repose sur le calcul de l'impact marginal de chaque produit X_i . Nous invitons le lecteur à se référer aux travaux de GRANDPERRIN (2018) pour plus de détails sur la méthode d'allocation marginale.

Après avoir évalué cette quantité, nous déterminons les clés d'allocation ainsi que le capital alloué par produit. Nous notons X la variable aléatoire qui représente les pertes engendrées par un sous-module de risque à la maille ligne d'activité (LoB), et X_i pour $i=1, \dots, N$ ses pertes à la maille produit. Le risque X s'exprime comme suit $X = \sum_{i=1}^N X_i$, et nous introduisons la variable aléatoire $X^{-i} = \sum_{j=1; j \neq i}^N X_j$ qui représente le risque global de la ligne d'activité en négligeant le produit i . L'impact marginal de X_i sera quantifié selon ce principe d'allocation, par $\rho^{Marg}(X_i|X) = \rho(X) - \rho(X^{-i})$. Nous obtenons les clés d'allocations qui s'écrivent,

$$\pi_i^{Marg} = \frac{\rho(X) - \rho(X^{-i})}{\sum_{i=1}^N \{\rho(X) - \rho(X^{-i})\}}. \quad (2.10)$$

Grâce à cette méthode, l'allocation du capital intègre en partie les structures de dépendances entre les produits en se basant sur l'évaluation des impact marginaux sur le risque global de chaque risque X_i . Il est intéressant de chercher à répartir le capital en tenant compte des contributions marginales de chaque produit par rapport à la ligne d'activité. Cependant, l'inconvénient de la méthode incrémentale est de négliger le bénéfice de diversification pour les segments peu importants en mesurant la différence de risque entre X et X^{-i} .

Par ailleurs, les impacts marginaux peuvent être biaisés avec cette approche simple qui consiste à prendre la différence des mesures de risque. La méthode d'Euler est une amélioration de la méthode marginale car elle quantifie les impacts marginaux sur le risque globale X de manière continue. Nous montrons que cette méthode vérifie le critère de cohérence, en conséquence les indicateurs fournissent une représentation fidèle du profil de risque. Dans ce cas, ils peuvent être utilisés par les structures dirigeantes sans commettre d'étourderie en matière de pilotage et de gestion des risques.

2.2.4 Méthode d'Euler

Bien qu'elle soit plus complexe à mettre en œuvre dans le Modèle Interne, la méthode d'Euler est une réponse aux points soulevés précédemment. Son principe est basé sur une répartition de capital selon l'impact marginal infinitésimal de chaque risque. Pour introduire la notion d'impact marginal infinitésimale, nous supposons que les risques sont parfaitement divisibles. De cette façon, nous cherchons à allouer le capital en fonction de la sensibilité du risque global à la diminution très petite du risque X_i . Plus précisément, la contribution du risque X_i par rapport au risque global X est définie ainsi,

$$\rho^{Euler}(X_i|X) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(X) - \rho(X - h \times X_i)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} IM_i(h, X). \quad (2.11)$$

La méthode d'Euler se distingue des méthodes précédentes car elle est une méthode d'allocation cohérente pour une mesure de risque bien choisie. A ce stade nous proposons de le démontrer, et de fournir une formule simple à utiliser dans le cadre numérique, permettant de répartir le capital à la maille produit. Pour ce faire, nous nous concentrons sur un seul sous-module du risque de Souscription non-vie, et nous considérons une autre fois X les pertes associées à une ligne d'activité, contenant N produits commercialisés et représentés par les variables aléatoires X_1, \dots, X_N .

Supposons $C = (C_1, \dots, C_N)$ un vecteur dont les composantes représentent la part du capital

réglementaire allouée aux produits, nous définissons la variable aléatoire $X_C = \sum_{i=1}^N C_i \times X_i$, avec C_i le capital alloué au produit i pour le risque considéré. La variable X_C représente la somme des pertes par produit pondérées du capital alloué. Nous retenons cette définition pour montrer que la méthode d'Euler satisfait les propriétés d'une méthode d'allocation cohérente. Il est à noter que la définition de la variable aléatoire X_C correspond à celle du risque global X pour $C = (1, \dots, 1)$.

Dans la suite, nous considérons une fonction de contribution $\beta^\rho(C_1, \dots, C_N)$ à l'aide d'une mesure de risque ρ définie par,

$$\beta^\rho(C_1, \dots, C_N) = \rho(X_C).$$

La fonction $\beta^\rho(C_1, \dots, C_N)$ est bien une mesure de risque qui attribue au vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_N) une valeur réelle.

Définition 22 (Contribution du risque X_i avec la méthode d'Euler) Supposons que la fonction de contribution $\beta^\rho(C_1, \dots, C_N) : \Delta^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est continument différentiable alors la contribution individuelle du risque X_i par rapport au risque globale X s'écrit,

$$\rho^{Euler}(X_i|X) = \frac{\partial \beta^\rho(1, \dots, 1)}{\partial C_i}. \quad (2.12)$$

La part du capital réglementaire alloué au risque X_i défini par la méthode d'Euler est déterminé par,

$$C_i = \pi_i(\rho) \times C, \quad (2.13)$$

avec $\pi_i(\rho)$ la clé d'allocation donnée par,

$$\pi_i(\rho) = \frac{\rho^{Euler}(X_i|X)}{\rho(X)} = \lim_{h \rightarrow 0} IM_i(h, X) \times \frac{1}{\rho(X)} = \frac{\partial \beta^\rho(1, \dots, 1)}{\partial C_i} \times \frac{1}{\rho(X)}, \quad (2.14)$$

pour $C = (1, \dots, 1)$.

Avant d'expliciter la formule pour calculer le capital alloué à chaque produit, nous proposons une démonstration du critère de cohérence pour cette méthode en deux étapes.

Proposition 5 Si la fonction de contribution est continument dérivable, alors les contributions individuelles des risques X_i , notées $\rho^{Euler}(X_i|X)$ vérifient les axiomes du critère de cohérence.

A ce stade, nous introduisons la notion de fonction homogène et le théorème d'Euler. Considérons E un ouvert de \mathbb{R}^N .

Définition 23 (Fonction homogène) Une fonction $F : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ est homogène de degré k si pour tout $h \geq 0$ telle que $\forall z = (z_1, \dots, z_N) \in E$ vérifie $h \times z \in E$, nous avons $F(h \times z) = h \times k \times F(z)$.

Proposition 6 Si F est homogène d'ordre k alors $\frac{\partial F(z)}{\partial z}$ est homogène d'ordre $k - 1$.

A présent nous rappelons le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes.

Proposition 7 (Théorème d'Euler) Soit $F : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction continument différentiable, et $z = (z_1, \dots, z_N) \in E$ alors,

$$F \text{ est homogène d'ordre } k \Leftrightarrow k \times F(z) = \sum_{i=1}^N z_i \times \frac{\partial F(z_i)}{\partial z_i}.$$

L'application du théorème d'Euler à la fonction $\beta^\rho(C_1, \dots, C_N)$ sous certaines conditions permet d'aboutir à l'expression suivante,

$$\beta^\rho(C_1, \dots, C_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \beta^\rho(C_1, \dots, C_N)}{\partial C_i} \times C_i.$$

En particulier, si la mesure de risque $\beta^\rho(C_1, \dots, C_N)$ vérifie la définition des fonctions homogènes nous pouvons exprimer $\beta^\rho(C_1, \dots, C_N)$ pour $C = (1, \dots, 1)$ comme suit,

$$\beta^\rho(C_1, \dots, C_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \beta^\rho(C_1, \dots, C_N)}{\partial C_i} = \sum_{i=1}^N \rho^{Euler}(X_i|X).$$

Et puisque $C = (1, \dots, 1)$ nous obtenons : $\rho(X) = \rho(X_C) = \sum_{i=1}^N \rho^{Euler}(X_i|X)$.

Nous concluons que la méthode d'Euler satisfait le premier point de la définition d'une mesure de risque cohérente, à savoir la propriété de l'additivité ou « Full Allocation ». Cela signifie que nous pouvons allouer le capital avec cette méthode sans avoir recours à une normalisation comme c'est le cas pour les méthodes précédentes.

La propriété de symétrie est facilement vérifiable pour une mesure de risque quelconque à l'aide de la définition de l'impact marginal associé. En effet, si nous considérons deux indices $(k, l) \in \{1, \dots, N\} \times \{1, \dots, N\}$ telles que les composantes X_k et X_l du risque agrégé X qui satisfont l'équation suivante,

$$IM_k(h, X) = IM_l(h, X). \quad (2.15)$$

En faisant tendre la variable h vers 0, nous obtenons ainsi l'égalité souhaitée,

$$\rho^{Euler}(X_l|X) = \rho^{Euler}(X_k|X). \quad (2.16)$$

Nous déduisons que la méthode d'Euler vérifie aussi la propriété de symétrie. Passons à l'axiome de neutralité : rappelons qu'il traduit le fait que la part de la consommation en capital allouée sur un produit non-risqué est nulle. Pour ce faire, nous considérons une variable aléatoire X_i qui représente les pertes associées au produit i et telle que $X_i = 0$ \mathbb{P} -p.s, alors $\rho(X) = \rho(X - h \times X_i)$. D'après la définition de la contribution individuelle avec la méthode d'Euler, nous pouvons conclure que $\rho^{Euler}(X_i|X) = 0$.

Nous retenons que ces propriétés ont été prouvées sans imposer des conditions supplémentaires sur la mesure de risque ρ et ils sont vérifiables pour les mesures de risques VaR et TVaR. Dans la suite, cette généralisation n'est pas toujours vraie.

Considérons une mesure de risque qui satisfait aussi les propriétés d'homogénéité, la sous-additivité et continument dérivable. Nous nous concentrons sur la démonstration de la propriété de sous-additivité pour les contributions individuelles définies par la méthode d'Euler. Avant nous rappelons quelques résultats sur les fonctions homogènes.

Définition 24 (Fonction sous-additive) Une fonction $G : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ définie sur E un ouvert de \mathbb{R}^N est dite sous-additive si elle vérifie,

$$G(t + s) \leq G(t) + G(s), \forall (t, s) \in E^2 \text{ telle que } t + s \in E.$$

Le corollaire suivant est très fort car il s'appuie sur la définition des fonctions homogènes, et nous permet de montrer la propriété de sous-additivité.

Proposition 8 Soit $G : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ défini sur E un ouvert de \mathbb{R}^N . Supposons que la fonction G soit continument dérivable et homogène de degré 1 (i.e. pour tout $h \geq 0$ telle que $\forall y \in E$ vérifie $h \times y \in E$), on a $G(h \times y) = h \times G(y)$. Alors nous aboutissons à l'équivalence suivante,

$$G \text{ est sous-additive} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N y_i \times \frac{\partial G(y_i+z_i)}{\partial y_i} \leq G(y).$$

Ce corollaire nous permet de prouver la sous-additivité de la méthode d'allocation d'Euler, puisque pour des vecteurs z et y bien choisis la propriété est vérifiée. En effet, soit $1 \leq i \leq N$, nous posons y le i -ème vecteur de la base canonique de l'espace \mathbb{R}^N , puis nous définissons le vecteur z de sorte à obtenir $z + y = (1, \dots, 1)$. De cette manière nous construisons les vecteurs permettant aux contributions individuelles déterminées par la méthode d'Euler de satisfaire la propriété de sous-additivité, à l'aide d'une mesure de risque ρ (homogène et sous-additive), nous aboutissons à l'égalité suivante,

$$\sum_{i=1}^N y_i \times \frac{\partial \beta^\rho(z+y)}{\partial y_i} \leq \beta^\rho(y) = \rho(X_i), \quad (2.17)$$

car $\beta^\rho(y) = \beta^\rho(0, \dots, 1, \dots, 0) = \sum_{i=1}^N y_i \times X_i = X_i$.

De plus, $\sum_{i=1}^N y_i \times \frac{\partial \beta^\rho(z+y)}{\partial y_i} = \frac{\partial \beta^\rho(1, \dots, 1)}{\partial y_i}$, et $\rho^{Euler}(X_i|X) = \frac{\partial \beta^\rho(1, \dots, 1)}{\partial C_i}$ alors nous pouvons en déduire que $\rho^{Euler}(X_i|X) \leq \rho(X_i)$.

Ceci étant vrai pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, dans ce cas pour un ensemble d'indices I nous pouvons écrire $X_I = \sum_{i \in I} X_i$ et on exprime le risque agrégé X comme suit : $X = X_I + \sum_{i=1; i \notin I}^N X_i$.

De ce qui précède, nous avons que $\rho^{Euler}(X_I|X) \leq \rho(X_I)$ et comme la méthode d'Euler est additive nous obtenons ainsi,

$$\sum_{i \in I} \rho^{Euler}(X_i|X) = \rho^{Euler}(X_I|X) \leq \rho(X_I). \quad (2.18)$$

D'autre part, la mesure de risque ρ est sous-additive par hypothèse nous avons nécessairement l'inégalité suivante,

$$\rho(X_I) \leq \sum_{i \in I} \rho(X_i),$$

puis nous aboutissons au résultat attendu pour l'ensemble d'indice I considéré,

$$\sum_{i \in I} \rho^{Euler}(X_i|X) \leq \sum_{i \in I} \rho(X_i).$$

La dernière étape consiste à dire que le résultat ci-dessus est vrai pour tous les ensembles I d'indices appartenant aux parties de $\{1, \dots, N\}$, nous pouvons alors l'étendre pour l'ensemble $\{1, \dots, N\}$ lui-même.

Nous avons démontré que la méthode d'Euler satisfait les propriétés d'une méthode d'allocation cohérente. Cependant, l'obtention de résultats intéressants avec cette méthode est cautionnée par le choix d'une mesure de risque qui respecte les hypothèses de la démonstration. En particulier, la TVaR vérifie les hypothèses d'homogénéité et de sous-additivité, auxquelles nous avons recours pour montrer le critère de cohérence. Or, l'étude de ce mémoire se base sur la mesure de risque VaR pour déterminer les clés d'allocations. Ce choix trouve sa justification dans les exigences imposées par la réglementation Solvabilité 2 en matière de calcul du capital réglementaire. Pour mettre en œuvre la méthode d'Euler avec la mesure de risque VaR, il faut s'accorder les hypothèses du cadre gaussien pour aboutir à une

approximation des clés d'allocations.

Nous présentons ci-dessous le résultat principal, proposé par TASCHE (2007) dans ses travaux permettant de calculer les clés d'allocations de la méthode d'Euler avec la mesure de risque VaR. L'expression de l'impact infinitésimale avec la mesure de risque VaR est donnée par l'expression suivante,

$$\frac{\partial q_\alpha(X_C)}{\partial C_i} = \mathbb{E}[X_i | X_C = q_\alpha(X_C)]. \quad (2.19)$$

Il s'agit de reconstruire la procédure d'allocation du capital Euler avec la mesure de risque VaR. Bien que ce résultat permette de donner une expression à cette dérivée, cette formule est complexe à mettre en œuvre par une approche numérique.

