



Mémoire présenté devant le jury de l'EURIA en vue de l'obtention du
Diplôme d'Actuaire EURIA
et de l'admission à l'Institut des Actuaire

Vendredi, le 08 Septembre 2023

Par : BOIDI Kan Ernest

Titre : Mise en place d'un outil d'aide à la décision pour l'optimisation de la réassurance des assureurs non-vie.

Confidentialité : Non

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

**Membre présent du jury de l'Institut
des Actuaire :**

Saman NEJAD

Stella JOVET

Christelle LACAZE

Signature :

Entreprise Exiom Partners

Signature :

Membres présents du jury de l'EURIA : *Directeur de mémoire en entreprise :*

Franck VERMET

Coralie CHARBONNEL

Signature :

Invité : Adam SMIAROWSKI

Signature :

**Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion
de documents actuariels**

(après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise :

Signature du candidat :

Résumé

La réassurance peut se définir simplement comme l'opération par laquelle un assureur transfère une part de ses risques à un réassureur moyennant une prime appelée prime de réassurance. Au-delà de sa fonction première qui vise à atténuer les risques de fréquence et de pointe, la réassurance représente un puissant levier tant sur le plan technique que financier pour les compagnies d'assurance.

La problématique de cession optimale et efficace est dès lors incessamment au cœur de l'ORSA. Pour y parvenir, l'assureur entreprend une analyse prospective qui comporte deux étapes principales :

- la compréhension et la modélisation du risque.
- l'analyse de la réassurance et la mise en place d'une stratégie optimale.

Ce mémoire propose une stratégie pour tester différents traités de réassurance et en choisir le ou les plus efficaces.

Nous y discutons les hypothèses de mise en as-if, les considérations futures de nature à impacter la sinistralité telle que l'inflation, la modélisation du risque à proprement parler, la simulation des variables faisant office de critères ou de contraintes du problème d'optimisation (via des simulations Monte-Carlo) et la détermination de la frontière de traités efficaces.

Nous discutons d'abord les méthodes de résolutions classiques de problèmes multiobjectifs (les heuristiques) qui permettent, étant donné la connaissance du problème, de définir l'ensemble des solutions optimales, puis nous analysons l'algorithme d'optimisation par essais particuliers qui permet d'explorer l'univers de tous les traités de réassurance, tout en convergeant vers l'optimum du problème d'optimisation.

Dans les dernières lignes, nous proposons une démarche pour une analyse de la réassurance optimale au niveau global d'un portefeuille : comment la prise en compte des dépendances entre les différentes lignes de business peut-elle améliorer les indicateurs de réassurance au niveau global ?

Mots clefs: Actuariat, Réassurance, Optimisation, heuristiques, méta-heuristiques, multiobjectifs, contraintes.

Abstract

Reinsurance is essentially when an insurance company offloads some of its risks to another party for a fee called a reinsurance premium. Beyond just helping to deal with the big and frequent risks, reinsurance is a real game-changer for insurance companies, both in terms of their technical operations and finances.

In this context, one of the big questions in the Own Risk and Solvency Assessment (ORSA) process is how insurers can smartly handle this risk transfer. To do this, insurers typically go through two main steps :

1. Understanding and modeling risks.
2. Figuring out the best way to use reinsurance.

This thesis is part of an internal project at Exiom Partners where we try to create a tool for analyzing risk and modeling reinsurance. In the following lines, we will discuss assumptions made on data, what might affect loss ratios in the future (like inflation), risk modeling, how different variables are simulated (using a Monte Carlo process), and how to figure out the best reinsurance treaties.

First, we will dive into traditional methods for solving problems with multiple objectives, like heuristics. These methods help us find the best solutions once we grasp the problem. We will then look at a more advanced technique called the particle swarm optimization algorithm, which helps us explore all the possible reinsurance agreements and find the best one.

In the final stretch, we explore how thinking about the dependency between different lines of business can help improve reinsurance at a portfolio level.

Keywords: Actuarial Issues, Reinsurance Optimization, Heuristics, Metaheuristics, Multiobjectives, Constraints.

Remerciements

Je remercie tous les Exiomers qui ont contribué de près ou de loin à faire de mon alternance une expérience merveilleuse.

Tout, d'abord, ma gratitude va envers mon manager Adam Smiarowski pour son encadrement et sa disponibilité, envers mon référent Yoann Carichon pour son suivi et ses conseils et envers tous les collaborateurs.

Je ne saurais continuer sans citer Elodie Durand, ma tutrice académique, sans qui ces lignes ne seraient pas nées.

Mes remerciements vont également à l'endroit du corps enseignant de l'EURIA et de l'INSEA pour leur encadrement de qualité.

Enfin, je dédie ce rapport aux BLAHOUA, aux BOIDI et à l'Etat de Côte d'Ivoire qui m'ont porté de si loin : « Nous y voilà ! ».

Note de synthèse

Contexte et problématique

Ces dernières décennies, le marché de l'assurance a été fortement marqué par la dérive des risques classiques et l'émergence de nouveaux risques, rompant ainsi le cycle de croissance de nombreux assureurs.

Face à l'inadéquation entre les portefeuilles couverts et les objectifs, tant stratégiques que réglementaires, la réassurance s'est imposée comme une bouée de sauvetage.

À cet égard, le journal économique "Les Echos" rapporte que 2023 connaît un déséquilibre inédit entre l'offre et la demande en réassurance, translatant les primes de réassurances jusqu'à 3 fois au-dessus du niveau moyen habituel.

Si l'opération est désormais un levier de gestion évident pour les assureurs, la problématique de réassurance optimale reste peu maîtrisée par ceux-ci. C'est dans ce cadre que s'inscrit l'outil d'Exiom Partners, visant à assister les assureurs dans le choix de leurs traités.

Plus formellement, étant donné un risque, un ensemble \mathcal{T} de traités, et M fonctions objectives soumises à K contraintes, comment définir les traités les plus efficaces ? Autrement, on souhaite trouver

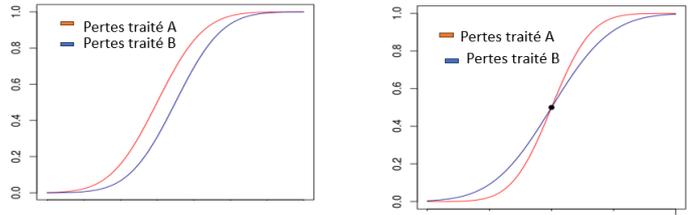
$$\mathcal{T}_S = \{x \in \mathcal{T} \mid x \text{ solution de (P)}\} \subset \mathcal{T}$$

avec (P) défini comme suit :

$$(P) : \begin{cases} \max / \min f_i(x), & \text{pour } i = 1, \dots, M \\ \text{S.c : } g_j(x) \geq 0, & \text{pour } j = 1, \dots, K \end{cases}$$

Où les $f_i(x)$ et $g_j(x)$ désignent respectivement les objectifs f_i et les contraintes g_j après application du traité x au risque sujet à réassurance.

Les premières analyses de réassurance optimale se sont principalement basées sur des comparaisons en dominances stochastiques d'ordre 1 et 2 des variables aléatoires caractérisant les pertes de l'assureur après réassurance. Malgré la beauté mathématique de cette approche, elle souffre d'application concrète car elle restreint l'analyse de la réassurance à un cadre mono-objectif et aux f_i prouvés convexes ou concaves.



(a) : Dominance stochastique d'ordre 1 (b) : Dominance stochastique d'ordre 2

Figure : Dominance stochastique d'ordre 1 et 2

Une issue se dessine cependant car cette analyse introduit une relation d'ordre sur l'ensemble des traités. Si l'on combine le concept de relation d'ordre et les similitudes du problème de réassurance optimale avec celui du portefeuille efficient de Markowitz, alors, il est possible de construire l'ensemble des traités les mieux adaptés selon l'appétence au risque de l'assureur : il s'agit de la frontière de Pareto.

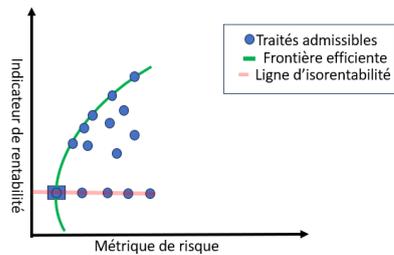


Figure : Frontière efficiente et traités optimaux de réassurance

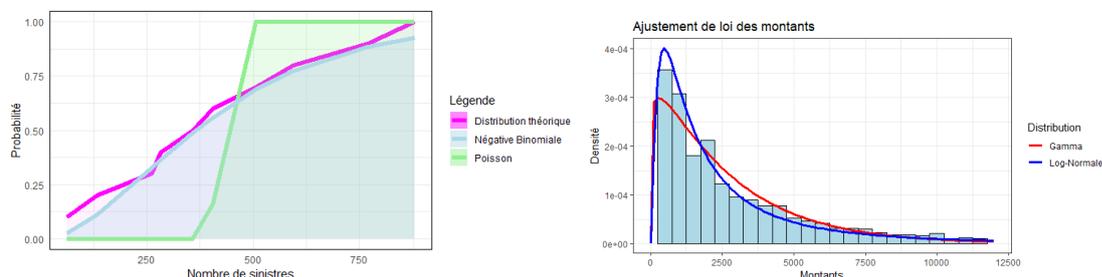
Dans ce mémoire, nous détaillons la méthodologie et les concepts qui sous-tendent l'outil proposé. Nos propos sont illustrés à travers un portefeuille client anonymisé, constitué de risques Dommages Automobile, Responsabilité civile Automobile, et Multirisque professionnel Vol (respectivement à 63%, 17% et 20%); à céder de façon indépendante.

Environnement d'optimisation

L'analyse prospective de la réassurance que nous proposons se base sur les données historiques de la compagnie et consiste en deux étapes majeures :

1. Compréhension du risque et mise en place d'un modèle adapté :
Il s'agit de redresser les données (pour avoir une vision aujourd'hui) et prendre en compte les considérations futures pouvant impacter la charge de l'assureur notamment l'inflation future que nous modélisons par un SARIMA, qui prédit l'inflation 2024 à 3.85% (contre 3% prédit par la BCE).

Par ailleurs, les risques sont modélisés suivant un modèle fréquence-coût et une granularité attritionnelle-grave pour chaque ligne d'activité.



(a) : Calibrage loi nombre de sinistres attritionnels (Dommage Auto) (b) : Calibrage loi montant individuel sinistres attritionnels (Dommage Auto)

Après avoir établi un modèle pour le risque, nous choisissons un ensemble d'indicateurs de performance des traités que nous approchons dans un environnement de simulation Monte-Carlo.

Nous nous intéressons particulièrement à des indicateurs de profits tels que le résultat moyen, la RORAC, le ratio sinistres à primes et des indicateurs de risques à savoir la volatilité du résultat moyen et le SCR primes.

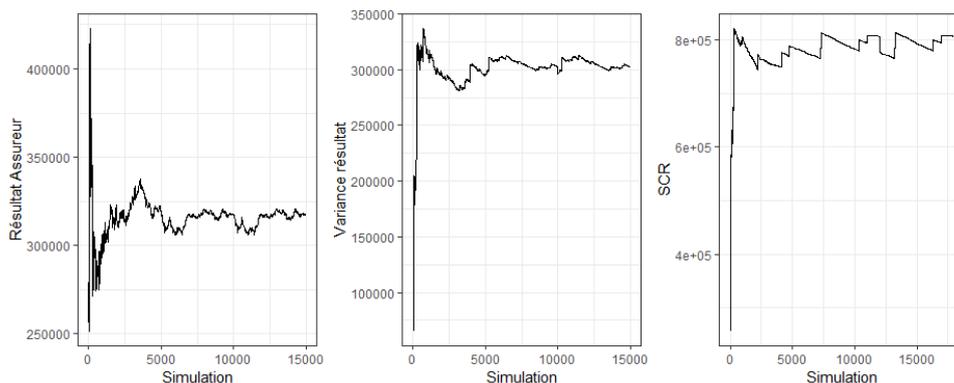


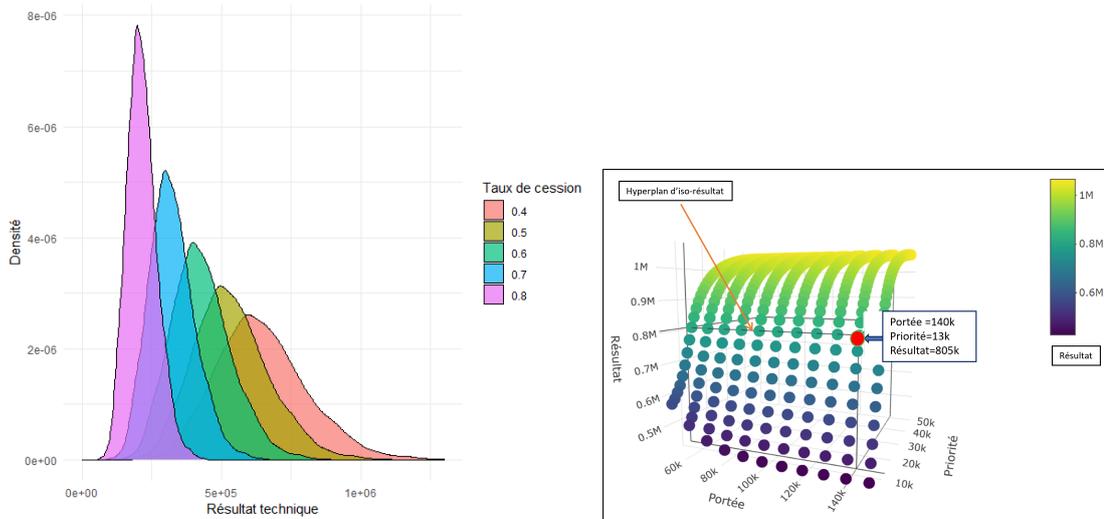
Figure : Nombre de simulations pour la convergence de quelques estimateurs

2. Définition de l'appétit au risque et détermination d'un traité optimal

En adéquation avec l'ORSA, on définit l'appétence au risque et les indicateurs la quantifiant.

Il est alors possible d'analyser, dans un espace de deux ou une dimension, la sensibilité des indicateurs aux paramètres et clauses de réassurance.

Cette analyse de sensibilité fournit certes des pistes sur la réassurance optimale, mais la détermination de la frontière des traités efficaces nécessite des méthodes adaptées.



(a) : Sensibilité du résultat au taux de cession en Quote Part (b) : Sensibilité du résultat à la priorité et à la portée

Les heuristiques d'optimisation multiobjectifs et algorithmes naïfs

Les heuristiques constituent un ensemble de méthodes de résolution de problèmes multiobjectifs. La plus prometteuse d'entre-elles, la méthode ϵ -contrainte consiste à se ramener à un problème mono-objectif en gardant une seule fonction objective et en passant les autres en contraintes. Par exemple, le problème consistant à déterminer les traités qui maximisent le résultat tout en minimisant sa volatilité, obtient une solution en maximisant le résultat sous contrainte de volatilité restreinte dans des limites acceptables.

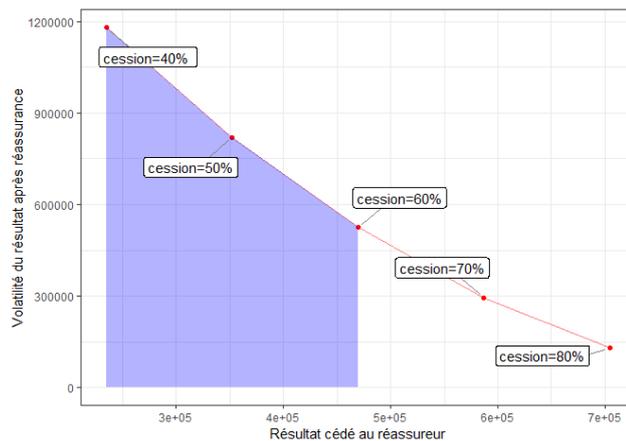


Figure : Sélection taux de QP

Cette méthode est intéressante pour sa capacité à fournir un traité de la frontière de Pareto dans une zone d'appétence au risque délimitée par l'assureur.

Mise en place d'un algorithme naïf et introduction d'une contrainte de conformité au marché

Pour remédier à l'incapacité de la méthode précédente à former entièrement la frontière de Pareto et offrir diverses possibilités à l'assureur, nous proposons un algorithme naïf basé sur la définition de la frontière de Pareto : pour toutes les lignes d'iso-profit, les traités efficaces sont ceux de risque minimaux et inversement.

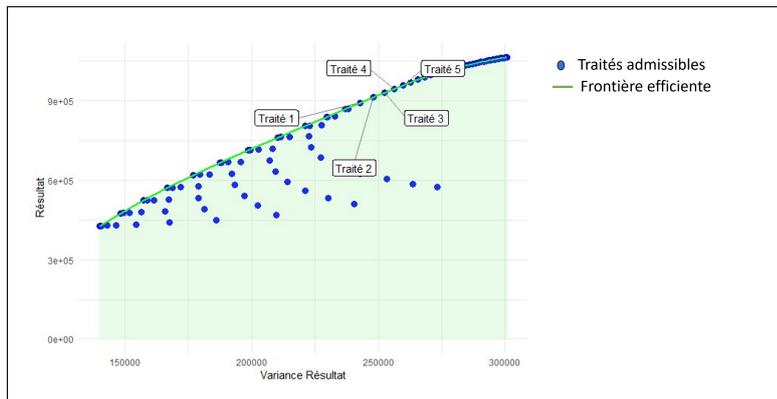


Figure : Frontière de Pareto en dimension 2

Bien que l'on arrive à former la frontière efficiente, en réalité, rien ne garantit l'existence des traités trouvés sur le marché. Pour tenter de contrôler cette limite, nous introduisons un critère de conformité au marché : la marge du réassureur ne doit pas être en dessous du seuil historique moyen.

Cela permet finalement d'éliminer certaines zones de la frontière efficiente et de faciliter la prise de décision.

Jusqu'ici, nous avons restreint les solutions du problème multiobjectif à \mathcal{T} , l'ensemble des traités à disposition de l'assureur. Et si de meilleures solutions se trouvaient en dehors du set de traités initial ?

Optimisation par essais particuliers (*Crowding distance based Multiobjective Particle Swarm*)

Nous introduisons la métaheuristique à population appelée optimisation par essais particuliers, un algorithme itératif inspiré du vol des nuées d'oiseaux qui permet de former une frontière efficiente à partir du set de traités initial et de créer de nouveaux traités en se servant des meilleurs traités de l'itération précédente (améliore la qualité de la frontière efficiente).

Chaque oiseau de la population représente un traité de réassurance et peut se diriger dans de multiples directions caractérisant les paramètres et clauses du traité (priorité et portée par exemple pour un traité en XS). A chaque itération, les traités non dominés sont stockés dans une archive externe, capable de rejeter les anciennes solutions qui sont désormais dominées et y intégrer de nouvelles solutions.

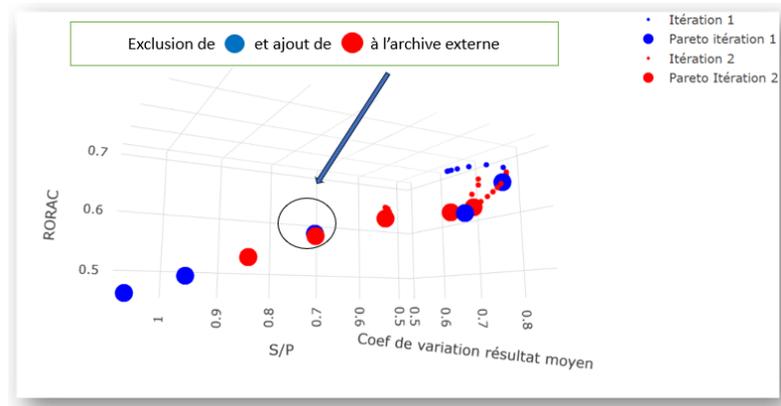


Figure : Application du MOPSO-CD

Cette méthode permet de renforcer la qualité d'une frontière efficiente en la redressant davantage vers les zones de meilleures performances.

Enfin, nous avons montré que la prise en compte de la structure de dépendance entre les LoBs, dans une optimisation multi-LoBs améliore la qualité des indicateurs de réassurance, car elle permet de bénéficier de la sous-additivité des mesures de risques cohérentes.

Conclusion

En somme, la notion de frontière de Pareto permet de déterminer, étant donné les objectifs et les contraintes de l'assureur, l'ensemble des traités optimaux dans le set à disposition.

Dans un cadre multiobjectifs où les solutions deviennent difficilement explorables, l'algorithme d'optimisation par essais particuliers permet de définir de manière itérative la frontière efficiente. Cette méthode reste cependant coûteuse en temps de calcul.

Executive Summary

Context and Problem Statement

For the past few decades, the insurance market has been strongly marked by the drift of classical risks and the emergence of new risks, disrupting the growth cycle of many insurers.

Facing the mismatch between covered portfolios and both strategic and regulatory objectives, reinsurance has emerged as a lifeline.

In this regard, the economic journal "Les Echos" reports that 2023 witnesses an unprecedented imbalance between supply and demand in reinsurance, pushing reinsurance premiums up to three times above the usual average level.

While reinsurance has become an obvious management lever for insurers, the problem of optimal reinsurance remains poorly understood by them. It is in this context that Exiom Partners' tool comes into play, aiming to assist insurers in choosing their treaties. More formally, given a risk, a set \mathcal{T} of treaties, and M objectives subject to K constraints, how can we define the most effective treaties? In other words, we want to find

$$\mathcal{T}_S = \{x \in \mathcal{T} \mid x \text{ is a solution to (P)}\} \subset \mathcal{T}$$

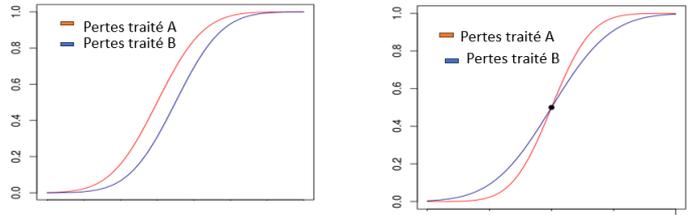
with (P) defined as follows :

$$(P) : \begin{cases} \max / \min f_i(x), & \text{for } i = 1, \dots, M \\ \text{S.c : } g_j(x) \geq 0, & \text{for } j = 1, \dots, K \end{cases}$$

Where $f_i(x)$ and $g_j(x)$ respectively represent the objectives f_i and the constraints g_j after the application of treaty x to the risk subject to reinsurance?

The initial analyses of optimal reinsurance primarily relied on a comparison of first and second-order stochastic dominance of the random variables characterizing the insurer's losses after reinsurance.

Despite the mathematical elegance of this approach, it suffers from practical application limitations as it restricts reinsurance analysis to a single-objective framework and to proven convex or concave f_i .



(a) : First-Order Stochastic Dominance (b) : Second-Order Stochastic Dominance

Figure : First-Order and Second-Order Stochastic Dominance

However, a way forward is emerging because this analysis introduces an order relation on the set of treaties. By combining the concept of order relation with the similarities between the reinsurance problem and that of an efficient portfolio, it becomes possible to construct the set of contracts best suited to the insurer’s risk appetite : this is known as the Pareto frontier.

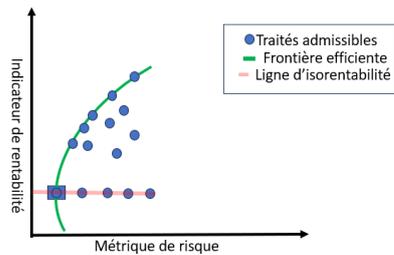


Figure : Efficient Frontier and Optimal Reinsurance Treaties

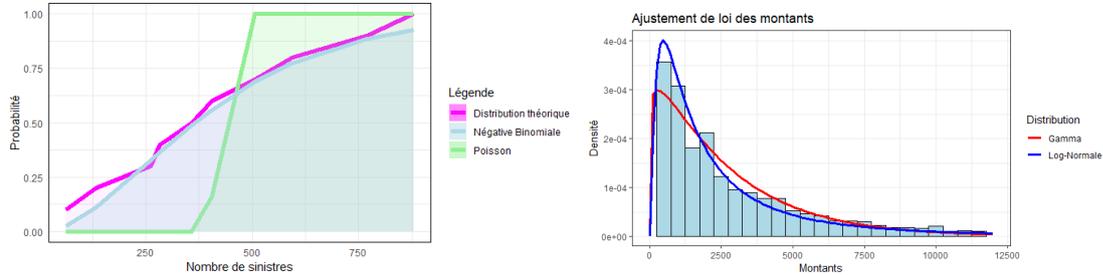
In this thesis, we detail the methodology and concepts underlying the proposed tool. Our arguments are illustrated through an anonymized client portfolio, consisting of Automobile Damage, Automobile Liability, and Multirisk Professional Theft risks (at 63%, 17%, and 20%, respectively), to be ceded independently.

Optimization Environment

The prospective analysis of reinsurance that we propose is based on the historical data of the company and consists of two major steps :

1. Understanding the Risk and Establishing an Appropriate Model :
This involves cleaning the data and considering future factors that may impact the insurer’s exposure, especially future inflation, which we model using a SARIMA(0,2,1)(2,0,0) model, predicting an inflation rate of 3.85% for 2024 (compared to the 3% predicted by the ECB).

Furthermore, risks are modeled using a frequency-severity model with granularity for each line of business.



(a) Calibration of attritional claim count distribution (Auto Damage) (b) Calibration of attritional claim individual amount distribution (Auto Damage)

With the risk model in place, we can approximate any actuarial indicator in a Monte Carlo simulation environment. We are particularly interested in profit indicators such as the average result, RORAC, loss ratio, and risk indicators such as the volatility of the average result and the SCR.

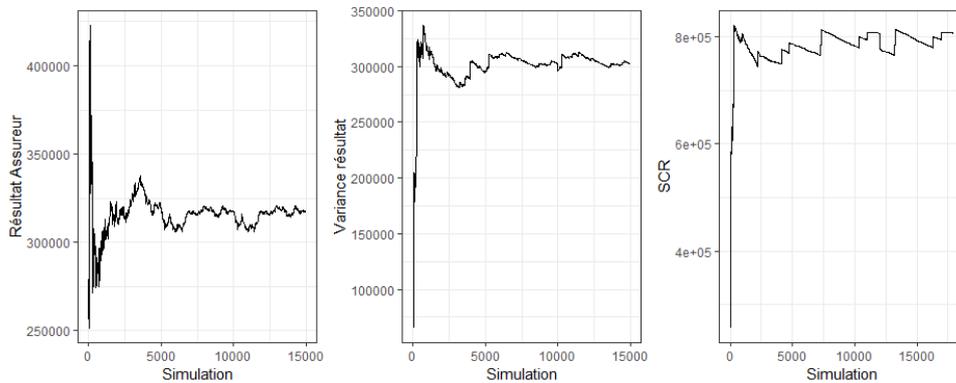
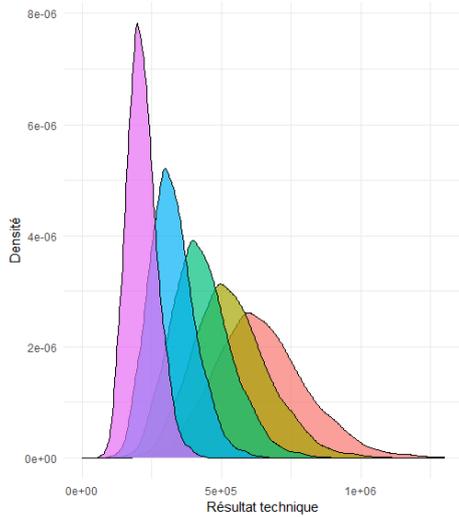


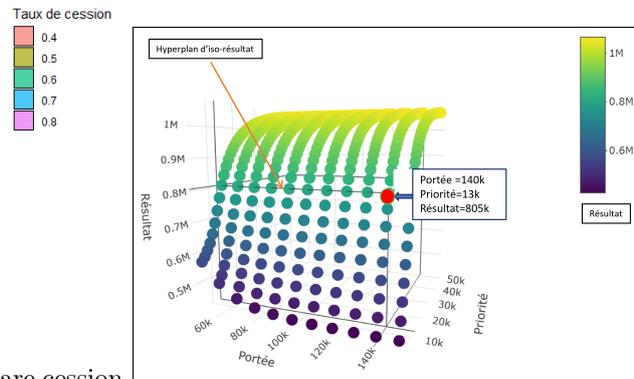
Figure : Number of simulations for the convergence of selected estimators

2. Defining Risk Appetite and Determining an Optimal Treaty

In line with the ORSA, risk appetite is defined. This allows us to analyze, in a one- or two-dimensional space, the sensitivity of indicators to reinsurance parameters and clauses. This sensitivity analysis provides insights into optimal reinsurance, but determining the efficient treaty frontier requires appropriate methods.



(a) Sensitivity of results to the Quota Share cession rate



(b) Sensitivity of results to XS parameters

Multiobjective Optimization Heuristics and intuitive Algorithm

Heuristics comprise a set of methods for solving multi-objective problems.

Among them, the most promising is the ϵ -constraint method, which involves transforming a multi-objective problem into a single-objective problem by keeping one objective function and converting the others into constraints. Thus, the problem of determining treaties that maximize profit while minimizing volatility can be solved by maximizing profit subject to restricted volatility within acceptable limits.

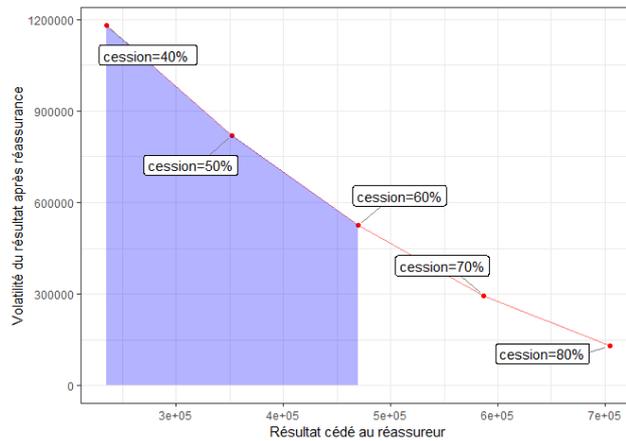


Figure : Selection of Quota Share Rates

This method is interesting for its ability to provide a treaty on the Pareto frontier within a risk appetite zone defined by the insurer.

Development of an intuitive Algorithm and Introduction of a Market Compliance Constraint

To address the limitation of the previous method in fully forming the Pareto frontier and offering various options to the insurer, we propose a naive algorithm based on the definition of the Pareto frontier : for all iso-profit lines, efficient treaties are those with minimal risk, and vice versa.

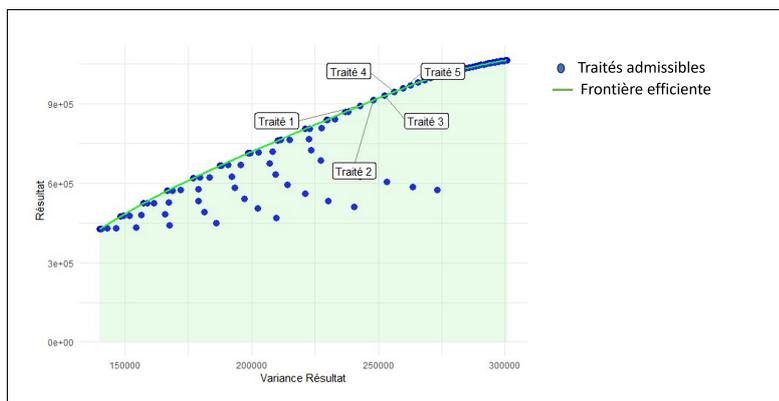


Figure : Pareto Frontier in 2D

However, while we manage to form the efficient frontier, there is no guarantee that the found treaties actually exist in the market. To address this concern, we introduce a market compliance criterion : the reinsurer's margin must not fall below the historical average threshold.

This criterion ultimately helps eliminate certain areas of the efficient frontier and facilitates decision-making.

So far, we have confined the solutions to the multi-objective problem to \mathcal{T} , the set of treaties available to the insurer. But what if better solutions exist outside the initial set of treaties?

Crowding Distance Based Multi-objective Particle Swarm Optimization (CD-MOPSO)

We introduce the population-based metaheuristic called Particle Swarm Optimization, an iterative algorithm inspired by the flight of bird flocks that forms an efficient frontier from the initial set of treaties and creates others by leveraging the best treaties obtained in the previous iteration.

Each bird in the population represents a reinsurance treaty and can move in multiple directions representing the treaty's parameters and clauses. In each iteration, the non-dominated treaties are stored in an archive that can reject old solutions that are now dominated and incorporate the best solutions.

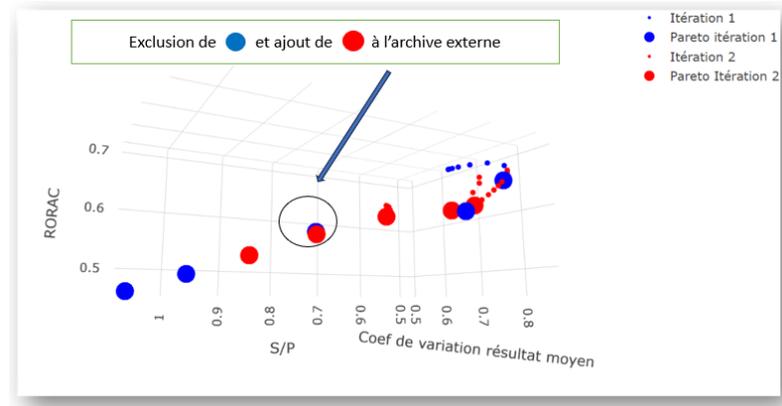


Figure : Application of MOPSO-CD

Conclusion

In summary, the concept of the Pareto frontier allows us to determine, given the insurer's objectives and constraints, the set of optimal treaties within the available set.

In a multi-objective framework where solutions become difficult to navigate, the Particle Swarm Optimization algorithm allows for the iterative and secure definition of the frontier.