2.3 Indicateurs économiques

Dans le secteur assurantiel, le processus Enterprise Risk Management vise à identifier, cartographier et catégoriser les risques encourus par la compagnie d'assurance. En assurance non-vie, cette dernière étape consiste à comparer les risques à l'aide des indicateurs économiques de solvabilité et de rentabilité. Bien que l'évaluation de ces indicateurs figurent dans la section Processus de suivi des risques de Souscription non-vie du rapport ORSA. L'autorité de contrôle encourage les organismes assurantiels à se servir des indicateurs comme un outil d'aide à la prise de décision.

En effet, au-delà de l'évaluation interne des risques et de la solvabilité, les organismes sont tenus de mettre en place un processus de suivi des indicateurs, témoignant de la bonne ou mauvaise santé de l'organisme. En particulier pour les entités de Generali France, ces indicateurs sont réutilisés dans le cadre du suivi des portefeuilles (Portfolio Monitoring Process, PMP) ou pour le lancement de nouveaux produits (Product Authorization Process, PAP). L'évolution de ces indicateurs économiques à l'horizon du plan stratégique permet de fournir un critère adéquat pour se positionner.

Dans cette section, nous munissons l'approche de gestion des risques des indicateurs de solvabilité et de rentabilité afin d'améliorer le pilotage des produits.

2.3.1 Cadre d'analyse

L'une des principales motivations de ce mémoire est l'évaluation d'indicateurs économiques fiables pour situer les produits commercialisés dans le référentiel risque-rentabilité. Toutefois ces indicateurs doivent être facile à interpréter par les structures dirigeantes afin d'orienter la prise de décision et la gestion des risques.

Pour mettre en œuvre un pilotage efficace, il faut définir des indicateurs de rentabilité qui reflètent aussi le niveau de consommation en capital. Cette approche est innovante dans la mesure où l'on définit des critères d'analyse à la maille produit qui combinent les dimensions rentabilité et solvabilité. Au-delà des indicateurs classiques, notre démarche permet de construire un nouveau type d'indicateur de rentabilité dit « combiné », représentant le compromis risque/rentabilité. Les indicateurs combinés permettent de s'assurer que les risques encourus par l'organisme ne soient pas trop pénalisants au niveau du résultat. Il faut donc se positionner dans un cadre permettant d'évaluer le couple risque-rentabilité à la maille produit. Pour commencer, nous cherchons à évaluer le « risque » sous-jacent de chaque produit avec l'indicateur de solvabilité, le SCR alloué.

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 1, les méthodes de calcul du capital réglementaire permettent d'évaluer le SCR agrégé au niveau global de l'entité. L'avantage du Modèle Interne est de parvenir à modéliser les distributions des sous-modules du risque de Souscription non-vie. Cela

signifie que nous pouvons déterminer la moyenne des engagements pour évaluer le résultat moyen. Les définitions introduites dans la partie précédente permettent de mesurer les risques, et en conséquence d'évaluer les indicateurs de solvabilité et de rentabilité à la maille produit.

Nous parviendrons à repérer les produits qui paraissent très rentables à première vue, mais qui immobilisent beaucoup de capital. Cependant, nous observons des produits commercialisés qui consomment peu de capital et avec une faible rentabilité, pour lesquels il faudrait développer l'activité afin d'améliorer le résultat opérationnel. Il est donc utile de repérer les caractéristiques des produits commercialisés pour réduire le capital immobilisé par l'assureur, et améliorer le résultat technique.

Comme évoqué ici, cette démarche nous permettra de catégoriser et interpréter les différents produits commercialisés pour mener un pilotage efficace des activités.

Avant d'introduire les indicateurs économiques, nous nous intéressons aux différentes notions actuarielles liées à ces outils :

- La notion de sinistralité dépend de la nature des risques associés au portefeuille de contrats, par conséquent il est intéressant d'observer son évolution de manière prospective pour ajuster au fur et à mesure les primes demandées aux assurés. L'évaluation de la sinistralité s'appuie sur la modélisation du Risque de Primes et le Risque de Catastrophe dans le Modèle Miroir.
- Le provisionnement est une notion liée à la politique de provisionnement de la compagnie d'assurance. Selon la politique de provisionnement plus ou moins prudente, la reprise de provisions appelée boni/mali se répercute directement sur le résultat. L'analyse du provisionnement se base uniquement sur la modélisation du risque de Réserve dans le Modèle Miroir.

A ce stade, il nous semble utile d'introduire les indicateurs de solvabilité et de rentabilité.

2.3.2 Indicateurs de solvabilité : SCR alloué et *Risk Capital Ratio*

SCR alloué

Le montant de SCR représente le risque encouru par une compagnie d'assurance tel qu'il est défini par la réglementation Solvabilité 2. Dans le Modèle Interne, nous rappelons que les risques de Souscription non-vie ne sont pas modélisés à la maille produit. Il a fallu affiner la modélisation des risques pour mettre en œuvre les méthodes d'allocation du capital tels qu'elles ont été présentées précédemment. En effet, les risques de Primes et Catastrophe sont modélisés à la maille Portefeuille de contrats, et le risque de Réserve est modélisé à la maille Catégorie Ministérielle. Par conséquent, il faut décliner la modélisation de tous ces risques à la maille produit en tenant compte des caractéristiques connus des produits. Nous rappelons que l'approche par laquelle nous avons abouti aux distributions des pertes à la maille produit permet de prendre en compte l'exposition de chaque produit pour répartir équitablement les risques.

La démarche exposée ci-dessus permet d'examiner le montant de capital réglementaire par risque et par produit que l'on appelle SCR alloué. Nous soulignons que l'assureur doit être capable de mobiliser ce capital pour faire face à une ruine causée par les risques de Souscription non-vie avec une probabilité 99,5%.

Définition 25 (SCR alloué) Le SCR alloué d'un produit est la part du capital réglementaire associé au risque de Souscription non-vie. Selon le principe décrit ci-dessus, il correspond à l'agrégation des

capitaux réglementaires déterminés pour chacun des risques de Souscription non-vie à la maille produit.

Remarque 10 Pour alléger la lecture, dans la suite de ce mémoire nous désignons par SCR alloué, le montant de capital associé au risque de Souscription non-vie par produit. Intuitivement pour chacun de ses sous-modules (Primes, Catastrophe et Réserve), on note SCR_i le capital réglementaire associé au risque i pour le produit étudié.

Risk Capital Ratio (RCR)

Le *Risk Capital Ratio* (RCR) est le second indicateur de solvabilité qui sera évalué dans ce mémoire. Cet indicateur prend en compte le niveau de primes acquises par l'assureur et le SCR alloué. La détermination de cet indicateur s'appuie sur le cadre que nous avons exposé précédemment pour allouer le capital réglementaire à la maille produit. Formellement, nous définissons le *Risk Capital Ratio* avec les notations introduites comme suit.

Définition 26 (*Risk Capital Ratio*) Le *Risk Capital Ratio* d'un produit correspond au rapport entre le capital réglementaire associé au sous-module de risque i et les primes acquises. Plus précisément le *RCR* d'un risque i se définit par,

$$RCR = \frac{SCR_i}{P}.$$

Où SCR_i est le capital associé au risque i que l'on alloue au produit étudié, et P représente les primes acquises pour ce produit.

Remarque 11 (Adaptation de la définition du RCR pour le risque de Réserve) Comme le *Risk Capital Ratio* (RCR) est un indicateur de la consommation en capital, il est raisonnable de diviser le SCR de Primes et le SCR de Catastrophe par le volume des primes acquises. Cependant pour le risque de Réserve, cela soulève la question de l'incohérence pour cet indicateur, car le SCR de Réserve est plutôt lié aux provisions en stock et ceux des nouvelles affaires. Il convient de remplacer le volume des primes par les provisions techniques. Cette redéfinition permet de palier les limites de cet indicateur et ainsi comparer le SCR de Réserve aux volumes des provisions techniques. A titre d'exemple, les primes acquises des produits Responsabilité Civile en tenant compte de la réassurance correspondent à 50% des primes acquises en Brut de réassurance. Pourtant la consommation en capital de ce produit pour le risque de Réserve en Net de réassurance n'est pas réduite de moitié. Ainsi il serait plus juste de rapporter ce montant de capital aux provisions techniques Net plutôt que les primes acquises Net.

La définition de cet indicateur peut être étendue au niveau global pour le risque de Souscription non-vie. Il suffit de remplacer SCR_i par le SCR alloué.

L'allocation du capital muni des indicateurs de solvabilité permet de mieux piloter les produits commercialisés et ainsi alimenter la prise de décision des instances dirigeantes. Néanmoins, ces derniers s'intéressent davantage au rendement futur que génèrent ces produits. De ce fait, les indicateurs économiques suivants, sont des indicateurs permettant de calculer la rentabilité des produits. Notons que la notion de consommation en capital est encore utilisée pour évaluer les indicateurs de rentabilité.

2.3.3 Indicateurs de rentabilité : *Return on Risk Capital* et *Economic Combined Ratio*

Une critique pouvant être apportée aux indicateurs précédents est de négliger le résultat technique. Toutefois le résultat est une notion clé pour le pilotage des activités en assurance non-vie. Dans ce mémoire l'approche exposée s'appuie également sur les indicateurs de rentabilité *Return on Risk Capital* (RoRC) et *Economic Combined Ratio* (ECoR).

Return on Risk Capital (RoRC)

Le RoRC (*Return on Risk Capital*) est un indicateur de performance économique mesurant la rentabilité du capital immobilisé. Plus précisément, il correspond aux profits attendus par la compagnie en immobilisant uniquement le capital réglementaire. Il prend en compte le niveau de SCR alloué déterminé par le Modèle Miroir, en s'appuyant sur l'allocation du capital réglementaire. Le *Return on Risk Capital* (RoRC) est un indicateur défini au niveau du Groupe Generali de manière justifiée, et la méthodologie d'évaluation s'appuie sur la politique de Souscription et de Provisionnement non-vie selon GENERALI (2019) et GENERALI (2021). L'indicateur *Return on Risk Capital* (RoRC) est défini par,

$$RoRC = \frac{(R_T + r \times P_T) \times (1 - T)}{SCR_{NV}}$$

Où R_T correspond au résultat technique, P_T représente les provisions techniques non-vie, et SCR_{NV} la part du capital réglementaire associé au risque de Souscription non-vie. Le facteur r correspond au taux sans risque déterminé par la courbe des taux, il dépend de la duration des provisions techniques associées au produit étudié. Le terme T correspond au taux. Ainsi l'indicateur *Return on Risk Capital* (RoRC) mesure la rentabilité des produits par rapport à la consommation en capital, et en s'appuyant sur le résultat opérationnel.

Ratio Combiné

Le ratio combiné constitue l'indicateur de référence des assureurs, car il permet de mesurer la rentabilité par ligne d'activité et par produit. Nous formalisons ci-dessous la définition de cet indicateur pour étudier les produits.

Définition 27 (Ratio Combiné (CoR)) L'indicateur de rentabilité Ratio Combiné (CoR) correspond au rapport entre les dépenses relatives à l'activité d'assurance (sinistres et frais) et les primes acquises. Soit X un risque considéré nous supposons que le règlement des sinistres connus et la projection des sinistres inconnus sont représentés par une variable aléatoire S , les frais payés par l'assureur sont notés F et les primes acquises P . L'indicateur Ratio Combiné est défini par,

$$CoR(X) = \frac{\mathbb{E}(S) + F}{P}$$

Dans la pratique le ratio combiné se décompose en deux ratios.

- *Loss ratio* = $\frac{\mathbb{E}(S)}{P}$, prend en compte les différents éléments liés à la sinistralité comme les coûts des sinistres qui incluent les frais de gestion des sinistres payés par l'assureur. Les dépenses relatives aux sinistres correspondent aux indemnités versées aux assurés et les sinistres en cours (les sinistres non déclarés, les montants de sinistres réajustés, ...).

- *Expense Ratio* = $\frac{F}{P}$, les frais concernent les coûts d'administration des contrats, l'acquisition des contrats, et les commissions versées aux intermédiaires (agents généraux, courtiers, vendeurs salariés, partenariats ...).

Le CoR est un indicateur de rentabilité qui tient compte du résultat technique et de la charge des frais généraux. Lorsque ce rapport évalué pour un produit est égal à 100%, nous pouvons conclure que les primes acquises équilibrent les dépenses de l'assureur dans la mesure où ce produit ne génère ni de perte ni de profit pour l'assureur. A l'inverse, si le rapport est inférieur (resp. supérieur) au seuil 100% cela traduit que la commercialisation de ce produit est techniquement rentable (resp. non rentable) pour la compagnie d'assurance. Néanmoins, cet indicateur n'est pas suffisant pour conclure quant à la rentabilité d'un produit. Comme nous l'avons mentionné certains produits se caractérisent par un CoR inférieur à 100%, pourtant ils immobilisent une forte part du capital réglementaire. Il faut définir un nouvel indicateur qui reprend les notions citées précédemment, et en particulier la consommation en capital.

A présent, nous introduisons l'indicateur *Economic Combined Ratio* (ECoR). Celui-ci constitue l'élément central de la nouvelle approche de gestion des risques.

Ratio Combiné Économique (ECoR)

Le Ratio Combiné Économique (ECoR pour *Economic Combined Ratio*) correspond à un ajustement du ratio combiné par un facteur d'escompte financier et un facteur de coût en capital. C'est la définition que nous avons retenue dans ce mémoire pour une analyse efficace des produits d'assurance non-vie. Cette approche permet d'inclure l'immobilisation de capital, qui est une perte d'opportunité pour l'assureur. Au lieu d'investir ces capitaux et engendrer un rendement financier qui peut servir de « coussin » de sécurité pour faire face aux fluctuations de sinistralité, l'assureur doit immobiliser ce capital réglementaire pour garantir les engagements aux assurés et se protéger des risques encourus. Il est intéressant d'introduire un indicateur combiné qui prend en compte à la fois la sinistralité et le coût en capital pour piloter les produits. Le Ratio Combiné Économique se définit comme suit,

$$ECoR = CoR - \frac{r \times D \times E(S)}{P} + CoC \times SCR_{alloue}.$$

Où CoC correspond au coût en capital, r correspond au taux sans risque et D est la durée des provisions techniques du produit étudié.

La création de cet indicateur permet de munir le cadre de gestion des risques d'un indicateur reflétant les dimensions solvabilité-rentabilité à la maille produit. Cette approche consiste à faire correspondre au niveau de risque associé à chaque produit un réel qui représente le couple risque-rentabilité.

Ce chapitre a permis d'établir le dispositif d'analyse des produits dans un référentiel risque-rentabilité. Nous rappelons que l'approche de gestion des risques correspond à l'allocation du capital réglementaire et la définition des indicateurs de solvabilité et de rentabilité à la maille produit. L'objectif de la partie suivante est de mettre en œuvre cette approche puis de présenter les indicateurs obtenus à l'aide des différentes méthodes d'allocation introduites. Cette étude permet de choisir la méthode retenue pour chaque risque, en matière de cohérence, de l'interprétation et de la complexité opérationnelles.

Chapitre 3

Mise en œuvre de l'approche de gestion des risques

Dans cette partie, nous évaluons l'impact du changement de la méthode d'allocation sur les indicateurs de solvabilité et de rentabilité. Cette approche est importante afin d'identifier la méthode d'allocation qui répartit le capital sur les produits de manière équitable. Nous rappelons que le choix de la méthode d'allocation conditionne l'obtention d'indicateurs pertinents pour améliorer le pilotage des produits. Dans un premier temps, nous présentons la méthode d'allocation actuelle utilisée pour répartir le capital réglementaire afin de caractériser ses limites. Dans la suite, nous analysons les montants alloués par les différentes méthodes implémentées dans le Modèle Miroir afin d'identifier l'approche qui redistribue équitablement le capital réglementaire en tenant compte du profil de risque des produits, c'est-à-dire les risques sous-jacents et les mécanismes de corrélations entre les segments. Ainsi, nous déterminerons la méthode qui fournit une représentation fidèle du risque assuré.

Les résultats présentés dans ce mémoire ont été anonymisés sans modifier les conclusions, pour conserver la confidentialité de l'Entreprise. Toutefois, nous nous concentrons sur le choix de la méthode d'allocation en s'appuyant sur les caractéristiques des produits et les propriétés d'adéquation des méthodes d'allocation du capital réglementaire présentées au chapitre précédent.

3.1 Contexte : Méthode actuelle du Modèle Miroir

3.1.1 Méthode actuelle du Modèle Miroir

Le Modèle Miroir est une réplique du Modèle Interne non-vie permettant d'évaluer les distributions de pertes associées aux risques de Souscription non-vie. Le besoin en capital est évalué pour chacun des sous-modules de ce risque avec une approche bottom-up, ensuite vient l'étape d'agrégation des capitaux élémentaires pour déterminer la part du capital réglementaire Solvabilité 2 associée au risque de Souscription non-vie. La méthode d'allocation actuelle dans le Modèle Miroir permet de répartir la part du capital réglementaire associé aux risques de Primes et de Catastrophe sur les produits commercialisés. Le but de ce paragraphe est de présenter la procédure d'allocation de cette méthode, puis de discuter les limites de cette approche. Avant d'interpréter les étapes de la méthode actuelle dans le Modèle Miroir, nous illustrons la démarche de cette méthode dans la figure [3.1](#).

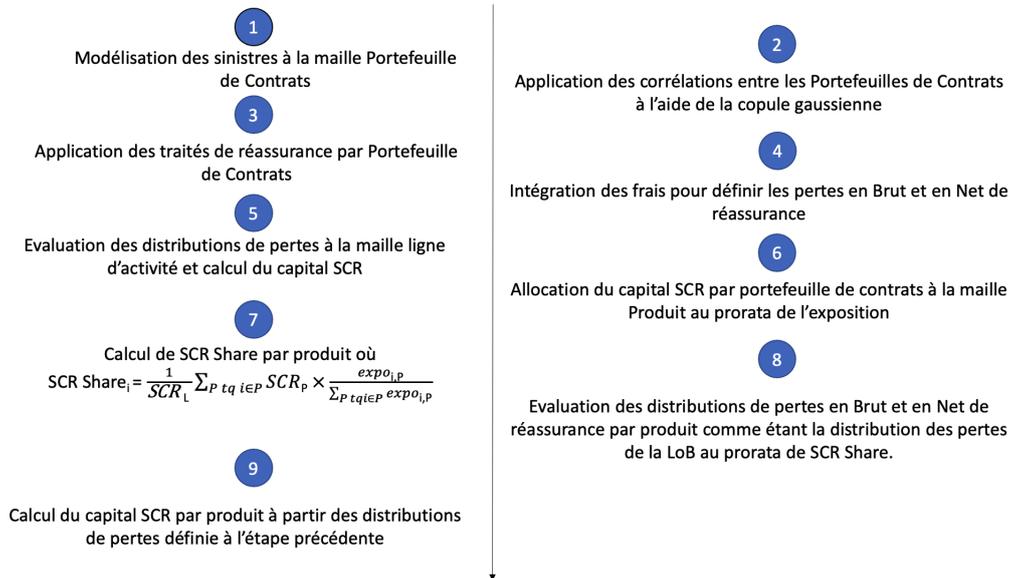


FIGURE 3.1: Méthode d'allocation actuelle du Modèle Miroir

Le schéma reprend les étapes principales de la méthode d'allocation actuelle pour le risque de Primes. Nous rappelons que la maille de modélisation du risque de Catastrophe est similaire à celle du risque de Primes, l'analyse suivante se concentre sur l'allocation du capital associé à ce dernier. Le risque de Primes est modélisé dans le Modèle Miroir à la maille Portefeuille de contrat, qui correspond à la maille de calibrage dans le Modèle Interne non-vie. Nous invitons le lecteur à se référer à la section 1.1.2 pour plus de détails sur l'approche de modélisation du risque de Primes dans le Modèle Interne non-vie de Generali France. En premier lieu, nous regroupons les Portefeuilles de contrat par ligne d'activité avec la prise en compte des corrélations. Parallèlement, nous déterminons le capital SCR à la maille Portefeuille de contrat. Nous rappelons que le capital SCR est obtenu par le quantile 99,5% de la distribution des pertes corrigé de son espérance mathématique. L'étape suivante consiste à déterminer les distributions de pertes par ligne d'activité comme l'agrégation des distributions des Portefeuilles de contrat en tenant compte des corrélations. A ce stade, nous définissons la variable SCR Share pour chaque produit. Cette variable permet d'aboutir à la distribution des pertes à la maille produit et calculer les clés d'allocations du capital à l'aide de la mesure de risque capital SCR.

Après avoir décrit la procédure d'allocation de la méthode actuelle, nous retenons que les clés d'allocations sont calculées de manière analogue à la méthode proportionnelle. En particulier, le capital est ventilé avec une vision univariée du risque. Toutefois, les distributions de pertes à la maille produit sont fournies par la variable SCR Share. De plus, la mesure de risque employée par la méthode actuelle est la mesure de risque capital SCR. En conséquence, la méthode actuelle présente des différences avec la méthode proportionnelle présentée dans ce mémoire. D'autre part, nous avons relevé quelques améliorations quant à l'implémentation de cette méthode d'allocation. Nous observons que la mesure de risque VaR définie dans la section 2.2.2 ne satisfait pas la propriété de l'additivité. En effet, la somme des SCR par Portefeuille de contrats ne correspond pas au capital SCR de la ligne d'activité. Par conséquent, l'étape de détermination du capital SCR à la maille ligne d'activité (LoB) n'est pas appropriée. Pour éviter toute confusion, il nous paraît utile de démontrer les propriétés vérifiées par la mesure de risque capital SCR.

3.1.2 Propriétés de la méthode actuelle

Proposition 9 Le capital SCR est une mesure de risque vérifiant la propriété d'invariance en loi et d'homogénéité. Cependant cette mesure de risque ne vérifie pas la propriété de l'invariance par translation.

Preuve : Nous rappelons ici la définition du capital SCR pour une variable aléatoire X ,

$$SCR(X) = VaR_\alpha(X) - \mathbb{E}(X).$$

Il est évident que le capital SCR associé à la variable aléatoire X est bien une mesure de risque. Commençons par montrer les propriétés d'invariances.

Invariance en loi : Soit X et Y deux variables aléatoires de même loi (i.e. $X =_L Y$), définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, alors,

$$\mathbb{P}(X \leq VaR_\alpha(X)) = \alpha = \mathbb{P}(Y \leq VaR_\alpha(X)).$$

Et comme $\mathbb{P}(Y \leq VaR_\alpha(Y)) = \alpha$, dans ce cas,

$$VaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(Y).$$

D'autre part, la définition de l'égalité en loi entre deux variables aléatoires assure que,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}(Y).$$

Il faut noter que la distribution des risques X et Y n'est pas forcément continue, pour cette raison la démonstration de cette propriété repose sur l'intégrale de Lebesgue.

Nous pouvons conclure quant à l'égalité de la mesure de risque capital SCR pour ces deux variables risques, donc elle est invariante en loi.

Invariance par translation : Nous considérons une variable aléatoire définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, et $a \in \mathbb{R}$. Il suffit donc de remarquer que $SCR(X + a) = SCR(X)$ pour en déduire que la mesure de risque capital SCR ne satisfait pas la propriété d'invariance par translation. Pour ce faire, montrons que $VaR_\alpha(X + a) = VaR_\alpha(X) + a$. On sait que $\mathbb{P}(X + a \leq VaR_\alpha(X + a)) = \alpha$. D'où, $\mathbb{P}(X \leq VaR_\alpha(X + a) - a) = \alpha = \mathbb{P}(X \leq VaR_\alpha(X))$, et en conséquence nous avons que $VaR_\alpha(X) = VaR_\alpha(X + a) - a$.

Face aux limites de la méthode actuelle, nous avons implémenté les méthodes d'allocation introduites avec la mesure de risque VaR en se basant sur le cadre théorique décrit dans la partie dédiée. Étant dans un cadre gaussien, le choix de la mesure de risque VaR permet de garantir une allocation cohérente avec la méthode d'Euler. Ci-dessous nous présentons le portefeuille de données sur lequel a été développé notre analyse.

3.2 Présentation des données d'assurance non-vie

3.2.1 Analyse de la consommation en capital à la maille ligne d'activité

Dans ce mémoire, nous nous intéressons en particulier aux données d'assurance non-vie de Generali France pour la mise en œuvre des méthodes d'allocation du capital économique. Nous analysons ci-après les montants alloués avec chacune des méthodes d'allocations à la maille produit afin de caractériser la méthode adéquate par sous-module de risque. Nous exploiterons à nouveau ce cadre dans le chapitre suivant pour présenter l'application numérique des sensibilités à la maille produit avec des scénarios de stress et de sensibilités reflétant les effets économiques de la crise de la Covid-19, en lien avec les recommandations de l'EIOPA dans EIOPA (2021). Nous commençons par décrire dans le tableau 3.1 les lignes d'activité à l'étude.

Ligne d'activité	Duration (années)	CoR (%)	Primes (en M €)	Provisions (en M €)
1	2	71%	322	241
2	5	102%	719	1085
3	9	122%	186	1551
4	9	89%	129	980

TABLE 3.1: Caractéristiques des lignes d'activité

La segmentation repose sur les critères de regroupement des produits que nous détaillons ci-dessous :

- Une politique de provisionnement commune pour chaque ligne d'activité contenant des produits avec des durations homogènes. A partir de cette segmentation, nous distinguons les lignes d'activité à :
 - (a) Duration courte : La ligne d'activité 1 regroupe des produits à cadence de développement courte, près de 80% des engagements sont écoulés à la fin de la deuxième année.
 - (b) Duration moyenne : La ligne d'activité 2 concentre des produits ayant des durations qui se situent entre 4 et 5 ans.
 - (c) Duration longue : Les lignes d'activités 3 et 4 contiennent des produits à cadences de paiements très longues. Typiquement nous observons des règlements 10 ans après la survenance des sinistres pour les produits Responsabilité Civile.
- Les risques sous-jacents à chaque produit sont homogènes au sein d'une même ligne d'activité. Pour plus de détails sur la notion de « risques homogènes », nous invitons le lecteur à se référer à l'article Institut des ACTUAIRES (2016).
- La granularité des données utilisées pour modéliser les risques, parfois l'historique des données est limité à la maille produit. Ainsi, la modélisation des risques repose sur une maille moins fine pour palier la problématique de robustesse du calibrage.

Le SCR de Souscription non-vie représente plus que la moitié du capital réglementaire déterminée par le Modèle Interne non-vie. Nous rappelons que le calcul du capital réglementaire repose sur plusieurs niveaux d'agrégations, permettant de prendre en compte le bénéfice de diversification d'abord au sein des sous-modules de risque puis entre les différents modules de risques. Le capital associé au risque de Souscription non-vie se compose d'un SCR de Primes, d'un SCR de Catastrophe et d'un SCR de Réserve^{*}. Ces derniers représentent respectivement 19%, 6% et 74% du SCR de Souscription non-vie. Nous décrivons dans le tableau 3.2 les montants de SCR supposés par ligne d'activité et par risque.

Ligne d'activité	SCR Primes	SCR Catastrophe	SCR Réserves	SCR total
1	36	5	7	48
2	74	51	162	287
3	34	0	262	297
4	12	0	129	141
SCR agrégé	156	56	560	773

TABLE 3.2: Montant de SCR en M € par sous-module de risque des lignes d'activité à l'étude

A ce stade, nous nous concentrons sur chacune des lignes d'activité présentées et nous analysons leurs caractéristiques.

La ligne d'activité 1 concentre des produits avec des durations courtes puisque près de 80% des engagements sont écoulés à la fin de la deuxième année. Cette ligne d'activité se caractérise par un niveau de prime élevé et des provisions techniques moins importantes. Nous observons que le SCR de Primes de cette ligne d'activité représente 75% du SCR total, qui se justifie par la volatilité des pertes historiques et le montant de primes acquis par l'assureur. La cadence de règlement des sinistres est courte (2 ans), ce qui explique le niveau du SCR de Réserve.

La ligne d'activité 1 regroupe les produits couvrant la protection contre les dommages de tous les types de véhicule appartenant à des entreprises ou des particuliers. Nous nous intéressons à deux produits :

- un produit couvrant les sinistres automobiles des entreprises et des professionnelles ou des particuliers.
- un produit couvrant les dommages de tous les types de véhicules appartenant à des particuliers ou des entreprises.