Table des matières

1	Introduction à la réassurance	3
1.1	Définition et histoire de la réassurance	3
1.1.1	Le traité de réassurance	3
1.1.2	Brève histoire de la réassurance	3
1.2	De la nécessité de la réassurance	5
1.3	Les formes de réassurances	8
1.3.1	La réassurance proportionnelle	9
1.3.2	La réassurance non proportionnelle	11
1.3.3	La tarification de la réassurance	16
2	De l'optimisation de la réassurance	19
2.1	Contexte et problématique	19
2.2	Frontière efficiente	21
2.3	Métriques et critères de choix de traités	23
2.4	Une approche Monte-Carlo	25
2.5	Outils mathématiques connexes	26
2.5.1	Théorie des valeurs extrêmes et queues de distributions	26
2.5.2	Lois usuelles en réassurance	28
2.5.3	Estimateurs et tests d'adéquation pour la modélisation	30
3	Modélisation et cadre d'appétence au risque	35
3.1	Nature des données à utiliser	35
3.1.1	Mise en as-if des données et inflation future	36
3.2	Modélisation de la sinistralité	38
3.2.1	Modèle fréquence coût pour LoB_j	39
3.2.2	Détermination du seuil des sinistres graves	41
3.3	Environnement de simulation	51
3.4	Intégration dans l'outil	53
4	Détermination des traités optimaux	55
4.1	Dispositif ORSA et cadre d'appétence au risque	55
4.2	Approches heuristiques pour la détermination de la frontière de Pareto	58
4.2.1	Approches heuristiques en univers multiobjectifs	58

4.2.2	Application 1 : Portefeuille Responsabilité civile Auto	60
4.2.3	Algorithme naïf pour la construction de la frontière efficiente	62
4.2.4	Application 2 : Portefeuille dommages Automobile	63
4.2.5	Introduction d'un critère de conformité au marché	68
4.3	Contributions des méta-heuristiques	69
4.3.1	Du PSO au MOPSO	70
4.3.2	Application : Portefeuille Multirisque Professionnel Vol	75
5	Réassurance globale sur les LoBs	79
5.1	Dépendances entre LoBs	79
5.2	Application : Réassurance globale	80
5.1.2	Intégration dans le modèle de réassurance	81
	Appendices	89
A	Modélisation de l'inflation future via une série chronologique (modèle SARIMA)	91
A.1	Série chronologique	91
A.2	Stationnarité d'une série chronologique	91
A.3	Fonction d'autocovariance	92
A.4	Autocorrélations partielles	92
A.5	Modèles SARIMA	93
A.5.1	Le bruit blanc	93
A.5.2	Modèle autorégressif (AR)	93
A.5.3	Modèle à moyenne mobile (MA)	93
A.5.4	Modèle mixte ARMA	94
A.5.5	Modèles ARMA intégrés : ARIMA et SARIMA	94
A.6	Méthodologie de Box et Jenkins ; et modélisation de l'IPC	95
B	Modèles fréquence-coût pour les LoBs RC Auto et MRP Vol	99
B.1	Modèles pour la LoB Responsabilité civile Automobile	99
B.1.1	Modèle pour les sinistres attrionnels	99
B.1.2	Modèle pour les sinistres graves	100
B.2	Modèles pour la LoB MRP	100
C	Brève introduction à la théorie des copules	101
C.1	Copules bivariées	101
C.2	Mesures de dépendances	102
C.2.1	Coefficient de corrélation linéaire de Pearson	102
C.2.2	Le taux de Kendall	102
C.2.3	Rho de Spearman	102
C.3	Extrait des combinaisons possibles de traités de réassurance	103

Table des figures

1.1	Compte de réassurance, vision réassureur	15
2.1	Dominance stochastique d'ordre 1 et 2	20
2.2	Frontière efficiente et traités optimaux de réassurance	22
2.3	Deux étapes principales de l'optimisation de la réassurance	26
3.1	Prédiction de l'IPC, avec confiance de 95%	37
3.2	Les LoBs selon Solvabilité II	38
3.3	LoBs du portefeuille d'application	39
3.4	Graphique du <i>mean Excess Plot</i>	43
3.5	Graphe de Gerstengarbe	44
3.6	Exemple de concentration des sinistres graves dans différents intervalles	45
3.7	Critère de choix de la méthode de détermination du seuil	45
3.8	Ajustement de la loi du nombre de sinistres attritionnels Dommage Auto	46
3.9	Calibrage loi des montants attritionnels	47
3.10	Loi nombre de sinistres graves	48
3.11	Ajusement GDP	50
3.12	Nombre de simulations pour la convergence de quelques estimateurs	52
4.1	Etapes ORSA	56
4.2	Formulation du problème d'optimisation	57
4.3	Méthode <i>Weighted Sum</i>	59
4.4	ϵ -constraint	60
4.5	Résultat technique selon la QP	61
4.6	Sélection taux de QP	62
4.7	Distribution des pertes sur la LoB dommage Automobile	65
4.8	Heatmap d'analyse d'effets de variations des caractéristiques de la priorité et ou de la portée	66
4.9	Graphique des lignes d'iso-résultats	67
4.10	Frontière de Pareto en dimension 2	68
4.11	Introduction d'un critère de marché	69
4.12	Métaheuristique	70
4.13	PSO	71
4.14	<i>Crowding</i> distance	74

4.15	Application du MOPSO-CD	76
4.16	Mutation des paramètres priorité et portée	76
5.1	Mesures de dépendance	80
5.2	Modélisation des dépendances	81
5.3	Données à disposition pour une simulation	82
5.4	Effet de la dépendance	85
A.1	Analyse avant et après différenciation d'ordre 1	96
A.2	Ajustement de l'IPC	97
A.3	Hypothèses de stationnarité	98
B.1	Modélisation nombre RC Auto attritionnelle	99
B.2	Loi montants de sinistres RC Auto attritionnelle	99
B.3	Modélisation nombre RC Auto grave	100
B.4	Qualité d'ajustement de la GPD sinistres graves RC Auto	100
B.5	Modélisation du nombre de sinistre MRP Vol	100
B.6	Modélisation des montants de sinistres MRP Vol	100

Liste des tableaux

3.1	Estimation du seuil par des méthodes empiriques	42
3.2	Qualité d'ajustement loi du nombre de sinistres attritionnels Auto dommage	47
3.3	Tests d'ajustement de lois continues pour les montants de sinistres attritionnels (Dommage Auto)	48
3.4	Qualité d'ajustement de la loi du nombre de sinistres graves, LoB dommage Auto	49
3.5	Estimation des paramètres par distribution	49
3.6	Lois retenues par LoB	50
3.7	Modèle de simulation	52
5.1	Tableau des rangs	83
5.2	Tableau échantillons de X et Y réorganisés	83
5.3	Caractéristique du traité retenu	84
C.1	10 premières combinaisons de traités	104

Introduction

Dans un contexte mondial marqué par des risques en perpétuelle évolution, la réassurance se profile comme un allié indispensable pour l'assureur prudent. Celui-ci doit méticuleusement négocier les termes et les limites de cette relation avec le réassureur afin de sélectionner les contrats les mieux adaptés à son risque.

C'est précisément dans ce cadre que s'inscrit ce mémoire, une étude entreprise en vue de développer un outil d'aide à la sélection de la réassurance optimale. En outre, des illustrations concrètes de nos arguments seront fournies à travers des applications sur une base de données d'exemple.

En premier lieu, nous entamerons une discussion approfondie sur l'univers de la réassurance, en abordant son histoire, ses différentes déclinaisons, ses fonctions, ainsi que sa méthodologie tarifaire.

Par la suite, nous nous pencherons sur le processus de modélisation du risque, en mettant en avant une approche granulaire basée sur la gravité des risques. Nous explorerons les méthodes de sélection des seuils, partagerons des astuces pour la prise de décision quant aux seuils, et aborderons les techniques de calibration du modèle fréquence-coût.

Notre analyse se poursuivra avec un examen des stratégies d'optimisation de la réassurance, où nous exposerons les avantages et les inconvénients des heuristiques et des méta-heuristiques d'optimisation multiobjectives.

Enfin, dans la dernière section, nous mettrons en évidence l'impact de la prise en compte de la structure de dépendance entre les lignes d'activité sur la qualité des indicateurs de réassurance optimale.

Chapitre 1

Introduction à la réassurance

Dans ce chapitre, nous proposons quelques notions et définitions de base liées à la réassurance. Cette exploration préliminaire vise à poser les fondements nécessaires pour appréhender les concepts essentiels qui sous-tendent notre étude.

1.1 Définition et histoire de la réassurance

1.1.1 Le traité de réassurance

Un traité de réassurance est un accord (contrat) dans lequel une partie (le réassureur) s'engage à indemniser une autre partie (le réassuré, l'assureur de premier rang ou également la société cédante) pour certaines parties des risques d'assurance qu'elle a souscrits. En retour, la société cédante paie au réassureur une prime de réassurance pour ce service. En réassurance, le principe de l'assurance est élevé d'un niveau, de sorte qu'une compagnie d'assurance cherche elle-même la possibilité de remplacer certaines de ses pertes futures par un paiement de prime fixe (tout comme le fait un assuré lorsqu'il souscrit à un contrat d'assurance).

1.1.2 Brève histoire de la réassurance

La genèse des traités de réassurance est étroitement liée à l'histoire de l'assurance maritime.

Selon les archives, l'histoire de la réassurance débute à la fin du XIII^e siècle.

Les cités-états de la région méditerranéenne (Venise, Gênes, Florence, Marseille, etc.) étaient devenues des centres incontournables du commerce maritime européen qui connaissait une expansion grâce notamment aux croisades (expéditions militaires) et au commerce Outre-mer ; ainsi, des cargaisons de plus en plus importantes étaient transportées par voie maritime et la nécessité de couvrir la valeur des marchandises devenait évidente.

Pour couvrir ces cargaisons de grandes valeurs, les assureurs procédèrent dans un

premier temps par coassurance, puis il fallut trouver une alternative lorsque les possibilités de la coassurance montrèrent leurs limites : longues procédures d'indemnisation et difficultés de trouver un consortium d'assureurs fiables.

C'est dans ce contexte qu'est conclu en juillet 1370, à Gênes, le premier traité de réassurance connu à ce jour. Celui-ci engageait deux assureurs vénitiens qui assuraient alors la marchandise d'un bateau effectuant la liaison entre le port de Gênes et la ville de L'Ecluse (Pays-Bas). Ils décidèrent de céder le risque à un troisième assureur sur la partie la plus risquée du voyage, c'est-à-dire à partir du détroit de Gibraltar lors de l'escale du navire à Cadix (Espagne), et ce, jusqu'au passage du golfe de Gascogne (partie de l'océan Atlantique Nord située entre la Bretagne en France et la côte cantabrique en Espagne).

Dans ce traité, l'assureur direct s'était engagé à indemniser l'assuré si le navire de ce dernier ne parvenait pas à atteindre le port de destination dans un certain délai. Et, dans le cas où le navire arrivait, l'assureur aurait le droit de vendre la cargaison, et à son tour, le réassureur avait promis à l'assureur direct d'acheter toute la cargaison.

Si le concept de réassurance, lui, apparaît au XIVe siècle, il faudra attendre trois siècles plus tard pour avoir les premières réglementations de réassurance.

Les Pays-Bas sont la première nation à poser un cadre légal dès 1609. En France, ce sont les "Ordonnances de la Marine" de Louis XIV, promulguées en 1681 et modifiées en 1686 qui constitueront les jalons de la réglementation en terme de réassurance.

Ce cadre législatif et la révolution industrielle va précipiter l'avènement des premiers acteurs consacrés uniquement à la réassurance : les réassureurs. Les inventions révolutionnaires dans le domaine des transports, telles que les bateaux à vapeur et les chemins de fer, vont en effet engendrer des risques nécessitant des couvertures à grande échelle, hors de portée des assureurs traditionnels. Sans un système sophistiqué d'assurance directe et de réassurance, il n'aurait pas été possible de couvrir tous ces nouveaux risques.

Au départ, les premiers réassureurs étaient des filiales d'assureurs directs. La première filiale de réassurance a été créée par un assureur maritime : la "*Niederrheinische Güter-Assekuranz-Gesellschaft*" à Wesel en Allemagne, une société d'assurance mutuelle qui est devenue une société par actions en 1842. Puis en 1853, la "*Aachener Rückversicherungsgesellschaft*" est fondée en tant que filiale de la "*Aachener und Münchner Feuer-Versicherungsgesellschaft*". La première société de réassurance autonome au monde quant à elle fut la "*Kölnische Rückversicherungs-Gesellschaft*", fondée en 1843 en tant que société par actions en réponse au "Grand incendie de Hambourg" en 1842 (Allemagne).

Dans le reste du monde, l'évolution du secteur de la réassurance n'a pas pu suivre le rythme établi en Allemagne. La première société de réassurance spécialisée fondée dans un autre pays était la "*Schweizerische Rückversicherungsgesellschaft*", ou "*Schweizer Rück*" en abrégé, établie à Zurich en 1863. Au cours des années suivantes, d'autres réassureurs professionnels ont émergé en France et en Autriche. Au Royaume-Uni et aux États-Unis, les premières sociétés de réassurance professionnelles n'ont vu le jour qu'après 1900.

Le marché de la réassurance connaîtra ensuite de nombreux bouleversements pendant la première, la seconde guerre mondiale jusqu'à dessiner le paysage actuel.

Pour découvrir davantage du parcours tumultueux mais riche de la réassurance, le lecteur est invité à se référer à [13].

1.2 De la nécessité de la réassurance

Il existe de nombreuses raisons pour lesquelles un tel transfert de risque de l'assureur au réassureur peut être souhaitable pour les deux parties, ainsi que pour l'économie en général. Rappelons que la principale fonction des compagnies d'assurance est de prendre des risques. Cela est similaire au modèle commercial d'autres organisations financières, et les deux types tirent parti du capital fourni par les actionnaires grâce à l'émission de dettes. Cependant, les assureurs émettent des dettes en vendant des polices d'assurance aux assurés, ce qui rend la dette très risquée ; en raison de l'incertitude quant au moment et à la gravité des sinistres, tandis que la dette financière, elle, a généralement une date d'échéance prédéterminée et une valeur nominale fixe (donc une gravité quantifiée). Ce caractère de l'assurance est certes un avantage concurrentiel, mais rend également les compagnies vulnérables à l'insolvabilité, ce qui crée une demande de gestion des risques. Parmi les outils de gestion des risques disponibles, le transfert des risques par le biais de la réassurance joue un rôle important dans l'amélioration du profil de risque global de l'entreprise.

Examinons quelques-unes des principales motivations de l'assureur pour acheter de la réassurance comme moyen de transfert de risque (plusieurs d'entre elles ne sont pas indépendantes les unes des autres) :

Réduire la probabilité de subir des pertes difficiles à absorber

Il s'agit d'une déclaration assez générale et bon nombre des autres raisons qui seront évoquées plus loin sont en réalité des affinements de celle-ci. La réassurance permet à l'assureur de transférer une partie de son risque, et donc de ses pertes potentielles. Il convient néanmoins de garder à l'esprit que pour une compagnie d'assurance, l'achat de réassurance signifie transmettre une partie de son activité d'assurance (c'est-à-dire son activité principale). Par conséquent, l'objectif général est de maintenir la part réassurée aussi petite que possible, afin de conserver le contrôle sur une grande partie de l'activité d'assurance.

Stabilisation des résultats commerciaux

La conclusion d'un contrat de réassurance réduit la volatilité des résultats financiers de la cédante, car les pertes aléatoires sont remplacées par un paiement de prime (généralement déterministe). En d'autres termes, la réassurance peut être un moyen de maîtriser la volatilité d'une compagnie d'assurance pour atteindre un niveau de risque souhaité.

Réduction du capital requis

La réduction du risque global réduira le capital requis pour supporter de tels risques, et compte tenu des coûts en capital, cela peut être souhaitable.

Concrètement, si la prime de réassurance (ainsi que les coûts d'administration) est inférieure au gain résultant de la réduction correspondante du capital, le contrat de réassurance est souhaitable. En fait, en raison du passage continu à une réglementation axée sur les risques, la notion de capital et sa gestion deviennent une question centrale pour les compagnies d'assurance, et la réassurance doit alors être comprise comme un outil dans ce contexte (nous y reviendrons en détail dans le chapitre 4 via le dispositif ORSA). Cela correspond à une fonction financière importante de la réassurance en tant que substitut du capital, libérant ainsi de la capacité.

Augmentation de la capacité de souscription

En présence d'un contrat de réassurance, seule une certaine partie du risque est assumée par l'assureur, ce qui signifie que dans des conditions par ailleurs identiques, une compagnie d'assurance peut se permettre de souscrire plus de polices, ce qui peut être souhaitable pour diverses raisons, notamment les objectifs de part de marché, les tests et l'entrée sur de nouveaux marchés, l'acquisition d'une expérience (données) dans certaines lignes de métier ou régions, etc.

Accès aux avantages de pools de diversification plus importants

Souvent, le portefeuille des assureurs primaires est limité à une zone locale, auquel cas la recherche par eux-mêmes de possibilités de diversification en dehors de ce marché pour la partie la plus risquée des risques serait très coûteuse et inefficace. Les réassureurs, en revanche, agissent généralement à l'échelle internationale et disposent donc de plus de possibilités pour diversifier ces risques. Par conséquent, le montant de capital nécessaire pour protéger ces risques dans le portefeuille peut être considérablement inférieur pour un réassureur, et le transfert de risque produit ainsi un gain économique grâce à des primes de réassurance attrayantes.

D'autres raisons secondaires de souscription, non moins importantes, peuvent également être avancées :

— Réduction de la charge d'impôt

Les provisions d'égalisation (c'est-à-dire les provisions pour la volatilité des sinistres et de leur survenance sur de plus longues périodes, ce qui est notamment important pour les risques catastrophiques) des compagnies d'assurance sont généralement soumises à l'impôt dans la plupart des réglementations.

Si de telles provisions sont versées à une compagnie de réassurance sous la forme d'une prime de réassurance (ou, alternativement, dans une structure captive créée à cet effet), le régime fiscal devient plus favorable, car des règles fiscales différentes peuvent s'appliquer aux réassureurs et aux structures captives (souvent situées dans des pays fiscalement favorables).

— **Autres atouts juridiques de la réassurance .**

La réassurance peut être un outil utile pour résoudre des contraintes juridiques telles que la conformité réglementaire. Par exemple, si une compagnie d'assurance n'a pas de licence formelle pour exercer ses activités dans un certain pays, une solution peut consister à trouver un assureur local disposant d'une telle licence et à agir en tant que réassureur pour cette compagnie locale.

— **Solutions financières.**

Le réassureur peut servir de facilitateur pour des solutions financières. Des exemples incluent la réduction des coûts de détresse financière en fournissant des solutions de transferts de portefeuille vers d'autres compagnies ou les marchés financiers, ainsi que la mise en place de transactions de titrisation comme l'émission d'obligations.

— **Protection contre les risques liés aux modèles.**

Les activités d'assurance sont conçues sur la base de modèles stochastiques pour les risques sous-jacents. Pour la performance agrégée, la compréhension à la fois des risques marginaux et de leur dépendance est importante.

Cependant, chaque modèle est une description imparfaite de la réalité, et moins on a d'expérience et de données, plus l'incertitude sur l'adéquation du modèle sous-jacent au plan d'activité est élevée.

La réassurance est un moyen d'atténuer l'inadéquation du modèle, par exemple, en ce qui concerne les queues de distribution des risques ou leur dépendance.

— **Support pour le développement de nouveaux produits**

Dans certaines situations, une compagnie d'assurance n'a pas suffisamment de points de données ou de main-d'œuvre disponibles pour analyser les risques (en particulier leurs queues), et transférer ces risques à une entité disposant de l'expérience requise est une procédure naturelle, souvent beaucoup moins coûteuse que de traiter ces risques par d'autres moyens. Cela inclut également les expansions commerciales vers de nouvelles régions ou de nouvelles lignes d'activité, dans lesquelles le réassureur peut déjà avoir de l'expérience à partir d'activités antérieures. En fait, les contrats de réassurance ont souvent une composante de conseil, car le réassureur peut partager son expertise et ses données sur les risques respectifs avec le cédant.

— **Aspect social de la réassurance**

D'un point de vue social, la réassurance permet aux assureurs de développer davantage leur activité, ce qui rend l'assurance plus largement disponible et abordable. Cela peut favoriser la croissance économique et accroître la stabilité de manière générale. La réassurance permet d'assurer des risques qui seraient au-

trement non assurables, et l'attribution de primes aux risques (c'est-à-dire leur quantification) peut également inciter à adopter des comportements plus adaptés aux risques et éventuellement à prévenir les risques. Pour toutes ces raisons, la réassurance sert d'outil pour accroître l'efficacité du marché. Lors de la conception des contrats de réassurance, tous ces aspects jouent un rôle.

Ces avantages liés à la réassurance peuvent être rassemblés en 3 catégories : la réassurance en tant que support technique, la réassurance en tant que support financier, et la réassurance en tant qu'outil de transfert de risques [6].

1.3 Les formes de réassurances

La réglementation et la pratique ont permis de distinguer plusieurs formes et types de réassurance.

Réassurance facultative et réassurance obligatoire

La réassurance se divise en 2 grands types : la réassurance est dite "facultative" lorsque la totale liberté de souscription est laissée tant au réassureur qu'à l'assureur. Les opérations proposées par l'assureur sont alors examinées risque par risque par le réassureur qui reste libre de les refuser. À l'opposé, en réassurance obligatoire, les opérations sont traitées au niveau d'une branche d'assurance et chacune des 2 parties s'engagent à accepter pour l'un (l'assureur) à proposer tous les risques relevant de cette branche, et l'autre (le réassureur) s'engage à les accepter. Dans ce cas, un traité de réassurance vient sceller les conditions de l'accord intervenu entre les deux parties.

Dans certains pays comme les Etats-Unis, il existe une forme rare de mixité appelée réassurance facultative-obligatoire, mais elle ne concerne pas le monde de l'assurance européen. Ici, la cédante choisit quels sont les risques qui seront cédés au réassureur qui doit accepter de couvrir tous ces risques.

Lorsqu'une compagnie d'assurance décide d'opter pour la réassurance, que celle-ci soit facultative ou obligatoire, elle doit ensuite choisir entre deux formes de réassurance : proportionnelle ou non proportionnelle.

Pour les besoins de notre étude, introduisons dès à présent les écritures et notations suivantes :

Soit $X_i; i \in \mathbf{N}$ des variables aléatoires représentant les montants des sinistres individuels subis par le premier assureur.

Soit $N(t); t \geq 0$ un processus de comptage où $N(t)$ représente le nombre de sinistres jusqu'au temps $N(t); t > 0$ (en général une base annuelle est considérée).

Alors, le montant total ou agrégé des sinistres au temps t pour le premier assureur est donné par :

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & N(t) > 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par ailleurs, cette somme totale des sinistres peut se décomposer en :

$$S(t) = A(t) + R(t)$$

Où $A(t)$ représente le montant restant à la charge de l'assureur de première ligne après la réassurance, et $R(t)$ le montant à charge du réassureur.

Pour de nombreux contrats de réassurance, la répartition sera définie sur les risques individuels X_i , et dans ce cas, nous écrivons :

$$X_i = A_i + R_i.$$

$P_t = E(S_t)$, Θ et β désignent respectivement l'ensemble des primes pures, le chargement de sécurité et le chargement pour frais de gestion. Alors, la prime commerciale s'écrit :

$$\tilde{P}_t = (1 + \theta)P_t + \tilde{P}_t\beta$$

Dans la suite, on considère P , la prime annuelle pure encaissée par l'assureur sur une année d'exercice.

Discutons à présent les formes de réassurance et leurs différentes déclinaisons
les traités de réassurance sont classiquement répartis suivant deux grandes formes : les traités en réassurance proportionnelle et les traités dits non-proportionnels.

1.3.1 La réassurance proportionnelle

Il s'agit de la forme de réassurance la plus intuitive.
Sommairement, elle consiste en une participation proportionnelle du réassureur aux gains (primes) et pertes (sinistres) de la cédante.

Elle se décline en sous plusieurs formes :

La réassurance en Quote-part (QS ou Quota Share)

Dans cette forme de réassurance, les intervenants partagent proportionnellement le risque et les primes suivant un facteur a ($0 < a < 1$) appelé taux de cession, de sorte que :

$$R(t) = a.S(t),$$

$$A(t) = (1 - a).S(t)$$

Abordons quelques aspects mathématiques de cette forme de réassurance, utiles à sa tarification et à l'étude de son efficience.

1. Si l'on suppose que les risques individuels X_i sont identiquement distribués, on a :

$$\mathbb{P}(R_i \leq x) = F_{X_i}\left(\frac{x}{a}\right),$$

$$\mathbb{P}(A_i \leq x) = F_{X_i}\left(\frac{x}{1-a}\right).$$

2. Puis, les moments d'ordre $r \forall r \in \mathbb{Z}$ des A_i et R_i s'obtiennent suivant :

$$\mathbb{E}(R_i^r) = a^r \cdot \mathbb{E}(X_i^r)$$

$$\mathbb{E}(A_i^r) = (1-a)^r \cdot \mathbb{E}(X_i^r)$$

Du point de vue avantage, la réassurance en quote-part permet principalement d'augmenter le capital de Solvabilité disponible.

Considérons P_t le cumul des primes à l'instant $t > 0$, S_t le montant cumulé des sinistres et c le capital disponible.

En effet, [14] permet de dire que la probabilité de ruine avant application du traité s'écrit :

$$\mathbb{P}(c + P_t \leq S_t)$$

Suivant le principe de la réassurance en quote-part cette probabilité devient pour l'assureur (après application du traité) :

$$\mathbb{P}(c + (1-a).P_t \leq (1-a).S_t) = \mathbb{P}\left(\frac{c}{1-a} + P_t \leq S_t\right).$$

Un autre avantage de la réassurance en QS est d'améliorer la capacité de l'assureur à souscrire de nouvelles polices suivant les dispositifs réglementaires. En fait, selon les principes comptables statutaires impliqués par le régulateur, un assureur doit enregistrer immédiatement dans son bilan toutes les dépenses liées à l'émission d'une police, mais la prime correspondante ne peut être enregistrée que progressivement pendant la durée de la police ; la réserve de prime non acquise nécessaire réduit considérablement le surplus et un arrangement en QS améliore cette situation en réduisant simultanément cette réserve et les dépenses.

Les contrats en QS sont surtout utilisés au démarrage de petites compagnies pour élargir leurs chances de souscription de polices et acquérir de l'expérience sur un nouveau marché avec une limitation de risques.

Pour le réassureur, un traité en QS peut également avoir l'avantage d'acquérir une expérience des sinistres sur ce marché particulier, ce qui peut être utile dans d'autres portefeuilles connexes.

Aussi, ces traités sont faciles à combiner, c'est-à-dire qu'un assureur peut avoir simultanément des contrats en QS sur le même portefeuille avec différents réassureurs .

Un des principaux inconvénients de la réassurance en QS est qu'en raison de sa forme, tous les sinistres sont partiellement réassurés, et non seulement les plus importantes d'entre elles. Cela n'est souvent pas idéal, car les sinistres des petites polices pourraient facilement être supportés par l'assureur seul.

La réassurance en Excédent de pleins ou XP (surplus share)

Dans le cas des traités en quote-part, un ratio de cession est défini pour l'ensemble du portefeuille, tant sur les petits risques que sur les grands. Afin de garder les petits risques, il convient d'utiliser un autre type de réassurance : l'excédent de plein. C'est aussi un traité proportionnel, car les primes et les sinistres sont partagés selon un ratio défini à l'avance.

Le montant de la rétention est appelé plein (P). La couverture de réassurance intervient au-delà, d'où son nom. La capacité, ou portée du traité est exprimée en nombre de pleins (N). Le traité étant noté de façon abrégée N XP P. Les primes de réassurance sont proportionnelles au risque (montant couvert, on parle de somme sous risque).

Considérons un risque X_i avec un montant Q_i de somme sous risque.

Alors, le taux de rétention r_i pour ce risque s'écrit :

$$r_i = \frac{\min(\max(Q_i - P, 0), N.P)}{Q_i}$$

et on a alors : $R_i = r_i.X_i$ et $A_i = (1 - r_i).X_i$.

Une autre expression directe peut se décliner sous la forme suivante :

$$R_i = \left(1 - \frac{P}{Q_i}\right) X_i \cdot \mathbf{1}_{\{Q_i > P\}}$$

et

$$A_i = X_i \cdot \mathbf{1}_{\{Q_i \leq P\}} + \frac{P \cdot X_i}{Q_i} \cdot \mathbf{1}_{\{Q_i > P\}}$$

1.3.2 La réassurance non proportionnelle

Dans le système de la réassurance non proportionnelle, le réassureur n'intervient qu'à un certain seuil de sinistre ou de perte de la cédante. Le réassureur touchera pour cela un pourcentage de la prime. Le sort de la cédante et du réassureur sont beaucoup moins liés, ainsi au cours d'une année d'exercice. On parle souvent de partage du sort : pour définir si la réassurance est plus favorable à l'une des deux parties ou s'ils se partagent

équitablement le risque et les primes.

Cette forme de réassurance peut également se décliner en diverses expressions :

La réassurance en XS tête (*Excess of loss per risk*)

Dans le cas d'espèce, le réassureur s'engage à payer, dans une période déterminée, un montant inférieur ou égal à la portée à chaque fois qu'une police est sinistrée pour un montant supérieur à la priorité. La limite est le total des deux. En échange, la cédante paye une prime annuelle globale. On note « portée XS priorité » (ou portée XL priorité). Pour la suite, nous considérons le traité L XS M.

Sous ces notations, on a :

$$R_t = \sum_{i=1}^N \min\{(X_i - M)^+, L\}$$
$$A_t = \sum_{i=1}^N X_i - \min\{(X_i - M)^+, L\}$$

où $(X - u)^+ := \max\{X - u, 0\}$.

Cette forme de réassurance est très populaire dans les assurances accidents et incendies, car elle réduit l'exposition de la compagnie cédante de manière efficace et a une forme intuitive et simple. Cependant, le calcul de la prime est beaucoup plus complexe que pour les formes de réassurance proportionnelle.

Réassurance en XS Cat (*Excess of loss per event*)

De même que l'on définit des XS par risque, il est possible de définir des traités XS s'appliquant à des risques découlant d'un même événement.

En vie, le risque couvert est un événement accidentel défini, impliquant plusieurs assurés sinistrés (événement catastrophique).

En assurance non-vie, le réassureur s'engage à payer, sur une période prévue à l'avance, un montant inférieur ou égal à la portée à chaque fois que plusieurs polices sont sinistrées du fait d'une cause identique, un événement, pour un montant supérieur à la priorité.

Réassurance en Stop Loss (SL)

Le réassureur couvre une tranche du rapport sinistres à primes de la cédante dans l'année sur le portefeuille (la portée) au-dessus du rapport sinistres à primes conservé par la cédante (la priorité). On note Capacité SL Priorité.

Un contrat de type *stop-loss* est particulièrement utile si l'attribution des sinistres à un événement particulier pour une réassurance par événement est difficile (comme la

grêle, l'agriculture ou le gel des conduites d'eau). De plus, tous les petits sinistres contribuent au montant réassuré, ce qui rend cette forme de réassurance moins efficace.

En pratique, une telle forme de réassurance est généralement combinée avec une couverture proportionnelle et/ou XL applicable au traité de type *stop-loss* (c'est-à-dire que la caractéristique du *stop-loss* ne s'applique qu'au risque restant après les autres traités).

Même pour un portefeuille de biens relativement simple, il est assez courant de combiner différents types de protections en réassurance. Cela complique clairement l'analyse des contrats et rend encore plus important de comprendre clairement les implications de chaque type de contrat sur la nature du risque retenu et réassuré. L'une des principales raisons de la mise en œuvre de telles combinaisons est l'hétérogénéité au sein du portefeuille. L'hétérogénéité est induite par la différence de sommes assurées par police, mais aussi par des différences de couverture (vol, protection des tiers, etc.) et de type (risques simples, commerciaux ou industriels, etc.).

À l'instar des contrats d'assurance classiques, un contrat de réassurance comprend traditionnellement des conditions générales et des conditions particulières (Des annexes peuvent être ajoutées) qui se résument en quelques clauses. Nous présentons ici quelques-unes, utiles au cadre de notre étude (en général inspiré de [8]) :

Clauses traditionnelles assorties aux contrats en réassurance proportionnelle

Dans le cadre des traités de réassurance proportionnelle, on a :

— **Les commissions de réassurance**

Les commissions de réassurance correspondent à des versements du réassureur à la cédante pour participation à la gestion des sinistres et des frais d'acquisition du portefeuille couvert.

Elle constitue la participation du réassureur aux coûts d'acquisition des polices, coûts d'estimation et de règlement des sinistres ainsi que d'autres coûts administratifs qui sont supportés par la cédante.

Cette commission de réassurance est en général fixée selon l'estimation que dresse du rapport sinistres à primes (S/P), ou peut être variable ou à échelle de sorte que le taux augmente si le rapport sinistres sur primes diminue.

Chaque année, la Fédération Française d'Assurance (FFA) fournit quelques chiffres clés sur la réassurance dans différents secteurs, notamment les pratiques en termes de taux de commission.

[8] donne quant à lui quelques chiffres standards : « Les taux de commission sont en général fonctions de la branche d'assurance (incendie risques des particuliers 30%, incendie risques industriels 25%, automobile 25%, transport 20%) ou les résultats du traité (en effet, il est possible que la commission de réassurance soit fixée telle que la marge du réassureur devienne égal à celui de l'assureur (partage équitable du sort)».

Dans la suite de ce mémoire, nous adopterons les notations suivantes : nous désignerons par β_r le taux de commission reversée par le réassureur à l'assureur (avec $\beta_r \leq \beta$ le plus souvent).

Une problématique à présent est de déterminer la forme mathématique de β_r : fixe ou stochastique ?