La ligne d'activité 2 se compose de produits ayant des durations moyennes (5 ans). Elle se distingue par un niveau de prime élevé et une sinistralité importante avec un Combined Ratio dépassant le seuil de 100%. La décomposition du SCR pour cette ligne d'activité met en avant une forte consommation en capital au titre du risque de Réserve en raison des provisions techniques estimées importantes et la cadence de règlement des sinistres. De plus, nous relevons que le SCR de Primes est élevé (74 M €) pour cette ligne d'activité, en raison de l'effet volume induit par les primes acquises par l'assureur. La ligne d'activité 2 regroupe les engagements d'assurance couvrant tous les produits liés aux dommages aux biens. Cette ligne d'activité contient dix produits dont :

^{*}Le risque de Rachat non-vie est très négligeable, nous nous concentrons principalement sur les autres risques de Souscription non-vie (Primes, Réserves et Catastrophe)

- un produit couvrant les dommages d'un logement assuré par un particulier, notamment en cas de détérioration, destruction ou perte d'un bien.
- un produit couvrant les dommages des véhicules présents dans un garage ou chez un concessionnaire.
- un produit couvrant les dommages causés par la grêle.
- un produit couvrant les dommages subis par les exploitations agricoles.
- un produit s'adressant aux professionnelles (artisans, commerçants) et aux entreprises pour couvrir les dommages subis. Ce produit inclut la garantie pertes d'exploitation, qui indemnise l'assuré des conséquences pécuniaires de l'interruption ou de la réduction de l'activité, pour cause déterminante l'intensité anormale d'un agent naturel comme une pandémie.
- un produit couvrant le logement en cas d'incendie, de dégâts des eaux, et du vol.
- un produit couvrant les dommages au bâtiment assuré.
- un produit couvrant le risque industriel et les garanties de l'assurance multirisque immeuble lorsque la taille du bâtiment est importante. Ce produit couvre également l'assurance des pertes d'exploitation.
- un produit spécifique aux entreprises couvrant les dommages matériels subis par les biens garantis.

La ligne d'activité 3 regroupe des produits à duration longue avec des cadences de paiements pouvant dépasser 10 ans, car elle concentre des produits couvrant les garanties responsabilité civile. Nous observons que cette ligne d'activité se distingue par des provisions techniques très élevées et un niveau de primes relativement faible, qui représente moins de 12% des provisions techniques. De plus, le Combined Ratio associé à cette ligne d'activité s'établit à 122%, nous pouvons l'expliquer par les montants de sinistres importants. Dans ce cas, la décomposition du SCR de la ligne d'activité 3 met en avant une forte consommation en capital au titre du risque de Réserve, et un SCR de Primes peu élevé en raison de la volatilité des sinistres.

La ligne d'activité 3 regroupe les engagements d'assurance couvrant toute responsabilité résultant de l'emploi de véhicules terrestres automobile pour particuliers et entreprises. Nous nous intéressons à deux produits :

- un produit couvrant les sinistres automobiles, relevant de la responsabilité civile des assurés pouvant être des entreprises et des professionnelles ou des particuliers.
- un produit couvrant tous les types de véhicules appartenant à des particuliers ou des professionnelles.

La ligne d'activité 4 contient des produits à cadences de paiements très longues (9 ans). Typiquement, nous observons des règlements 10 ans après la survenance des sinistres pour les produits Responsabilité Civile. Cette ligne d'activité se distingue par un niveau de provisions techniques très élevé en raison de la duration des sinistres longue. Toutefois, nous observons un niveau de primes relativement faible pour cette ligne d'activité qui correspond à près de 13% des provisions techniques. Ainsi, la décomposition du SCR de cette ligne d'activité met en avant une forte consommation en capital pour le risque de Réserve (129 M €) et un SCR de Primes moins important (12 M €). De plus, le risque de Réserve associé à cette ligne d'activité représente près de 25% du SCR de Réserve

de l'entité.

La ligne d'activité 4 regroupe essentiellement les engagements d'assurance couvrant la responsabilité civile, et la cyber sécurité des entreprises. Nous distinguons deux principaux produits :

- un produit couvrant les garanties Responsabilité Civile classique des professions réglementées, comme les fautes professionnelles ou les dommages liés à des produits professionnelles livrés.
- un produit couvrant les dommages liés à la cybercriminalité que peut subir une entreprise, notamment la gestion de crise en cas de paralysie de l'activité à la suite d'une cyberattaque.

3.2.2 Analyse de la consommation en capital à la maille produit

Dans cette section, nous analysons le profil de risque des produits à l'aide des caractéristiques telles que les primes, les provisions techniques, la durée, et le Combined Ratio. Par la suite, nous présentons la décomposition des risques de Souscription non-vie à l'aide de la méthode actuelle. L'objectif de cette partie est de comprendre l'origine de la consommation en capital des produits en tenant compte de la sinistralité et de la politique de provisionnement.

Dans un premier temps, nous nous intéressons aux produits à durées courtes (2 ans). Le produit 1 présente une sinistralité élevée et des primes élevées. Cependant, les provisions techniques sont importantes en raison de l'effet volume induit par les primes acquises et le niveau de sinistralité présenté dans le tableau 3.3. Ces caractéristiques conduisent au même montant de capital alloué avec la méthode actuelle pour le risque de Primes et le risque de Réserve.

D'autre part, le produit 2 se distingue par un niveau de primes peu important et une sinistralité élevée avec un Combined Ratio de 102%. De plus, nous observons dans le tableau 3.3 que les provisions techniques sont faibles. Ainsi, la décomposition du risque du produit 2 avec la méthode actuelle met en avant une forte consommation en capital pour le sous-module de risque de Primes.

Par ailleurs, le produit 3 se caractérise par une sinistralité importante avec un Combined Ratio de 111% et un niveau de primes faible. Dans ce cas, nous observons que les provisions techniques sont faibles également en raison de la cadence des règlements des sinistres (2 ans). Cependant, le montant alloué avec la méthode actuelle est plus important pour le risque de Réserve. Nous pouvons l'expliquer par le niveau de sinistralité et la cadence de règlement des sinistres.

Ligne d'activité	Produit	Duration (années)	CoR	Loss Ratio	Primes (M €)	Provisions (M €)
1	1	2	84%	56%	221	196
1	2	2	102%	70%	54	28
1	3	2	111%	87%	13	4
2	4	4	78%	46%	281	393
2	5	4	66%	32%	116	134
2	6	5	68%	41%	19	17
3	7	8	112%	93%	135	1184
4	8	9	89%	48%	22	85
4	9	9	99%	63%	89	385

TABLE 3.3: Caractéristiques des produits

Le produit 4 présente un niveau de primes élevé et des provisions techniques plus importantes en raison de la cadence de règlement des sinistres (4 ans). De plus, ce produit se caractérise par une sinistralité moyenne avec un Combined Ratio de 78%. Nous observons dans le tableau 3.4 que la décomposition du risque avec la méthode actuelle fait apparaître une forte consommation en capital pour le risque de Réserve. Nous pouvons le justifier par la cadence de paiements des sinistres et la sinistralité associée à ce produit.

Ligne d'activité	Produit	SCR Primes	SCR Catas-trophe	SCR Réserves	SCR total
1	1	15	12	15	42
1	2	18	3	1	22
1	3	2	0	9	11
2	4	16	31	57	104
2	5	5	12	18	34
2	6	2	0	19	21
3	7	68	0	170	238
4	8	2	0	9	11
4	9	28	0	46	74

TABLE 3.4: Montant de SCR en M € des produits par sous-module de risque

Le produit 5 se caractérise par une sinistralité moyenne et un niveau de primes important. Dans ce cas, les provisions techniques sont plus élevées que les primes acquises par l'assureur. Nous pouvons le justifier par la cadence de développement des sinistres (4 ans) et la sinistralité importante avec un Combined Ratio proche de 100%. Ainsi, la décomposition du risque avec la méthode actuelle fait apparaître une forte consommation en capital pour le risque de Réserve.

D'autre part, le produit 6 présente une sinistralité moyenne et un niveau de primes peu important. Nous observons que les provisions techniques s'établissent au même niveau que les primes acquises par l'assureur. Cependant, la décomposition du risque avec la méthode actuelle présente une consommation en capital plus élevée pour le risque de Réserve. Nous pouvons l'expliquer par la cadence des paiements des sinistres associée à ce produit (5 ans).

Le produit 7 se distingue par une sinistralité importante avec un Combined Ratio de 112%, et un niveau de primes élevé (135 M €). De plus, la cadence de règlement des sinistres est longue (8 ans), ce qui justifie les provisions techniques importantes pour ce produit. En conséquence, la décomposition du risque avec la méthode actuelle met en avant une forte consommation en capital pour le risque de Réserve. Celle-ci représente près de 71% du SCR total pour ce produit.

Par ailleurs, le produit 8 présente une sinistralité élevée avec un Combined Ratio de 89%. Nous pouvons l'expliquer par les frais de sinistres élevés et le niveau de primes faible acquis par l'assureur. Cependant, la cadence de règlement des sinistres est longue (9 ans). Ainsi, la décomposition du risque avec la méthode actuelle fait apparaître une forte consommation en capital pour le risque de Réserve.

Le produit 9 se distingue également par une cadence de règlement des sinistres longue et une sinistralité importante avec un Combined Ratio de 99%. De plus, nous observons que le niveau de primes de ce produit est élevé. Alors, la décomposition du risque de ce produit se caractérise par une forte consommation en capital pour le risque de Réserve.

Dans cette partie, nous avons présenté la décomposition des risques de Souscription non-vie à la maille ligne d'activité et à la maille produit en s'appuyant sur la méthode actuelle. A présent, nous analysons les indicateurs de rentabilité et de solvabilité à la maille produit, obtenus par les

autres méthodes d'allocation implémentées. En particulier, nous nous intéresserons à l'indicateur de rentabilité *Economic Combined Ratio* (ECoR), car il permet de piloter les produits dans le référentiel risque-rentabilité. Dans la suite, nous verrons comment le changement de méthode d'allocation par rapport à la méthode actuelle peut influencer la prise de décision liée à la gestion des risques et impacter les stratégies de pilotage des produits.

3.3 Mise en œuvre du cadre de gestion des risques

3.3.1 Indicateurs de solvabilité : SCR alloué et RCR (Risk Capital Ratio)

Dans cette section, nous analysons les indicateurs de solvabilité SCR alloué et *Risk Capital Ratio* (RCR) des produits par sous-module de risque (Primes, Catastrophe, Réserve). L'objectif de cette partie est de caractériser l'approche adéquate pour ventiler le capital réglementaire par sous-module de risque, en s'appuyant sur les caractéristiques des produits. D'autre part, nous souhaitons déterminer si les primes acquises par l'assureur contribuent à la consommation en capital. Ainsi, l'indicateur *Risk Capital Ratio* (RCR) nous aiguillera dans l'analyse car il permet de réduire l'effet volume des primes sur les montants alloués. Dans la suite, nous confrontons les résultats de la méthode actuelle avec les autres méthodes d'allocation. Cette approche nous permet d'identifier la méthode qui prend en compte le profil de risque et en particulier les mécanismes de diversification, pour une répartition équitable du capital réglementaire.

Risque de Primes

Nous rappelons que le produit 2 se caractérise par une cadence de règlement courte (2 ans). Ce produit se distingue par un niveau de primes faible (54 M €), une sinistralité élevée avec un Combined Ratio de 102%, et des provisions techniques faibles (28 M €). La décomposition du risque avec la méthode actuelle fait apparaître une consommation en capital plus élevée pour le risque de Primes. Toutefois, les méthodes d'allocation proportionnelle, marginale, et Euler aboutissent au même montant de SCR de Primes, qui est moins élevé qu'avec la méthode actuelle. Nous observons dans le tableau [3.5](#) que la méthode actuelle surestime le risque de Primes par rapport aux autres méthodes. Comme mentionné dans la section 3.1.1, la méthode actuelle ne correspond à aucune approche théorique de la littérature des sciences actuarielles. Ainsi, le montant alloué par les autres méthodes d'allocation reflète une image fidèle du risque pour ce produit.

Produit	Méthode actuelle	Méthode proportionnelle	Méthode marginale	Méthode Euler
1	15	26	27	27
2	18	10	10	10
3	2	2	2	2
4	16	3	3	6
5	5	1	1	2
6	2	0	0	0
7	68	58	61	65
8	2	2	2	5
9	28	32	33	26
SCR agrégé	156	135	138	144

TABLE 3.5: Montants de SCR de Primes alloués aux produits (en M €)

Le produit 6 se distingue par une durée moyenne (5 ans). Ce produit se caractérise par une sinistralité moyenne et un niveau de primes proche des provisions techniques, ils s'établissent respectivement à 19 M € et 17 M €. La décomposition du risque avec la méthode actuelle met en avant une consommation en capital plus élevée pour le risque de Réserve, en raison de la cadence des paiements des sinistres. Par ailleurs, les autres méthodes d'allocations aboutissent à un montant de capital moins important qu'avec la méthode actuelle. Cependant, nous observons que les primes contribuent à l'effet volume. En effet, l'indicateur *Risk Capital Ratio* (RCR) présenté dans le tableau 3.6 est plus important avec la méthode actuelle, il s'établit à 10%. Parallèlement, nous observons que l'indicateur *Risk Capital Ratio* est à 2% avec la méthode d'allocation Euler, et 1% pour les méthodes proportionnelle et marginale. Nous pouvons conclure que la méthode d'allocation actuelle surestime le capital alloué car elle alloue un montant de capital plus important que les autres méthodes d'allocation. Cependant, la méthode d'allocation Euler fait apparaître une image réelle du profil de risque. En effet, la procédure d'allocation de la méthode d'allocation d'Euler est cohérente, de plus elle prend en compte les mécanismes de diversification de manière continue.

Produit	Méthode actuelle	Méthode proportionnelle	Méthode marginale	Méthode Euler
1	7%	12%	12%	12%
2	33%	19%	18%	19%
3	17%	17%	17%	17%
4	6%	1%	1%	2%
5	4%	1%	1%	1%
6	10%	1%	1%	2%
7	50%	43%	45%	48%
8	10%	8%	7%	22%
9	31%	36%	37%	29%

TABLE 3.6: RCR de Primes des produits

D'autre part, le produit 7 se distingue par une cadence de règlement des sinistres longue (8 ans), expliquant les provisions techniques importantes (1184 M €). De plus, ce produit se caractérise par une sinistralité importante avec un Combined Ratio de 112%, et un niveau de primes élevé (135 M €). La décomposition du risque avec la méthode actuelle met en avant une forte consommation en capital pour le risque de Réserve, qui représente 71% du SCR total. Nous observons dans le tableau 3.5 que le montant alloué par la méthode d'allocation proportionnelle paraît faible. Nous pouvons le justifier par la procédure d'allocation de la méthode proportionnelle qui est "univariée" car elle ne prend pas en compte les corrélations avec les autres produits. Cependant, la méthode d'Euler diminue le SCR de Primes pour ce produit (-3 M €), car cette méthode prend en compte les risques sous-jacents et les mécanismes de diversification de manière continue. Ainsi, le montant alloué semble représenter le risque de ce produit.

En conclusion, l'allocation du capital avec la méthode d'Euler semble cohérente avec le risque de Primes des produits. Alors, il nous paraît judicieux de répartir la part du capital réglementaire associée à ce risque en s'appuyant sur la méthode d'allocation d'Euler. A présent, nous analysons l'allocation du capital pour le risque de Catastrophe obtenue à l'aide des autres méthodes d'allocation implémentées, afin d'identifier la méthode adéquate qui ventile le capital réglementaire de manière équitable.

Risque de Catastrophe

Le produit 1 présente une sinistralité importante avec un Combined Ratio qui s'établit à 84% et des primes élevées (221 M €). Les provisions techniques sont importantes (196 M €) en raison de la sinistralité de ce produit. La méthode actuelle alloue le même montant de capital pour le risque de Primes et le risque de Réserve. Cependant, nous observons dans le tableau 3.7 que les autres méthodes d'allocations augmentent la consommation en capital associée au risque de Catastrophe. Nous pouvons en déduire que la méthode d'allocation actuelle sous-estime les risques sous-jacents aux garanties Catastrophe pour ce produit.

Produit	Méthode actuelle	Méthode proportionnelle	Méthode marginale	Méthode Euler
1	12	15	15	15
2	3	2	2	2
3	0	0	0	0
4	31	38	40	27
5	12	10	11	13
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	0	0	0	0
SCR agrégé	57	65	69	58

TABLE 3.7: Montants de SCR de Catastrophe alloués aux produits (en M €)

Le produit 4 se distingue par un niveau de primes élevé (281 M €) et des provisions techniques plus importantes (393 M €) en raison de la cadence de règlement des sinistres (4 ans). De plus, ce

produit se caractérise par une sinistralité moyenne avec un Combined Ratio de 78%. La méthode actuelle fait apparaître une forte consommation en capital pour le risque de Réserve. Nous observons que les méthodes d'allocation marginale et proportionnelle surestiment la consommation en capital associée au risque de Catastrophe. Cependant, la méthode marginale sous-estime le bénéfice de diversification pour les segments peu important de la ligne d'activité. En effet, la procédure d'allocation de la méthode marginale repose sur la différence des mesures de risques de manière à quantifier l'apport du produit sur le risque global. Nous invitons le lecteur à se référer à la section 2.2.3 pour plus de détails sur l'approche théorique de cette méthode. De plus, l'indicateur *Risk Capital Ratio* (RCR) présenté dans le tableau 3.8 met en avant l'effet volume induit par les primes. Toutefois, la méthode d'allocation Euler diminue la consommation du capital pour ce produit, car elle prend en compte les risques sous-jacents et les mécanismes de corrélations de manière continue. Nous pouvons conclure que cette méthode est optimale pour ce produit.

Produit	Méthode actuelle	Méthode proportionnelle	Méthode marginale	Méthode Euler
1	5%	7%	7%	7%
2	5%	4%	3%	5%
3	0%	0%	0%	0%
4	11%	14%	14%	10%
5	10%	9%	10%	12%
6	0%	0%	0%	0%
7	0%	0%	0%	0%
8	0%	0%	0%	0%
9	0%	0%	0%	0%

TABLE 3.8: RCR de Catastrophe des produits

Par ailleurs, le produit 5 se caractérise par une sinistralité moyenne et un niveau de primes élevé (116 M €). De plus, les provisions techniques sont importantes (134 M €) en raison de la cadence de développement des sinistres (4 ans) et la sinistralité de ce produit. Nous avons constaté dans la section 3.2.2 que la consommation en capital est élevée pour le risque de Réserve avec la méthode actuelle. La comparaison des méthodes d'allocation fait apparaître que la méthode actuelle surestime le SCR de Catastrophe par rapport aux méthodes proportionnelle et marginale. Nous pouvons l'expliquer par la procédure d'allocation de la méthode actuelle qui repose sur aucune approche théorique de la littérature des sciences actuarielles. Cependant, la méthode d'Euler est cohérente, et elle prend en compte les mécanismes de corrélations de manière continue. Nous pouvons observer dans le tableau 3.8 que l'indicateur RCR est plus élevé avec cette méthode. La méthode d'allocation d'Euler fournit une image réelle du profil de risque, car elle fait apparaître le risque intrinsèque aux garanties Catastrophe de ce produit. Ainsi, nous aboutissons à une représentation fidèle avec la méthode d'Euler.

Pour conclure, l'allocation du capital avec la méthode d'allocation d'Euler semble cohérente avec le risque assuré des produits, et elle fournit une image réelle des risques sous-jacents aux produits. Nous pouvons répartir la part du capital réglementaire associée au risque de Catastrophe à l'aide de la méthode d'Euler.

Risque de Réserve

A présent, nous analysons l'allocation du capital réglementaire pour le risque de Réserve avec les autres méthodes. Cette approche nous permettra d'identifier la procédure d'allocation adéquate pour répartir le capital réglementaire associé à ce sous-module de risque.

Le produit 3 se caractérise par un niveau de primes faible (13 M €), une sinistralité importante avec une Combined Ratio de 111%, et des provisions techniques faibles (4 M €). La décomposition du risque avec la méthode actuelle fait apparaître une forte consommation en capital pour le risque de Réserve qui s'explique par le niveau de sinistralité et la cadence de développement des sinistres. Cependant, nous observons dans le tableau 3.9 que l'ensemble des méthodes d'allocation conduisent à la même consommation en capital pour ce produit.

Produit	Méthode actuelle	Méthode proportionnelle	Méthode marginale	Méthode Euler
1	15	12	15	15
2	1	4	1	1
3	9	9	9	9
4	57	57	56	56
5	18	18	18	18
6	19	13	19	19
7	170	178	171	171
8	9	11	9	9
9	46	50	46	46
SCR agrégé	345	353	344	344

TABLE 3.9: Montants de SCR de Réserve alloués aux produits (en M €)

D'autre part, le produit 8 présente une sinistralité élevée avec un Combined Ratio de 89%, un niveau de primes faible (22 M €), et des provisions techniques importantes (85 M €). Ces dernières sont élevées en raison de la cadence de règlement des sinistres longue (9 ans). La décomposition du risque avec la méthode actuelle fait apparaître une forte consommation en capital pour le risque de Réserve. Nous observons dans le tableau 3.9 que les méthodes d'allocation actuelle, marginale et Euler allouent le même montant de capital réglementaire au titre du risque de Réserve. Cependant, nous aboutissons à un montant de capital plus élevé avec la méthode proportionnelle. Nous pouvons le justifier par le fait que la procédure d'allocation de la méthode proportionnelle néglige les corrélations avec les autres produits. D'autre part, la différence des montants alloués entre les méthodes actuelle et proportionnelle (2 M €) se justifie par le choix de la mesure de risque. Nous invitons le lecteur à se référer à la section 3.1.1 pour plus d'informations sur la procédure d'allocation de la méthode actuelle. Toutefois, l'indicateur *Risk Capital Ratio* (RCR) permet de retirer l'effet volume induit par les primes acquises. Nous observons dans le tableau 3.10 un écart de 1% entre la méthode actuelle et la méthode proportionnelle.

Produit	Méthode actuelle	Méthode proportionnelle	Méthode marginale	Méthode Euler
1	8%	6%	8%	8%
2	3%	13%	3%	3%
3	233%	234%	234%	234%
4	15%	15%	14%	14%
5	14%	14%	14%	14%
6	110%	77%	109%	108%
7	14%	15%	14%	14%
8	11%	12%	11%	11%
9	12%	13%	12%	12%

TABLE 3.10: RCR de Réserve des produits

Le produit 9 se distingue également par une cadence de règlement des sinistres longue mais un niveau de primes plus élevé (89 M €). De plus, ce produit se caractérise par une sinistralité importante avec un Combined Ratio de 99%. La décomposition du risque avec la méthode actuelle fait apparaître une forte consommation en capital pour le risque de Réserve. L'allocation du capital avec les méthodes marginale et d'Euler allouent le même montant que la méthode actuelle. Dans ce cas, la méthode proportionnelle est décalée par rapport aux autres méthodes d'allocation du capital réglementaire. Cependant, la méthode d'Euler apparaît cohérente avec le profil de risque et elle prend en compte les corrélations de manière continue. Ainsi, la méthode d'Euler fournit une représentation fidèle du risque assuré.

En conclusion, la méthode d'allocation d'Euler fournit une image effective du profil de risque des produits par rapport aux autres méthodes. Ainsi nous pouvons répartir la part du capital réglementaire associée au risque de Réserve à l'aide de la méthode d'Euler.

3.3.2 Indicateurs de rentabilité : ECoR (Economic Combined Ratio) et RoRC (Return on Risk Capital)

Dans la section précédente, nous avons analysé les montants alloués par les différentes méthodes d'allocation du capital par sous-module de risque. Cette approche nous a permis de choisir la procédure d'allocation adéquate par sous-module de risque, afin de répartir le capital réglementaire à la maille produit. A présent, nous nous intéressons aux indicateurs de rentabilité afin de présenter les marges réalisées avec chacune des méthodes d'allocation et l'impact du changement de la méthode d'allocation, sur la prise de décision et la gestion des risques. Dans la suite, nous nous concentrons sur deux indicateurs de rentabilité, les indicateurs *Economic Combined Ratio* (ECoR) et *Return on Risk Capital* (RoRC).

Nous rappelons que l'indicateur de rentabilité *Return on Risk Capital* (RoRC) permet de mesurer la rentabilité du capital immobilisé, par conséquent il varie en fonction de la méthode d'allocation choisie. D'autre part, nous nous intéressons à l'indicateur de rentabilité *Economic Combined Ratio* (ECoR) car il permet de situer les produits dans un référentiel risque-rentabilité. Autrement dit, cet indicateur tient compte des deux dimensions : capital immobilisé et marge réalisée. En effet, l'indicateur *Economic Combined Ratio* (ECoR) correspond à un ajustement du Combined Ratio par un facteur d'escompte financier et un facteur représentant le coût en capital. Cette approche consiste

à faire correspondre au niveau de risque associé à chaque produit un réel qui représente le couple risque-rentabilité. Ainsi, l'introduction de cet indicateur *Economic Combined Ratio* (ECoR) facilite la gestion des risques et le pilotage de la rentabilité des produits. Toutefois, nous nous concentrons sur l'impact du changement de la méthode d'allocation, car le choix de celle-ci peut se répercuter sur la rentabilité des produits et influencer la prise de décision. Après avoir exposé cette analyse, nous évaluons les incidences sur la prise de décision et le pilotage des produits.

Le produit 5 se caractérise par une sinistralité moyenne et un niveau de primes élevé. Les provisions techniques de ce produit sont élevées en raison de la cadence de règlement des sinistres. L'allocation du capital à l'aide des méthodes actuelle et marginale conduisent au même niveau de rentabilité, tandis que la méthode proportionnelle surestime la rentabilité du produit. Cependant, la méthode d'allocation proportionnelle néglige les corrélations entre les produits. D'autre part, l'analyse des montants alloués nous a conduit à retenir la méthode d'allocation d'Euler car elle fournit une représentation fidèle des risques de Souscription non-vie. Nous rappelons que cette méthode est une méthode d'allocation cohérente, par conséquent elle prend en compte les risques sous-jacents et les mécanismes de corrélation de manière continue. Ainsi, la rentabilité estimée par la méthode d'Euler est prudente mais elle correspond au risque assuré. Par ailleurs, l'impact du changement de la méthode d'allocation est négligeable car l'écart entre les indicateurs de rentabilité *Economic Combined Ratio* (ECoR) et *Return on Risk Capital* (RoRC) obtenues par les méthodes actuelle et Euler est faible. Nous observons dans le tableau 3.11 que l'écart est de 1% pour l'indicateur *Economic Combined Ratio* (ECoR) et il correspond à 2% pour l'indicateur *Return on Risk Capital* (RoRC) dans le tableau 3.12. Ainsi, le passage de la méthode actuelle à la méthode d'Euler ne présente pas d'effet impactant les stratégies de pilotage et la gestion des risques de ce produit.

Produit	Méthode actuelle	Méthode proportionnelle	Méthode marginale	Méthode Euler)
1	193%	193%	193%	193%
2	131%	130%	129%	130%
3	137%	137%	138%	137%
4	115%	114%	113%	114%
5	114%	112%	114%	113%
6	236%	236%	236%	236%
7	240%	239%	239%	239%
8	178%	178%	178%	178%
9	205%	208%	207%	207%

TABLE 3.11: Résultats de l'indicateur ECoR (Economic Combined Ratio)

D'autre part, nous observons dans le tableau 3.11 que le passage de la méthode d'allocation actuelle à la méthode d'Euler entraîne une diminution de 1% de l'indicateur de rentabilité *Economic Combined Ratio* (ECoR) pour les produits 2, 4, 7 et 9. Cependant, l'indicateur de rentabilité *Return on Risk Capital* (RoRC) est inchangé. En conséquence, l'écart entre les montants alloués par ces deux méthodes n'a pas d'effet car l'impact du changement de la méthode d'allocation dégrade très peu la rentabilité et n'influe pas sur la stratégie de pilotage de ces produits.

Produit	Méthode actuelle	Méthode proportionnelle	Méthode marginale	Méthode Euler
1	73%	71%	73%	73%
2	67%	73%	67%	67%
3	99%	96%	98%	98%
4	75%	74%	75%	75%
5	162%	130%	161%	160%
6	71%	81%	71%	71%
7	88%	88%	88%	88%
8	83%	83%	83%	83%
9	73%	100%	73%	73%

TABLE 3.12: Résultats de l'indicateur RoRC (Return on Risk Capital)

Les indicateurs de rentabilité *Economic Combined Ratio* (ECoR) et *Return on Risk Capital* (RoRC) sont identiques avec les méthodes d'allocations actuelle et Euler pour les produits 1, 6 et 8. En conséquence, le choix de la méthode d'allocation d'Euler n'a pas d'impact sur la stratégie déployée pour ces produits. Ainsi, le changement de la méthode d'allocation n'influe pas sur le pilotage de ces produits et la gestion des risques.

Dans la section suivante, nous nous intéressons à l'évaluation des sensibilités à la maille produit en s'appuyant sur le cadre de la gestion des risques développé ici. L'objectif est d'évaluer l'impact sur la consommation en capital en s'appuyant sur des scénarios de stress-test et de sensibilités reflétant la crise sanitaire, en lien avec les recommandations de l'EIOPA dans EIOPA (2021).