Sur le marché de la réassurance, on trouve des traités en quote part assortis de **commissions variables** dont la valeur dépend de la sinistralité à postériori du portefeuille couvert (varie dans le même sens que la sinistralité) et donc stochastique. Du point de vue de l'assureur, une telle clause peut paraître comme une protection supplémentaire pour protéger son résultat, elle semble contre-intuitive pour le réassureur puisqu'en cas de perte, il réduirait son résultat davantage.

L'existence de pareil accord s'explique non seulement par la forte compétitivité du marché de la réassurance, mais aussi par le fait que la clause permet au réassureur de limiter l'aléa moral.

Lorsqu'il s'agira de commissions variables, nous noterons $\tilde{\beta}_r$, la variable aléatoire continue sur $[0, 1]$.

En pratique, le niveau de la commission variable est donnée selon une fonction en escalier dépendant du niveau du loss ratio observé.

— La participation aux bénéfices

Lorsque les résultats du compte de réassurance (le réassureur applique des frais afin de déterminer cette participation -cf. figure 1.1) sont favorables pour le réassureur, celui-ci peut restituer une partie de sa marge sous forme d'une participation aux bénéfices.

Contrairement au cadre assurantiel, cette participation n'obéit à aucune réglementation et est donc fixée assez arbitrairement.

Formellement, la participation aux bénéfices peut être assimilée à une variable aléatoire, répondant aux mêmes caractéristiques qu'une commission variable, discutée plus haut.

Clauses traditionnelles assorties aux contrats en réassurance non proportionnelle

Ici, les clauses concernent principalement les contrats de réassurance en *excess of Loss*.

— Clause de franchise annuelle (AAD, Annual Aggregate Deductible)

Cette clause constitue avec l'AAL des clauses de responsabilisation de l'assureur en limitant l'intervention du réassureur sur une période définie.

L'ADD définit la charge plancher pour l'assureur sur la période choisie, en dessous de laquelle la réassurance n'agit pas.

— Clause de plafond annuel (AAL, Annual Aggregate Limit)

De manière analogue à l'AAD, l'AAL constitue la charge plafond du réassureur sur la période définie.

Sous ces considérations, dans le cas d'un traité L XS M A et R respectivement les charges de l'assureur et du réassureur se réécrivent (unité de temps une année pour simplifier les notations) :

$$R = \min \left(\max \left(\sum_{i=1}^N (\min (\max (X_i - M, 0), L) - AAD, 0), AAL \right) \right)$$

$$A = \sum_{i=1}^N X_i - R$$

— **Clause de reconstitutions**

Cette clause vise à garantir que la cédante, ne se retrouve jamais sans couverture de réassurance à un moment donné.

En fait, très souvent, des évènements peuvent amener à l'épuisement de la capacité de la couverture en début d'année, et les assureurs se retrouvent sans couverture le reste de l'année.

L'objectif des reconstitutions est d'éviter ces scénarios en réinitialisant la capacité du traité moyennant une prime supplémentaire appelée prime de reconstitution. Aussi, la clause de reconstitutions et la clause de plafond annuel sont liées par l'équation :

$$AAL = (n + 1)L$$

où n désigne le nombre de reconstitutions autorisées par le traité.

Prime annuelle : 100
 Sinistralité annuelle : 65
 Commission : 10%
 Participation bénéfice : 50%

Compte de PB	Sans frais	3% de frais	10% de frais
Primes	100	100	100
Sinistres	-65	-65	-65
Commission	-10	-10	-10
<i>Frais</i>	<i>0</i>	<i>-3</i>	<i>-10</i>
Résultat du compte de PB	25	22	15
Participation bénéficiaire	-12,5	-11	-7,5
Résultat réassureur	12,5	14	17,5

FIGURE 1.1 – Compte de réassurance, vision réassureur

1.3.3 La tarification de la réassurance

Considérations générales

Si l'on considère $S(t)$ le risque sujet à réassurance et R_t la part couverte par celle-ci, il est alors naturel que la tarification de cette réassurance se résume en la détermination de ϕ telle que la prime commerciale de réassurance P_{cedee} obéisse à : $P_{cedee} = \phi(R_t)$. Pour que ϕ soit un principe de calcul "acceptable", elle doit obéir à quelques propriétés notamment :

- Chargement positif : $E(R_t) \leq \phi(R_t)$
- Condition de fiabilité : $\phi(R_t) \leq \inf\{x \mid F_{R_t}(x) = 1\}$
- Homogénéité positive : $\phi(a.R_t) = a.\phi(R_t)$ pour toute constante réelle $a > 0$
- Invariance par translation : $\phi(R_t + b) = b + \phi(R_t)$ pour toute constante réelle b

Aussi,[1] suggère d'autres propriétés exprimées en fonction de deux risques R_t^1 et R_t^2 respectivement de fonctions de répartition $F_{R_t^1}$ et $F_{R_t^2}$, :

- Monotonie : $\Phi(R_t^1) \leq \Phi(R_t^2)$ si $F_{R_t^2}(x) \geq F_{R_t^1}(x)$ pour tout x
- Sous-additivité : $\Phi(R_t^1 + R_t^2) \leq \Phi(R_t^1) + \Phi(R_t^2)$
- Additivité : $\Phi(R_t^1 + R_t^2) = \Phi(R_t^1) + \Phi(R_t^2)$ si R_t^1 et R_t^2 sont indépendants
- Convexité : $\Phi(p.R_t^1 + (1-p)R_t^2) \leq p\Phi(R_t^1) + (1-p)\Phi(R_t^2)$ pour tout $0 < p < 1$.

Certaines de ces propriétés ne sont pas toujours appropriées dans toutes les situations. Par exemple, l'homogénéité positive peut sembler naturelle pour les conversions de devises, mais elle peut ne pas avoir de sens lorsque a représente un nombre énorme reflétant un risque multiplié à grande échelle.

Abordons à présent quelques formulations usuelles de ϕ qui donnent lieu à différents principes de calcul de la prime de réassurance :

- **Le principe de l'"Expected Value"** :

$$\phi(R_t) = (1 + \theta) \cdot E(R_t),$$

où $\theta > 0$ désigne le chargement de sécurité. Ce principe est largement répandu en raison de sa transparence et de sa simplicité, particulièrement dans les portefeuilles de réassurance où l'information sur les sinistres individuels peut être limitée.

- **Le principe de la variance** :

$$\phi(R_t) = E(R_t) + \alpha_V \cdot \text{Var}(R_t),$$

où α_V est une constante positive. Ce principe est d'usage lorsque l'on peut déterminer le moment d'ordre 2 de R_t .

Une déclinaison de ce principe appelée principe de l'écart-type suggère :

$$\phi(R_t) = E(R_t) + \alpha_{ec} \cdot \sqrt{\text{Var}(R_t)},$$

où α_{ec} est une constante positive.

D'autres principes moins répandus se basent sur l'estimation de moments d'ordre supérieurs, la transformée Fourier, de Laplace, ou encore la fonction de Hasard proportionnel. Ainsi, la méthode de calcul de la prime est étroitement liée à la quantité d'informations que l'on dispose sur la distribution de R_t .

Bien que ces principes posent les bases de la tarification en réassurance, la difficulté à estimer les informations nécessaires à leur application et la nécessité de prendre en compte les considérations de la réassurance, causent un écart entre la théorie et la pratique. Dans les paragraphes suivants, nous discutons la tarification en pratique.

Tarification des traités proportionnels

Pour les traités en réassurance proportionnelle, le calcul de la prime est généralement assez simple, car il est naturel de répartir la prime $P(t)$ en fonction du même pourcentage que le risque $S(t)$. C'est effectivement le principe directeur.

Par exemple, dans un traité de quote-part avec $R(t) = a \cdot S(t)$, la part de prime correspondante serait

$$P_{cedee} = a \cdot P(t)$$

Pour les traités en excédent, la part de prime doit être déterminée en fonction du facteur de proportionnalité respectif de chaque police (ou groupe de polices).

Notons qu'en pratique, plusieurs autres éléments doivent être pris en compte. Le plus important est la commission de réassurance qui est déduite de la prime de réassurance.

Tarification des contrats en réassurance non proportionnelles

La tarification de la réassurance non proportionnelle est nettement plus complexe que celle des traités proportionnels. Dans les traités de réassurance non proportionnelle courants, il est souvent difficile de déterminer plus que les moments d'ordre 1 et d'ordre 2, ce qui conduit fréquemment à l'utilisation du principe de "l'*expected Value*" ou du principe de la variance. De plus, certaines clauses (telles que les reconstitutions) compliquent encore davantage la détermination des deux premiers moments.

En pratique, les assureurs utilisent la cotation par *burning cost* (estimer la ration sinistre à prime revenant à charge du réassureur.)

Notons par ailleurs que de nombreuses autres considérations rentrent en ligne dans la tarification d'un contrat de réassurance, notamment l'offre et la demande, l'inflation et le contexte géopolitique; dont des chiffres sont disponibles notamment sur les sites de l'APREF (APREF, Association des Professionnels de la Réassurance) ou des organismes spécialisés.

Dans la suite, pour limiter le temps de calcul de nos algorithmes, on se limitera à une tarification selon le principe de "l'*expected Value*" avec $\theta = 10\%$ (prime de sécurité) tant pour les traités proportionnels que non proportionnels.

Chapitre 2

De l'optimisation de la réassurance

Dans ce chapitre, nous posons les contours mathématiques de notre analyse ainsi que les outils nécessaires à sa mise en œuvre.

2.1 Contexte et problématique

La réassurance, en tant que mécanisme substantiel de gestion des risques de fréquence et de pointe, trouve sa place au sein d'une stratégie organisationnelle élaborée conjointement par les équipes actuarielles et la direction de l'entreprise.

Tandis que le top management établit les objectifs quantitatifs de l'entreprise, il incombe aux équipes actuarielles de concevoir des stratégies optimales en vue d'atteindre ces objectifs tout en se préservant des scénarios susceptibles de les entraver.

Cette démarche implique une évaluation de l'efficacité de divers contrats de réassurance, y compris ceux déjà en place, ainsi qu'une étude approfondie des options de contrats alternatifs.

La problématique peut donc se décliner à travers les interrogations suivantes :

- Étant donné des objectifs à atteindre, et une stratégie de réassurance, comment évaluer l'optimalité de cette stratégie ?
- quels sont les outils d'analyse des effets de variation de cette stratégie ?
- et enfin plus généralement, quelle est la meilleure stratégie parmi les options envisagées et au-delà ?

La littérature mathématique met à disposition un vaste éventail d'instruments pour analyser et confronter divers contrats entre eux. [7] propose une analyse en dominance stochastique d'ordre 1 entre les variables aléatoires caractérisant les pertes après réassurance de différents types de contrats.

Étant donné deux stratégies de réassurance A et B menant aux pertes R_1 et R_2 après réassurance, avec des fonctions de répartition F_{R_1} et F_{R_2} respectivement, si les pertes associées à la première stratégie, R_1 , dominent stochastiquement celles de la seconde stratégie, R_2 , à l'ordre 1 (c'est-à-dire si $F_{R_1} \leq F_{R_2}$ en tout point, ou de manière équi-

valente, si $E[f(R_1)] \leq E[f(R_2)]$ pour toute fonction f croissante), alors il est naturel de privilégier la première stratégie à la seconde. Cette approche, elle souffre de réalisme expérimental car en pratique, il est difficile de trouver des traités pour lesquels cette dominance stochastique est assurée.

L'étude menée par [11] quant à elle se focalise sur la notion de dominance stochastique d'ordre 2, qui se révèle être d'une pertinence plus marquée dans un contexte pratique. En considérant deux schémas de réassurance A et B , générant les pertes R_1 et R_2 post-réassurance, avec les fonctions de répartition F_{R_1} et F_{R_2} respectivement, si les pertes associées à la première stratégie, R_1 , dominent stochastiquement celles de la seconde stratégie, R_2 , à l'ordre 2 (c'est-à-dire si $E[f(R_1)] \leq E[f(R_2)]$ pour toute fonction f convexe décroissante), il est alors judicieux de privilégier la première stratégie à la seconde. Pour mieux appréhender ce concept, voyons que lorsque nous fixons $f(x) = -x^2$, la dominance stochastique d'ordre 2 conduit à choisir le schéma de réassurance qui minimise la variance des pertes.

Cette approche quoique plus générale se heurte cependant à son incapacité à prendre en compte tous les objectifs de l'entreprise. Il est en effet difficile de résumer tous les objectifs d'une compagnie en une seule fonction convexe décroissante (encore faut-il trouver cette fonction et prouver sa convexité).

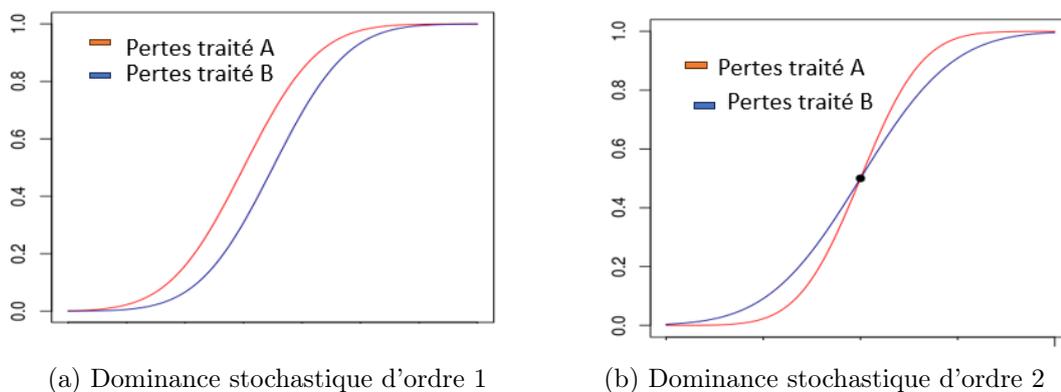


FIGURE 2.1 – Dominance stochastique d'ordre 1 et 2

Une voie d'issue se dessine cependant, car toutes ces méthodes précédentes introduisent la notion d'ordre et de préférence sur l'ensemble des traités. Et si l'on remarque les similarités du problème avec la théorie du portefeuille de Markowitz, la solution devient évidente! Il s'agira donc de définir une notion d'ordre sur l'ensemble des traités et faire émerger les meilleurs d'entre eux selon les critères et les contraintes imposées par l'assureur.

2.2 Frontière efficiente

À bien des égards, le problème de réassurance optimale se rapproche du problème du portefeuille efficient : étant donné un ensemble de stratégies, quelles sont les plus efficaces ? Markowitz nous permet d'y répondre dans un espace de deux objectifs rendement-risque.

Cette approche peut s'appliquer à la réassurance et être généralisée dans un espace de $n > 2$ objectifs : il s'agit de la frontière de Pareto dans un environnement multiobjectif. Quels sont les fondements mathématiques de pareille approche ?

Définir la réassurance optimale reste une tâche difficile car elle dépend du choix des indicateurs quantifiant les objectifs, les contraintes et du niveau de confiance fixés par l'entreprise. La solution la plus simple et la plus usuelle consiste à utiliser les mesures de risque et les niveaux de confiance fournis par Solvabilité II.

Dans sa forme la plus générale, un problème d'optimisation multiobjectif se définit comme la recherche d'un sous-ensemble de solutions admissibles, au sein d'un ensemble donné, qui minimisent (maximisent ou agissent de façon conflictuelle) simultanément plusieurs objectifs.

Dans les problèmes d'optimisation mono-objectif, la supériorité d'une solution par rapport à d'autres solutions est facilement déterminée en comparant leurs valeurs de fonction objectif. Dans un problème d'optimisation multiobjectif cependant, la qualité d'une solution est déterminée par la notion de dominance de Pareto introduite par l'économiste Vilfredo Pareto (le lecteur est convié à voir [10] pour davantage de précisions).

Plus formellement, on note \mathcal{T} l'ensemble des traités. Étant donné le problème (P), on souhaite trouver

$$\mathcal{T}_S = \{x \in \mathcal{T} \mid x \text{ solution de (P)}\} \subset \mathcal{T}$$

avec (P) défini comme suit :

$$(P) : \begin{cases} \max f_i(x), & \text{pour } i = 1, \dots, M \\ \text{S.c : } g_j(x) \geq 0, & \text{pour } j = 1, \dots, K \end{cases}$$

Où $f_i(x)$ désigne la fonction f_i après application du traité x sur le risque sujet à réassurance.

Notion de dominance au sens de Pareto

Considérons le problème (P) et $(x_1, x_2) \in \mathcal{T}^2$.

On dit que x_1 domine x_2 au sens de Pareto (et on note $x_2 \prec x_1$) si :

- $\forall i \in \{1, 2, \dots, M\}, f_i(x_2) \leq f_i(x_1)$
- $\exists j \in \{1, 2, \dots, M\}$ tel que $f_j(x_2) < f_j(x_1)$

Optimum de Pareto

On dit qu'une solution $x \in \mathcal{T}$ est un optimum de Pareto ou Pareto-optimale si :

$$\nexists y \in \mathcal{T} \text{ tel que } x \prec y$$

Frontière de Pareto ou frontière efficiente

La frontière de Pareto, notée $front_P$, est définie comme l'ensemble des solutions Pareto-optimales de \mathcal{T} telles que :

$$P_a = \{x \in \mathcal{T} \mid \nexists y \in \mathcal{T}, x \prec y\}$$

La frontière de Pareto $front_P$, est donc définie par :

$$front_P = \{f(x) = (f_1(x), \dots, f_M(x)) \mid x \in P_a\}$$

Sur la figure 2.2, l'ensemble est donnée par les points de risque minimal, sur chaque ligne d'isorentabilité et inversement.

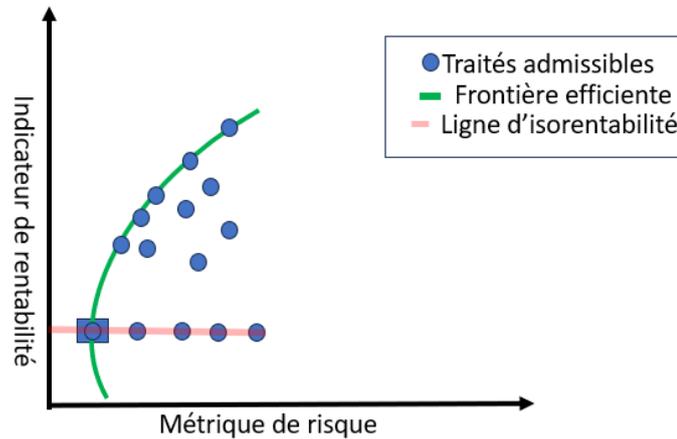


FIGURE 2.2 – Frontière efficiente et traités optimaux de réassurance

Si dans le cas de Markowitz, on arrive à une équation analytique de la frontière, cela ne s'applique pas à l'étude prospective de la réassurance que nous proposons via une approche Monte-Carlo. Toutefois, si l'on parvient à définir les valeurs des fonctions objectives pour une liste de traités, alors, il est possible de faire émerger la frontière en utilisant des techniques adaptées.

Le cadre ainsi posé, il convient de mettre en place une démarche d'explicitation des fonctions f_i et g_j , $i = 1, \dots, M$; $j = 1, \dots, K$.

Une approche naturelle mène aux deux types de fonctions évoquées dans les paragraphes précédents : fonction de risque et fonctions de profit.

2.3 Métriques et critères de choix de traités

Dans la multitude de couvertures s'offrant à lui, un assureur doit être capable de choisir la meilleure solution selon qu'il souhaite maximiser son profit après réassurance, minimiser son risque ou encore modifier son profil.

Étant donné un portefeuille multi-branches (non vie) à la date t , caractérisé par $S(t)$ et $P(t)$ respectivement les montants de sinistres et de primes à l'ultime de la date t ; l'assureur doit opter pour une série (système) de traités de réassurances. On appelle une telle série un plan de réassurance.

Il est difficile, voire impossible, de formaliser complètement le processus de décision sur le choix d'une forme de réassurance et de sa spécification concrète car de nombreux facteurs non quantifiables tels que l'expérience sur le marché, ainsi que la disponibilité de formes de contrat demandées à un prix raisonnable influent sur une telle décision.

Toutefois, lorsque la fonction objective (à maximiser ou à minimiser) et les contraintes possibles sont définies, l'identification du traité de réassurance optimal devient un problème purement mathématique, et conduit parfois à des solutions tout à fait gérables et parfois même simples.

Aussi, il existe un compromis naturel entre la complexité des critères de décision considérés et la faisabilité mathématique d'une solution possible au problème d'optimisation qui en découle. Nous commencerons par les critères qui ont généralement été pris en compte dans la littérature universitaire jusqu'à présent et qui constitueront la base de la plupart des résultats discutés.

Nous adoptons la notation suivante : pour X une variable brute de réassurance, nous notons $X_{\mathcal{R}}$, la valeur nette de réassurance.

Critères de rentabilité

— Le résultat du compte de réassurance ou résultat technique (vision assureur)

Le résultat du compte de réassurance $\text{Résultat}_{\mathcal{R}}$ ainsi que les indicateurs de profits connexes (RORAC, Ratio technique, Ratio combiné ,..etc) sont des variables de contrôle majeures dans le choix d'un programme de réassurance.

Plus formellement, on a :

$$\text{Résultat}_{\mathcal{R}} = P - A - \text{Frais} - (P_{\text{cedée}}) + \text{éventuelles commissions}$$

Et les indicateurs qui en découlent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ratio}^{S/P} = \frac{S_t}{P} \\ \text{Ratio}_{\mathcal{R}}^{S/P} = \frac{A}{P - P_{\text{cedée}}} \\ \text{Ratio}_{\text{comb}} = \frac{S_t + \text{Frais}}{P} \\ \text{Ratio}_{\text{comb}\mathcal{R}} = \frac{A + \text{Frais} - \text{éventuelles commissions}}{P - P_{\text{cedée}}} \end{array} \right.$$

Par ailleurs, il est intéressant de regarder la rentabilité par rapport au capital réglementaire mobilisé SCR.

On définit alors la RORAC (*Return On Risk Adjusted Capital*) :

$$\text{RORAC} = \frac{\text{Résultat}}{\text{SCR}}$$

— **Coût de la réassurance et ROL**

Le coût de la réassurance est un autre aspect économique important. En pratique, un budget annuel est alloué à la réassurance et une condition de l'optimisation se dégage naturellement.

Aussi, une comparaison de prix de traités à capacités différentes serait sujette à des erreurs car il est normal que le traité le plus absorbant soit le plus cher.

Nous nous intéressons davantage au ROL : le « *Rate on Line* » (ROL) est le rapport entre la prime de réassurance et la capacité du programme. Un ROL élevé indique que l'assureur doit payer davantage pour la couverture, tandis qu'un ROL plus bas signifie que l'assureur doit payer moins pour le même niveau de couverture.

On introduit :

$$\text{ROL} = \frac{R \text{ (la capacité)}}{P_{\text{cedée}}}$$

Critères d'appétence au risque

— **La volatilité du résultat**

L'un des principaux objectifs de la réassurance est de réduire la volatilité du résultat net $\text{Variance}(\text{Résultat}_{\mathcal{R}})$.

Dans le cadre de ce mémoire, nous nous intéressons également à $\text{Variance}(A)$, la volatilité de la sinistralité après réassurance.

— **La probabilité d'avoir un résultat négatif**

Dans des conditions normales de marché, les cessions en réassurance peuvent augmenter la probabilité d'être en déficit même si cela réduit le montant moyen des pertes. Il est donc intéressant de voir la probabilité d'avoir un résultat négatif :

$$\mathbb{P}(\text{Résultat}_{\mathcal{R}} \leq 0) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{\text{Résultat}_{\mathcal{R}} \leq 0\}}).$$

— **Le SCR et les autres mesures de risque**

Il est important de prendre en compte les exigences réglementaires dans le processus d'optimisation.

Solvabilité II impose aux assureurs de disposer de capitaux propres équivalent à une *Value-at-Risk* à 99.5% de la distribution de $S_t - E(S_t)$ [17] (SCR risque de primes).

Dans la suite, le SCR renvoie au SCR risque de prime.

On peut par ailleurs évaluer le gain en SCR via $\text{SCR}_{\text{brut de réassurance}} - \text{SCR}_{\text{net de réassurance}}$.

On pourrait également s'intéresser à d'autres mesures de risques cohérentes telles que la CTVar (*Conditional Tail Value at Risk*) ou la transformée de Wang qui permettent de s'inscrire dans un cadre d'agrégation de risque (utilisation de la sous-additivité).

Le choix des métriques et le cadre général de l'optimisation peut varier d'un assureur à un autre. Néanmoins, le processus doit s'inscrire dans une vision Solvabilité II (chapitre 3).

2.4 Une approche Monte-Carlo

La gestion de risques, notamment via la réassurance, s'intéresse au contrôle de variables aléatoires définies de sorte à les circonscrire dans une zone d'appétence au risque. L'approche prospective que nous adoptons nécessite d'approcher les distributions des variables de contrôle ; la voie classique pour y parvenir est l'approche dite de Monte-Carlo.

L'approche Monte-Carlo est une méthode algorithmique visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des simulations.

Soit le critère X dont on souhaite approximer la distribution. Considérons m simulations de X , (X_1, \dots, X_m) .

Notons $\mu = \mathbb{E}[X]$, représentant la moyenne, et $\sigma = \text{sd}(X)$, représentant l'écart type de X . Les estimations par Monte-Carlo sont les suivantes :

$$\hat{\mu}_m = \frac{\sum_{i=1}^m X_i}{m} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}_m = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \hat{\mu}_m)^2}$$

Ces estimations possèdent les propriétés suivantes :

$$\mathbb{E}(\hat{\mu}_m - \mu) = 0$$

et

$$\text{sd}(\hat{\mu}_m) = \frac{\sigma}{\sqrt{m}}$$

Ainsi, les erreurs dans ces estimations diminuent progressivement lorsque $m \rightarrow \infty$.

Pour mettre en place cette méthode Monte-Carlo, la détermination d'un modèle pour le risque sujet à réassurance et par extension des critères d'optimisation est essentiel. L'optimisation passera donc par deux grandes étapes : la modélisation des risques et l'élicitation de traités optimaux, cœur de notre réflexion.

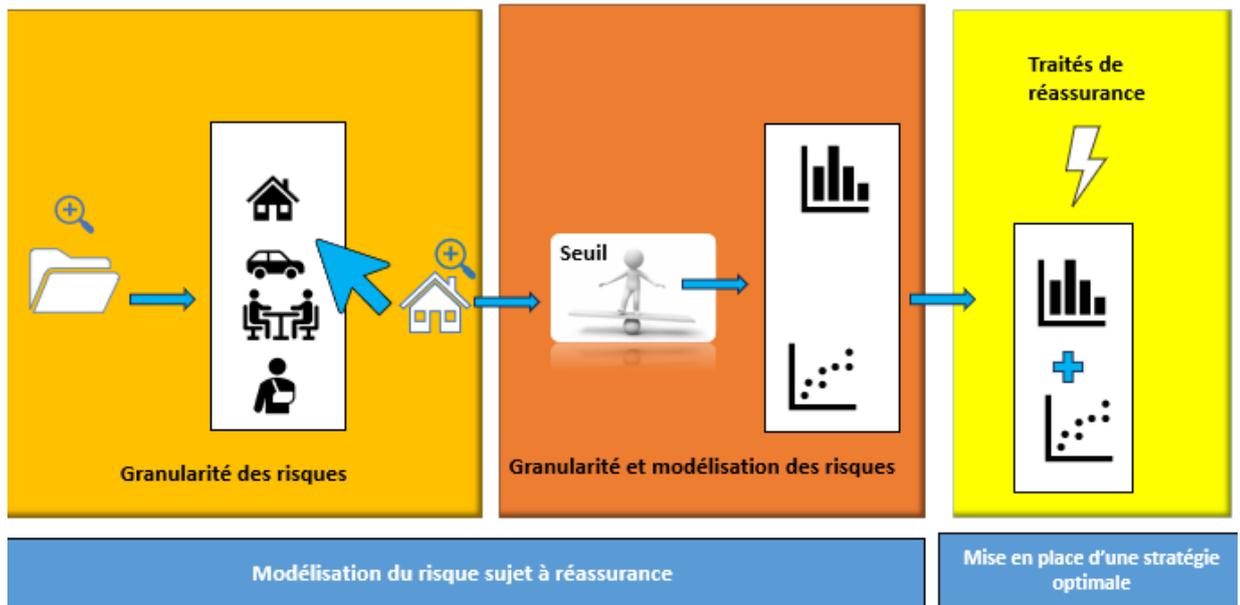


FIGURE 2.3 – Deux étapes principales de l'optimisation de la réassurance

Abordons à présent quelques outils mathématiques utiles pour la bonne compréhension de notre démarche.

2.5 Outils mathématiques connexes

Dans cette section, nous posons quelques bases liées à la théorie des valeurs extrêmes.

2.5.1 Théorie des valeurs extrêmes et queues de distributions

La théorie des valeurs extrêmes joue un rôle majeur dans l'analyse et l'optimisation de la réassurance, en ce sens qu'elle offre les outils nécessaires à l'étude des risques rares et coûteux. En effet, compte tenu de ses objectifs usuels : protection de portefeuilles contre les risques de pointes, stabilisation d'indicateurs S2 et réduction de capital, une démarche efficace de son optimisation ne peut se soustraire à l'analyse des extrêmes et à leur probabilité d'occurrence.

Dans cette partie, on introduit les outils utilisés dans le cadre de notre étude.

Statistique d'ordre

Considérons le n -échantillon i.i.d X_1, X_2, \dots, X_n .

On appelle statistique d'ordre i , que nous noterons $X_{(i)}$, le i -ième plus petit élément de l'échantillon.

On a donc : $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(i)} \leq \dots \leq X_{(n)}$.

En réassurance, l'on s'intéresse particulièrement au comportement des dernières statistiques d'ordre du portefeuille des sinistres, car il s'agit des plus coûteux.

Le théorème de Fisher-Tippett apparaît alors comme incontournable : considérons la n -ième statistique d'ordre ;

Théorème de Fisher-Tippett

S'il existe des suites $\{a_n > 0 : n \geq 1\}$ et $\{b_n \in R : n \geq 1\}$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(X_{(n)} - b_n \leq x) = H(x)$$

pour une distribution non dégénérée H , alors H est une transformation de l'une des distributions suivantes :

- I : (Gumbel) $H(x) = \exp(-\exp(-x))$, $x \in R$
II : (Frechet) $H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x - \alpha), & x > 0, \alpha > 0 \end{cases}$
III : (Weibull) $H(x) = \begin{cases} \exp(-(x)^\alpha), & x < 0, \alpha > 0, x \geq 0 \end{cases}$

Ce résultat définit donc trois types de lois qu'on appelle usuellement les domaines d'attraction ; on a donc : les domaines d'attraction de Weibull, de Frechet et de Gumbel. Si ces trois domaines d'attraction fournissent des pistes pour la modélisation des phénomènes graves et rares en réassurance, il est à noter qu'ils se comportent de façon significativement différente.

Le choix donc de l'un ou l'autre des domaines peut influencer les résultats.

Pour comprendre cette différence, il faut introduire le concept de queue de distribution

Queues de distributions

La queue de distribution de la distribution F_X de la variable aléatoire X désigne la région de cette distribution où les valeurs se trouvent en périphérie, éloignées du centre. En d'autres termes, il s'agit de la fraction de la distribution où les valeurs sont peu fréquentes ou peu probables.

Les distributions relevant du domaine d'attraction de Weibull sont caractérisées par des queues de distribution légères, tandis que celles qui appartiennent au domaine d'attraction de Gumbel et de Fréchet présentent des queues de distribution plus épaisses. Cette différence les rend plus enclines à engendrer des événements extrêmes et, par consé-

quent, à occasionner des coûts plus importants.

En pratique, les assureurs et les réassureurs ont une marge de tolérance, et ne craignent que des risques au-dessus d'un certain seuil u . Le résultat de Fisher-Tippet permet de caractériser ces risques.

Distribution Pareto Généralisée

En effet, si l'on considère toujours X de fonction de répartition F_X et u un certain seuil. Alors la variable aléatoire $Y = X - u$ pour $X > u$ suit la fonction de répartition conditionnelle :

$$G(y) = \begin{cases} 1 - \frac{F(u)}{F(x)}, & \text{si } y \geq 0, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si u est très grand alors, G suit une loi généralisée de Pareto (GPD : *Generalized Pareto Distribution*) de la forme :

$$G(y) = 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\sigma}\right)^{-1/\xi},$$

pour $y \geq u$, où ξ est le paramètre de forme qui renseigne sur le domaine d'attraction et σ est le coefficient d'échelle.

2.5.2 Lois usuelles en réassurance

Dans cette partie, nous faisons l'exposé de quelques lois usuelles en réassurance pour modéliser la loi du montant des sinistres et leur nombre.

Loi log-normale

La variable X suit une loi log-normale de paramètres μ et σ , ($X \sim \ln \mathcal{N}(\mu, \sigma)$) si le logarithme de X suit une loi normale ($\ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$). Sa densité est donnée par l'expression suivante :

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

où $x > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

Les moments de la loi log-normale sont donnés par :

$$\mathbb{E}(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$\text{Var}(X) = [\exp(2\mu + \sigma^2)] [\exp(\sigma^2) - 1]$$

Dans la suite, on note Lognorm pour parler de la distribution log-normale.

Loi Gamma

La variable X suit une loi Gamma de paramètres α et β , ($X \sim \text{Ga}(\alpha, \beta)$) si sa densité est de la forme :

$$f(x) = \frac{\beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} \exp(-x/\beta)}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

où $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$.

Les moments de la loi Gamma sont donnés par :

$$\mathbb{E}(X) = \alpha\beta$$

$$\text{Var}(X) = \alpha\beta^2$$

On notera Gam pour parler de la distribution gamma

Loi de Weibull

La variable X suit une loi de Weibull de paramètres α et β , ($X \sim W(\alpha, \beta)$) si sa densité est de la forme :

$$f(x) = \frac{\alpha\beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right)}{\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x)}$$

et sa fonction de répartition :

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right)$$

où $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Loi de Pareto

La variable X suit une loi de Pareto de paramètres θ et a , ($X \sim Pa(\theta, a)$) si sa densité est de la forme :

$$f(x) = \frac{\theta a^\theta}{x^{\theta+1}} \mathbb{I}_{[a, +\infty)}(x)$$

et sa fonction de répartition :

$$F(x) = 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^\theta$$

où $\theta > 0$ et $a > 0$.