Chapitre 4

Évaluation des sensibilités et contexte de la crise sanitaire Covid-19

L'évaluation des sensibilités sert à prédire les conséquences économiques pour l'assureur afin d'anticiper les situations pouvant compromettre la pérennité de son activité. Le chapitre précédent décrit l'application numérique dans un cadre d'analyse défini par l'allocation en capital et les indicateurs de solvabilité et de rentabilité, afin d'améliorer la gestion des risques et le pilotage des produits. Ici, nous nous concentrons sur l'évaluation des sensibilités, afin d'évaluer l'impact d'un événement particulier comme la crise sanitaire de la Covid-19 sur la consommation en capital des produits. Nous nous appuyons sur des scénarios de stress-test et de sensibilités reflétant l'impact de la crise sanitaire en lien avec les recommandations EIOPA (2021). Toutefois, cette démarche peut être transposée pour évaluer les effets du changement climatique tels que les tempêtes de vent, les inondations et la sécheresse.

Dans un premier temps, nous présentons une analyse des impacts de la crise sanitaire sur l'assurance dommage et de responsabilité. Dans la suite, nous identifions les facteurs de chocs pour évaluer les sensibilités. L'analyse que nous développons ci-après s'appuie sur les impacts constatés depuis le début de la crise sanitaire, soit un peu plus d'un an et demi après les premières restrictions annoncées par les différents gouvernements. L'objectif sera de tirer les enseignements pertinents concernant les effets économiques liés à la rentabilité et la solvabilité de l'assureur. Après l'analyse des sensibilités réalisées, nous présentons les stratégies de remédiations (*Management Actions*) pouvant être déployer lors d'un événement comparable à la crise sanitaire de la Covid-19.

4.1 Impacts de la crise sanitaire dans le processus ORSA

Le contexte économique au début de l'année 2020 a été marqué par des bons indicateurs économiques et des conditions financières favorables. Toutefois la situation s'est peu à peu dégradée lorsque la pandémie de la Covid-19 a entraîné des fermetures généralisées dans le monde entier (confinement, chômage partiel, restrictions de déplacement...). Ces mesures ont causé d'importantes perturbations dans plusieurs secteurs dont le tourisme, l'hôtellerie, et le secteur manufacturier avec des chaînes d'approvisionnement interrompues. Pour faire face à cette récession, les gouvernements ont mis en place des plans de relance budgétaire sans précédent pour soutenir les entreprises et les ménages touchés par cette crise. La plupart des économies ont atteint un point bas en avril 2020 avant de rebondir progressivement après la levée des mesures de confinement. En revanche, la reprise économique s'est à nouveau inversée en Europe à partir de l'automne lorsque les gouvernements ont dû réagir face à la

hausse des contaminations en réinstaurant des confinements. Depuis la découverte des vaccins contre la Covid-19, la situation économique continue de s'améliorer avec la levée progressive des mesures de confinement au deuxième trimestre de l'année 2021. Pour une analyse plus complète sur l'impact de la crise sanitaire Covid-19 nous invitons le lecteur à se référer à l'article ARGUS (03/05/2020).

L'activité d'assurance est le confluent de trois éléments : le droit (garanties incluses dans le contrat), les sciences actuarielles (tarification et provisionnement) et l'environnement économique. L'évolution de la situation économique n'a pas épargné le secteur de l'assurance marqué par des incidences sur la solvabilité et la rentabilité des organismes assurantiels. Depuis le début de l'année 2020, l'activité a été impactée par cette pandémie sous l'effet de nombreux facteurs. La sinistralité a connu un effet ciseau entre la baisse des fréquences notamment en assurance automobile, et l'augmentation des indemnisations au titre de la garantie Pertes d'Exploitation. Ces effets déforment le profil de risque de l'assureur, et se répercutent sur l'exigence de solvabilité qu'il doit respecter. Les garanties qui concernent les pertes pécuniaires ont été fortement impactées : c'est le cas des pertes d'exploitation. En effet, les contrats d'assurance dédiés aux particuliers et aux entreprises incluent une indemnisation en cas d'impossibilité d'exercer les activités professionnelles si elles sont non consécutives à la survenance d'un sinistre. De plus, les autres branches d'assurance directement liées à l'activité des entreprises comme l'assurance des loyers impayés ou l'assurance voyage ont vu leurs sinistralités rebondir de manière imprévisible. Il convient de souligner que les montants d'indemnisation pour les professionnels et les entreprises s'élèvent à plusieurs millions d'euros ce qui résorbe le bénéfice inattendu sur les contrats particuliers, engendré par la baisse de la fréquence des sinistres.

En outre, la dégradation de la situation financière des assurés par l'impact de la crise sanitaire s'est répercutée sur les affaires nouvelles, les résiliations et le nombre d'impayés de primes d'assurance entraînant une réduction des flux entrants pour l'organisme d'assurance. Les effets de la crise sanitaire en assurance non-vie peuvent être résumés en deux temps. D'une part, nous observons que les conséquences économiques ont diminué de manière imprévisible le niveau du chiffre d'affaires des compagnies d'assurance non-vie. D'autre part, nous avons constaté que l'évolution de la sinistralité pour les produits Auto et les produits qui incluent la garantie Pertes d'Exploitation ont déformé le profil de risque des organismes assurantiels.

Ce bilan donne une vue d'ensemble des conséquences économiques en matière de solvabilité et de rentabilité de la crise sanitaire sur l'assurance non-vie. Désormais, il faut inclure ces conditions économiques dans l'approche de modélisation des risques pour en déduire les impacts en matière de consommation de capital et de rentabilité des produits étudiés. C'est en ce sens que l'EIOPA a émis des recommandations dans « Consultation paper on the Supervisory Statement on ORSA in the context of COVID-19 » dans EIOPA (2021). La crise de la Covid-19 peut être considérée comme un nouveau risque. Il faut pouvoir identifier et quantifier les impacts dans le but d'améliorer la gestion des risques. Ainsi, l'EIOPA a exigé des assureurs d'évaluer les effets économiques de la crise de la Covid-19 dans l'ORSA par des scénarios stress-test et de sensibilités. L'analyse faite précédemment nous permet de retenir la sinistralité et le chiffre d'affaires comme facteurs de chocs pour évaluer les sensibilités en lien avec les recommandations de l'EIOPA. Notre étude permettra d'identifier les effets sur la consommation en capital à la maille produit en exploitant la méthode d'allocation du capital choisie dans l'approche de la gestion des risques exposée au chapitre 3.

A présent nous nous focalisons sur les impacts de la crise sanitaire de manière prospective pour deux raisons. En premier lieu, la situation épidémique en Europe reste préoccupante avec la montée des nouveaux variants. Cela constitue un réel danger pour les assureurs qui cherchent à préserver leur niveau d'activité et le bilan des impacts de la crise sanitaire. Deuxièmement, l'ampleur de la crise économique a réduit la masse assurable de manière considérable pour deux motifs : la faillite pour certains et la réduction de l'activité pour d'autres. Selon le profil de risque de l'assureur, celui-ci doit estimer la réduction des primes acquises et des capitaux assurés (exposition) pour évaluer les conséquences sur la solvabilité et la rentabilité à l'horizon de son plan stratégique. Dans la partie

suivante, nous présentons la procédure qui nous a permis d'évaluer l'impact des scénarios réalisés sur la consommation en capital à la maille produit.

4.2 Démarche de l'évaluation des sensibilités

Pour répondre aux recommandations de la Consultation Paper EIOPA (2021), les compagnies d'assurance peuvent examiner les effets économiques par rapport à la sinistralité et le chiffre d'affaires. Nous présentons l'approche d'évaluation des sensibilités à la maille produit afin de chiffrer les conséquences en matière de consommation en capital associée au risque de Primes.

Jusqu'à l'approche de gestion des risques proposée dans ce mémoire consiste en l'allocation du capital et la définition des indicateurs de solvabilité et de rentabilité pour piloter les produits dans le référentiel risque-rentabilité. Dans cette partie, nous souhaitons chiffrer les effets sur la consommation en capital à la maille produit par rapport aux facteurs de chocs. Nous nous intéressons à l'allocation du capital avec la méthode d'Euler afin de quantifier les impacts de la crise sanitaire de la Covid-19 pour deux raisons. En premier lieu, l'analyse des montants alloués et des indicateurs de rentabilité au chapitre 3 nous a conduit à retenir cette méthode d'allocation. De plus, cette méthode d'allocation demeure stable après l'application des chocs de sensibilités.

A partir de la modélisation des risques de Souscription non-vie dans le Modèle Miroir, l'évaluation des sensibilités correspond au choc des paramètres de la modélisation. Formellement, nous avons défini une grille de choc pour chaque facteur étudié puis nous quantifions l'impact sur la consommation en capital des produits étudiés à l'aide de la méthode d'Euler. Avant de présenter notre démarche pas-à-pas, nous schématisons dans la figure 4.1 la procédure d'évaluation des sensibilités à la maille produit dans le Modèle Miroir.

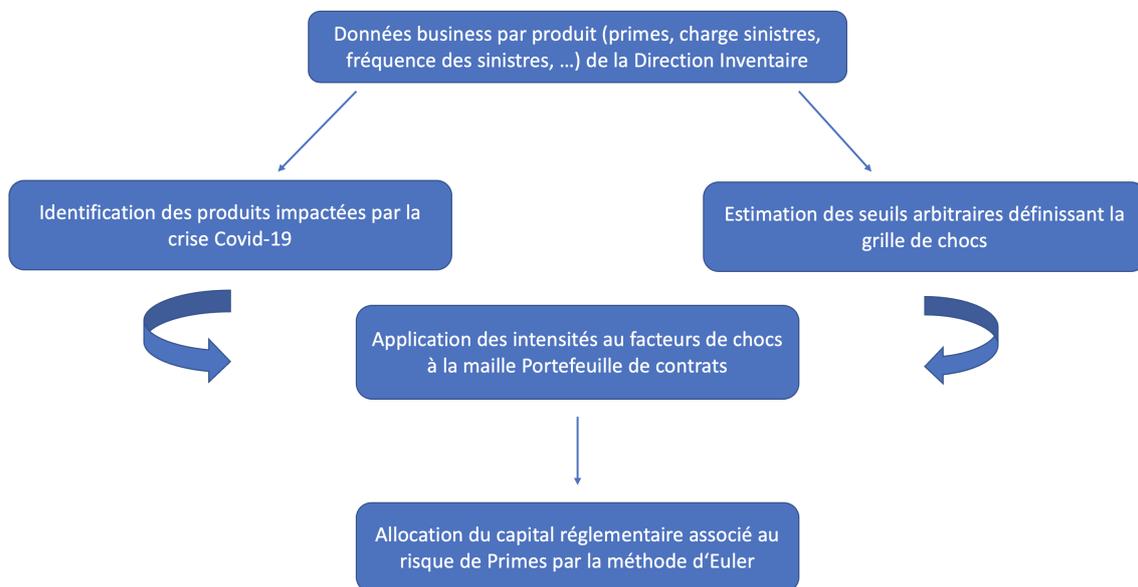


FIGURE 4.1: Procédure d'évaluation des sensibilités à la consommation en capital des produits

L'impact sur la consommation en capital est quantifié par rapport aux facteurs de chocs liés à la sinistralité et au chiffre d'affaires. Les données utilisées correspondent à ceux du Modèle Interne et

notamment le calibrage des distributions de pertes associées aux Portefeuilles de contrats. Cependant, les intensités de chocs réalisées dépendent des montants d'indemnisation et sont définis arbitrairement de manière à ne pas sous-estimer l'impact sur la consommation en capital de la crise sanitaire de la Covid-19. Nous choisissons d'évaluer l'impact sur le risque de Primes de -10% à 10% avec un pas de 1%. A ce stade, nous décrivons la démarche permettant l'évaluation des sensibilités de manière séquentielle, afin de permettre au lecteur de comprendre les principales étapes de celle-ci.

Démarche de l'évaluation des sensibilités :

Données en input : Calibrage des distributions de pertes à la maille Portefeuille de contrat fournit par le Modèle Interne Non-Vie, Mesure d'exposition permettant d'affiner la modélisation à la maille produit, Montants de SCR de Primes des lignes d'activité déterminés par le Modèle Interne Non-Vie.

1. La première étape consiste à identifier les produits pour lesquels nous souhaitons étudier l'impact des chocs réalisés sur leurs consommation en capital. Selon les produits et l'impact constaté durant la crise sanitaire de la Covid-19 nous avons pu réaliser les chocs sur la sinistralité et le niveau des primes (chiffre d'affaires) en s'appuyant sur le calibrage des distributions de pertes.
2. L'étape suivante permet de définir la grille de choc que nous souhaitons appliquer en lien avec les impacts constatés.
3. Nous trions les portefeuilles de contrat pour lesquels les produits choisis à l'étape 1 ont une exposition strictement positive. Nous retenons les Portefeuilles de contrat associés aux produits pour lesquels nous souhaitons évaluer l'impact des sensibilités. Cette étape est fondamentale car la modélisation du risque de Primes dans le Modèle Miroir s'appuie sur le calibrage du Modèle Interne Non-Vie qui est réalisé à la maille Portefeuille de contrat.
4. Répéter les étapes suivantes selon le nombre de choc à appliquer.
5. A ce stade, nous appliquons l'intensité du choc aux paramètres de la distribution des pertes selon le calibrage. Si le modèle retenu est l'approche fréquence-coût moyen on peut par exemple appliquer le choc aux paramètres de la distribution de la sévérité ou à ceux de la distribution de la fréquence.
6. Nous simulons les distributions de pertes à la maille portefeuille de contrat.
7. Nous appliquons la mesure d'exposition pour obtenir les distributions de pertes des produits.
8. Nous calculons les clés d'allocation Euler pour chacun des produits à l'aide de la formule exposée à la section 2.2.4.
9. Nous allouons les montants de SCR de Primes à la maille produit à l'aide des montants de SCR de Primes par ligne d'activité donnés par le Modèle Interne Non-Vie et les clés d'allocation

calculées précédemment.

10. Nous obtenons les montants de SCR de Primes des produits choqués pour chacun des niveaux de chocs définis par la grille.

Remarque 12 (Sinistres liés à la crise Covid-19) Les montants alloués sont les SCR de Primes par ligne d'activité car les sinistres déclarés pendant la crise sanitaire de la Covid-19 ont été incorporés dans les triangles de développement. En conséquence, le calibrage des Portefeuilles de contrat tient compte de la volatilité induite par les sinistres de cette période.

4.3 Evaluation des sensibilités Covid-19

Dans ce mémoire nous nous concentrons sur deux variables de chocs reflétant l'environnement économique observé. La première variable choquée est la sinistralité et la seconde variable correspond au volume des primes acquises par l'assureur. Pour chaque scénario de la grille de sensibilité, nous évaluons la consommation en capital après avoir appliqué le choc à la distribution du produit à l'étude, de cette façon nous reflétons les effets constatés. Comme nous l'avons mentionné précédemment, l'étape de l'allocation du capital dans l'approche de gestion des risques est la méthode d'allocation d'Euler. Dans cette sous-section, nous analysons les sensibilités réalisées par rapport aux variables d'intérêts.