Les moments de la loi de Pareto sont donnés par :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a\theta}{\theta - 1}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{\theta a^2}{(\theta - 2)(\theta - 1)^2}$$

Loi de Poisson

La variable aléatoire N suit une loi de poisson de paramètre n ($N \sim \text{Poisson}(n)$) si $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$P(N = k) = \frac{e^{-n} \cdot n^k}{k!}$$

Notons que la distribution de Poisson est caractérisée par un unique paramètre, noté n , et que de ce fait, tous ses moments dépendent de cette valeur.

On a :

$$E(N) = \text{Var}(N) = n$$

Loi binomiale négative

La variable aléatoire N suit une binomiale négative de paramètres k et p ($N \sim \text{Bin}(k, p)$) si $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$P(N = n) = \binom{n+k-1}{n} \cdot p^k \cdot (1-p)^n$$

Ses moments sont les suivants :

$$E(N) = \frac{k}{1-p}$$

$$\sigma^2(N) = \frac{k}{(1-p)^2 \cdot p^2}$$

On notera N_{binom} pour parler de la distribution binomiale négative.

2.5.3 Estimateurs et tests d'adéquation pour la modélisation

Soit X_1, \dots, X_k un échantillon de taille k représentant des réalisations indépendantes de la de la variable aléatoire X .

On souhaite déterminer la famille de distribution et estimer les paramètres pour caractériser X .

Nous présentons ici les grandes lignes d'une procédure en 4 étapes permettant de caractériser X :

- Choisir une distribution ou une famille de distribution pour X

Le choix d'une famille de distribution se fait sur base de l'analyse de l'échantillon observé, en étudiant certains aspects comme la queue de distribution, la moyenne ou l'écart-type. Par exemple, pour une distribution représentant le nombre de sinistres annuel, si :

$$(\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i) \approx (S^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (X_i - \bar{X})^2)$$

alors, il est naturel de supposer que les X_1, \dots, X_k sont une réalisation de loi Poisson.

- Estimer les paramètres de la loi de X suivant la distribution choisie
L'étape 1 effectuée, on part désormais de l'hypothèse que X suit de densité f_X connue. On peut estimer selon la distribution et la complexité des équations à résoudre, les caractéristiques de X , par maximum de vraisemblance ou par méthode des moments.
- Comparer la distribution théorique choisie à la distribution empirique de X
L'échantillon permet de construire la fonction de distribution empirique de X :

$$F_{X,k}^{\text{empirique}}(x) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k I_{\{X_i \leq x\}}$$

On peut alors comparer les courbes de $F_X^{\text{théorique}}$ et $F_{X,k}^{\text{empirique}}$ au-delà de l'échantillon observé.

- Tester la significativité de l'ajustement.
Cette étape permet d'apporter une réponse à la question suivante : peut-on accepter au niveau de confiance α l'hypothèse selon laquelle X suit la loi théorique déterminée ? ($\alpha \in]0, 1[$).
Plusieurs statistiques de tests peuvent être étudiées selon la nature de la loi (continue ou discrète).
Dans les paragraphes suivants, nous proposons quelques tests qui seront réalisés dans le cadre de notre travail.
- Conclure

Estimation de paramètres de lois par maximum de vraisemblance

La vraisemblance désigne la plausibilité ou la pertinence d'un paramètre de modèle, selon des données observées.

Appliqué à la statistique, le concept permet de déterminer les caractéristiques les plus cohérentes d'une loi selon les valeurs de l'échantillon observé. Autrement, quels paramètres maximisent

$$L = \prod_{i=1}^k f_X(x_i)$$

pour l'échantillon X_1, \dots, X_k de densité f_X .

En pratique, on s'intéresse à la fonction log-vraisemblance :

$$l = \log\left(\prod_{i=1}^k f_X(x_i)\right)$$

plus facile à mettre en œuvre.

Un cas courant en réassurance, notamment en excédent de sinistres est de s'intéresser à la sous-population de l'échantillon X_1, \dots, X_k , au-dessus du seuil u , c'est-à-dire à la loi de X , conditionnellement au fait que $X > u$. Dans ce cas, l devient :

$$l = \log \left(\prod_{i=1}^k f_Y(x_i) \right) = \left(\prod_{i=1}^k \frac{f_X(x_i)}{F_X(s) - F_X(u)} \right)$$

Dans la plupart des lois étudiées ici, les estimateurs de maximum de vraisemblance, sont uniques, sans biais, de variance minimale et asymptotiquement convergents.

Test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov

On considère F_0 une loi continue. On souhaite tester l'hypothèse suivante :

$$H_0 : F_X = F_0$$

$$H_1 : F_X \neq F_0$$

Le test de Kolmogorov-Smirnov propose une statistique permettant de tester l'ajustement de lois continues. Il s'intéresse à la plus grande distance entre la distribution théorique F_0 et la distribution empirique F_k définie par :

$$D_k = \sup_x |F_k(x) - F_0(x)|$$

Cette statistique peut être formulée selon les statistiques d'ordre de l'échantillon observé :

$$D_k = \max_{1 \leq j \leq k} \left(\frac{j}{k} - F_0(x_{(j)}), F_0(x_{(j)}) - \frac{j-1}{k} \right)$$

Ainsi, au seuil α on peut définir la région critique de la forme :

$$\{D_k \geq c_\alpha\}$$

où c_α désigne le quantile $1 - \alpha$ de la table de Kolmogorov-Smirnov.

Dans le cas de lois tronquées, on modifie la fonction de distribution empirique comme suit :

$$F_{0_0}(x) = \frac{F_0(x) - F_0(u)}{F_0(s) - F_0(u)}$$

et le test se reformule alors :

$$H_0 : F_X = F_{0_0}$$

$$H_1 : F_X \neq F_{0_0}$$

Test de Cramér-von Mises

Dans la même approche que le test de Kolmogorov, le test de Cramer-Von Mises s'intéresse à la somme des distances entre la loi théorique F_0 et la loi empirique F sur toute la surface de définition : q

$$W_k^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [F_k(x) - F_0(x)]^2 dF_0(x)$$

Test d'Anderson Darling

Anderson-Darling propose quant à lui une statistique qui pénalise davantage la distance sur les queues de distributions :

$$A_k^2 = \sum_{i=1}^k \frac{2i-1}{k} [\ln(F_k(x_{(i)})) + \ln(1 - F_k(x_{(k+1-i)}))]$$

Test d'adéquation de Khi-deux

Le test d'ajustement de Khi-2 permet quant à lui de tester l'adéquation d'une loi discrète.

Étant donné un échantillon de taille n dont les valeurs sont réparties en k classes A_1, \dots, A_k , le test se base sur la distance de Khi-deux définie par :

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(n_j - n \cdot p_j)^2}{n \cdot p_j}$$

Où n_j désigne l'effectif théorique de la classe A_j et $n \cdot p_j$ l'effectif empirique de la classe j . Puis, on accepte H_0 si $\chi^2 \leq \chi_\alpha^2$, sinon on la rejette. Notons enfin que le test n'est admis que $n \cdot p_j \geq 5$ pour tout j .

Chapitre 3

Modélisation et cadre d'appétence au risque

Dans ce chapitre, nous procédons à la mise en place des modèles sous-jacents à l'analyse des traités de réassurance (calibrage d'un modèle pour le risque à réassurer). La première réflexion s'articule autour de la modélisation de la sinistralité de l'assureur. Il convient de s'y attarder car une mauvaise évaluation de la sinistralité peut conduire à des décisions de réassurance erronées. De plus, nous discuterons diverses hypothèses pouvant influencer la sinistralité, notamment des hypothèses sur le redressement, l'actualisation (l'inflation), la revalorisation et l'agrandissement du portefeuille.

Le modèle traditionnel en assurance non-vie est le modèle dit de " fréquence-sévérité" ou approche "fréquence-coût" dans lequel la loi des sinistres est donnée par :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Dans cette approche standard , l'actuaire estime les distributions pour le nombre de sinistres $N(t)$ (fréquence) et le coût unitaire d'un sinistre X_i (sévérité), car l'objectif principal est de définir la distribution de $S(t)$, à la fois brute et nette de réassurance.

3.1 Nature des données à utiliser

Dans la perspective de l'approche Monte-Carlo, il convient de déterminer la loi des variables auxquelles on s'intéresse.

Dans notre cas, les variables A et R , intervenant dans tous les calculs d'indicateurs, découlent de la sinistralité annuelle S du portefeuille.

Cette loi est justement obtenue par le modèle de la sinistralité de la compagnie.

Il convient donc de s'attarder sur les hypothèses faites dans le cadre de ce modèle.

3.1.1 Mise en as-if des données et inflation future

En général, les données utilisées pour une modélisation dans le cadre d'une optimisation de réassurance sont des données historiques qu'il convient de redresser afin de refléter fidèlement, à la fois la sinistralité actuelle de la compagnie, et les tendances conjoncturelles de l'économie telle que l'inflation et les coûts liés au changement de l'environnement juridique.

Ce processus s'appelle "la mise en as-if " et passe par 3 étapes :

Prise en compte de l'inflation passée

Une approche méthodologique rigoureuse pour modéliser les sinistres consiste à prendre en compte l'impact de l'inflation en réactualisant ces derniers dans une unité monétaire constante. Cette correction permet d'appréhender de manière plus précise les montants des sinistres sur une base homogène et évite les distorsions causées par les variations des valeurs monétaires au fil du temps.

En plus de l'inflation monétaire, les LoBs subissent des inflations qui leur sont propres, car les avancées technologiques sectorielles contribuent également à l'explosion des prix sur les LoBs concernés.

[4] donne une démarche afin d'estimer l'inflation sectorielle.

Dans ce mémoire, nous nous focaliserons uniquement sur l'inflation monétaire, applicables à tous les secteurs.

Éventuellement, nous corrigerons cette inflation par un facteur $inf_{\text{sectorielle}}$ calculé par vu d'expert afin d'adapter notre inflation au LoBs concerné.

Si l'on note i l'année de survenance du sinistre , j l'année de l'étude et $inflation_j$ le taux d'inflation observé l'année j , alors, la correction à appliquer pour l'inflation passée est captée par :

$$\text{Correction}_j = \prod_{i=1}^j (1 + \text{inflation}_i)$$

Par ailleurs, nous proposons un modèle dynamique de l'inflation future via la modélisation de l'IPC (démarche Box-Jenkins détaillée en Annexe) à partir de données de l'INSEE, par un SARIMA(1,2,0)(2,0,0).

On notera cette inflation future Infl_{t_1,t_2} (inflation pour l'année t_2 vu en t_1).

Les prédictions fournissent un IPC au 1er janvier 2024 de 119.6929 contre 115.26 en janvier 2023, soit une $\text{Infl}_{2023,2024} = 3,85\%$ (prévision de 3% établie par la BCE). Dans la suite, nous considérons les sinistres corrigés par l'inflation passée et future.

Projections IPC par modèle SARIMA

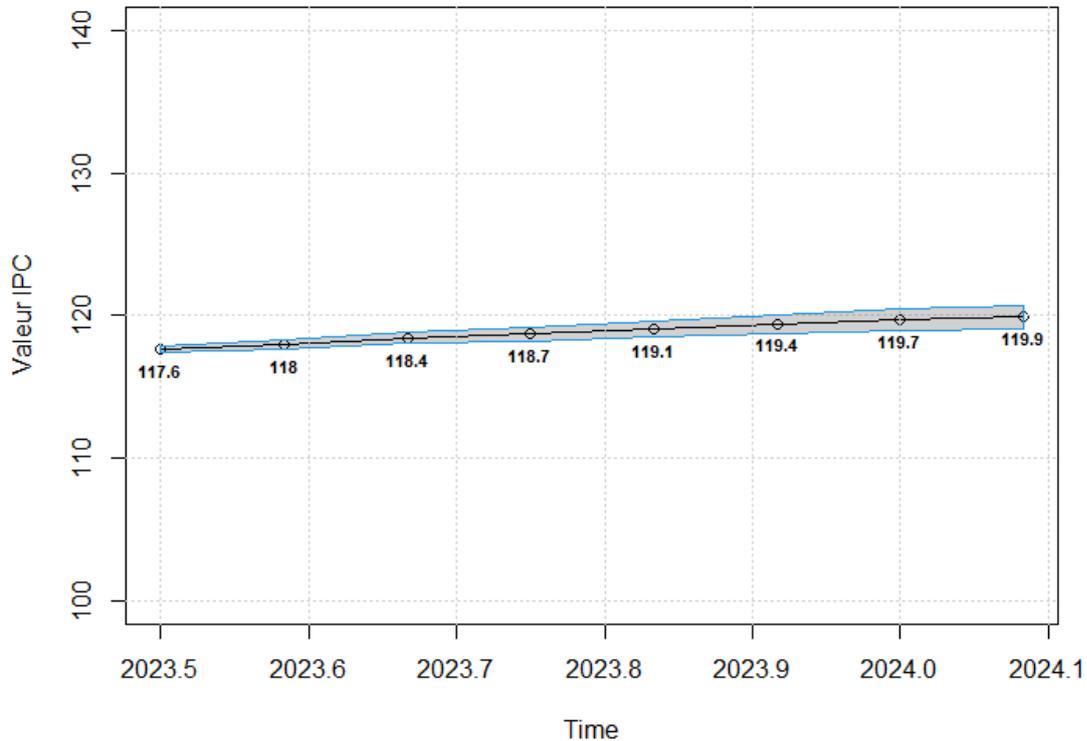


FIGURE 3.1 – Prédiction de l'IPC, avec confiance de 95%

Redressement du portefeuille pour maintenir l'homogénéité

Afin de garantir la pertinence des analyses actuarielles, il est impératif d'effectuer un redressement du portefeuille d'assurances. Ce redressement consiste à ajuster les données historiques en tenant compte des évolutions observées dans les profils de risques. Ces évolutions peuvent être liées à la croissance du portefeuille ou à des changements dans les caractéristiques des garanties offertes, tels que les franchises et les limites.

Révalorisation

Cette hypothèse permet de tenir compte de l'évolution du coût du risque étant donné les nouvelles réglementations en vigueur ou d'autres paramètres sectoriels. Elle est impérative dans certains secteurs comme l'assurance habitation ou l'assurance dommages corporels où les coûts sont sujets à diverses variations conjoncturelles.

Dans cette étude, nous supposons que le portefeuille reste homogène par rapport aux hypothèses de redressement et de revalorisation.

3.2 Modélisation de la sinistralité

Granularité du portefeuille

En pratique, le portefeuille d'un assureur est généralement constitué d'une diversité de contrats non homogènes en raison des conditions particulières de franchises, de limites et d'expositions aux risques. Il est donc complexe de refléter toute la sinistralité à travers un seul modèle.

Pour gérer cette complexité, il est courant de recourir à des techniques de regroupement (*clustering*) afin de former des sous-groupes de contrats présentant des caractéristiques similaires. Cette approche permet d'obtenir des ensembles plus restreints de contrats homogènes sur lesquels il est plus facile d'appliquer des analyses et des modèles mathématiques spécifiques à l'assurance.

Une autre méthode de classification des risques consiste à les classer par garanties ou par ligne d'activité.

Dans une perspective de réassurance, il est recommandé de classer les risques en LoB réglementaires de Solvabilité II.

On adopte ici la définition fournie par la directive Solvabilité II : « une ligne d'activité est un regroupement de garanties d'assurance similaires ».

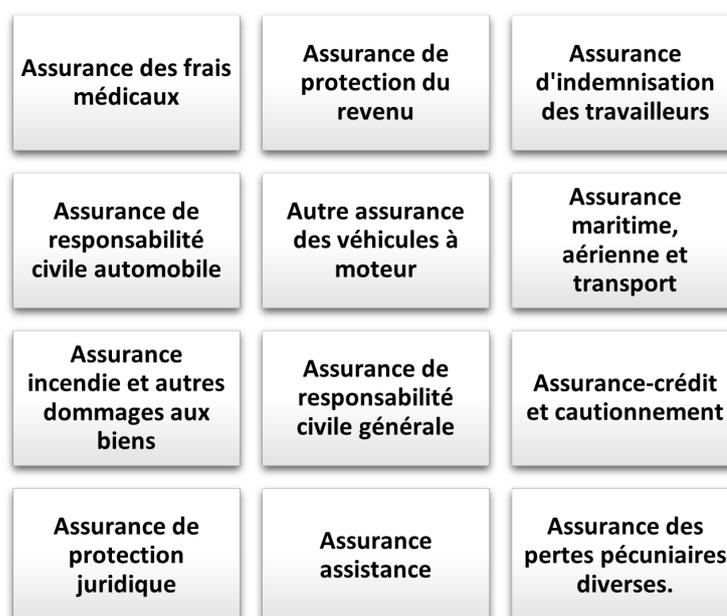


FIGURE 3.2 – Les LoBs selon Solvabilité II

Les applications de notre étude seront réalisées sur un portefeuille anonymisé de client.

Le portefeuille est constitué de 340 593 personnes-années sur 10 ans d'historique. La figure 3.3 donne la répartition en LoBs du portefeuille d'application : il est majoritairement composé de risques dommages automobile à 62%, se complète de risques responsabilité civile (RC) à 20% et de risques en garanties multirisque professionnel Vol à 17%.

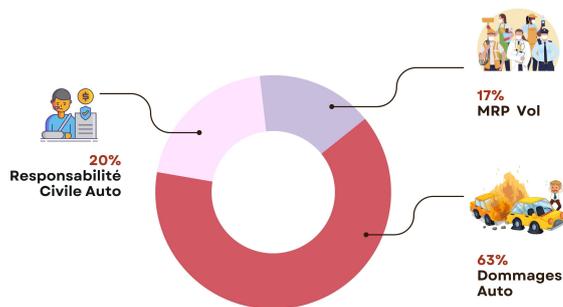


FIGURE 3.3 – LoBs du portefeuille d'application

Les applications sur ce portefeuille n'ont pas vocation à donner des baromètres de référence, mais à illustrer uniquement nos propos et donner un aspect concret de la démarche mise en place pour la création de l'outil sur Rshiny.

Dans la suite, on notera n le nombre de LoBs sur lequel exerce l'assureur. Ainsi, la sinistralité globale $S(t)$ devient :

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i = \sum_{k=1}^{N_{LoB_1}(t)} X_{k,LoB_1} + \dots + \sum_{k=1}^{N_{LoB_n}(t)} X_{k,LoB_n} = S(t)_{LoB_1} + \dots + S(t)_{LoB_n}$$

où les X_{k,LoB_j} et N_{LoB_j} désignent respectivement les variables aléatoires modélisant les montants des sinistres individuels et leur nombre sur LoB_j .

3.2.1 Modèle fréquence coût pour LoB_j

A présent, quelles hypothèses et quelles lois pour X_{k,LoB_j} et N_{LoB_j} ?

Granularité selon la gravité du sinistre à l'intérieur de la LoB_j

Pour obtenir une modélisation robuste de la sinistralité sur un LoB dans le cadre de la réassurance, il est important que les réalisations de la loi des montants soit peu volatiles, ce qui n'est pas le cas en pratique car il est difficile d'aboutir à une homogénéité parfaite

des assurés sur le même LoB.

Une solution consiste alors à catégoriser les sinistres selon leur gravité.

Dans ce mémoire, les sinistres sont catégorisés au sein de chaque LoB en :

- **sinistres attritionnels** :
il s'agit des sinistres les plus courants. Ils sont généralement de grande fréquence et de faible coût.
- **et sinistres graves** :
en contraste, ceux-là sont les plus rares et présentent des coûts élevés.

Cette distinction des risques d'amplitude et des risques de fréquence en réassurance permet aux assureurs d'optimiser leur gestion des risques, leur allocation de capital, leur tarification, leur capacité de réassurance et leur stratégie de rétention.

Dans la suite, nous adopterons les stratégies suivantes pour la modélisation des sinistres du LoB j ($S_{LoB_j}(t)$) :

- **Modèle 1 : modèle collectif pour les deux types de sinistralité**

$$S_{LoB_j}(t) = \sum_{k=1}^{N_{LoB_j}^G(t)} X_{k,LoB_j}^G + \sum_{k=1}^{N_{LoB_j}^A(t)} X_{k,LoB_j}^A$$

Avec

$$N_{LoB_j}^G \perp N_{LoB_j}^A \perp X_{i,LoB_j}^G \perp X_{i,LoB_j}^A \forall i \text{ et } k$$

Dans cette stratégie, on modélise la sinistralité attritionnelle et grave par des modèles collectifs sans dépendance entre eux (ni entre les nombres de sinistres, ni entre les coûts, ni entre les coûts et les nombres de sinistres).

Cette approche permet d'obtenir un calibrage plus précis de la sinistralité en faisant un zoom sur chaque composante de la granularité du sinistre à l'intérieur du LoB, mais présente l'inconvénient d'être couteux en temps de calcul.

- **Modèle 2 : modèle collectif pour la sinistralité grave et modèle agrégé pour la sinistralité attritionnelle**

$$S_{LoB_j}(t) = \sum_{k=1}^{N_{LoB_j}^G(t)} X_{k,LoB_j}^G + S_{LoB_j}^A$$

Avec

$$N_{LoB_j}^G \perp S_{LoB_j}^A(t) \perp X_{i,LoB_j}^G \forall i$$

Cette stratégie propose de réduire le temps de calcul en adoptant un modèle agrégé pour la sinistralité attritionnelle puisque les risques de fréquence sont soumis à

des traités proportionnels en général. Toutefois, estimer la sinistralité attritionnelle agrégée suppose que l'on réduit l'historique des données à disposition (passer de plusieurs réalisations à une seule sur la période choisie), ce qui réduit drastiquement la robustesse des estimations.

À présent, une question se pose : comment scinder la base pour calibrer les deux modèles de sinistralité sur la LoB j ?

3.2.2 Détermination du seuil des sinistres graves

À partir de quelle valeur peut-on considérer un sinistre comme grave ?

Il existe un large éventail de méthodes statistiques permettant de catégoriser les sinistres en fonction de leur gravité et d'estimer les seuils des sinistres graves. Ces méthodes, basées principalement sur la théorie des valeurs extrêmes (TVE), sont utilisées pour évaluer les événements exceptionnels et les pertes qui leur sont liées.

Nous présentons ici quelques méthodes statistiques permettant de déterminer le seuil u à partir duquel il est raisonnable de considérer un sinistre comme étant grave.

Avant de poursuivre, il est important de souligner la distinction entre un sinistre grave et une **valeur aberrante**. Alors que la première est un membre légitime de l'échantillon des sinistres, une valeur aberrante est considérée comme une valeur extrinsèque. En plus des erreurs de saisie évidentes, des événements peuvent se produire de manière totalement inattendue, en contradiction avec toutes les données antérieures.

En utilisant des méthodes d'analyse issues de la théorie des valeurs extrêmes, il est possible d'estimer à quel point certains événements sont peu probables au regard de toutes les informations préalables. Toutefois, nous considérerons d'emblée que les sinistres isolés, ne rentrant pas dans l'un des deux clusters caractérisant les sinistres graves ou attritionnels sont des valeurs aberrantes.

Considérons un échantillon de N variables aléatoires i.i.d $V = (V_1, V_2, \dots, V_N)$ et les statistiques d'ordre $V_{(1)} \leq V_{(2)} \leq \dots \leq V_{(N)}$. On suppose par ailleurs qu'on dispose d' un échantillon suffisamment grand ($N \rightarrow \infty$).

Nous présentons ici quelques méthodes inspirées de la théorie des valeurs extrêmes

— Les méthodes heuristiques :

Il s'agit d'approches basées sur des règles empiriques.

Leur principal avantage est leur simplicité d'application. Ces méthodes estiment le seuil u en fonction des statistiques d'ordre et d'un paramètre réel k dans l'intervalle $[0, N]$. L'estimation du seuil est donnée par $\hat{u} = V_{[N-k]}$, où $[N-k]$ désigne l'entier le plus proche de $N-k$ parmi $1, \dots, N$.

La règle dite "du quantile fixe " estime le seuil en utilisant le $(1 - \varepsilon) \times 100\%$ quantile empirique des données. Très souvent, on fixe $\varepsilon = 0.01$, soit le quantile à 99% des sinistres.

La règle empirique de Loretan et Phillips (1994) quant à elle utilise

$$k = \frac{N^{2/3}}{\log(\log(N))}$$

pour estimer le seuil.

Dans le cadre de notre application, on a les résultats suivants sur la LoB Domages Auto :

Méthode	Statistique d'ordre	Valeur Seuil
Règle du quantile fixe à 0.1%	12070	12015
Règle empirique de Loretan et Phillips	10001	17000

TABLE 3.1 – Estimation du seuil par des méthodes empiriques

— **Test d'exponentialité :**

Nous exploitons le fait bien établi que si $V/V > u$ suit une distribution de Pareto généralisée, alors $\ln(V) - \ln(u)$ suit une distribution exponentielle dont la moyenne est ξ . En se basant sur cela, il est naturel de choisir k comme étant la valeur minimale pour laquelle l'hypothèse d'exponentialité est vérifiée.

Comme cela a tendance à donner un k trop grand, [2] suggère une modification suivante.

Plus précisément, l'estimation de u est

$$\hat{u} = V_{(n-\hat{k})}$$

où

$$\hat{k} = \inf\{k : |Q_N(j)| \geq 1.25, \forall j \geq k\}$$

$$Q_N(k) = \left(\frac{1}{2\lfloor k/2 \rfloor + 1} \sum_{j=k-\lfloor k/2 \rfloor}^{k+\lfloor k/2 \rfloor} T_N(j)^2 \right)^{1/2}, \text{ pour } k \geq 1 \text{ et } k + \lfloor k/2 \rfloor < N$$

$$T_N(k) = \sqrt{\frac{3}{k^3} \sum_{i=1}^k \frac{(k-2i+1)U_i}{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k U_i}}, \text{ pour } 1 \leq k < N$$

$$U_i = \{\ln Z_{N-i+1:N} - \ln Z_{N-i:N}\}, 1 \leq i \leq k \leq N$$

Une implémentation via le package "tea" de R permet d'obtenir sur la LoB domages Auto : $\hat{k}_0 = 9$ et $\hat{u} = 37117$.

— **Mean Excess Plot**

Soit \hat{e}_N la fonction des excès moyens empiriques définies par :

$$\hat{e}_N(u) = \frac{\sum_{i=1}^N (V_i - u)_+}{\sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{\{V_i > u\}}}$$

On utilise le fait que pour une loi GPD, la fonction des excès moyens est linéaire en u .

Notre raisonnement consistera donc à déterminer le seuil u à partir duquel la fonction des excès moyens empiriques est linéaire.

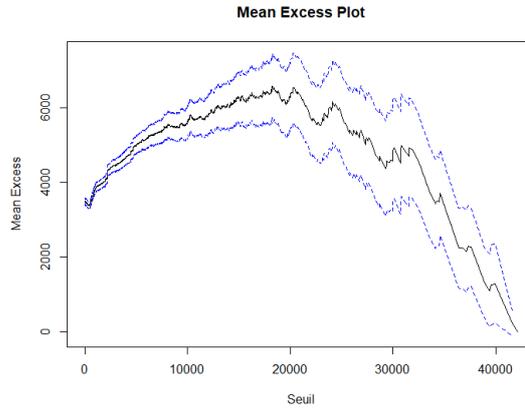


FIGURE 3.4 – Graphique du *mean Excess Plot*

Dans certaines situations, telles que démontré dans la figure 3.4, la décision devient complexe en raison de l'absence de clarté concernant la linéarité. Par conséquent, il est impératif de faire appel à des approches permettant d'établir de manière indubitable un seuil.

— **Méthode Gerstengarbe**

Le graphe de Gertensgarbe s'inspire du test non-paramétrique de Mann-Kendall pour détecter les tendances monotones dans les séries chronologiques. Soit Δ_i la série définie par

$$\Delta_i = V_{(i)} - V_{(i-1)}, i = 2, \dots, N$$

L'idée principale est de s'attendre à ce que le comportement des Δ_i d'un ensemble de données donné diffère entre les observations extrêmes et les observations normales. Par conséquent, il devrait y avoir un point de changement dans la série des Δ_i , et ce point de changement est considéré comme le point de départ de la région extrême, ce qui en fait une estimation du seuil u .

Pour identifier le point de changement, la statistique de test du test séquentiel de Mann-Kendall est calculée à la fois pour les Δ_i de $i = 1$ à $i = N - 1$ et pour les différences dans l'ordre inverse. Dans ce test, la série de test normalisée U_i est donnée par :

$$U_i = \sum_{k=1}^i \frac{n_k - \frac{i(i-1)\sqrt{72}}{4}}{\sqrt{i(i+1)(2i+5)}}$$

et \tilde{U}_i est donnée par :

$$\tilde{U}_i = \sum_{k=1}^i \frac{\tilde{n}_k - \frac{i(i-1)\sqrt{72}}{4}}{\sqrt{i(i+1)(2i+5)}}$$

où $n_k = \sum_{j=1}^k I(\Delta_j < \Delta_k)$ et $\tilde{n}_k = \sum_{j=1}^k I(\Delta_{N-j} < \Delta_{N-k})$.

Ensuite, le point d'intersection entre les U_i et les \tilde{U}_i donne une estimation de \hat{u} .

Une application sur le portefeuille Dommage Automobile donne le graphe suivant

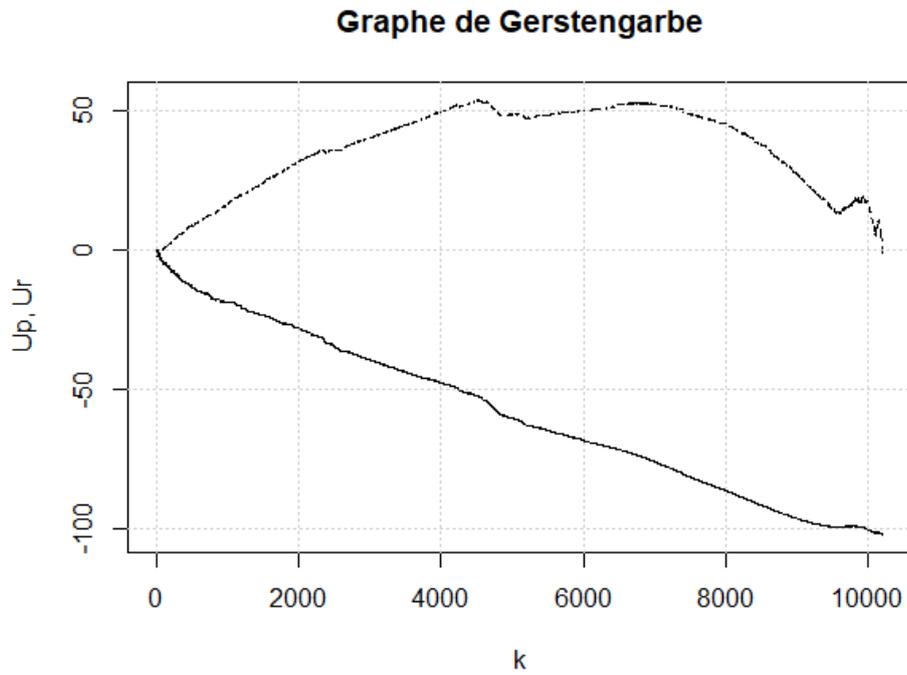


FIGURE 3.5 – Graphe de Gerstengarbe

Les deux séries se croisent au point $k_0 = (10, 12, 13, 16, 24)$ pour des estimations de \hat{u} correspondant respectivement à 36776, 36346, 34558, 34104 et 30715.

La disparité entre les seuils des différentes méthodes s'explique d'une part par les hypothèses qui sous-tendent chaque méthode et par le fait que l'on bascule rapidement d'un seuil à un autre.

Par exemple, la grande majorité des sinistres graves peut être concentrée dans un intervalle précis, or les méthodes sautent d'un intervalle à un autre selon leurs hypothèses, ce qui conduit à des seuils très souvent non comparables.

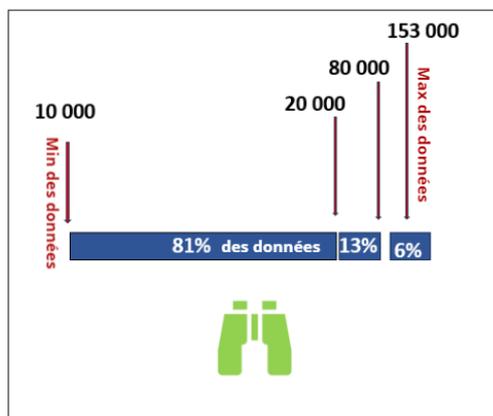


FIGURE 3.6 – Exemple de concentration des sinistres graves dans différents intervalles

Pour trancher entre ces méthodes, il est courant de recourir à un avis d'expert. Un autre baromètre consiste à regarder le nombre de données restant au-dessus du seuil (pourcentage en fonction du nombre de données total). Dans notre cas, la figure 3.5 permet de choisir la méthode empirique du quantile à 0.1% (12015), avec 500 données soit 10% (pourcentage le plus élevé parmi les méthodes utilisées).

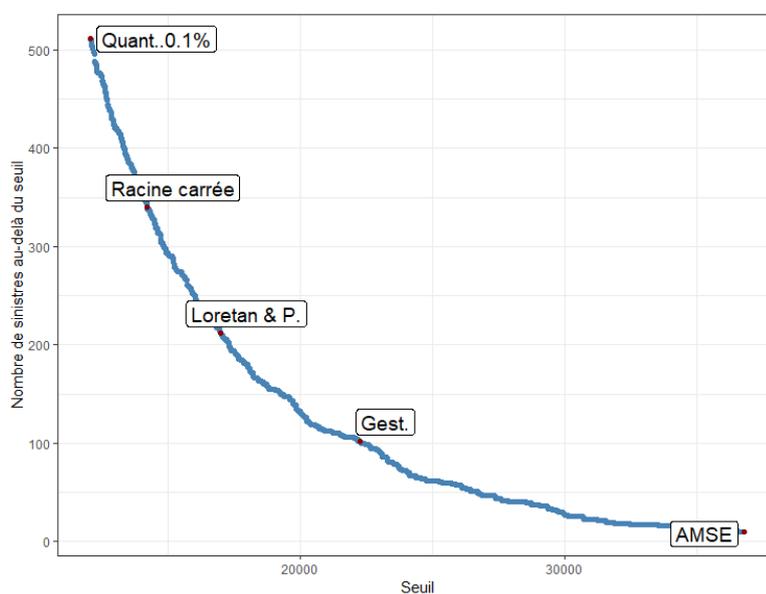


FIGURE 3.7 – Critère de choix de la méthode de détermination du seuil

A présent, nous disposons de l'ensemble des outils nécessaires à la modélisation de la sinistralité du portefeuille d'application.

Nous présentons tout d'abord les paramètres dans le cadre de la première stratégie de modélisation (modèle collectif pour les deux sinistralités, sur chaque LoB) :

$$S_{LoB_j}(t) = \sum_{k=1}^{N_{LoB_j}^G(t)} X_{k,LoB_j}^G + \sum_{k=1}^{N_{LoB_j}^A(t)} X_{k,LoB_j}^A$$

Paramètres des modèles d'application

Nous estimons ici les lois des fréquences et des sévérités des différents LoBs à la fois pour les sinistres graves et les sinistres attritionnels. Nous présenterons les résultats pour la LoB Dommage Automobile (les détails sur les autres LoBs en Annexe).

— Sinistralité attritionnelle

Pour le nombre de sinistres, nous testons deux lois usuelles : la loi de Poisson et la loi binomiale négative. La figure 3.5 et le tableau 3.1 montrent l'ajustement graphique ainsi que les tests réalisés pour juger de la qualité de cet ajustement.

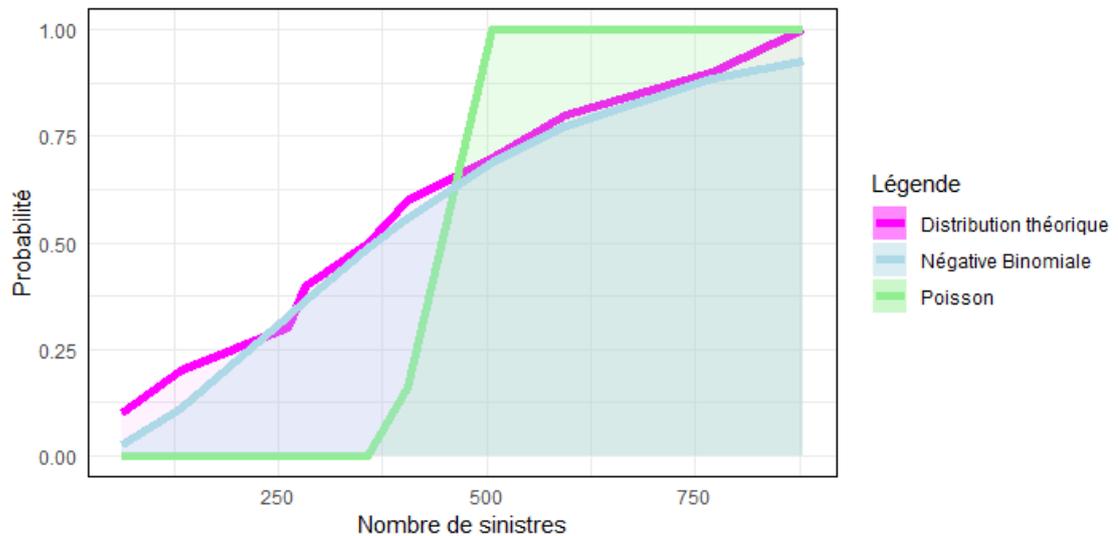


FIGURE 3.8 – Ajustement de la loi du nombre de sinistres attritionnels Dommage Auto

Graphiquement, la loi binomiale négative semble être la meilleure candidate pour modéliser le nombre de sinistres annuels.

Nous recourons néanmoins au test de Khi-carré qui permet de trancher et garder effectivement la loi binomiale négative.

Statistique	Loi Poisson	Loi Binomiale négative
Loi estimée	Poisson(426)	Nbinom(426,0.99)
Test de Khi-2	Rejeté	Accepté
AIC	157.0047	121.9585
BIC	157.4026	122.7543

TABLE 3.2 – Qualité d’ajustement loi du nombre de sinistres attritionnels Auto dommage

Le choix entre ces deux lois peut s’avérer difficile si les deux sont acceptés ou rejetés suivant les tests statistiques. Le jugement d’expert permet de trancher, et le choix mène très souvent à la loi binomiale négative pour le comptage des sinistres attritionnels.

On peut également se fier aux AIC et BIC qui sont des critères de parcimonie¹. Pour ce qui est de la loi des montants, nous testons les lois log-normales et gamma dont les queues de distributions permettent de capter la sinistralité attritionnelle selon le portefeuille.

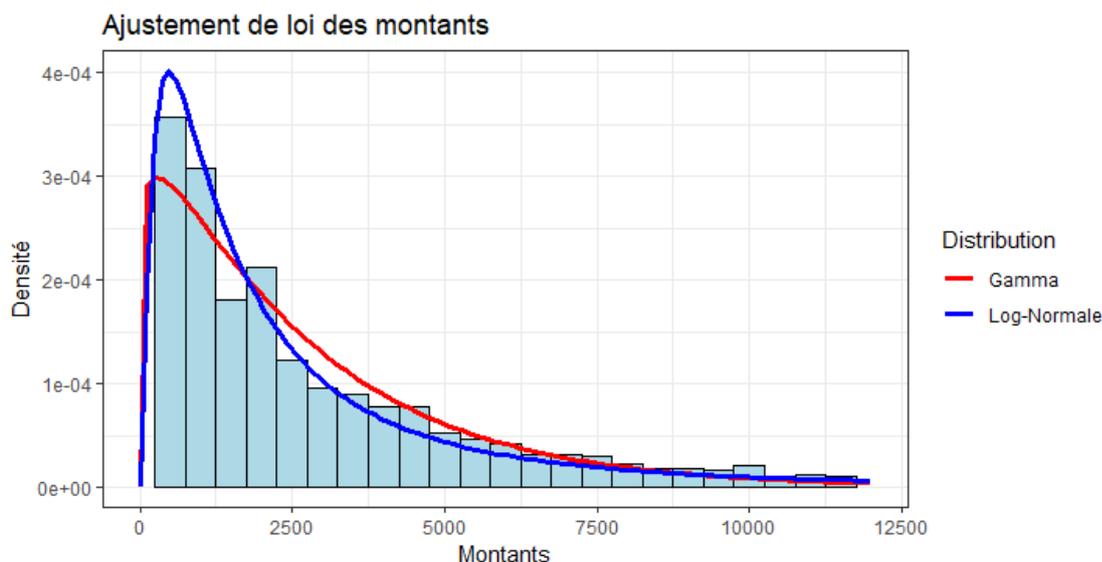


FIGURE 3.9 – Calibrage loi des montants attritionnels

Si on se fie au graphique d’ajustement, la loi log-normale semble être mieux adaptée aux montants des sinistres attritionnels.

Vérifions par les tests statistiques.

1. La parcimonie désigne la simplicité d’un modèle et sa capacité à coller aux données : Souvent le modèle le plus simple est le meilleur (principe de parcimonie d’Ockham)

Statistique	Loi Gamma	Loi log-normale
Paramètre estimé	Gam(1.12, $4 * 10^{-4}$)	Lognorm(5.5, 1.13)
Test de Kolmogorov S.	Rejeté	Accepté
Test de Anderson D.	Rejeté	Rejeté
Test de Von Mises	Rejeté	Rejeté
AIC	173558.2	172801.9
BIC	172816.2	157.4026

TABLE 3.3 – Tests d’ajustement de lois continues pour les montants de sinistres attritionnels (Dommage Auto)

Les tests permettent de retenir la loi log-normale au seuil 5%.

— **Sinistralité grave**

De façon analogue, on calibre les lois du nombre de sinistres, puis les lois des montants de sinistres de grave.

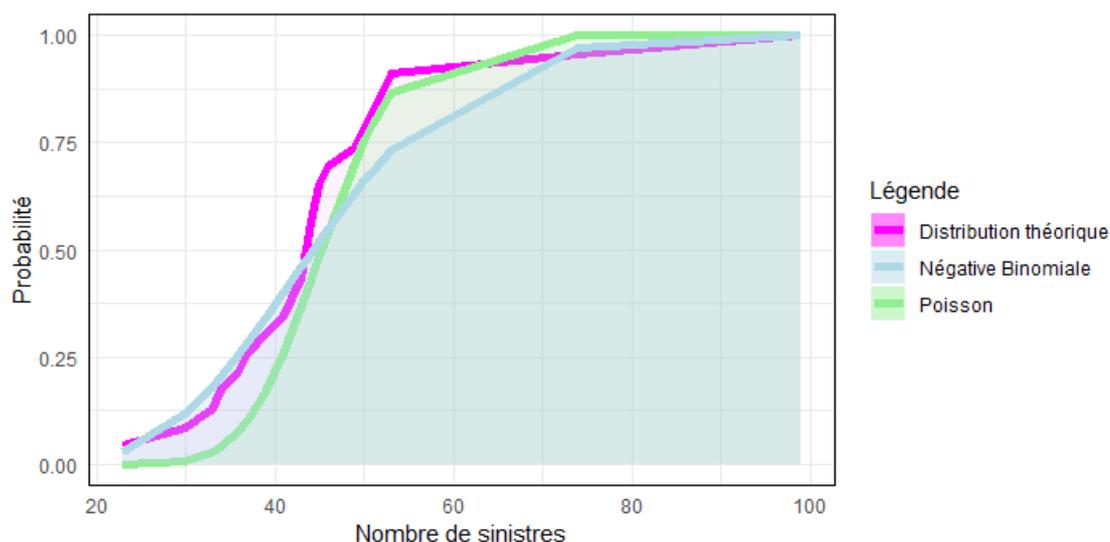


FIGURE 3.10 – Loi nombre de sinistres graves

Graphiquement, on voit que la loi de Poisson s’ajuste mieux aux données, notamment dans les zones où la fréquence est élevée.

Choisir cette loi permettrait donc d’avoir une marge de prudence quant à la fréquence des sinistres graves.

Néanmoins, il convient de prendre en considération le fait qu’une surestimation de la fréquence de ces sinistres pourrait conduire à la sélection de traités inappropriés et extrêmement coûteux.

On dresse le tableau suivant des tests statistiques et on retient la Poisson :

Statistique	Loi Poisson	Loi Binomiale négative
Loi estimée	Poisson(46)	Nbinom(45,0.75)
Test de Khi-2	Accepté	Accepté
AIC	187.8063	229.2204
BIC	190.0773	230.3558

TABLE 3.4 – Qualité d’ajustement de la loi du nombre de sinistres graves, LoB dommage Auto

En ce qui concerne la loi des montants de sinistres graves, nous testons d’abord quelques lois classiques² :

TABLE 3.5 – Estimation des paramètres par distribution

Distribution	Paramètre	Estimation	Test de K.S	Test A.D	Test V.M
Exponentielle	λ	56 240	Refusé	Refusé	Refusé
Pareto	θ	12 000	Accepté	Refusé	Refusé
	a	2.8			
Weibull	α	2.98	Refusé	Refusé	Refusé
	β	19 867.39			
log-normale	μ	9.73	Refusé	Refusé	Refusé
	σ	0.293			

Le rejet des tests s’explique partiellement par le fait que l’on ne tient pas compte du fait que les données sont tronquées. Une procédure correcte consiste à corriger la fonction de répartition de la loi à tester avant l’estimation : si X est une variable aléatoire de fonction de répartition F_X , alors la fonction de répartition de X conditionnellement à l’intervalle $[a_1, a_2]$ est donnée par :

$$\mathbb{P}(X \leq x | a_1 \leq X \leq a_2) = \frac{\mathbb{P}(a_1 \leq X \leq x)}{\mathbb{P}(a_1 \leq X \leq a_2)} = \frac{F(x) - F(a_1)}{F(a_2) - F(a_1)}, \forall x$$

Malgré cette correction, aucune des lois testées ne semble convenir. Nous testons alors une loi GDP de paramètres estimés : GDP(5619,0.0356).

La figure 3.9 permet de tester la qualité de cet ajustement via un graphe Quantile-quantile.

2. On note K.S pour Komogorov Smirnov, A.D ppour Anderson Darling et V.M pour Von Mises

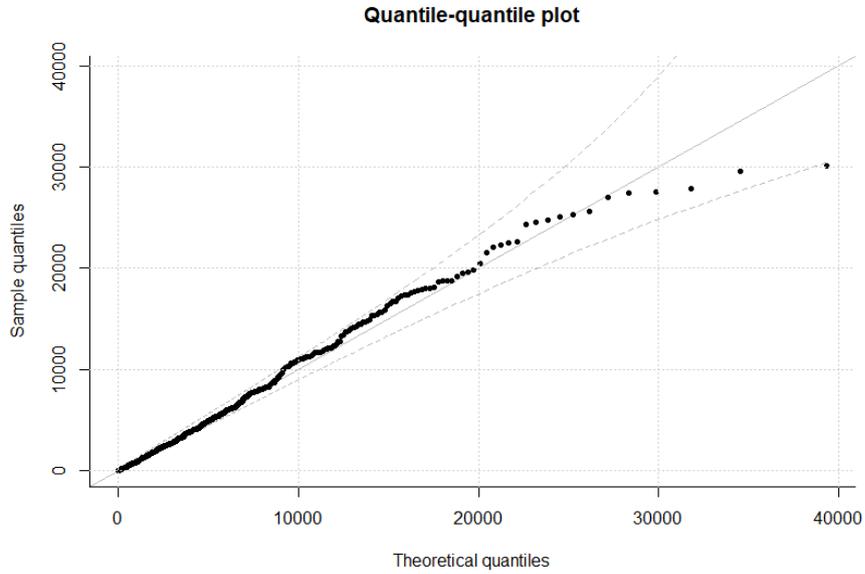


FIGURE 3.11 – Ajustement GDP

Pour les autres LoBs, nous donnons directement les lois retenues et leurs paramètres dans le tableau ci-dessous. On notera que compte tenu du faible nombre de données disponibles, un seul modèle sera retenu pour la LoB Multirisques Professionnel Vol, qui modélise à la fois les sinistres graves et attritionnels.

	LoB RC Auto	LoB MRP Vol
Seuil	7 385€	✗
Loi Attrition		
$N^A(t)$	Nbinom(388, 0.9953)	
X_i^A	Gam(0.67, $31 * 10^{-6}$)	Nbinom(153, 0.993)
Loi Grave		
$N^G(t)$	Poisson(47)	Pareto(3580, 0.94)
X_i^G	GPD(5107, 1.14)	

TABLE 3.6 – Lois retenues par LoB

A présent, posons concrètement l'environnement de simulation du risque et des indicateurs.

3.3 Environnement de simulation

On se place sur la LoB_j régie par le modèle :

$$S_{LoB_j}(t) = \sum_{k=1}^{N_{LoB_j}^G(t)} X_{k,LoB_j}^G + \sum_{k=1}^{N_{LoB_j}^A(t)} X_{k,LoB_j}^A$$

On dispose également de \mathcal{T}_j l'ensemble des traités et on souhaite trouver le sous-ensemble

$$\mathcal{T}_S^j = \{x \in \mathcal{T}_j \mid x \text{ solution de (P)}\} \subset \mathcal{T}_j$$

tel que

$$(P) : \begin{cases} \min / \max f_i(x), & \text{pour } i = 1, \dots, M \\ \text{S.c : } g_j(x) \geq 0, & \text{pour } j = 1, \dots, K \end{cases}$$

Avec les g_j, f_i des fonctions bien définies.

S'il est possible d'approximer les valeurs des $g_j(x) \geq 0$, pour $j = 1, \dots, K$ et $f_i(x)$, pour $i = 1, \dots, M$ sur l'ensemble \mathcal{T}_j alors la détermination de \mathcal{T}_S^j devient un problème purement algorithmique.

Via une approche Monte-Carlo, il est possible de déterminer une valeur approchée des f_i en se basant sur m scénarios pour chaque composante de $S_{LoB_j}(t)$.

Le tableau 3.7 résume le modèle simulation adopté pour les simulations de $S_{LoB_j}(t)$:

- Etape 1 : Simuler N le nombre de sinistres attritionnels suivant la loi de $N_{LoB_j}^A$
- Etape 2 : Simuler N valeurs de la loi des montans attritionnels X_{k,LoB_j}^A
On obtient déjà un scénario pour le modèle attritionnel. Pour tenir compte de la sinistralité grave, on rajoute les procédures suivantes :
- Etape 3 : Simuler M le nombre de sinistres graves suivant la loi de $N_{LoB_j}^G$
- Etape 4 : Simuler M valeurs de la loi des montants de sinistres graves X_{k,LoB_j}^G .
- Etape 5 : Répéter les étapes 1 à 4 jusqu'à obtenir m simulations de $S_{LoB_j}(t)$
- Etape 5 : Appliquer le traité pour obtenir m simulations de f_i et g_j

En général, la loi du nombre de sinistres graves conduit à des simulations inférieures aux simulations de la loi du nombre de sinistres attritionnels ($M \leq N$).

TABLE 3.7 – Modèle de simulation

Granularité	Scénario	Ordre de survenance							
		1	2	3	...	M	...	N	...
Sinistralité Attritionnelle	Simulation 1	$X_{1,1}$	$X_{1,2}$	$X_{1,3}$	$X_{1,N}$...
	Simulation 2	$X_{2,1}$	$X_{2,2}$	$X_{2,3}$	$X_{2,N}$	$X_{2,...}$
	$X_{.....}$
	Simulation m	$X_{m,1}$	$X_{m,2}$	$X_{m,3}$	$X_{m,N}$	
Sinistralité Grave	Simulation 1	$Y_{1,1}$	$Y_{1,2}$	$Y_{1,3}$					
	Simulation 2	$Y_{2,1}$	$Y_{2,2}$	$Y_{2,3}$...	$Y_{2,M}$			
	$Y_{.....}$		
	Simulation m	$Y_{m,1}$	$Y_{m,2}$	$Y_{m,3}$		

Convergence des estimateurs

On s'intéresse au nombre m de simulations nécessaires pour avoir des estimateurs stables d'indicateurs de gestion de risque.

La méthode Monte-Carlo a un taux de convergence en $O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$. Ainsi, plus le nombre de simulations est grand, plus les estimateurs de Monte-Carlo convergent vers la valeur réelle.

Empiriquement, on observe que le résultat et la variance convergent rapidement, après 15 000 simulations, tandis que le SCR en nécessite 25 000.

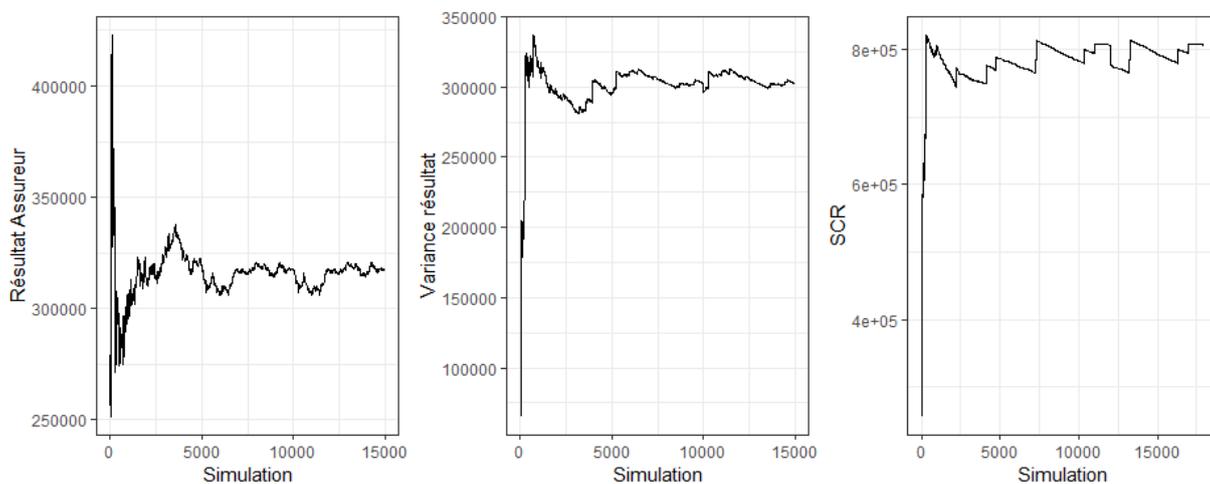


FIGURE 3.12 – Nombre de simulations pour la convergence de quelques estimateurs

Dans la suite, nous fixerons un nombre de scénarios égal à 30 000, seuil prudent pour garantir la convergence de tous les indicateurs.

L'ordinateur utilisé pour ces applications disposant de 8 cœurs logiques (nombre de tâches que peut effectuer un ordinateur à la fois, en utilisant toute la puissance de celui-ci), nous choisissons de tous les employer en utilisant le package Parallel de Rstudio. Cette manipulation permet de réduire le temps de calcul de moitié.

Par ailleurs, lorsqu'il s'agit d'une optimisation de traité stop-Loss, nous privilégions la stratégie de modélisation 2 (modèle collectif pour la sinistralité grave + modèle agrégé pour la sinistralité attritionnelle), puisque l'on ne s'intéresse qu'aux sinistres graves en réalité.

Toutefois, le modèle 1 reste intéressant dans la mesure où la plupart des seuils sont choisis par avis d'expert. Une simulation en détail de la sinistralité attritionnelle offre une marge de prudence.

3.4 Intégration dans l'outil

Tout le processus de modélisation passant par les hypothèses sur les données, la détermination d'un seuil et les choix des modèles, est implémenté dans trois parties consacrées traitement de données, modélisation et simulation de portefeuille. On y utilise le package Parallel pour réduire les temps de calcul.

L'idée n'est pas d'automatiser tout ce processus, mais d'accompagner au mieux l'utilisateur à la mise en place d'un modèle adéquat.

L'interface offre deux autres sections dédiées respectivement aux estimateurs des critères choisis, ainsi qu'à la construction des traités sujets à optimisation.

Chapitre 4

Détermination des traités optimaux

Dans ce chapitre, nous présentons les méthodes de résolution du problème multiobjectifs et discutons leurs applications en réassurance.

Nous verrons dans un premier temps comment à partir de l'ORSA on définit les fonctions à optimiser ainsi que les contraintes associées. Nous discuterons également les pistes pour le choix des traités de réassurance à tester. Enfin, nous nous pencherons sur l'optimisation multiobjectifs à travers les heuristiques et les métaheuristiques.

4.1 Dispositif ORSA et cadre d'appétence au risque

L'optimisation de la réassurance doit répondre à des besoins spécifiques. Ceux-ci peuvent être techniques, managériaux, ou réglementaires.

C'est la clarification de ces besoins qui conduit à la formulation à la fois du problème d'optimisation et définit l'ensemble des traités formant l'espace admissible. En général, la stratégie de réassurance s'inscrit dans une vision ORSA, c'est-à-dire en cohérence avec les risques et les objectifs internes de la cédante. Il est donc naturel de s'en inspirer pour définir le cadre d'appétence au risque et les objectifs de l'optimisation.

Le cadre d'appétence au risque délimite les risques que l'assureur est prêt à accepter dans le cadre de ses objectifs.

Pour les assureurs et réassureurs européens, ce cadre ainsi que les stratégies de gestion sont définis par le dispositif ORSA (*Own Risk and Solvency Assessment*) prévu par l'article 45 de la directive Solvabilité II.

Le dispositif s'articule autour de 3 éléments :

- Évaluation du Besoin Global de Solvabilité (BGS)
- Évaluation du respect permanent du calcul des indicateurs du Pilier I (SCR, MCR, provisions techniques, etc) aux exigences réglementaires
- Évaluation de l'adéquation entre le profil de risque réel de l'entreprise et les hypothèses qui sous-tendent le calcul du besoin en capital selon la formule standard.

L'ORSA s'intègre à la gestion courante de l'entreprise en anticipant les effets de scénarios adverses, tout en veillant à une cohérence entre les objectifs managériaux à moyen-terme et la gestion de Capital.

Dans sa mise en oeuvre, l'ORSA fournit des pistes à la définition du cadre de l'optimisation.

En fait, le dispositif se met en place via les étapes suivantes :



FIGURE 4.1 – Etapes ORSA

La réassurance intervient à l'étape 5 comme l'un des leviers pour atténuer les scénarios adverses.

Par ailleurs, les objectifs de l'ORSA donnent des pistes sur le type de traité à tester (réassurance proportionnelle, non proportionnelle ou une combinaison des deux). En général, une réassurance proportionnelle est la forme la plus adaptée aux objectifs de réduction de Capital Réglementaire tandis que la réassurance non proportionnelle s'adapte aisément aux enjeux de protection de résultats contre des risques de pointe.

Dans la suite, on s'intéresse aux objectifs stratégiques suivants :

- Maximiser le résultat technique soit $\operatorname{argmax}_{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_j} \text{Résultat}_{\mathcal{R}}$
- Réduire le besoin en capital horizon 1 an soit $\operatorname{argmax}_{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_j} \text{SCR}_{\mathcal{R}}$
- Réduire le ratio sinistres à primes soit $\operatorname{argmax}_{\mathcal{R} \in \mathcal{T}_j} \text{Ratio}_{\mathcal{R}}^{S/P}$

Toujours en référence à l'ORSA, on peut mettre sur place des métriques de risques associées à chaque objectif pour poser clairement le problème d'optimisation.

Les métriques les plus usuelles englobent la volatilité pour le résultat et la Value-At Risk pour la gestion de Capital de solvabilité.

Notons ici que la formulation du problème d'optimisation par l'assureur se fait beaucoup moins formellement. La cédante aura tendance à formuler son problème en définis-

sant des chiffres cibles (cf. 4.2) ou en posant la problématique de l'efficience d'un traité existant.

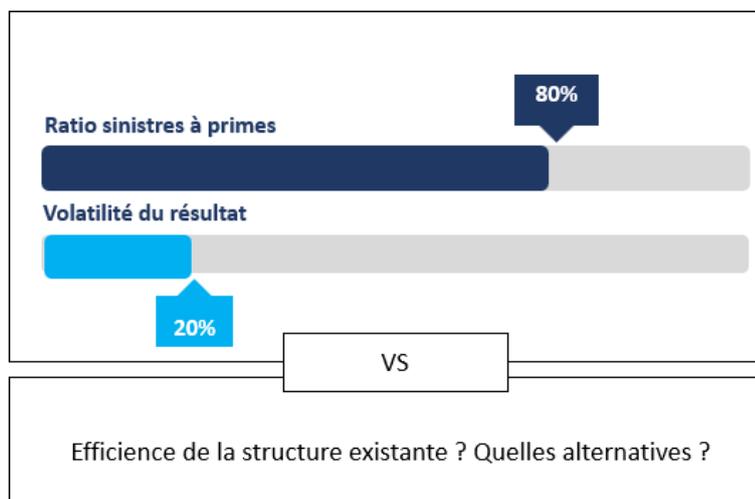


FIGURE 4.2 – Formulation du problème d'optimisation

Même ainsi formulé, il est possible de se ramener à un problème d'optimisation classique, car les cibles recherchées par l'assureur s'obtiennent facilement à l'intersection des lignes d'isoprofit (respectivement d'isorisque) avec la frontière efficiente.

Enfin, si les objectifs et les contraintes de l'optimisation peuvent désormais être définis, il reste à fixer l'espace des traités possibles car une optimisation sans point de départ serait fastidieuse et contreproductive.

Par exemple, pour les traités en excédent de sinistres, l'espace des possibles peut devenir rapidement vaste et difficilement explorable numériquement, selon que l'on fixe la portée, la priorité ou qu'on définisse les bornes de ceux-ci.

Il est usuel que l'on fixe la portée, pour explorer la rétention dans un espace borné.

Domaine des traités admissibles

Il s'agit de donner une démarche pour la définition de \mathcal{T}_j , l'espace des traités admissibles ou l'ensemble des traités à tester.

Cette analyse se fait sur la base des scénarios ORSA, complémentairement à une étude des données de marché. On étudie donc les capacités allant des scénarios les plus favorables, aux scénarios les plus adverses de l'ORSA. Relativement aux données de marché, la capacité maximale à étudier peut être fixée aux voisinages de la perte maximale observée chez les assureurs de la branche j .

En France, l'APREF (Association des Professionnels de la Réassurance) et la FA (France Assureur) fournissent chaque année des données de marché par branche.

L'analyse se fait également sur base du programme de réassurance existant. On teste

alors les alternatives situées dans les voisinages des capacités et des rétentions, dans les limites fixées par la cédante.

À présent, discutons les méthodes de résolution.

4.2 Approches heuristiques pour la détermination de la frontière de Pareto

4.2.1 Approches heuristiques en univers multiobjectifs

Intéressons-nous à la résolution du problème par les heuristiques conçues pour l'optimisation multiobjectifs.

Les heuristiques désignent un large ensemble de méthodes classiques pour la résolution de problèmes d'optimisation multiobjectifs, nous en explorons quelques unes, leurs limites dans le cadre de la réassurance, et proposons des alternatives.

On se place toujours sur la LoB j de risque $S_{LoB_j}(t)$.

Weighted sum méthode

Cette méthode consiste à se ramener à un problème d'optimisation mono-objectif en construisant une fonction score, somme pondérée de toutes les fonctions objectives, en claire :

Le problème

$$\begin{cases} \operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{T}_j} f_i(x), & \text{pour } i = 1, \dots, M \\ \text{S.c : } g_j(x) \geq 0, & \text{pour } j = 1, \dots, K \end{cases}$$

devient :

$$\begin{cases} \operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{T}_j} \sum_{i=1}^M w_i \cdot f_i(x), w_i \in \mathbf{R}_+ \text{ tel que } \sum_{i=1}^M w_i = 1 \\ \text{S.c : } g_j(x) \geq 0, \end{cases} \quad \text{pour } j = 1, \dots, K$$

Ainsi, il s'agit de construire hyperplan d'équation :

$$0 = \sum_{i=1}^M w_i \cdot f_i(x), w_i \in \mathbf{R}_+ \text{ tel que } \sum_{i=1}^M w_i = 1$$

et se déplacer sur le long de l'ensemble des possibles, pour toucher la frontière efficiente au point le plus proche de l'origine.

Par exemple en dimension 2 (figure 4.3), un choix de w_1 et w_2 conduit à la droite (A). La minimisation de la fonction score, consiste alors à translater (A) vers l'origine. Le processus s'arrête sur le point de la frontière le plus proche de l'origine (intersection avec (A')).

À l’opposé, la maximisation de la fonction score aurait conduit à s’orienter le plus loin possible de l’origine, tout en restant dans l’espace des admissibles.

En réassurance, w_i désigne l’importance que l’assureur accorde au critère f_i . Et le meilleur traité, est le traité qui conduit au minimum (respectivement maximum) de la fonction score.

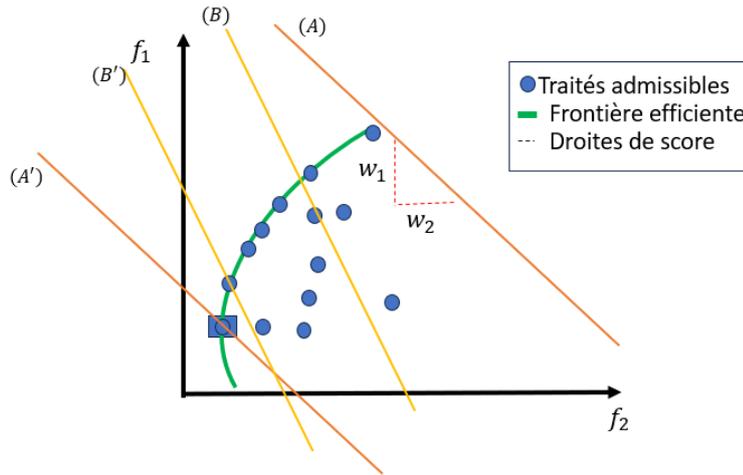


FIGURE 4.3 – Méthode *Weighted Sum*

Pour un M-uplet de (w_1, \dots, w_M) , on obtient toujours une seule et unique solution, point de la frontière de Pareto du problème multiobjectif.

Ainsi, en reprenant l’optimisation pour d M-uplets différents, on arrive à construire une frontière de Pareto comportant d points : l’unicité de la solution fournie par un point est dû au fait que tous les hyperplans parallèles conduisent toujours à la même solution.

Il va sans dire que cette méthode n’est pas la mieux adaptée au cadre de la réassurance, d’abord parce qu’il est difficile de définir une fonction score et parce qu’il est fastidieux de reprendre le processus pour définir toute la frontière efficiente.

Ensuite, la méthode ne permet pas d’atteindre les optimums de Pareto situés dans les zones non convexes de la courbe, car les hyperplans sont toujours poussés aux extrémités. Enfin, il est peu courant que les objectifs de l’assureur ne soient pas conflictuels.

La méthode ϵ -contrainte

Cette méthode permet également de se ramener à un problème mono-objectif, en conservant une seule fonction objective, puis en restreignant les autres objectifs à des valeurs spécifiques prédéfinies par l’assureur (ramenés à des contraintes).