4.3.1 Sensibilités à la sinistralité

Le premier choc à l'étude est un choc de sinistralité sur les produits impactés de la garantie Pertes d'Exploitation et sur les produits Auto couvrant la garantie Responsabilité Civile. Le but sera de caractériser l'évolution de la consommation en capital des produits durant cette période. Toutefois nous avons pu relever que la sinistralité des produits Auto a baissé pendant que la sinistralité des pertes pécuniaires a augmenté de manière considérable. Nous étudions les impacts constatés par produit afin de refléter l'effet ciseaux de la sinistralité induit par la crise sanitaire de la Covid-19. Nous présentons dans le tableau 4.1 la grille de choc réalisée par produit, car les chocs ne sont pas les mêmes pour tous les produits.

Ligne d'activité	Produit	Intensité de choc sur la fréquence des sinistres
2	10	0% à 10%
2	11	0% à 10%
3	12	-10% à 0%
3	13	-10% à 0%

TABLE 4.1: Récapitulatif des scénarios de sensibilité à la sinistralité par produit

En s'appuyant sur les scénarios proposés, nous parvenons à caractériser les impacts en matière de consommation en capital sur les produits étudiés. Les sensibilités réalisées pour les produits Auto correspondent à une baisse de la sinistralité. Naturellement, nous observons une diminution de la consommation en capital des produits d'autant plus forte que la sinistralité est faible. Cependant, pour un même niveau de choc l'impact sur le SCR de Primes est différent pour les deux produits. Nous décrivons dans la figure 4.2 l'évolution du SCR de Primes de ces produits en fonction de l'intensité du choc sur la sinistralité.

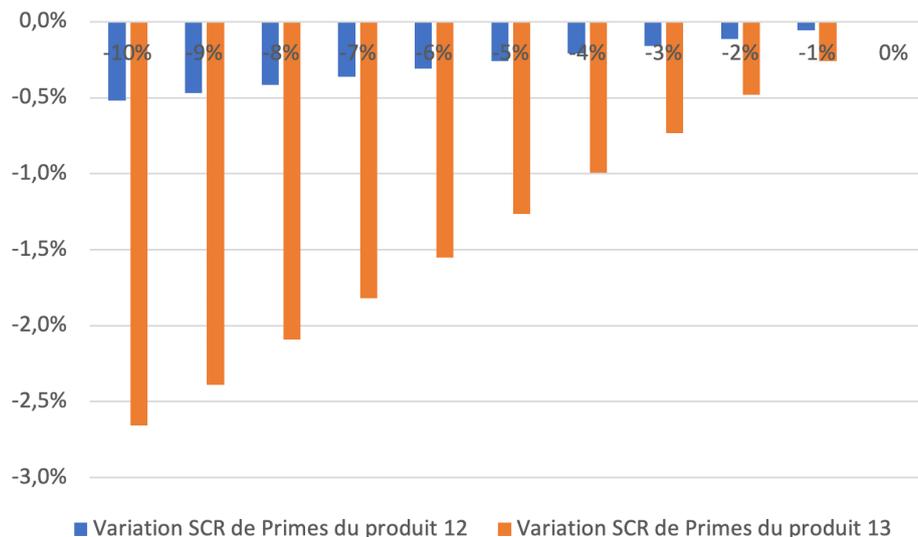


FIGURE 4.2: Variation du SCR de Primes par rapport à la sinistralité des produits de la ligne d'activité 3

Les niveaux de corrélations entre les Portefeuilles de contrats associés au produit 13 étant élevés (environ 50%), l'impact sur la consommation en capital est moins important. A l'inverse, les Portefeuilles de contrats associés au produit 12 bénéficient d'un niveau faible de diversification, l'impact du choc se répercute davantage sur la consommation en capital du produit. Au niveau global, nous pouvons observer une baisse de la consommation en capital pour la ligne d'activité 3.

A présent, nous évaluons les sensibilités par rapport à la sinistralité pour les produits contenant la garantie Pertes d'exploitation que sont les produits 10 et 11.

La figure 4.3 décrit l'évolution de la consommation en capital associée au sous-module de risque de Primes par rapport au scénario central pour les produits couvrant cette garantie. La hausse de la sinistralité entraîne une augmentation du risque et de la consommation en capital.

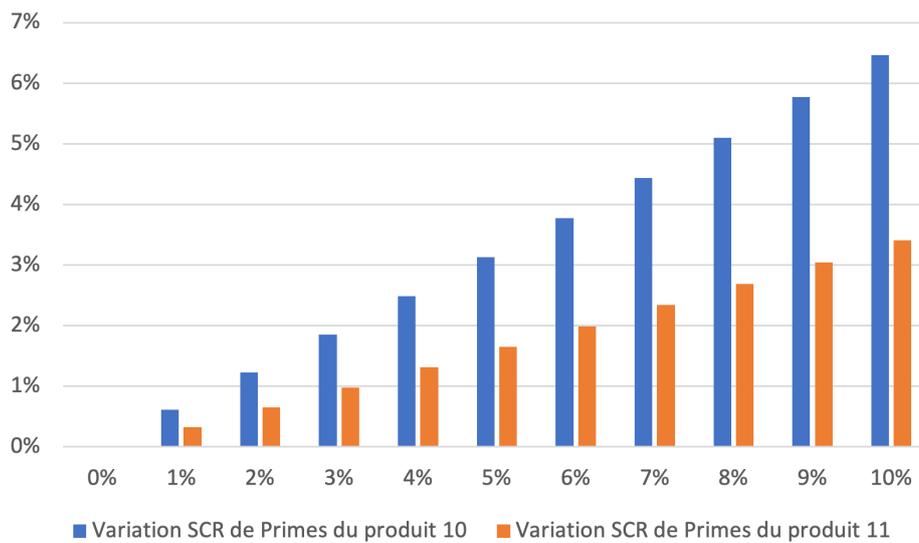


FIGURE 4.3: Variation du SCR de Primes par rapport à la sinistralité des produits de la ligne d'activité 2

Néanmoins, l'exposition de la garantie Pertes d'exploitation est spécifique à chacun de ces produits : 70% pour le produit 10 et 30% pour le produit 11. Ainsi, nous observons des variations du SCR de Primes propre à chaque produit. La consommation en capital de la ligne d'activité 2 a augmenté en raison de l'impact sur la sinistralité. Nous pouvons en déduire que les impacts sur la consommation en capital sont différents d'un produit à l'autre, et nous pouvons l'expliquer par l'exposition des produits à la garantie Pertes d'exploitation.

4.3.2 Sensibilités au chiffre d'affaires

Le but de cette sous-section est d'étudier les impacts sur la consommation en capital des scénarios décrivant une baisse du chiffre d'affaires. La déformation du profil de risque s'explique principalement par l'impact sur les affaires nouvelles, la hausse des résiliations et des impayés. Nous allons évaluer les sensibilités par rapport au chiffre d'affaires sur les branches listées dans le tableau 4.2.

Ligne d'activité	Produit	Intensité de choc sur le chiffre d'affaires
4	14	-10% à 0%
4	15	-10% à 0%
4	16	-10% à 0%
4	17	-10% à 0%

TABLE 4.2: Récapitulatif des scénarios de sensibilité au chiffre d'affaires par produit

Nous décrivons dans la figure 4.4 l'impact des sensibilités réalisées par produit sur le SCR de Primes. L'étude des sensibilités par rapport au chiffre d'affaires nécessite une analyse multivariée car l'aug-

mentation des primes acquises par l'assureur peut se traduire par deux effets économiques différents. Lorsque le niveau de primes acquises d'un produit s'abaisse, cela entraîne une diminution du risque sous-jacent au produit. Or, la distribution des pertes dépend du niveau de primes acquises, elle sera translatée à droite de manière à augmenter le capital réglementaire.

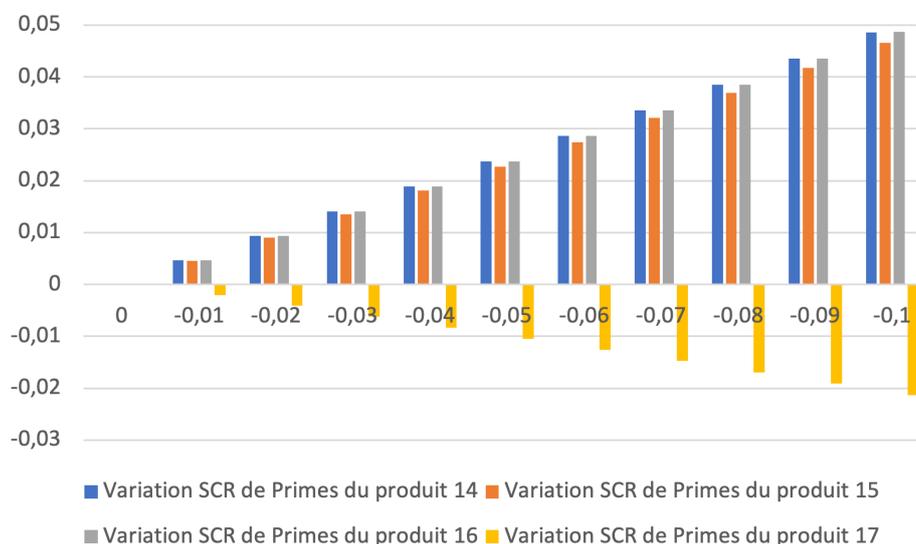


FIGURE 4.4: Variation du SCR de Primes par rapport au chiffre d'affaires

Selon l'intensité des facteurs, ces effets opposés peuvent entraîner une augmentation ou une diminution de la consommation en capital. Nous observons que l'effet sur les distributions des pertes permet de contrecarrer l'impact sur le profil de risque pour les produits 14, 15 et 16. En revanche, l'impact de la baisse du chiffre d'affaires sur le produit 17 se traduit par une diminution du SCR de Primes. Cette analyse montre que l'effet sur la consommation en capital peut varier en fonction des produits et des risques sous-jacents. Dans ce cas l'impact des sensibilités par rapport au chiffre d'affaires diminuent la consommation en capital au niveau global de la ligne d'activité 5.

En conclusion, les évaluations ci-dessus permettent de chiffrer l'impact des sensibilités liées à la sinistralité et au chiffre d'affaires sur la consommation en capital des produits étudiés. Nous pouvons retenir que les sensibilités par rapport au chiffre d'affaires conduisent à une diminution de la consommation en capital (-0,6%) de la ligne d'activité 4. Parallèlement, les sensibilités liées à la sinistralité induisent une augmentation du SCR de Primes (3,2%) de la ligne d'activité 2. Toutefois, la consommation en capital de la ligne d'activité 3 diminue de 2,3%.

L'étape suivante consiste à proposer des actions permettant de retrouver le niveau d'appétence aux risques de l'organisme assurantiel et atteindre les objectifs stratégiques. Les actions dites de remédiations sont des leviers à la disposition de l'assureur pour contrecarrer les tendances constatées dans le marché. Dans la sous-section suivante, nous présentons les différentes stratégies développées visant à maîtriser les risques.

4.4 Management Actions

Les hypothèses du choc que nous avons réalisé dans cette partie s'appuient sur des études quantitatives et qualitatives faites dans le cadre de l'exercice ORSA sur les impacts "réels et observés" de la crise sanitaire sur la sinistralité et le chiffre d'affaires par produit collectés auprès d'autres services. Ensuite nous avons analysé ces chocs à travers l'étude des sensibilités présentés dans la section précédente en définissant des intervalles et un pas précis permettant de quantifier les conséquences en matière de consommation en capital, afin d'estimer correctement les effets de la crise sanitaire de la Covid-19.

Le niveau d'appétence aux risques d'un organisme assurantiel traduit le niveau agrégé de risque qu'il juge acceptable à l'horizon d'un an pour atteindre les objectifs stratégiques. L'organisme définit une plage de fluctuations autour de l'appétence et des seuils par indicateur à ne pas dépasser. Le franchissement des seuils préétablis signifie que l'organisme opère au-delà de son appétence aux risques et des mesures correctives (plans de remédiation) doivent être prises rapidement afin de revenir à un niveau confortable de solvabilité.

La liaison entre la rentabilité et les seuils des indicateurs s'inscrit dans la continuité de la gestion des risques. Après l'analyse des résultats, la gestion des risques peut identifier les bonnes stratégies de pilotage, en tenant compte des indicateurs et de la politique commerciale de l'organisme. Ce choix soulève la question de l'équilibre entre la rentabilité et la solvabilité. Les actionnaires souhaitent une juste rémunération de leur investissement tandis que l'assureur se soucie de la solvabilité de l'organisme assurantiel. Ces deux objectifs étant peu compatibles, la gestion des risques s'appuie sur l'évaluation des sensibilités et les impacts sur la consommation en capital afin d'élaborer des stratégies de recommandations (*Management Actions*). Ces recommandations sont des stratégies visant à améliorer la position de solvabilité et protéger l'équilibre avec la rentabilité. Elles peuvent correspondre à des mesures tel que le changement des prédictions sur le chiffre d'affaires de certains produits. Dans cet exemple, l'équilibre entre le rendement et la solvabilité s'opère à travers les interactions entre le chiffre d'affaires et le risque assuré par l'organisme.

A présent, nous nous concentrons sur l'exemple d'un produit pour lequel l'indicateur RoRC (Return on Risk Capital) reste faible avec la méthode d'allocation d'Euler dans le scénario central. Une mesure corrective adaptée pour améliorer la rentabilité de ce produit peut consister à encourager la hausse du résultat opérationnel en augmentant le niveau de primes acquises. Nous pouvons fixer le seuil minimal cible pour l'indicateur RoRC du produit et estimer l'augmentation de primes nécessaire.