Ainsi, le problème

$$\begin{cases} \operatorname{argmax}_{x \in \mathcal{T}_j} \operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{T}_j} f_i(x), & \text{pour } i = 1, \dots, M \\ \text{S.c : } g_j(S_{LoB_j}(t)) \geq 0, & \text{pour } j = 1, \dots, K \end{cases}$$

devient :

$$\begin{cases} \operatorname{argmax}_{x \in \mathcal{T}_j} f_i(x), & \text{pour } i \text{ fixé } f_i \text{ un objectif à maximiser} \\ \text{S.c : } g_j(x) \geq 0, & \text{pour } j = 1, \dots, K \text{ et } f_s \leq \epsilon_s, \forall s \neq i \end{cases}$$

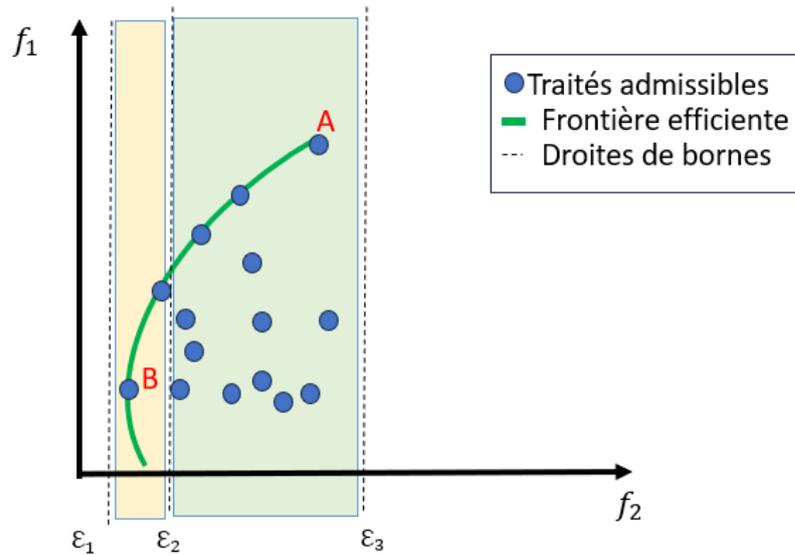


FIGURE 4.4 – ϵ -constraint

En dimension 2, cette méthode consiste à restreindre la première fonction et à maximiser la seconde. Dans le premier cas (restriction en vert), on tombe toujours sur une seule même solution de Pareto (point A).

Pour former la frontière, il faut reprendre le processus en définissant plusieurs intervalles pour f_2 .

Cette méthode semble intéressante en réassurance, car en général, l'assureur connaît les limites de risques qu'il souhaite assumer.

4.2.2 Application 1 : Portefeuille Responsabilité civile Auto

Appliquons la méthode ϵ -contrainte au portefeuille responsabilité civile Automobile. Soit le problème suivant : Trouver un en QP qui minimise la volatilité du résultat et

minimise le résultat cédé.

Nous choisissons f_1 comme étant la volatilité du résultat après réassurance et f_2 le résultat technique cédé.

On suppose que l'assureur souhaite céder moins de 50 000€ de résultat.

Le problème

$$\operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{T}_j} f_i(x), \text{ pour } i = 1, 2$$

devient

$$\operatorname{argmin}_{x \in \mathcal{T}_j} f_1(x) \quad ; \quad \text{S.c} : f_2(x) \leq 50000$$

Analysons d'abord l'impact d'une quote part sur la distribution du résultat technique.

Distribution du résultat technique

La figure 4.5 donne la distribution des résultats techniques selon le taux de cession de l'assureur.

On retrouve un résultat intuitif : plus le taux de cession est élevé, moins la distribution du résultat est étendue. Le resserrement rapide de la distribution traduit le fait que la grande majeure des sinistres sont des risques de fréquence (issues de la sinistralité attritionnelle).

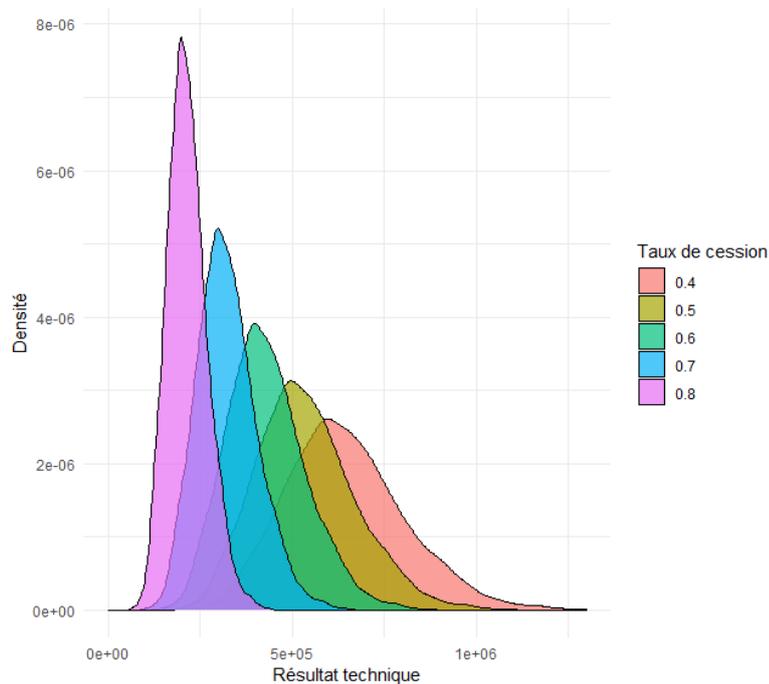


FIGURE 4.5 – Résultat technique selon la QP

Quote part optimale

On teste tous les taux de quote part entre 40% et 80% avec un saut de 0.5%. Le graphique f_1-f_2 a une allure convexe car il existe des risques de pointe qui sont plus absorbés par les grandes cessions. Par ailleurs, l'analyse mène indéniablement à un seul et unique taux de QP qui sera le taux minimal dans la zone définie par l'assureur (60% ici).

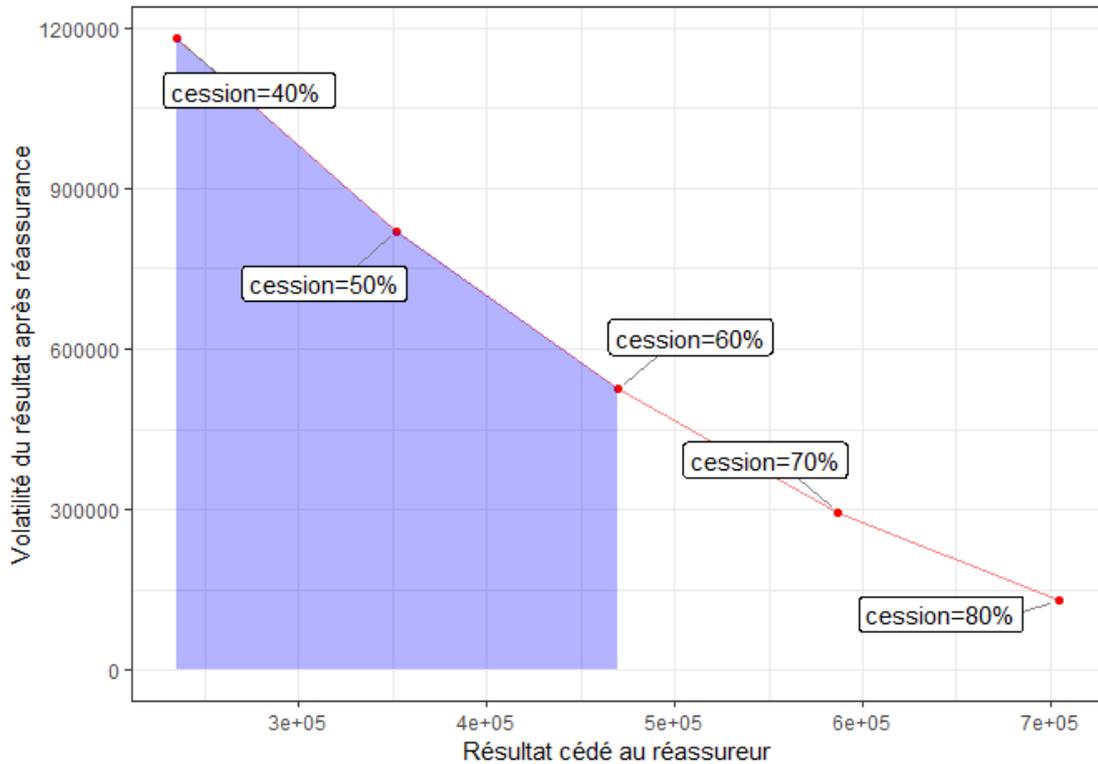


FIGURE 4.6 – Sélection taux de QP

En réalité, pour cette appétence au risque, ce traité est le meilleur. D'autres solutions peuvent émerger si l'assureur change d'appétence au risque.

4.2.3 Algorithme naïf pour la construction de la frontière efficiente

Une approche naïve consiste à construire l'ensemble des points non dominés dans l'espace des possibles pour former la frontière efficiente.

On obtient ainsi les optimaux sur les objectifs et les contraintes, pour un set de traités donné.

En réalité, l'espace des possibles de l'assureur n'est pas si dense que cela. Il ne dispose que d'une liste d'alternatives précises sur le marché.

L'exercice revient alors à choisir le maximum global (sur le set de traités) mais qui en

réalité pourrait être un maximum local dans l'univers des traités, car si on étend l'espace des possibles, les traités efficients changent.

Discutons ceci plus pratiquement.

Notre démarche pour obtenir l'ensemble des points non dominés est simple : l'idée consiste à se baser sur la définition elle-même. On crée d'abord une archive vide, et on y parcourt l'espace des possibles en y retenant que les points non dominés (sachant qu'un point ajouté à une itération précédente ne peut être enlevé à l'itération suivante car il a été confronté à tous les autres points).

La démarche peut se résumer à travers l'algorithme suivant :

```

Initialiser l'ensemble  $\mathcal{T}_j$  des traités
Faire 30 000 simulations de la sinistralité du LoB  $j$ 
Évaluer les  $f_i$  et  $g_i$  pour chaque élément de  $\mathcal{T}_j$ 
 $N \leftarrow \text{Cardinal}(\mathcal{T}_j)$ 
Initialiser  $\mathcal{A} = \{\}$  ▷ Une liste vide pour contenir les points non dominés
Tant que  $N > 0$  faire
|   Si  $x_i$  non dominé alors
|   |    $\mathcal{A} = \mathcal{A} \cup \{x_i\}$ 
|   Fin si
|    $N = N - 1$ 
FinTq
Supprimer les éléments de  $\mathcal{A}$  qui ne vérifient pas les contraintes
Retourner  $\mathcal{A}$ 

```

Algorithm 1 – Algorithme naïf

Le package *emoa* : *Evolutionary Multiobjective Optimization Algorithms* de R, propose une fonction qui permet d'avoir les points non dominés quelque soit la dimension du problème.

Voyons cela de plus près :

4.2.4 Application 2 : Portefeuille dommages Automobile

Dans cette application au LoB dommage Auto, on s'intéresse au problème d'optimisation suivant :

La structure 50000 XS 6000 + sans AAD + reconstitutions illimitées est-elle optimale au sens du résultat et la volatilité du résultat ? Existe-il un XS plus efficace ?

Par ailleurs, l'assureur souhaite que la probabilité que ses pertes soient au-dessus de 500 000€ n'excède pas 10%.

La première étape consiste à étudier l'efficacité de la structure existante. Cette étude vise à répondre aux questions suivantes :

- Quel impact du traité existant sur les indicateurs choisis ? Il s'agit de fournir des indicateurs chiffrés permettant d'évaluer la performance de la stratégie sur place
- Quel serait l'effet d'une augmentation de portée ou de la priorité sur les indicateurs ? Il s'agit d'une analyse de sensibilité des indicateurs aux différentes composantes du traité (la rétention, la priorité, l'AAD, le nombre de reconstitutions)
- Existe-il des traités efficaces ? Il s'agit d'abord d'identifier l'ensemble des traités conduisant aux mêmes résultats que la structure existante. Cette analyse permet de trouver les points de la frontière efficace qui coïncident avec le point qui représente le traité actuel. En pratique, un tel point est rare. Puis, de proposer l'ensemble des traités non dominés qui maximisent l'indicateur choisi et vérifient les éventuelles contraintes.

Suivant le modèle de simulation en 3.7, nous simulons 30 000 scénarios attritionnels et graves du portefeuille Dommage Automobile auxquels on applique la structure suivante : **50000 XS 6000 + sans AAD + reconstitutions illimitées.**

Distribution des pertes

La figure 4.7 rend compte de l'impact de la structure de réassurance existante sur la distribution des pertes.

Sans réassurance, les pertes varient dans un intervalle très large ($[0, 2\,000\,000\ \text{€}]$) tandis que son application permet de se restreindre à $[0, 1\,000\,000\ \text{€}]$.

Ainsi, le traité actuel permet de limiter l'ampleur des pertes.

Aussi, l'impact d'une telle structure sur les pertes peut être quantifié par l'air de la surface entre la distribution avant réassurance et celle après réassurance : soit 857 300 €.

On note par ailleurs une dominance stochastique d'ordre 1 entre la perte avant réassurance et après réassurance. Le traité est donc efficace si la compagnie souhaite garder ce niveau de risque.

Ici, nous saisissons l'importance d'établir un cadre clair définissant les objectifs et les contraintes de l'optimisation (chiffrés), avec une liste de contrats à tester.

En effet, lorsqu'une analyse d'efficacité est entreprise sans considérer le contexte (un objectif chiffré) et en présence d'un seul contrat, les réponses se limitent inévitablement à "oui" ou "non" en fonction du critère de dominance stochastique ou selon que celui-ci conduit à des pertes trop grandes.

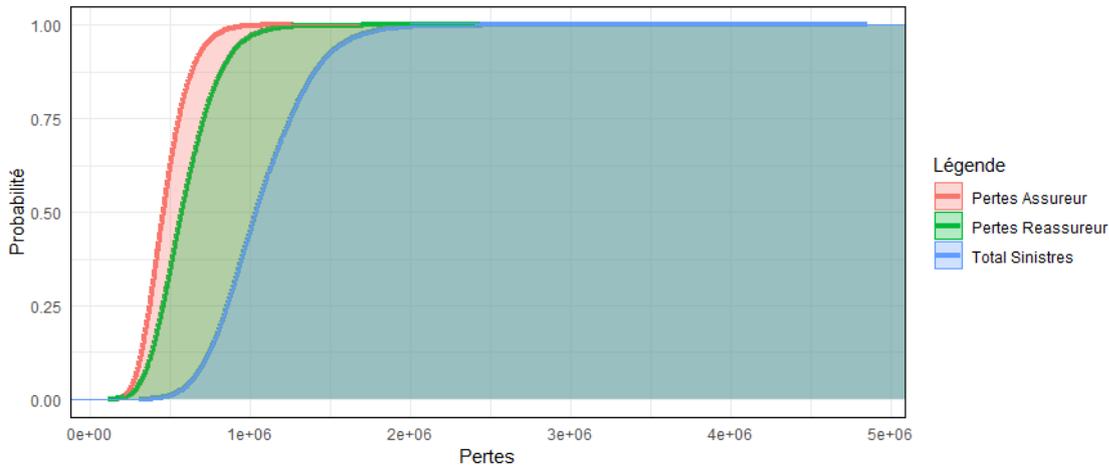


FIGURE 4.7 – Distribution des pertes sur la LoB dommage Automobile

La probabilité que les pertes se limitent à 500 000 € est inférieure au seuil désiré de 90%. On peut soupçonner que les hypothèses de redressements et d'inflation future, ont impacté les pertes de la compagnie. Et il convient de trouver un traité permettant de translater davantage la répartition des pertes après réassurance vers la gauche.

Pour évaluer l'effet d'un changement de traité, on définit un ensemble de traités à tester, impliquant une hausse de la priorité et de la portée :

Priorité Minimale = 5000 € Priorité Maximale = 10000 € Pas de Priorité = 1000 €

Portée Minimale = 50000 € Portée Maximale = 100000 € Pas de Portée = 10000 €

Pour chaque valeur de portée dans la plage fixée, on joint toutes les priorités possibles pour former un traité. Ainsi, on teste un nombre total de traités correspondant à :

$$\left(\frac{\text{Priorité Maximale} - \text{Priorité Minimale}}{\text{Pas de Priorité}} + 1 \right) * \left(\frac{\text{Portée Maximale} - \text{Portée Minimale}}{\text{Pas de Portée}} + 1 \right)$$

Effets de nouveaux traités XS

On peut évaluer toutes choses égales, par ailleurs, l'effet de la croissance de la priorité et ou de la portée sur les indicateurs de risques.

Le heatmap (carte de chaleur) en figure 4.8 fournit les résultats dans le cadre de notre application.

Plusieurs constats peuvent être faits :

- Le résultat est plus sensible à la priorité qu'à la portée
- Il existe des lignes d'iso-résultat, c'est-à-dire des combinaisons de priorités et portées pour lesquelles on a les mêmes résultats. Leur analyse est intéressante, car elle permet de trouver des alternatives moins coûteuses à certains traités.
- Il y a des zones à partir desquelles l'augmentation de la priorité n'a plus d'impact.

Le heatmap est déterminant dans cette analyse, car il donne également des pistes pour la limitation du domaine des possibles, ce qui réduit le temps de résolution du problème d'optimisation.

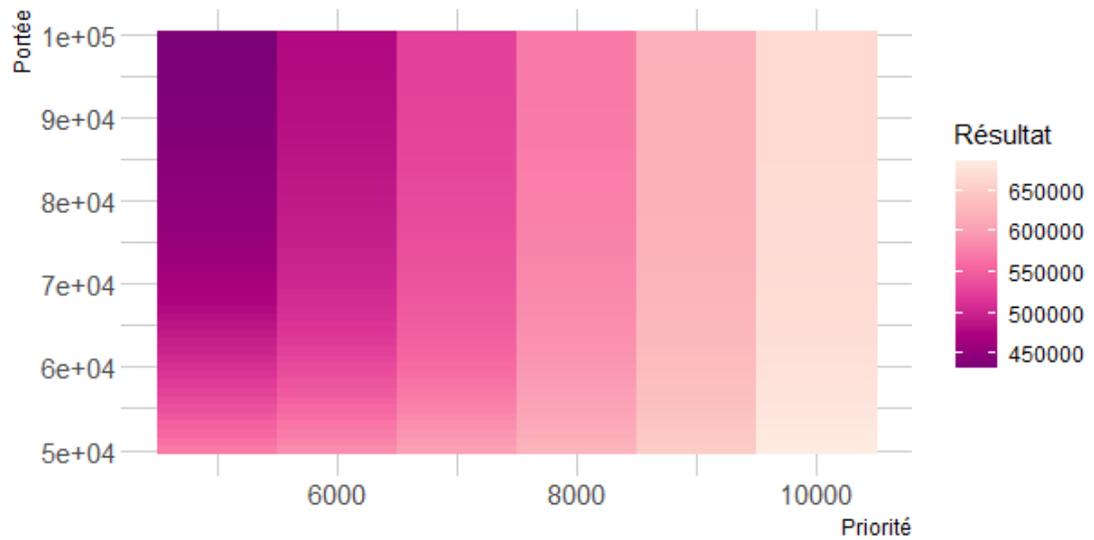


FIGURE 4.8 – Heatmap d'analyse d'effets de variations des caractéristiques de la priorité et ou de la portée

Une solution du problème, est une solution qui maximise les objectifs de l'assureur et permet à la fois de limiter les pertes dans l'intervalle souhaité.

On s'intéresse désormais à la frontière de Pareto du problème. Discutons tout d'abord ce qu'aurait été la solution si l'assureur avait un seul objectif.

Traité Optimal dans un cadre Mono-objectif

Dans un cadre d'optimisation mono-objectif, avec recherche de la meilleure combinaison Portée-Priorité.

Une solution ainsi que ses alternatives peuvent facilement être évaluées via un graphique en trois dimensions (cf. 4.9).

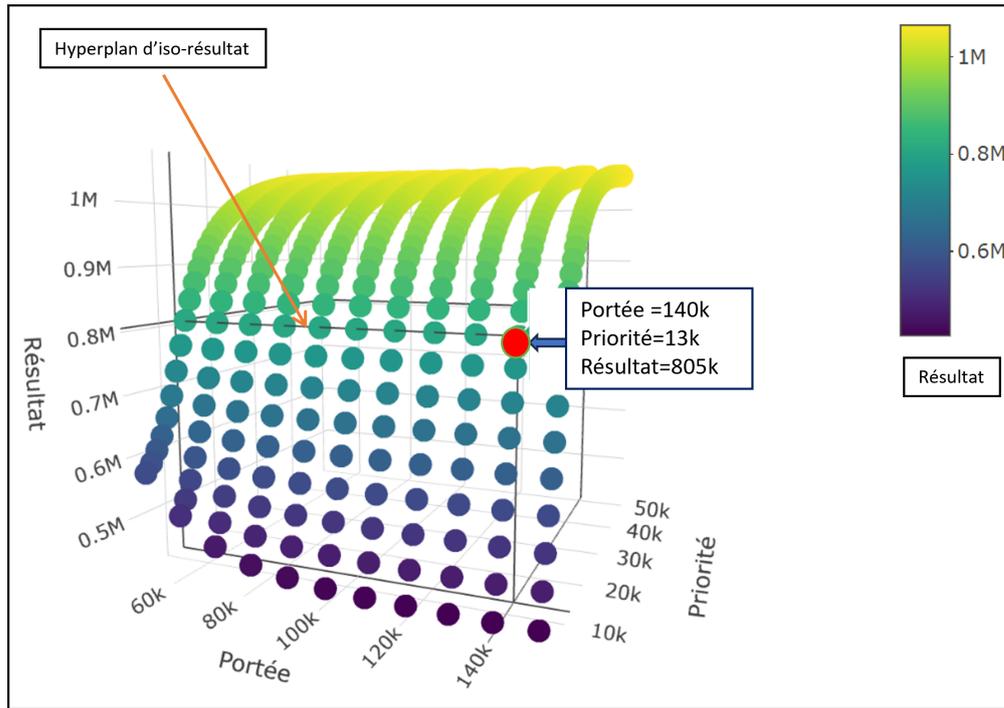


FIGURE 4.9 – Graphique des lignes d'iso-résultats

Il est possible, dans cet espace, de localiser n'importe quel traité et d'évaluer son impact.

Ainsi, en fonction du niveau de risque et de résultat que l'entreprise souhaite atteindre, il suffira de tracer un hyperplan dans l'espace à 3 dimension pour localiser les traités d'iso-résultat, et sélectionner le meilleur traité selon un critère secondaire.

Comme dans les algorithmes de résolutions multiobjectifs, l'assureur retrouve un point de la frontière.

Par exemple, le plan conduisant au résultat de 805k que contient le traité 140k XS 13 k.

Optimisation bi-objective

On élargit les priorités entre 5000 et 50000 avec pas 5000 et les portées entre 50000 et 150000 avec pas 10000, soit 110 combinaisons au total. Pour chaque ligne d'iso-résultat, l'optimum de pareto correspond au traité de variance minimal (et vis-versa). Sur le LoB Dommages Automobile on obtient la figure 4.10.

On observe dans un espace Résultat-Volatilité, l'ensemble des traités efficaces ou non dominés (les traités admissibles appartenant à la courbe verte).

Puisque chaque traité est identifié dans cet espace, il est possible de faire un choix efficace selon l'appétit au risque de l'assureur.

Dans notre cas, le traité sous étude n'appartient pas à la frontière efficace. Par ailleurs, parmi les 110 combinaisons possibles, seules 41 sont non dominées.

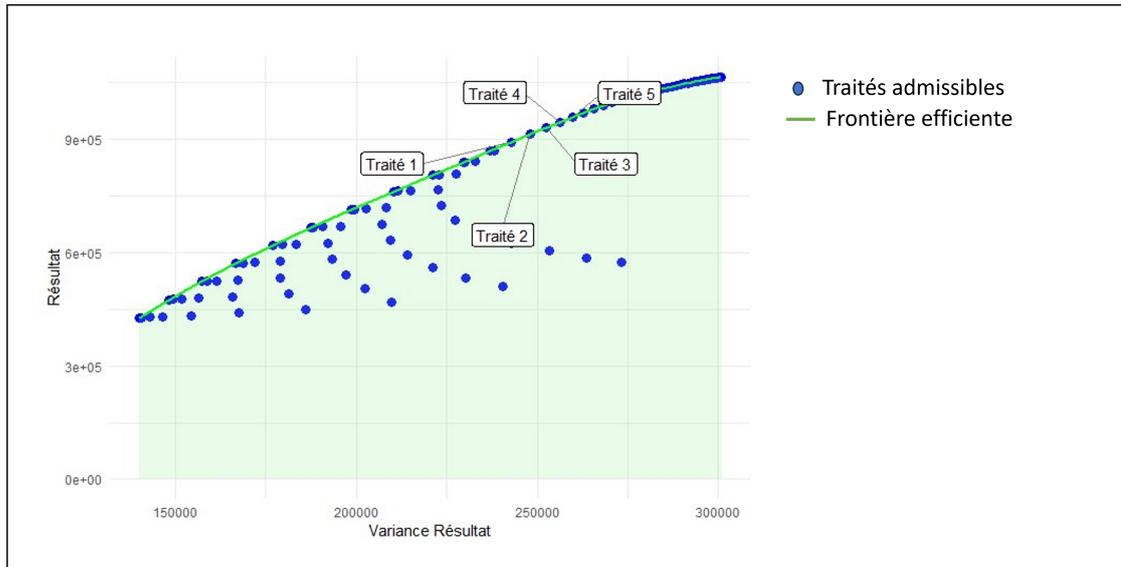


FIGURE 4.10 – Frontière de Pareto en dimension 2

Deux problèmes se posent désormais :

- Cette approche limite les objectifs de l'assureur sur l'ensemble des valeurs auxquelles conduisent les traités admissibles. Ainsi, l'ajout d'un nouveau traité peut potentiellement en éliminer un autre qui était efficient.
- Pour en tenir compte, il faudrait pouvoir rajouter des traités à l'espace des possibles tout en s'assurant qu'ils sont disponibles sur le marché.

4.2.5 Introduction d'un critère de conformité au marché

La réassurance est avant tout une relation commerciale, et tout traité efficient n'est pas nécessairement disponible sur le marché.

Pour contourner ce paradoxe entre la théorie et la pratique, il conviendrait de tenir compte d'indicateurs capables de renseigner sur la conformité au marché.

- Le premier indicateur naturel est la marge technique du compte de résultat du réassureur.
On peut considérer comme traité conforme, un traité pour lequel la marge du réassureur ne s'éloigne pas de la marge moyenne sur l'historique disponible.
- Le partage du sort :
On peut se limiter à des traités où le partage du sort est équitable entre assureur et réassureur. Ce critère n'est pas le meilleur, car peu de traités conduisent à un partage du sort équitable.
- D'autres critères peuvent se baser sur des contraintes fournies par le réassureur lui-même : par exemple un ratio de risque cédé- risque gardé limite, une plage de portées fixées selon la perte moyenne et sa variabilité avant réassurance.

Dans la suite, on suppose que la marge du réassureur reste au-dessus du seuil de 5%.

En appliquant ce critère à notre application précédente, on garde uniquement 5 traités numérotés de 1 à 5 :

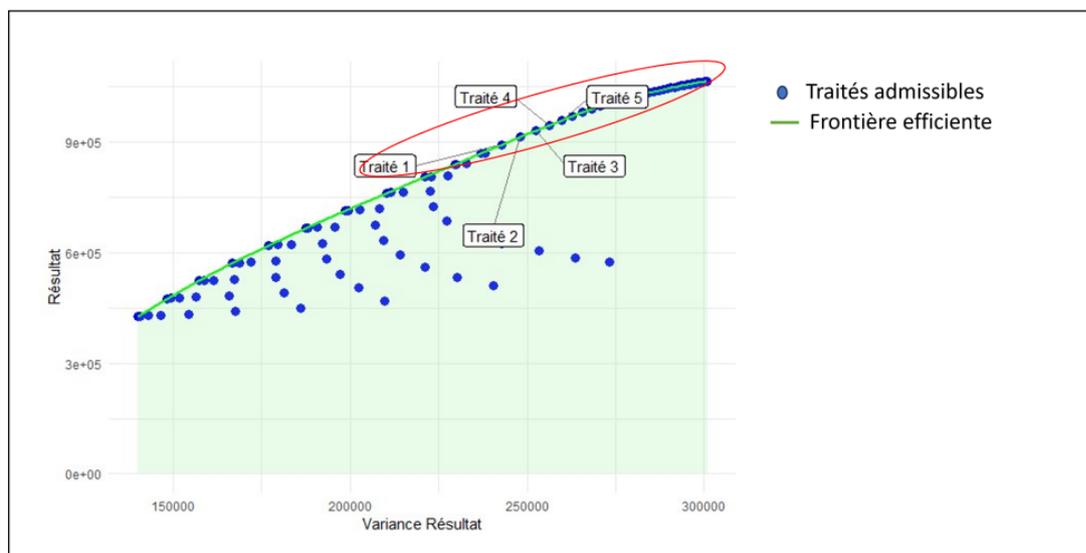


FIGURE 4.11 – Introduction d'un critère de marché

À présent, discutons la façon d'étendre la frontière, ce qui aurait l'avantage de redresser la frontière efficiente.

Étant donné des solutions initiales, comment créer de nouvelles solutions qui soient plus efficaces que les premières au sens du problème? Les méta-heuristiques d'optimisation combinatoires nous donnent une piste.

4.3 Contributions des méta-heuristiques

Les méta-heuristiques sont des algorithmes stochastiques itératifs conçus pour la résolution de problème d'optimisation difficiles, plus généralement les problèmes d'optimisation combinatoires dits NP-complets (voyageurs de commerce, problème du sac à dos ,etc).

Initialement formulés pour les problèmes d'optimisation mono-objectifs, les dernières décennies ont donné lieu à plusieurs adaptations au cas multiobjectifs, dont les applications en assurance sont de plus en plus nombreuses.

Les méta-heuristiques se divisent en deux grandes familles de méthodes : les méthodes à solution unique qui à l'instar des heuristiques d'optimisation multiobjectif, mènent vers des points uniques de la frontière de Pareto, et des solutions à base de populations qui

permettent de former entièrement la frontière.

Ces méthodes sont de plus en plus prisées en assurance pour leur capacité à "muter" : étant donné des inputs (traités), elles sont capables de recréer de nouveaux inputs, toujours plus performants que les précédents selon les objectifs et les contraintes fixées.

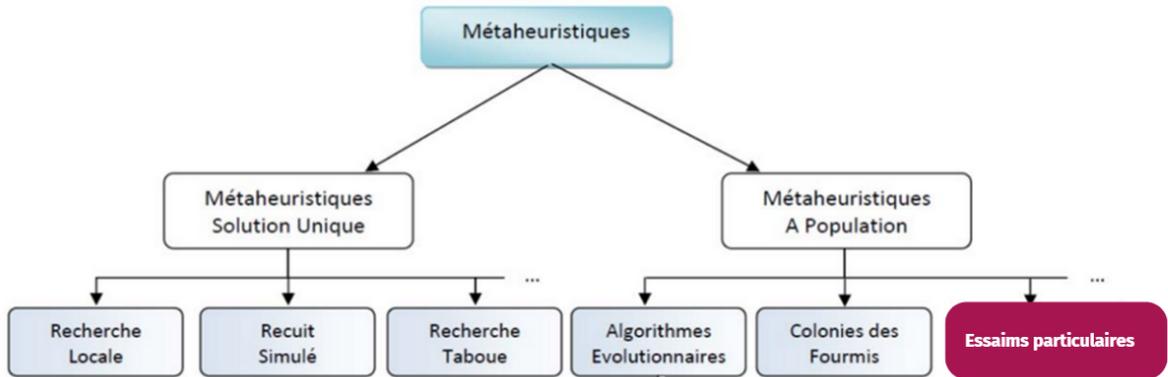


FIGURE 4.12 – Métaheuristique

Récemment, plusieurs travaux en réassurance se sont penchés sur les algorithmes à base de populations pour améliorer l'efficacité des structures proposées et offrir un domaine des possibles plus attrayant.

En 2007, Stéphane Arnaud [3] proposait une optimisation mono-objective via l'algorithme génétique, et en 2022, Pauline Berger [5] se penchait sur l'application de l'algorithme NSGA-II (*Non-dominated Sorting Genetic Algorithm II*) en réassurance.

En clair, toutes les applications se sont basées sur des algorithmes évolutionnaires.

Dans le cadre de ce mémoire, nous proposons une application de la méthode par essais particuliers car selon Riadh Madiouni [12], il s'agit de l'algorithme d'optimisation à population la moins coûteuse en temps de calcul.

Il s'agira d'appliquer une version multiobjectifs du *Particle Swarm Optimization*, dénommée MOPSO (*MultiObjective Particle Swarm Optimization*).

4.3.1 Du PSO au MOPSO

Avant d'entamer l'extension de l'algorithme PSO (*Particle Swarm Optimization*) au cas multiobjectifs, décrivons l'essentiel du concept.

L'algorithme d'essais particuliers s'inspire du comportement des nuées d'oiseaux, convergeant toutes vers un même point de nourriture pour résoudre les problèmes d'optimisation à plusieurs variables.

Dans leur mouvement, on suppose qu'ils sont capables de vitesse, de communication entre eux et de mémoire.

Sous ces conditions, chaque oiseau se déplace alors suivant les réflexes suivants :

- le réflexe cognitif ou de confiance en soi : chaque oiseau tend à se diriger autour de la meilleure position par laquelle il est passé (son expérience personnelle) ;
- le réflexe de voisinage : chaque oiseau tend à copier la démarche de ses voisins en modifiant sa trajectoire selon l'information qu'il reçoit d'eux. Ainsi, il a tendance à se diriger vers ses voisins si ceux-ci ont des trajectoires plus prometteuses ;
- un réflexe de suivisme social : l'oiseau tend à aller vers les sites les plus couramment visités en moyenne par la nuée (adopte la trajectoire de la majorité).

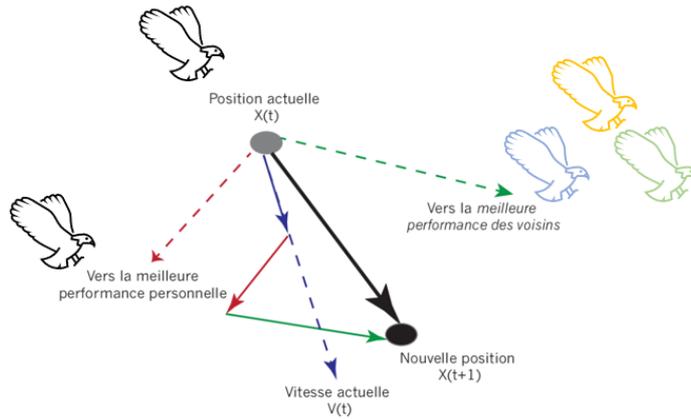


FIGURE 4.13 – PSO

En combinant ces trois comportements, la nuée d'oiseau finit toujours par converger vers le point d'approvisionnement.

Formellement, on se place sur l'espace \mathcal{T}_j sur lequel chaque élément possède d paramètres.

À chaque instant de temps t , un oiseau i est caractérisé par un vecteur de position $\mathbf{X}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{id})$ et un vecteur de vitesse $\mathbf{V}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{id})$ qui oriente sa trajectoire future .

Au cours de son mouvement, l'oiseau garde en mémoire les meilleures positions où il a été, selon les différentes dimensions, soit $\mathbf{x}_{\text{best}i} = (x_{\text{best}i_1}, x_{\text{best}i_2}, \dots, x_{\text{best}i_d})$.

Enfin, selon le réflexe social, il récupère l'information des meilleures positions parcourues par l'ensemble de la nuée $\mathbf{Global}_{\text{best}} = (gbest_1, gbest_2, \dots, gbest_d)$.

De l'instant t à l'instant $t + 1$, l'oiseau évolue sur la dimension k de l'espace des possibles en combinant l'ensemble des informations à sa disposition :

$$x_{ik}(t + 1) = x_{ik}(t) + v_{ik}(t + 1) \quad (A)$$

Où la vitesse $v_{ik}(t + 1)$ vérifie

$$v_{ik}(t + 1) = wv_{ik}(t) + c_1r_1[p_{\text{best}ik}(t) - x_{ik}(t)] + c_2r_2[g_{\text{best}ik}(t) - x_{ik}(t)]. \quad (B)$$

c_1 et c_2 sont des coefficients de pondération de la direction et désignent respectivement : le coefficient de confiance (confiance accordée à sa propre trajectoire suivie) et le coefficient social (confiance accordée au mouvement global).

r_1 et r_2 désignent quant à eux des variables aléatoires uniformes à valeurs dans $[0,1]$ qui assurent le parcours de tout l'espace des possibles et évitent que les oiseaux ne soient confinés dans un optimum local.

w renvoie quant à lui à un réel positif appelé poids d'inertie qui permet de rendre compte des informations passées accumulées.

Y. Shi et R. Eberhart [16], ont montré qu'une valeur de $\omega \in [0.4, 0.9]$ permet d'explorer efficacement l'espace des solutions et d'aboutir à une solution optimale.

Dans notre travail, on prendra $\omega = 0.72$, la valeur la plus couramment utilisée.

Pour le choix de c_1 et c_2 , Clerc et Siarry [9] proposent la relation suivante :

$$c1 = c2 = \frac{(w + 1)^2}{2}$$

Enfin, les meilleures positions individuelles et globales évoluent suivant les équations :

$$P_{\text{best}i}(t + 1) = \begin{cases} P_{\text{best}i}(t), & \text{si } f(x_i(t)) \geq f(P_{\text{best}i}(t)), \\ x_i(t), & \text{sinon.} \end{cases} \quad (C)$$

et

$$G_{\text{best}i}(t + 1) = \text{Arg min}_i[P_{\text{best}i}(t + 1)] \quad (D)$$

Suivant ces équations, les oiseaux explorent l'espace des possibles tant que l'un ou l'ensemble des trois critères de convergence n'est pas satisfait :

- Le nombre maximum d'itérations défini n'est pas atteint ;
- La variation de la vitesse des particules est proche de zéro ;
- La valeur de l'objectif est satisfaisante vis-à-vis de la valeur cible définie.

Le PSO peut se résumer à travers l'algorithme suivant (inspiré de [12]) :

Initialiser aléatoirement les positions x_i et les vitesses V_i des N oiseaux

Evaluer les positions des particules dans l'espace de recherche

$Pbest_i \leftarrow x_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$

Calculer le vecteur *GlobalBest* selon (D)

Tant que *le critère d'arrêt n'est pas satisfait faire*

 Déplacer les oiseaux selon les équations (A) et (B)

 Evaluer les positions des particules

 Faire la mise à jour des $Pbest_i$ et *GlobalBest* suivant (C) et (D)

FinTq

GlobalBest

Algorithm 2 – Algorithme PSO

L'évolution de l'algorithme PSO est réalisée en utilisant la meilleure expérience d'un individu et de toute la population. Cela garantit que l'algorithme PSO atteint une vitesse de convergence rapide et des performances d'optimisation plus efficaces.

Pour passer au cas multiobjectif, on peut remarquer les points suivants

- Une solution portée par chaque oiseau est susceptible d'être un point de la frontière de Pareto.

On introduit alors la notion **d'archive externe** \mathcal{A} qui permet à chaque itération de stocker les solutions non dominées.

L'archive externe a la capacité de refuser les nouvelles solutions si d'autres déjà stockées la dominent et de rejeter une ancienne solution si celle-ci n'est plus optimale.

- Si on limite le champ d'informations des particules, alors on assure la convergence vers des solutions diversifiées (de sorte que la frontière ne soit constituée d'un unique point).

Cette limitation d'information se fait en imposant une règle de choix de la meilleure position globale. Ceci est indispensable puisqu'avec la formulation de Pareto, il n'existe pas une seule meilleure position globale, mais un ensemble de meilleures positions globales (les points non dominés).

Il existe dans la littérature plusieurs règles, notamment le changement de topologie du voisinage (définir le nombre d'oiseaux avec lesquels chaque oiseau peut communiquer), la *crowding* distance, largement utilisée dans les algorithmes génétiques et que nous nous proposons d'appliquer comme critère.

Crowding distance

On se place sur une frontière de Pareto formés par N points.

La *Crowding* distance ou " densité de peuplement " d'un point P_i , mesure la densité des autres points de la frontière autour de P_i .

Dans un problème de d fonctions objectives on calcule la CD de chaque points P_i suivant :

$$CD(P_i) = \sum_{j=1}^d CD_j(P_i)$$

Où on obtient les CD_j par la procédure :

- Renommer les P_i suivant f_j croissant ($f_j(P_1) \leq f_j(P_2) \dots \leq f_j(P_N)$).
- Puis

$$CD_j(P_i) = \frac{f_j(P_i) - f_j(P_{i-1})}{f_j(P_N) - f_j(P_1)}$$

On comprend alors aisément que cette distance désigne géométriquement le périmètre du plus grand parallépipède rectangle englobant l'élément i sans inclure aucun autre point (figure 4.14).

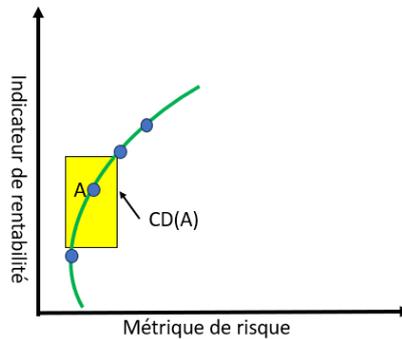


FIGURE 4.14 – *Crowding* distance

La *crowding* distance nous permet désormais de classer les solutions non dominées et d'orienter les oiseaux l'algorithme PSO dans des zones encore inexplorées.

Pour ce faire, on classe les solutions présentes dans l'archive à la i -ème itération par *crowding* distance décroissant, et seul le top 10% \mathcal{A}' est choisi pour servir de leader. Finalement, chaque particule choisit un Gbest de façon aléatoire dans \mathcal{A}' .

Traitement des contraintes

Si on se ramène au cadre de la réassurance, alors étant donnée un groupe de traités initiaux, l'algorithme permet de déterminer ceux qui sont optimaux (première frontière de Pareto), et à partir de ceux-là, crée de nouveaux traités fournissant de meilleures valeurs de fonctions objectives que les traités de la population précédente.

En poursuivant l'algorithme, on est capable de trouver un traité efficient quelque soit le

niveau cible des fonctions objectives.

Un risque cependant se pose, c'est que l'algorithme se dirige vers des zones inadmissibles (par exemple des priorités négatives). C'est là qu'intervient la gestion des contraintes.

Il suffit, à chaque itération, de contraindre les traités dans une zone admissible, ou de réduire la taille de la population en supprimant tous les oiseaux qui ne vérifient pas les contraintes.

On propose l'algorithme suivant :

```

 $\mathcal{A} = \emptyset$  ▷ Archive vide
Initialiser  $\{x_i, v_i, \text{GlobalBest}_i, \text{Pbest}_i\}$ 
Tant que  $t_{max} > 0$  faire
    faire la mise à jour des vitesses et des positions sur toutes les dimensions
    évaluer les objectifs
    imposer les contraintes aux  $x_i$ 
    Si  $x_i \notin N_s, \forall N_s \in \mathcal{A}$  alors
         $\mathcal{A} = \{N_s \in \mathcal{A} \mid N_s \not\prec x_i\}$  ▷ Eliminer les points désormais dominés de l'archive
         $\mathcal{A} = \mathcal{A} \cup \{x_i\}$ 
    Fin si
    Mettre à jour les Pbesti et sélectionner les leaders par CroD
FinTq
Retourner  $\mathcal{A}$ 

```

Algorithm 3 – Algorithme CD-MOPSO

4.3.2 Application : Portefeuille Multirisque Professionnel Vol

Intéressons-nous au problème suivant : Quelle est la meilleure combinaison de priorité et portée qui permettent de maximiser la RORAC, minimiser le ratio sinistres à primes et de minimiser le coefficient de variation du résultat moyen.

Rappelons que le portefeuille MRP Vol n'est pas modélisé par deux sous-modèles attritionnels et graves. Par ailleurs, on ajoute toujours la contrainte de la marge du réassureur toujours au-dessus du seuil de 5%.

Testons un niveau minimal de priorité fixé à 5000, allant jusqu'à 20 000 avec un pas de 5000. Et un niveau minimal de portée fixée à 50 000 allant jusqu'à 150 000, avec un pas de 10 000.

Chaque couple portée-priorité constitue la position d'un oiseau.

Pour les contraintes liées au temps de calcul de l'algorithme, effectuons deux itérations : La figure 4.15 montre les résultats dans un espace de 3 dimensions. La première itération permet de voir parmi les traités initiaux vérifiant la contrainte de marge, ceux qui sont

efficients.

On note que seuls 5 points appartiennent effectivement à la frontière efficiente.

À la seconde itération, la nouvelle population tend à se diriger dans les zones où les traités efficients sont moins denses. Ces points correspondent aux traités de la population 2 (4.16).

On constate que les populations ont tendance à explorer davantage dans des zones de couple portée-priorité faibles.

Puisqu'il s'agit de risques de fréquence, l'assureur doit céder le moins possible afin d'accroître son résultat.

Autrement, les traités initiaux de couples portée-priorité élevés ne sont pas efficients.

On note par ailleurs qu'à la seconde itération, un point de l'ancienne frontière efficiente est éliminé de l'archive externe.

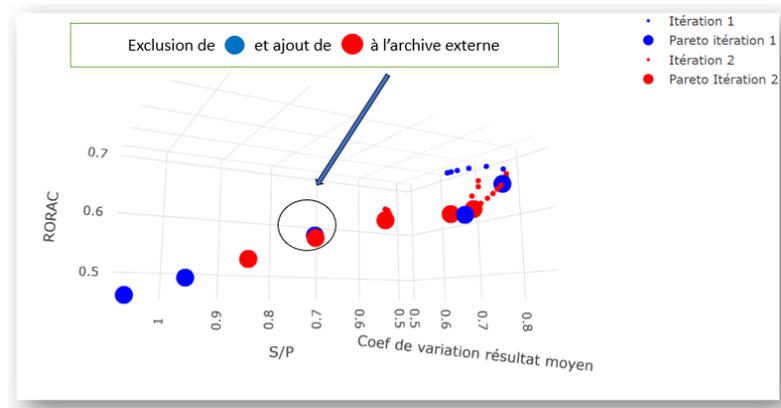


FIGURE 4.15 – Application du MOPSO-CD

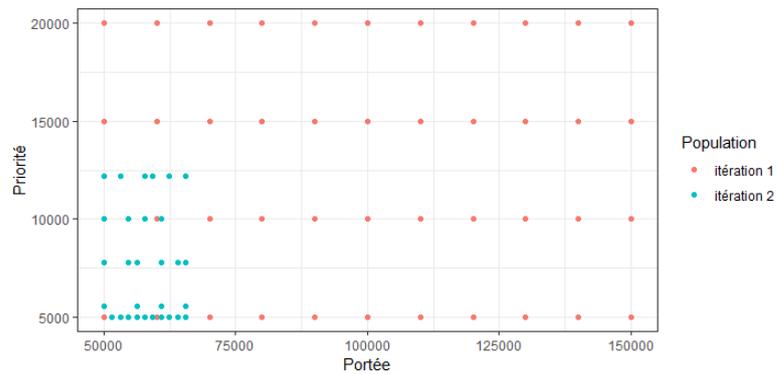


FIGURE 4.16 – Mutation des paramètres priorité et portée

Autres critères d'arrêt de l'algorithme

En choisissant le nombre d'itérations maximal comme critère d'arrêt, on n'est pas sûr de former la véritable frontière de Pareto. Cependant, on peut obtenir une frontière améliorée dans un intervalle de temps raisonnable.

Sur un ordinateur approprié, il serait possible d'établir les critères suivants :

1. Mettre fin à l'exécution de l'algorithme dès que des points de la frontière se trouvent dans une zone définie par l'utilisateur, par exemple, lorsque l'assureur souhaite obtenir des résultats d'au moins 5 millions. Dans ce cas, l'algorithme s'arrêterait dès que le nombre souhaité de points est atteint dans cette zone.
2. Déterminer le nombre d'itérations de manière adaptative et arrêter l'algorithme si moins de trois points sont ajoutés à l'archive externe au cours de trois itérations consécutives. Cette seconde condition serait maintenue tout au long du processus.

Chapitre 5

Réassurance globale sur les LoBs

Dans ce chapitre, nous proposons les outils d'une analyse au niveau du portefeuille global et non par branche ou par LoB.

Lorsque l'on sort des objectifs de protections de produits spécifiques, ou quand on se place dans un environnement où les mesures de risques sont cohérentes, alors une approche globale peut s'avérer plus profitable.

Par ailleurs, la plupart des stratégies de réassurance pensées au niveau global par les actionnaires, et les contrats efficients au niveau de chaque LoBs, ne sont pas nécessairement les contrats efficients au niveau du portefeuille global puisqu'il y a un effet de diversification entre les LoBs j .

On se place désormais sur un portefeuille de n LoBs, où chaque LoB_j est modélisé suivant une approche fréquence-coût.

L'assureur dispose de m_j alternatives différentes sur chaque LoB.

Comment trouver les meilleures combinaisons (parmi les $\prod_{j=1}^n m_j$ possibilités) qui remplissent les objectifs et les contraintes au niveau global ?

5.1 Dépendances entre LoBs

5.1.1 Mesure de la dépendance

Une première approche consiste à supposer les S_{LoB_j} indépendants et à se ramener à un simple problème d'optimisation combinatoire multiobjectifs contraint.

Toutefois, la réassurance en pratique se complète aux leviers de gestion de risque définis par l'ORSA, notamment la diversification par l'agrégation des risques.

Une optimisation cohérente, ne saurait donc faire fi de ce contexte.

Il peut en effet exister plusieurs types de dépendances entre les LoBs notamment une dépendance entre les montants des sinistres et les nombres de sinistre de différentes LoBs. Un scénario qui se produira assez fréquemment en assurance est la survenance d'évène-

ments qui déclenchent simultanément des sinistres dans plusieurs LoBs (entraînant une dépendance entre les processus de nombres de sinistre respectifs), et les montants respectifs des demandes ne seront probablement pas non plus indépendants les uns des autres. Dans la suite, on se restreint à l'étude de la dépendance entre les montants agrégés des sinistres $(S_{LoB_1}, S_{LoB_2}, \dots, S_{LoB_n})$.

Ce choix est fait non seulement car cette seule dépendance peut impacter la réassurance, mais également pour fluidifier l'outil d'optimisation.

L'hypothèse de dépendance n'est pas systématique. Elle repose sur des mesures de dépendances et l'établissement d'une copule à même de modéliser fidèlement cette dépendance entre les LoBs.

Pour soupçonner une dépendance entre les n LoBs, on analyse les $\frac{n(n+1)}{2} - n$ mesures de dépendance sur les différentes combinaisons de couples de 2 parmi n LoBs.

En réassurance et plus généralement en assurance, trois mesures sont utilisées : le coefficient de corrélation de Pearson (r), le coefficient d'association τ de Kendall et le coefficient ρ_S de Spearman. Le premier mesure la relation linéaire entre deux variables continues, le second évalue la concordance entre les rangs des observations, ce qui est utile lorsque la relation n'est pas linéaire. Le coefficient ρ_S de Spearman est similaire à τ , mais il utilise les rangs au carré, ce qui peut donner plus de poids aux observations extrêmes.

Une application sur le portefeuille d'exemple permet d'observer une grande dépendance entre la LoB dommages automobiles et responsabilité civile.

Par ailleurs, il existe une dépendance non négligeable entre la MRP Vol et dommage au sens de Spearman. Il peut s'agir de vols d'objets professionnels suite à un car *jacking* ou tout autre acte de nature à sinistrer la voiture d'un assuré.

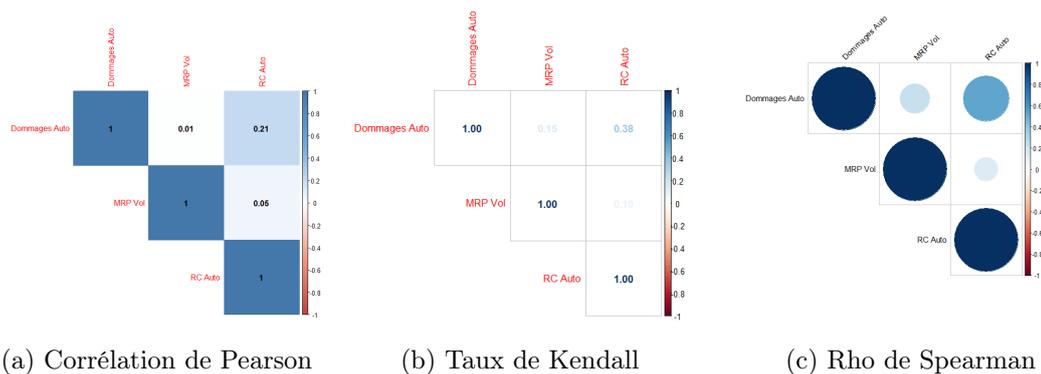


FIGURE 5.1 – Mesures de dépendance

5.1.2 Intégration dans le modèle de réassurance

La prise en compte des dépendances entre n LoBs passe soit par une agrégation via des matrices de corrélations (modèle standard Solvabilité II) soit par le calibrage d'une copule qui reflète cette dépendance (généralement dans les modèles internes).

Dans le premier cas comme dans le second, l'assureur a connaissance de son portefeuille et dispose à priori des modèles de dépendances convenables.

Toutefois, nous proposons un cadre de modélisation de cette dépendance par les copules. Il s'agit simplement, étant donné les lois marginales de chaque LoB, de trouver la loi du vecteur multidimensionnel de $(S_{LoB_1}, S_{LoB_2}, \dots, S_{LoB_n})$.

Afin de tenir compte de la dépendance propre à chaque couple de *LoB*, nous nous intéressons particulièrement aux structures Vine.

Ce choix est fait pour améliorer la précision des dépendances.

La structure Vine est intéressante en ce qu'elle permet de se ramener à des copules bivariées, simples et performantes.

Selon la connaissance des données, on choisit la C-Vine, ou la D-Vine. Puis, on calibre les copules bivariées et conditionnelles.

Sur R, l'opération se fait automatiquement via le package VineCopula.

Appliquons sur le portefeuille d'étude : on constate que la dépendance entre la LoB auto dommage et MRP Vol est mieux captée par une copule de Franck (paramètre 1.40) tandis que la copule de Gumbel (paramètre 1.6006) capte mieux la dépendance entre la LoB Auto RC et MRP Vol.

Par ailleurs, on note que la copule conditionnelle est de type Franck (paramètre 0.249) également, mais avec un paramètre plus faible.

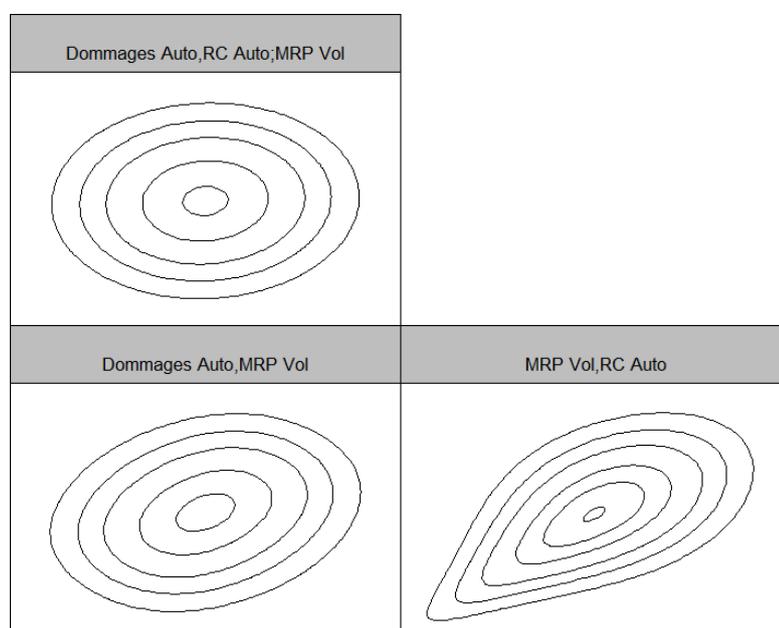


FIGURE 5.2 – Modélisation des dépendances

Une fois la structure de dépendance trouvée, on se confronte à un problème de taille : on ne peut simuler que $(S_{LoB_1}, S_{LoB_2}, \dots, S_{LoB_n})$, les sinistres agrégés brut de réassurance (compartiment jaune).

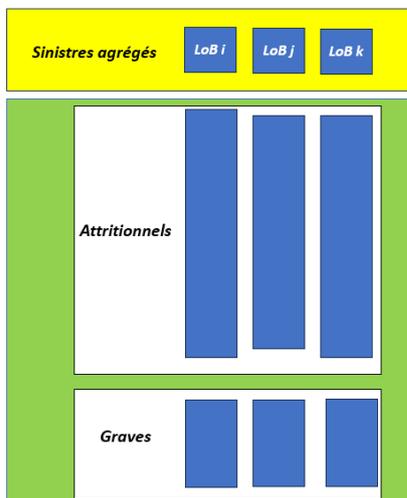


FIGURE 5.3 – Données à disposition pour une simulation

Or, les montants agrégés, nous limitent à la seule étude de traités proportionnels puisque multiplier chaque sinistre au sein d'un LoB par un même coefficient revient à le multiplier à la somme de ceux-ci.

Nous recherchons donc une stratégie qui permette d'obtenir les détails de sinistres (compartiment vert) à l'intérieur de chaque LoB, tout en prenant en compte la structure de dépendance inter-LoBs.

Considérons C la copule unique liant les variables aléatoires continues X et Y avec des distributions marginales F et G , respectivement (unicité par le théorème de Sklar). Soient F_m et G_m les fonctions de répartition empiriques de F et G basées sur les échantillons aléatoires X_1, \dots, X_m et Y_1, \dots, Y_m , respectivement.

Supposons en outre que $(U_1, V_1), \dots, (U_m, V_m)$ soit un échantillon aléatoire provenant de C , et que $(r_{U_1}, r_{V_1}), \dots, (r_{U_m}, r_{V_m})$ soient les paires correspondantes de rangs qui constituent le support de la copule empirique C_m .

[15] montre qu'en réorganisant les échantillons X_1, \dots, X_m et Y_1, \dots, Y_m suivant les rangs $(r_{U_1}, r_{V_1}), \dots, (r_{U_m}, r_{V_m})$, on crée asymptotiquement un vecteur de variables aléatoire (X, Y) dont la structure de dépendance est C .

Exemple :

Soit X et Y deux variables aléatoires dont C désigne la structure de dépendance.

On dispose d'un échantillon de taille 10 de chaque variable X et Y , que l'on ordonne. On simule un échantillon de taille 10 d'une variable aléatoire uniforme bivariable (U, V) selon C puis on reporte les rangs de chaque variable. Enfin, on réorganise les échantillons de X et Y selon les rangs obtenus.

U	V	Rang U	Rang V
0.95294410	0.99618105	10	10
0.90023359	0.85921859	7	9
0.17314113	0.03702134	2	1
0.44620429	0.11176543	4	3
0.93843922	0.23739238	8	4
0.94910986	0.83524591	9	7
0.82305678	0.39608092	5	5
0.25965759	0.10512651	3	2
0.85761673	0.83903925	6	8
0.04503769	0.42996053	1	6

TABLE 5.1 – Tableau des rangs

X	Y
$X_{(10)}$	$Y_{(10)}$
$X_{(7)}$	$Y_{(9)}$
$X_{(2)}$	$Y_{(1)}$
$X_{(4)}$	$Y_{(3)}$
$X_{(8)}$	$Y_{(4)}$
$X_{(9)}$	$Y_{(7)}$
$X_{(5)}$	$Y_{(5)}$
$X_{(3)}$	$Y_{(2)}$
$X_{(6)}$	$Y_{(8)}$
$X_{(1)}$	$Y_{(6)}$

TABLE 5.2 – Tableau échantillons de X et Y réorganisés

Georg Mainik [15] assure que le vecteur réorganisé des échantillons de X et Y est asymptotiquement un échantillon de (X, Y) .

Ce résultat nous permet de garder les détails des simulations tout en maintenant la dépendance dans les montants agrégés de sinistres de chaque LoB.

Appliquons ce résultat à notre portefeuille d'étude.

5.2 Application 4 : réassurance globale

On cherche la meilleure combinaison de traités sur l'ensemble du portefeuille.

- Pour la LoB dommage Auto, on suppose que l'assureur a le choix entre 3 traités :
 - 50000 XS 12000 sans ADD + reconstitutions illimitées
 - 50000 XS 6000 sans ADD + reconstitutions illimitées
 - 50000 XS 6000 + AAD fixé à 30000 + reconstitutions illimitées
- Pour la LoB responsabilité civile Auto, on suppose que l'assureur a le choix entre :
 - QP avec cession de 40%
 - QP avec cession de 20% + 30000 XS 5000 sans AAD+ reconstitutions illimitées
 - 30000 XS 5000 sans AAD+ reconstitutions illimitées

- Pour la MRP Vol, on suppose que l'assureur a le choix entre :
 - QP avec cession de 40%
 - QP avec cession de 20%
 - QP avec cession de 50%

Par ailleurs, on souhaite :

- Minimiser la probabilité d'avoir un résultat négatif
- Maximiser le résultat
- Minimiser la variance du résultat

On impose également les contraintes suivantes :

- La marge du réassureur ne soit inférieure à 5%.
- Le résultat technique de chaque LoB soit positif

On se limite à trouver la frontière efficiente dans l'ensemble des traités fournis, soit parmi les 27 possibilités (voir Annexe).

Par ailleurs, on se place une tarification par le principe de la variance :

$$P_{\text{cédée}} = E(R) + 10\% * Var(R)$$

L'analyse conduit à 17 traités formant la frontière efficiente. Étudions l'un d'entre eux :

TABLE 5.3 – Caractéristique du traité retenu

LoB	Composante dans le traité Optimal
Dommage Auto	50000 XS 6000 + AAD fixé à 30000 + reconstitutions illimitées
RC Auto	30000 XS 5000 sans AAD+ reconstitutions illimitées
MRP Vol	QP avec cession de 40%

On compare les résultats de ce traité optimal sur le portefeuille avec prise en compte de la dépendance et sans prise en compte de la dépendance (en sommant les valeurs obtenues sur chaque LoB).

La figure 5.4 nous donne un graphique comparatif des valeurs normalisées; chaque variable prend la valeur :

$$v_{\text{normalisée}} = \frac{v_{\text{initiale}} - v_{\text{min}}}{v_{\text{max}} - v_{\text{min}}}$$

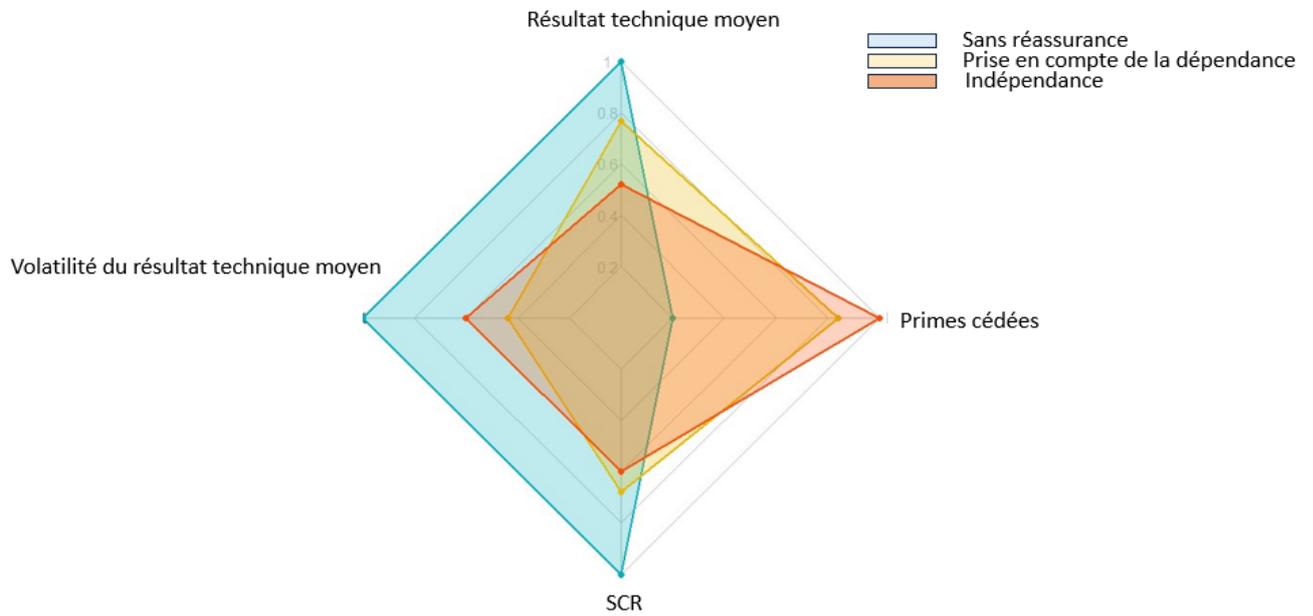


FIGURE 5.4 – Effet de la dépendance

On note que pour le même traité, la prise en compte de la dépendance améliore la quasi-totalité des critères : meilleur résultat, moins de primes cédées. Par contre, le SCR reste plus haut que dans le cas de l'indépendance. Cela est dû au fait que la Var n'est pas une mesure de risque cohérente.

Conclusion

En résumé, la définition d'un traité de réassurance optimal repose principalement sur la compréhension du risque et l'appétit au risque de l'assureur.

Pour sa mise en place, nous avons initialement élaboré un modèle pour évaluer les risques sujets à réassurance. Nous avons commencé par formuler des hypothèses concernant les données utilisées et avons déterminé le seuil de gravité pour notre modélisation. Ensuite, en utilisant un environnement de simulation Monte-Carlo, nous avons estimé les objectifs et les contraintes, tant avant qu'après l'application des traités de réassurance, afin d'établir un cadre concret pour l'optimisation.

Notre approche d'optimisation visait à définir la frontière de Pareto parmi les différentes options disponibles pour l'assureur. Nous avons remarqué que les méthodes d'optimisation multiobjectifs nous permettaient d'obtenir un traité unique situé sur cette frontière efficiente, à condition que le cadre d'appétence au risque soit correctement défini. De plus, en utilisant la définition de la frontière de Pareto, nous avons proposé un algorithme simple capable de générer l'ensemble de cette frontière. Aussi, il est essentiel d'intégrer des critères de conformité au marché pour évaluer la pertinence des traités identifiés.

Enfin, l'utilisation de l'algorithme par essais particulières s'avère efficace pour explorer de manière exhaustive les différentes possibilités et potentiellement améliorer la qualité de la frontière efficiente. De plus, la prise en compte de la structure de dépendance entre les différentes branches d'assurance permet d'améliorer la qualité des indicateurs lorsqu'on optimise sur plusieurs branches simultanément.

Une extension intéressante de cette étude consisterait à effectuer une analyse comparative de la capacité des algorithmes à populations à améliorer la frontière efficiente dans un environnement de calcul haute performance. Une autre approche serait de considérer le traité de réassurance comme un jeu à somme non nulle, en identifiant les traités efficaces comme ceux qui forment l'équilibre de Nash.

Appendices

Annexe A

Modélisation de l'inflation future via une série chronologique (modèle SARIMA)

Dans cette annexe, on discute le processus de modélisation de l'inflation via le SARIMA.

Posons d'abord quelques bases mathématiques.

A.1 Série chronologique

Une série chronologique peut être définie comme une séquence de couples (t_i, x_i) , où t_i représente le moment ou le temps auquel la mesure x_i a été enregistrée. x_i est la valeur numérique ou la mesure prise à ce moment précis. Ainsi, une série chronologique permet de représenter l'évolution d'une variable ou d'un phénomène au fil du temps, ce qui en fait un outil essentiel pour l'analyse, la modélisation et la prévision de données temporelles.

En définitive, modéliser (x_1, \dots, x_n) consiste à déterminer le processus $(X)_{t_i \geq 0}$.

La théorie en général s'intéresse à des processus stationnaires :

A.2 Stationnarité d'une série chronologique

La détermination d'un processus équivaut à la connaissance de la loi de chaque vecteur (X_t, X_{t+h}) , pour tout entier h .

Définition 1 : Le processus (X_t) est dit stationnaire au sens strict si et seulement si la loi du vecteur (X_t, X_{t+h}) dépend uniquement de la différence h .