Comme nous l'avons mentionné, la gestion des risques évalue les sensibilités pour élaborer des plans de remédiation. Parmi les mesures pertinentes qui peuvent être recommandées par la gestion des risques, nous distinguons :

- la revue des stratégies de couverture ;
- la titrisation ;
- l'achat de réassurance ;
- la suspension des versements de dividendes ;
- l'émission de dettes subordonnées ;
- l'augmentation de capital ;

Par ailleurs, la mise en place des mesures correctives nécessite une fois de plus l'étude des conséquences de chacune d'entre-elles en matière de solvabilité et de rentabilité pour l'assureur. Les mesures choisies

doivent pouvoir rétablir la situation économique de l'organisme assurantiel avant la déformation du profil de risque. Cependant, les conditions initiales de la modélisation doivent refléter l'environnement stressé en s'appuyant sur l'impact des sensibilités réalisées. Dans le cas de la crise sanitaire Covid-19, l'exercice est plus complexe à mettre en œuvre pour deux raisons. Tout d'abord, cela nécessite d'avoir un recul par rapport à cette situation inédite et faire l'état des lieux de manière complète pour inclure ces aspects dans la modélisation des risques à l'horizon du plan stratégique. De plus, les différents leviers proposés par la gestion des risques ne sont pas forcément des paramètres de modélisation pouvant être modifiés afin de quantifier leurs conséquences. Lorsque ces conditions peuvent être réunies la démarche à suivre est la suivante. Dans un premier temps, les organismes assurantiels peuvent évaluer l'impact des sensibilités de manière prospective, à l'aide de la démarche vu précédemment. L'étape suivante consiste à proposer judicieusement des plans de remédiation puis d'examiner leurs conséquences en partant des conditions initiales établies avec l'évaluation des sensibilités. Après avoir identifié les mesures correctives nécessaires, la gestion des risques peut alors proposer les bonnes stratégies à adopter pour revenir au niveau de rentabilité et de solvabilité prévue par le plan stratégique.

En synthèse, l'approche présentée dans ce mémoire a permis d'identifier les limites de la méthode d'allocation actuelle à travers l'implémentation des différentes méthodes d'allocation. L'analyse des montants alloués et les propriétés d'adéquation nous amènent à retenir la méthode d'allocation d'Euler afin de fournir des critères adaptés pour la prise de décision. Nous avons introduit des indicateurs pertinents et fiables pour piloter les produits dans un référentiel risque-rentabilité. Au-delà de l'indicateur classique *Combined Ratio* (CoR), nous avons définis l'indicateur *Economic Combined Ratio* (ECoR) qui permet d'inclure la dimension risque. D'autre part, le développement des stratégies de remédiation met en lumière certains limites des Management Actions. En effet, l'évaluation de la consommation en capital des produits permet d'analyser les risques supportés par l'organisme assurantiel. Les conclusions de l'analyse et l'élaboration des Management Actions sont développées à la maille produit. Cependant, cette maille ne correspond pas par exemple à celle de l'allocation stratégique des actifs. Ainsi, nous pouvons conclure que la mise en place des plans de remédiations et l'évaluation de leurs impacts sont conditionnés au choix de la maille de modélisation des risques dans le Modèle Interne.

4.5 Synthèse et limites

Les sensibilités réalisées dans cette section ont permis de chiffrer l'impact sur la consommation en capital associé au risque de Primes des produits impactés par la crise sanitaire Covid-19. Dans cette étude, nous avons retenu les facteurs de chocs liés à la sinistralité et au chiffre d'affaires pour refléter l'environnement constatés durant cette période. L'approche d'allocation retenue pour évaluer ses impacts est la méthode d'Euler pour deux raisons. D'une part, la démarche d'allocation de cette méthode fournit une image fidèle du risque sous-jacent des produits étudiés. D'autre part, cette allocation demeure stable après l'application des chocs aux distributions des pertes à la maille produit.

L'analyse des résultats obtenus permettent d'exposer les différents leviers dont dispose l'assureur pour mettre en place un pilotage efficace à la maille Produit afin de suivre la consommation en capital et pour analyser les produits dans le référentiel risque-rentabilité. Nous pouvons retenir que la stratégie de pilotage dépend du profil de risque des produits et notamment la cadence de paiement des sinistres. Les impacts post-choc sur la consommation en capital au titre du risque de Primes sont hétérogènes et dépendent des caractéristiques des produits. Dans ce sillage, les actions de remédiations (Management Actions) présentés ci-dessus sont des orientations stratégiques ayant pour but de retrouver le niveau de solvabilité initiale, c'est-à-dire à l'environnement avant la crise sanitaire de la Covid-19. Ces orientations peuvent conduire à une prise de risque supplémentaire et l'augmentation du niveau de prime pour compenser les impacts du choc. Nous pouvons également choisir des mesures correctives visant à atténuer le risque à l'aide de stratégie de réassurance plus élaborée. Aussi, cette étude peut intervenir afin de prendre en compte les effets du changement climatique sur les garanties Catastrophes.

Quelques limites et ouvertures sur les travaux futurs sont apparus au travers cette analyse :

- L'étude des impacts du changement climatiques telle que les tempêtes de vent, les inondations et la sécheresse sur la sinistralité des produits permet de chiffrer l'effet sur la consommation en capital. La démarche présentée ici peut être transposée afin d'étudier l'évolution des indicateurs dans le référentiel risque-rentabilité et présenter des actions de remédiations pour concilier les perspectives commerciales de l'organisme assurantiel.
- Le développement des méthodes d'allocations dans le Modèle Miroir concerne uniquement les sous-modules du risque de Souscription non-vie. Il nous semble utile d'étendre l'affinement de la consommation en capital pour les autres sous-modules de risques (risque de Marché, risque de Crédit, ...).
- Enfin, le lancement d'un produit d'assurance non-vie impacte le profil de risque de la compagnie d'assurance, son appétence au risque et le niveau de rentabilité fixée par le plan stratégique. L'étude d'une telle déformation induite par la création d'un nouveau produit n'a pas été traité dans ce mémoire car elle aurait été trop coûteuse en temps mais elle reste un véritable sujet à explorer.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons pu décrire une méthodologie interne de gestion des risques permettant de piloter les produits d'une compagnie d'assurance non-vie. La nouveauté proposée dans ce mémoire est la démarche permettant d'évaluer les sensibilités liées à la sinistralité et au chiffre d'affaires à la maille produit, et le pilotage des produits dans le référentiel risque-rentabilité à l'aide des indicateurs introduits. Notre étude sur les méthodes d'allocation du capital nous amène à retenir la méthode d'allocation d'Euler couplée avec la mesure de risque VaR pour répartir le capital réglementaire. Les indicateurs proposés dans ce mémoire ont pour but d'enrichir ceux déjà suivis par les assureurs en apportant une valeur ajoutée dans l'interprétation et la quantification des risques. D'autre part, ce mémoire fournit une analyse des effets économiques des sensibilités réalisées à la maille produit. L'analyse des impacts de la crise sanitaire a permis de chiffrer les conséquences sur la consommation en capital de l'organisme assurantiel.

Cette approche de gestion des risques peut être abordée en respectant la démarche dont les principales étapes sont : le dispositif réglementaire Solvabilité 2, l'identification des risques (les risques de Primes, de Catastrophe et de Réserve), la modélisation des risques (le Modèle Miroir), et l'affinement des indicateurs pertinents (RCR, ECoR et RoRC).

L'allocation du capital correspond à la répartition du capital réglementaire sur les produits. Les montants alloués tiennent compte des corrélations afin de répartir le bénéfice de diversification. Trois nouvelles méthodes d'allocation ont été implémentées dans le Modèle Miroir :

- la méthode proportionnelle : c'est une méthode d'allocation simple d'utilisation mais elle ne tient pas compte des corrélations entre les produits.
- la méthode marginale : c'est une méthode d'allocation intuitive qui quantifie l'apport d'un produit sur le risque global.
- la méthode d'Euler : c'est une méthode d'allocation cohérente qui s'appuie sur l'impact marginale infinitésimale.

Le but de ce mémoire est de mettre en œuvre l'approche de gestion des risques pour trois raisons : présenter l'enjeu des méthodes d'allocation, proposer des indicateurs facilitant le pilotage des produits, et évaluer l'impact des scénarios de stress-test et de sensibilités liés à la crise sanitaire Covid-19.

L'évaluation des sensibilités liées à la sinistralité et au chiffre d'affaires permet de chiffrer les impacts de la crise sanitaire Covid-19. Nous retenons que la consommation en capital diminue pour les lignes d'activité à durée longue (9 ans), elles se distinguent par une sinistralité élevée et un niveau

de primes inférieur aux provisions techniques. D'autre part, la consommation en capital augmente pour la ligne d'activité à durée courte (2 ans), car elle se caractérise par une sinistralité importante. L'étude de ce mémoire fait apparaître certaines limites et ouvertures à développer dans les travaux futurs. L'approche et les indicateurs suggérés dans ce mémoire ne concernent pas les autres modules de risques (marché, crédit ...). La modélisation de ces sous-modules dans le Modèle Miroir serait intéressante à suivre. En outre, l'entrée en application de la norme IFRS 17 constitue un changement majeur pour les assureurs dans la comptabilisation des contrats d'assurance. Dans ce contexte, les méthodes d'allocation présentées ouvrent sur la problématique de répartition de la Risk Adjustment à la maille produit pour analyser l'onérosité des contrats.

L'allocation du capital a permis de définir les indicateurs de solvabilité et de rentabilité utilisés dans ce mémoire. Le choix de la méthode d'allocation se répercute sur les indicateurs introduits, par conséquent les décisions stratégiques sont susceptibles de varier en fonction de la méthode choisie. Cependant, nous avons établi des propriétés d'adéquation et de cohérence pour les méthodes d'allocation. Nous avons démontré que la méthode d'allocation d'Euler satisfait le critère de cohérence. Pour conclure, les montants alloués à l'aide de la méthode d'Euler, reflètent correctement le profil de risque des produits et prennent en compte les mécanismes de diversification.

L'évaluation des sensibilités permet de vérifier le respect permanent des exigences de solvabilité, et dans le cas échéant la mise en place de mesures correctives permet de revenir à un niveau confortable de solvabilité. Ce niveau est défini par les instances dirigeantes de façon à garantir un équilibre entre l'immobilisation de capital et la rentabilité.

Enfin, l'étude proposée dans ce mémoire ne traite pas les sensibilités de manière prospective car nous ne disposons pas assez de recul par rapport à cette situation inédite qu'est la crise sanitaire Covid-19. L'étude de la déformation du profil de risque et de la rentabilité à l'horizon du plan stratégique nécessite des hypothèses supplémentaires mais elle reste un véritable sujet à explorer.

Bibliographie

- AGENOS (2010). Appétit pour le risque et gestion stratégique d'une société d'assurance non-vie. Centre d'Etudes Actuarielles (CEA).
- ARBENZ (2018). Importance Sampling and Stratification for Copula Models Contemporary Computational Mathematics. *Springer, Cham*.
- ARGUS (3/05/2020). Coronavirus : les conséquences économiques sur le secteur de l'assurance. URL : <https://www.argusdelassurance.com/les-assureurs/coronavirus-les-consequences-economiques-sur-le-secteur-de-l-assurance-analyse.164226>.
- ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M. et HEATH, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance* 9.3, p. 203-228.
- BENCTUEUX (2015). Modélisation du risque de provision par l'approche bootstrapp. Mémoire d'actuariat, ISFA.
- BOUMEZOUED, A., ANGOUA, Y., DEVINEAU, L. et BOISSEAU, J.-P. (2011). One-year reserve risk including a tail factor: closed formula and bootstrap approaches. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00605329v2>.
- CENTENO, L. (2003). Bootstrap methodology in claim reserving. *Journal of Risk and Insurance* 70.4, p. 701-714.
- CHRISTIANSEN, M. C. (2006). A joint analysis of financial and biometrical risks in life insurance. Universiät Rostock. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät.
- CHRISTIANSEN, M. C. et HELWICH, M. (2008). Some further ideas concerning the interaction between insurance and investment risks. *Blätter der DGVM* 29.2, p. 253-266.
- DECUPÈRE, S. (2011). Agrégation des risques et allocation de capital sous Solvabilité II. Mémoire d'actuariat, ENSAE.
- DENAULT, M. (2001). Coherent allocation of risk capital. *Journal of risk* 4, p. 1-34.
- DENUIT, M. et CHARPENTIER, A. (2005). Mathématiques de l'Assurance Non-Vie. Tome II: Tarification et Provisionnement. Economica.
- DEVINEAU (2014). Corrélations et agrégations des risques non-vie : aspects théoriques et limites opérationnelles. URL : <https://docplayer.fr/46331057-Correlations-et-agregation-des-risques-non-vie-aspects-theoriques-et-realite-operationnelle.html>.
- DEVINEAU, L. et LOISEL, S. (2009). Construction d'un algorithme d'accélération de la méthode des «simulations dans les simulations» pour le calcul du capital économique Solvabilité II. *Bulletin Français d'Actuariat* 10.17, p. 188-221.
- EIOPA (2014). Orientations sur l'utilisation de modèles internes. Numéro de rapport : EIOPA-BoS-14/180 FR.
- EIOPA (2021). Consultation paper on the Supervisory Statement on ORSA in the context of COVID-19. Numéro de rapport : EIOPA-BoS-21/328 EN.
- EMBRECHTS, P., LINDSKOG, F. et MCNEIL, A. (2001). Modelling dependence with copulas. *Rapport technique, Département de mathématiques, Institut Fédéral de Technologie de Zurich, Zurich*.

- FISCHER, T. (2004). On the decomposition of risk in life insurance. URL : <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.200.4233&rep=rep1&type=pdf>
- GENERALI (2019). Internal Documentation: PC Risk Group Guideline. GENERALI Group.
- GENERALI (2020). Documentation Interne: Directive de Lancement d'un Nouveau Produit non-vie. GENERALI France.
- GENERALI (2021). Internal Documentation: PC Underwriting and Reserving Group Policy. GENERALI Group.
- GONDRAN, L. (2013). Appétence au risque et allocation de capital à partir de critères de performance sous Solvabilité 2. Mémoire d'Actuariat ENSAE.
- GRANDPERRIN, L. (2018). Allocation de capital: théorie et pratique de la méthode d'Euler. Mémoire d'actuariat, ISFA.
- HOEFFDING, W. (1992). A class of statistics with asymptotically normal distribution. URL : <https://projecteuclid.org/journals/annals-of-mathematical-statistics/volume-19/issue-3/A-Class-of-Statistics-with-Asymptotically-Normal-Distribution/10.1214/aoms/1177730196.pdf>.
- Institut des ACTUAIRES, B. E. L. N.-v. (2016). Manuel BEL non-vie. URL : https://www.institutdesactuaire.com/global/gene/link.php?news_link=2016110706_2016133810-npa3-1.pdf&fg=1.
- NAPOLEON (2019). Validation du SCR du risque de réserve en modèle interne non vie. Mémoire d'Actuariat EURIA.
- SCHILLING, K., BAUER, D., CHRISTIANSEN, M. C. et KLING, A. (2020). Decomposing dynamic risks into risk components. *Management Science* 66.12, p. 5738-5756.
- SLIMANI (2019). Estimation des paramètres d'une copule. Mémoire d'Actuariat.
- TASCHE, D. (2007). Capital allocation to business units and sub-portfolios: the Euler principle. *Arxiv* 0708.2542.