Cependant, cette notion peut parfois être trop restrictive. Dans de tels cas, on préfère la stationnarité au second ordre :

Définition 2 : Le processus (X_t) est dit stationnaire au second ordre, ou simplement stationnaire, si et seulement si, pour tout entier h , l'espérance $E[X_{t+h}]$ et la covariance

$\text{cov}(X_t, X_{t+h})$ ne dépendent que de h .

Il est important de noter que ces deux définitions sont équivalentes lorsque (X_t) est un processus gaussien, c'est-à-dire lorsque la loi du vecteur (X_t, X_{t+h}) est gaussienne pour tout h .

Pour un processus stationnaire, les moments d'ordre 1 et 2, $E[X_t]$ et $\text{var}(X_t)$, sont constants au cours du temps. Cependant, cette propriété n'est pas suffisante. On peut toujours se ramener à un processus centré en retranchant la moyenne $\mu = E[X_t]$. Dans la suite, tous les processus seront supposés centrés, ce qui facilite les analyses et les calculs des propriétés statistiques.

A.3 Fonction d'autocovariance

L'étude d'un processus centré stationnaire peut être entièrement ramenée à l'analyse de la fonction d'autocovariance définie par :

$$\text{cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma(h) = \text{cov}(X_t, X_{t+h}),$$

ainsi qu'à la connaissance de la variance du processus, notée $\sigma_X^2 = \gamma(0)$, et de la fonction d'autocorrélation, définie comme :

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}.$$

Ces notions n'ont de sens que pour les processus stationnaires.

La fonction d'autocorrélation $\rho(h)$ partage des propriétés similaires avec la fonction d'autocovariance $\gamma(h)$.

Notamment, on observe les propriétés suivantes :

- 1. $\rho(0) = 1$
- 2. $|\rho(h)| \leq 1$ (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz)
- 3. $\rho(h) = \rho(-h)$, ce qui montre que ρ est une fonction paire.

A.4 Autocorrélations partielles

Soit (X_t) un processus stationnaire. L'autocorrélation partielle d'ordre h , notée $\pi(h)$, est définie comme suit :

Pour $h \geq 2$,

$$\pi(h) = \text{corr}(X_{t+h} - \mathbb{E}(X_{t+h}|X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}); X_t - \mathbb{E}(X_t|X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1})),$$

où $\mathbb{E}(\cdot|X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1})$ désigne l'espérance conditionnelle linéaire.

$\mathbb{E}(\cdot|X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1})$ est donc l'opérateur de projection orthogonale sur l'espace vectoriel engendré par $\{X_{t+1}, \dots, X_{t+h-1}\}$.

On convient que $\pi(0) = 1$ et $\pi(1) = \rho(1)$.

A.5 Modèles SARIMA

Introduisons à présent les modèles classiques de séries chronologiques, utiles pour définir le SARIMA.

A.5.1 Le bruit blanc

Définissons d'abord le bruit blanc.

Le modèle le plus simple est celui du bruit blanc, où l'on suppose qu'il n'y a aucune dépendance temporelle, soit au sens strict, soit seulement au second ordre, donnant ainsi les deux notions suivantes :

Définitions :

1. Le processus (X_t) est un bruit blanc fort si et seulement si les variables aléatoires X_t sont identiquement distribuées et indépendantes. On note $(X_t) \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$ où σ^2 est la variance de X_t .

2. Le processus (X_t) est un bruit blanc (faible) si et seulement si les variables aléatoires X_t sont identiquement distribuées et non linéairement corrélées, c'est-à-dire que $\text{cov}(X_t, X_{t+h}) = 0$ pour tout h . On note $(X_t) \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$.

Dans le cas de processus gaussiens, les deux notions coïncident et on parle alors de bruit blanc gaussien.

Propriétés du second ordre :

Un bruit blanc est stationnaire et les autocorrélations $\rho(h)$ et $\pi(h)$ sont nulles dès que $h \geq 1$.

A.5.2 Modèle autorégressif (AR)

Le modèle autorégressif d'ordre p , noté $\text{AR}(p)$, est défini par l'équation suivante :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t,$$

où $(Z_t) \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$ est un bruit blanc d'ordre 0, c'est-à-dire indépendant et identiquement distribué, avec variance σ^2 .

Le modèle $\text{AR}(p)$ peut être exprimé de manière synthétique sous la forme suivante :

$$\Phi(B)X_t = Z_t,$$

où $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ est un polynôme en l'opérateur retard B .

A.5.3 Modèle à moyenne mobile (MA)

Le modèle à moyenne mobile d'ordre q , noté $\text{MA}(q)$, est défini par l'équation suivante :

$$X_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q},$$

où $(Z_t) \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$ est un bruit blanc d'ordre 0, c'est-à-dire indépendant et identiquement distribué, avec variance σ^2 .

Le terme "MA" vient du fait que X_t est exprimé comme une moyenne mobile de (Z_t) avec les poids $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$.

Le modèle MA(q) peut être exprimé de manière synthétique sous la forme suivante :

$$X_t = \Theta(B)Z_t,$$

où $\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q$.

A.5.4 Modèle mixte ARMA

Le modèle ARMA(p, q) est formé de la combinaison du modèle AR(p) et du modèle MA(q). Il est défini par l'équation suivante :

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t,$$

où $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p$ et $\Theta(B) = 1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \dots + \theta_q B^q$ sont des polynômes en l'opérateur retard B .

Plus précisément, $\Phi(B)X_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_p X_{t-p}$ et $\Theta(B)Z_t = Z_t + \theta_1 Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + \dots + \theta_q Z_{t-q}$.

On se limite au cas où les polynômes Φ et Θ n'ont pas de zéros communs (on peut traiter le cas général, au prix d'une grande complexité).

A.5.5 Modèles ARMA intégrés : ARIMA et SARIMA

ARIMA(p, d, q)

Le processus (X_t) suit le modèle ARIMA(p, d, q) lorsque la série différenciée (Y_t) , définie par $(Y_t) = (1 - B)^d(X_t)$, suit le modèle ARMA(p, q). Formellement, cela s'exprime comme suit :

$$(1 - B)^d X_t = \Phi(B)X_t = \Theta(B)Z_t,$$

où $\Phi(B)$ et $\Theta(B)$ sont deux polynômes unitaires de degré respectif p et q , et $(Z_t) \sim \text{BB}(0, \sigma^2)$ est un bruit blanc d'ordre 0.

SARIMA(p, d, q)(P, D, Q, s)

Le processus (X_t) suit le modèle SARIMA(p, d, q)(P, D, Q, s) lorsque la série différenciée (Y_t) , définie par $(Y_t) = (1 - B)^d(1 - B^s)^D X_t$, suit un modèle ARMA "saisonnier" du type :

$$(1 - B^s)^D \Phi_s(B) \Phi(B) X_t = \Theta_s(B) \Theta(B) Z_t,$$

où $\Phi_s(B)$, $\Phi(B)$, $\Theta_s(B)$ et $\Theta(B)$ sont des polynômes unitaires de degré respectif P , p , Q et q , et $(Z_t) \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ est un bruit blanc d'ordre 0. Le modèle s'écrit également comme suit :

$$(1 - B)^d(1 - B^s)^D X_t = \Phi_s(B)\Phi(B)X_t = \Theta_s(B)\Theta(B)Z_t.$$

Les propriétés du modèle général SARIMA se déduisent de celles du processus ARMA. Il est bien sûr non stationnaire sauf (peut-être) si $d = D = 0$.

Détaillons à présent la méthodologie Box et Jenkins qui mène à la modélisation de l'inflation.

A.6 Méthodologie de Box et Jenkins ; et modélisation de l'IPC

Face à une série d'observations, il est crucial, dans une approche probabiliste, de sélectionner le modèle le plus approprié. Au cours des années 1970, Box et Jenkins ont développé une méthodologie systématique permettant, lorsque cela est possible, de choisir un modèle de type (S)ARIMA.

Nous présenterons cette méthode et son application pour la modélisation de l'IPC sur les données mensuelles de Janvier 2000 à Juin 2023 de l'INSEE ¹.

L'indice des prix à la consommation (IPC) joue un rôle essentiel en tant qu'outil de mesure de l'inflation. Il permet d'évaluer la variation moyenne des prix des biens et services consommés par les ménages sur une période donnée.

Pour calculer l'IPC, un panier fixe de biens et services est pris en compte, et ce panier est actualisé chaque année. Chaque élément du panier est attribué un poids dans l'indice global, proportionnel à son importance dans les dépenses de consommation des ménages.

Etant donné l'IPC de deux mois consécutifs j et $j + 1$, l'inflation mensuelle est donnée par la relation :

$$\text{Inflation}_j = \frac{\text{IPC}_{j+1} - \text{IPC}_j}{\text{IPC}_j}$$

Etape 1 :

La première étape du processus consiste à rendre la série de données stationnaire. Cette étape est réalisée en deux phases distinctes :

- 1. Utilisation d'une transformation ;
- 2. Différenciation (simple et/ou saisonnière).

La figure ci-dessous résume les résultats dans le cadre de notre application :

1. Ensemble des ménages - France

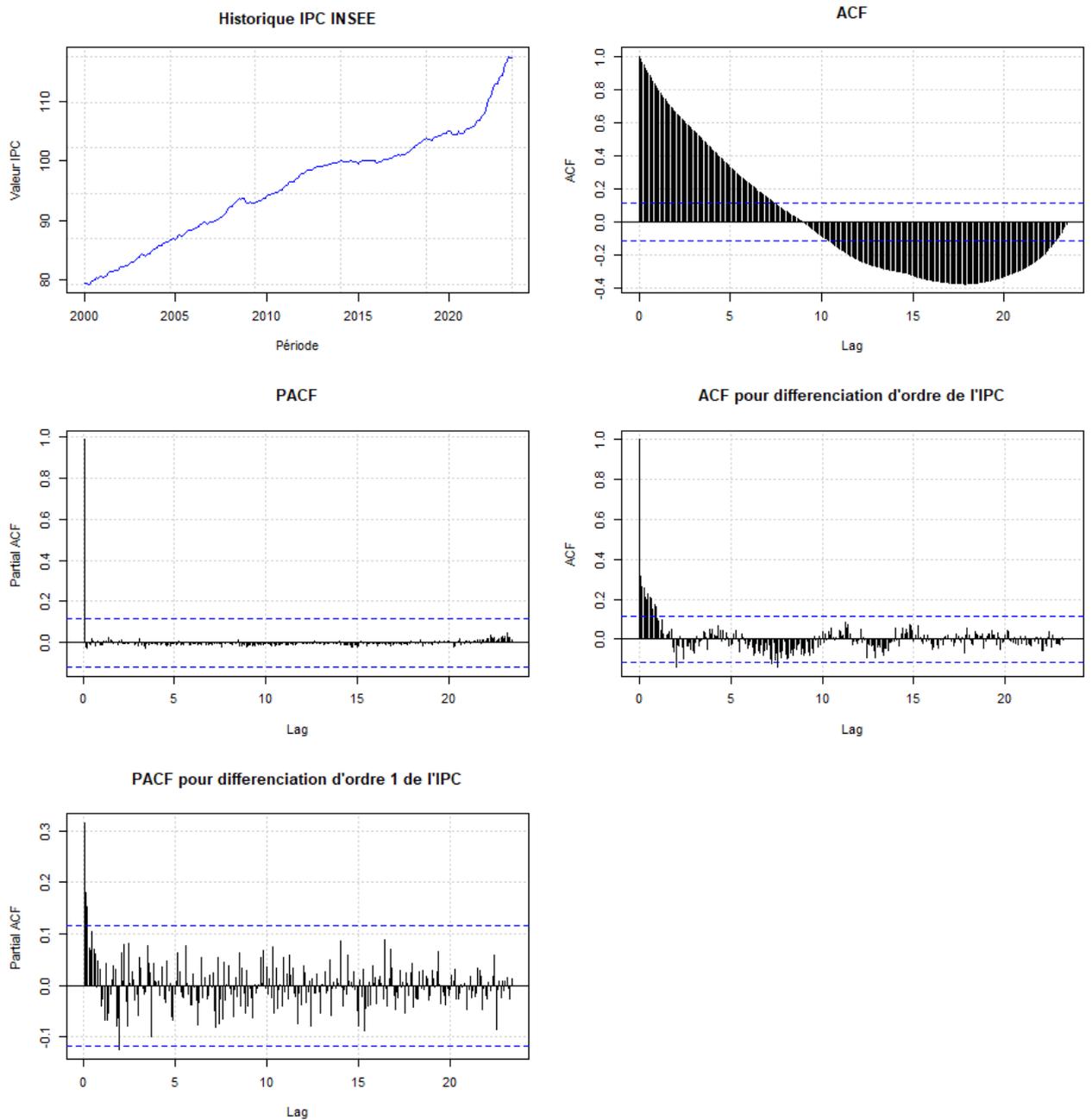


FIGURE A.1 – Analyse avant et après différenciation d'ordre 1

D'après la fonction d'autocorrélation (ACF) appliquée à la série d'origine, on constate que l'ACF diminue progressivement lorsque le nombre de décalages augmente, ce qui suggère que la série d'origine n'est pas stationnaire.

De plus, en analysant la fonction d'autocorrélation partielle (PACF) de la série d'ori-

gine, on observe un pic significatif (dépassant la bande d'erreur standard) à un décalage particulier. Cela indique que nous pouvons procéder à une première différenciation pour rendre la série d'origine stationnaire.

La figure illustre également la série après avoir effectué cette première différence sur les données d'origine.

En examinant la fonction d'autocorrélation (ACF) de cette première différence, nous constatons que le taux de décroissance est nettement plus rapide. Par ailleurs, en ce qui concerne la PACF, on observe plusieurs pics significatifs.

Etape 2 : Modèle et estimation des paramètres

Cette seconde étape consiste à estimer les valeurs de $p, d, q, P, D, Q,$ et s .

On raisonne par AIC et BIC (maximum de vraisemblance).

L'opération peut être effectuée automatiquement sur R via la fonction ARIMA du package tseries.

On trouve que les paramètres adéquats sont $(0,2,1)(2,0,0)$.

On construit le modèle SARIMA(0,2,1)(2,0,0) et on ajuste sur les données historiques.

On remarque un ajustement presque parfait.

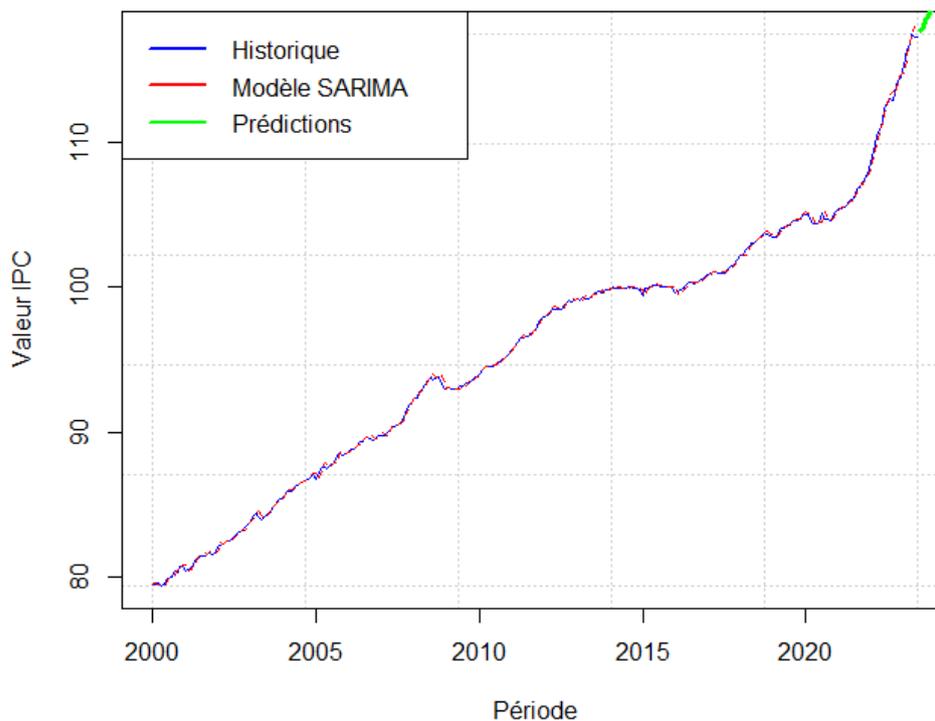


FIGURE A.2 – Ajustement de l'IPC

Etape 3 : Vérification des hypothèses

On vérifie l'indépendance et la normalité des résidus. L'hypothèse est conforté par les graphiques ci-dessous.

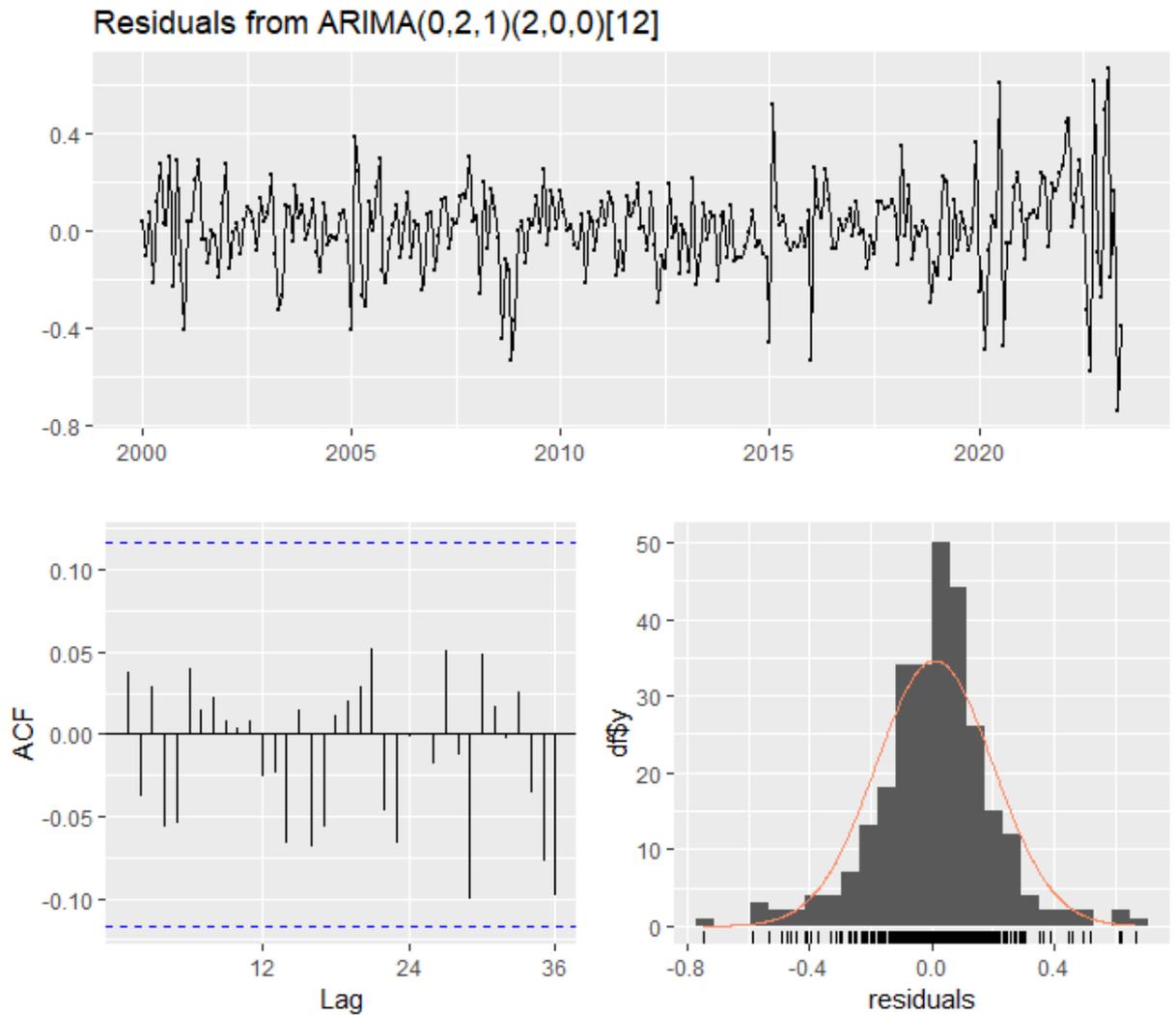


FIGURE A.3 – Hypothèses de stationnarité

Etape 4 : Prédictions

Dans cette dernière étape, on prédit l'IPC future grâce au modèle SARIMA retenu. La figure A.3 permet d'observer les prédictions. Grâce à ces prédictions, on peut prédire l'IPC de l'année future.

Annexe B

Modèles fréquence-coût pour les LoBs RC Auto et MRP Vol

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus lors de la modélisation des autres LoBs.

On se place toujours dans une catégorisation selon la gravité des sinistres.

B.1 Modèles pour la LoB Responsabilité civile Automobile

B.1.1 Modèle pour les sinistres attritionnels

Pour le nombre de sinistres, on calibre une loi binomiale négative de paramètres $k = 380$ et $p = 0.9953844$ tandis que la loi des montants des sinistres est mieux captée par une loi gamma de paramètres 782.6 et 0.31.

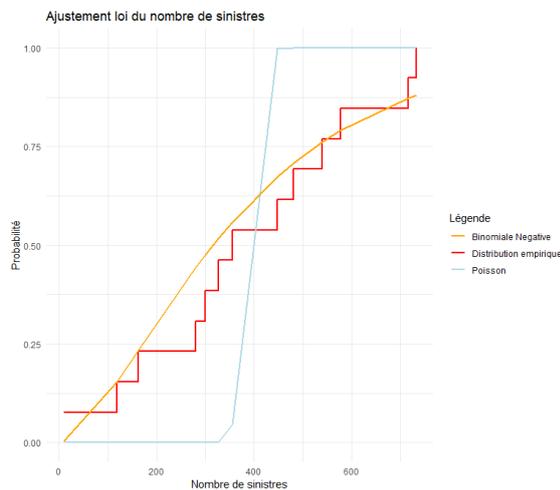


FIGURE B.1 – Modélisation nombre RC Auto attritionnelle

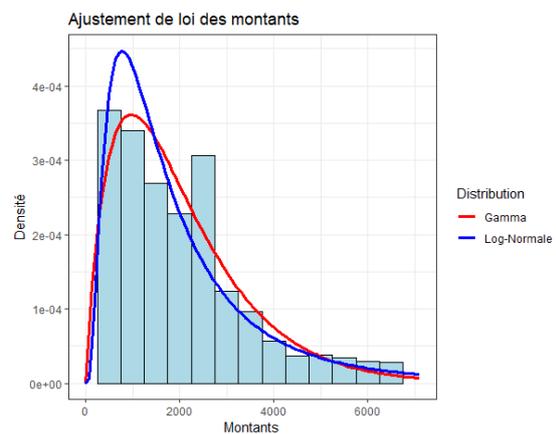


FIGURE B.2 – Loi montants de sinistres RC Auto attritionnelle

B.1.2 Modèle pour les sinistres graves

Quant aux sinistres graves, l'on retient une Poisson de paramètre 47 et une GPD de paramètres 5107,1.14; respectivement pour la loi du nombre des sinistres et la loi des montants individuels.

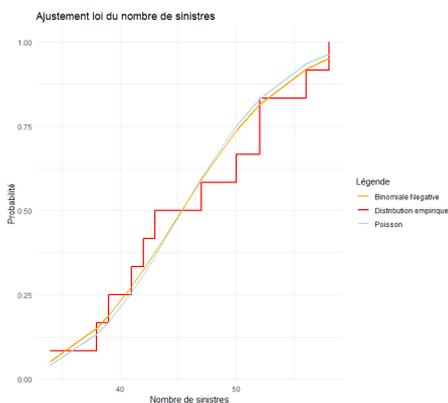


FIGURE B.3 – Modélisation nombre RC Auto grave

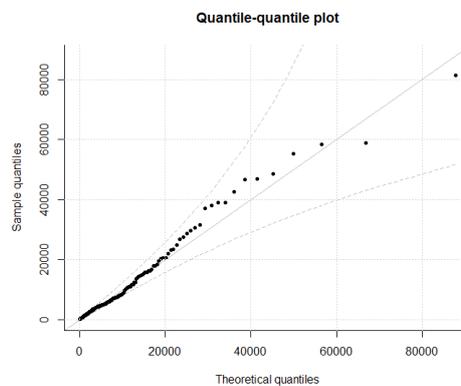


FIGURE B.4 – Qualité d'ajustement de la GPD sinistres graves RC Auto

B.2 Modèles pour la LoB MRP

Pour la LoB MRP Vol, l'on ne dispose pas d'assez de données pour faire deux modèles. On retient respectivement une loi binomiale négative de paramètres 153 et 0.993; et une loi de Pareto de paramètres 3580 et 0.94.

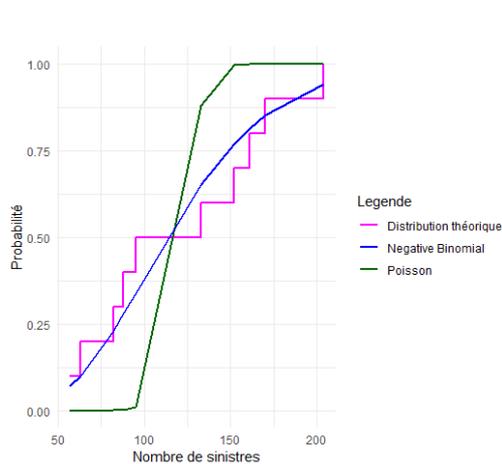


FIGURE B.5 – Modélisation du nombre de sinistre MRP Vol

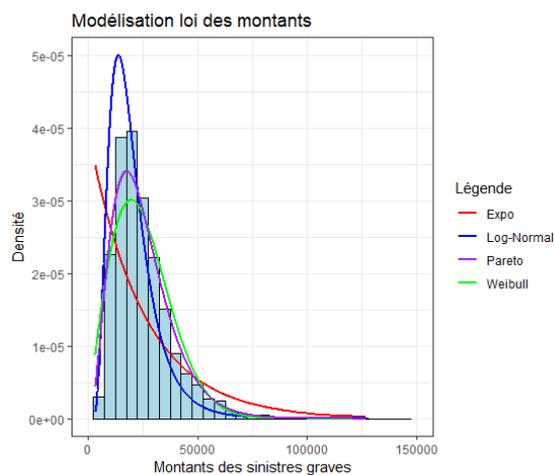


FIGURE B.6 – Modélisation des montants de sinistres MRP Vol

Annexe C

Brève introduction à la théorie des copules

La description d'un vecteur multidimensionnel ne se limite pas à la connaissance de ses marginales. Il faut joindre aux marginales, une structure de dépendance appelée copule.

C.1 Copules bivariées

Les copules offrent la possibilité d'analyser la relation entre plusieurs variables aléatoires.

Définition

On appelle copule bivariée toute fonction C définie sur $[0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ qui possède les propriétés suivantes,

1. $\forall u \in [0, 1], C(u, 0) = C(0, u) = 0$
2. $\forall u, v \in [0, 1], C(u, 1) = u$ et $C(1, v) = v$
3. C est 2-croissante.

En clair, $\forall (u_1, u_2), (v_1, v_2) \in [0, 1]^2$ avec $u_1 \leq v_1$ et $u_2 \leq v_2$:

$$C(v_1, v_2) - C(v_1, u_2) - C(u_1, v_2) + C(u_1, u_2) \geq 0$$

Considérons U_1 et U_2 deux variables aléatoires uniformes, puis le vecteur aléatoire $U = (U_1, U_2)$.

On a alors :

$$C(U_1, U_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)$$

1) donne

$$P(U_1 \leq 0, U_2 \leq u) = P(U_1 \leq u, U_2 \leq 0) = 0$$

2) implique également

$$P(U_1 \leq 1, U_2 \leq u) = P(U_1 \leq u, U_2 \leq 1) = u$$

C.2 Mesures de dépendances

Intéressons-nous aux mesures classiques de dépendances entre deux variables aléatoires X et Y .

C.2.1 Coefficient de corrélation linéaire de Pearson

Ce coefficient mesure la force d'une relation linéaire entre X et Y . Soient X et Y deux variables aléatoires ayant des variances finies, le coefficient de corrélation linéaire des variables X et Y est donné par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)}}$$

Dans cette expression, $\text{cov}(X, Y)$ représente la covariance entre X et Y , tandis que $\text{var}(X)$ et $\text{var}(Y)$ correspondent aux variances respectives de X et Y .

C.2.2 Le taux de Kendall

considérons deux vecteurs aléatoires continus (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) qui sont indépendants et identiquement distribués avec une fonction de répartition conjointe H , ainsi que des marginales F pour $(X_1$ et $X_2)$ et G pour $(Y_1$ et $Y_2)$. Le coefficient de corrélation de Kendall, noté τ , est défini comme suit :

$$\tau = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

Pour estimer le coefficient de corrélation de Kendall à partir d'un échantillon $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ de variables aléatoires (X, Y) , on utilise la formule suivante :

$$\hat{\tau} = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} \text{signe}(x_j - x_i)(y_j - y_i),$$

où $\text{signe}(z)$ est défini comme suit :

$$\text{signe}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z \geq 0, \\ -1 & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

Cette estimation permet d'approximer le coefficient de corrélation de Kendall à d'échantillons observés.

C.2.3 Rho de Spearman

$$\rho_s(X, Y) = 3(P\{(X - X_0)(Y - Y_0) > 0\} - P\{(X - X_0)(Y - Y_0) < 0\}).$$

Il est à noter que le coefficient de corrélation de Spearman peut également être exprimé en termes du coefficient de corrélation de Pearson, $\rho(X, Y)$, de la manière suivante :

$$\rho_s(X, Y) = \rho(F_X(x), F_Y(y)),$$

où F_X et F_Y représentent les fonctions de répartition de X et Y .

Pour estimer le coefficient de corrélation de Spearman à partir d'un échantillon de données $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ tiré de (X, Y) , nous utilisons la méthode suivante :

$$\hat{\rho}_s(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n R_i - R}{\sqrt{(\sum_{i=1}^n R_i - R)^2 (\sum_{i=1}^n S_i - S)^2}},$$

où :

R_i représente une statistique de rang,

S_i est une autre statistique de rang,

R est la somme des statistiques de rang R , et

S est la somme des statistiques de rang S .

C.3 Extrait des combinaisons possibles de traités de réassurance

TABLE C.1 – 10 premières combinaisons de traités

Traité	LoB Dommage Auto	LoB Responsabilité Civile Auto	MRP Vol
1	50000 XS 12000 sans ADD + Reconstitutions illimitées	QP avec cession de 40%	QP avec cession de 40%
2	50000 XS 12000 sans ADD + Reconstitutions illimitées	QP avec cession de 40%	QP avec cession de 20%
3	50000 XS 12000 sans ADD + Reconstitutions illimitées	QP avec cession de 40%	QP avec cession de 50%
4	50000 XS 12000 sans ADD + Reconstitutions illimitées	QP avec cession de 20% + 30000 XS 5000 sans AAD + Reconstitutions illimitées	QP avec cession de 40%
5	50000 XS 12000 sans ADD + Reconstitutions illimitées	QP avec cession de 20% + 30000 XS 5000 sans AAD + Reconstitutions illimitées	QP avec cession de 20%
6	50000 XS 12000 sans ADD + Reconstitutions illimitées	QP avec cession de 20% + 30000 XS 5000 sans AAD + Reconstitutions illimitées	QP avec cession de 50%
7	50000 XS 12000 sans ADD + Reconstitutions illimitées	30000 XS 5000 sans AAD + Reconstitutions illimitées	QP avec cession de 40%
8	50000 XS 12000 sans ADD + Reconstitutions illimitées	30000 XS 5000 sans AAD + Reconstitutions illimitées	QP avec cession de 20%
9	50000 XS 12000 sans ADD + Reconstitutions illimitées	30000 XS 5000 sans AAD + Reconstitutions illimitées	QP avec cession de 50%
10	50000 XS 6000 sans ADD + Reconstitutions illimitées	QP avec cession de 40%	QP avec cession de 40%

Bibliographie

- [1] Jan Teugels Jef L Albrecher, Hansjorg Beirlant. *Reinsurance actuarial and statistical aspects*. John Wiley Sons, 2e edition, 2017.
- [2] Peter Hall Armelle Guillou. A diagnostic for selecting the threshold in extreme-value analysis. *Australian National University*, 2000.
- [3] Stéphane Arnaud. Optimisation de la réassurance par algorithme génétique. 2007.
- [4] Anaïs Belabed. *Modélisation de la sinistralité atypique en RC automobile avec prise en compte des spécificités d'un versement en rente*.
- [5] Pauline Berger. Optimisation de couvertures de réassurance dans un environnement aux normes multiples. 2022.
- [6] Gauthier Braham. Introduction à la réassurance, cours euria 2023. page 24.
- [7] R. L. Carter. *Reinsurance*. Springer, 2e edition, Netherlands (1983).
- [8] Arthur Charpentier. *Actuariat IARD, Partie 7 - réassurance et grands risques*.
- [9] Clerc M. Cooren, Y. and Siarry. Performance evaluation of tribes, an adaptive particle swarm optimization algorithm. 2009.
- [10] Alexis Jacquemin et Henry Tulkens. *Fondements d'économie politique*. De Boeck, 2e, pp. 213-215 edition, 1996.
- [11] Marek Kaluszka and Andrzej Okolewski. An extension of arrow's result on optimal reinsurance contract. *The Journal of Risk and Insurance*, 2008.
- [12] Riadh Madiouni. Contribution 'a la synth'ese et l'optimisation multi-objectif par essais particuliers de lois de commande robuste rst de syst'emes dynamiques. 2016.
- [13] Kyriaki Noussia. *Reinsurance Arbitrations*. Springer, 2e edition, 2013.
- [14] Michel Mandjes Peter Braunsteins. *The Cramér-Lundberg model with a fluctuating number of clients*.
- [15] Christoph Hummel Philipp Arbenz and Georg Mainik. Copula based hierarchical risk aggregation through sample reordering. 2012.
- [16] Y. Shi and Eberhart. A modified particle swarm optimizer. 1998).
- [17] Alberto Zanutto. Optimal reinsurance treaties : assessment of capital requirement and profitability for a multi-line insurer. 2019.