

Mémoire présenté le :  
pour l'obtention du diplôme  
de Statisticien Mention Actuariat  
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : Monsieur Antoine CAUSSE

*Titre du mémoire :*

**Implémentation du modèle de taux CIR2++ dans un  
générateur de scénarios économiques et étude des  
impacts sur un portefeuille épargne-retraite**

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres présents du jury de  
l'Institut des Actuaires*

signature

*Entreprise : AG2R LA  
MONDIALE  
Nom :*

*Signature :*

*Directeur de mémoire en  
entreprise :*

*Nom : HERMANN Alexandra*

*Signature :*

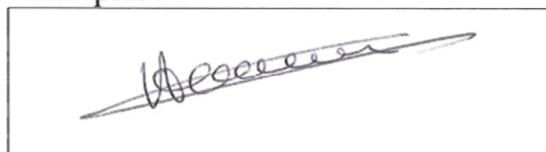
*Invité :*

*Nom :*

*Signature :*

*Autorisation de publication et de mise  
en ligne sur un site de diffusion de  
documents actuariels (après expiration  
de l'éventuel délai de confidentialité)*

*Signature du responsable  
entreprise*



*Signature du candidat*



*Membres présents du jury de la  
filière*



## Résumé

Le Générateur de Scénarios Economiques (GSE) fournit de manière stochastique les rendements futurs des actifs et intervient dans la valorisation des engagements d'un assureur quel que soit le référentiel considéré (Embedded Value, Solvabilité 2, IFRS 17). Cet outil sert également dans la détermination des indicateurs de pilotage ou encore dans le processus d'évaluation interne des risques et de solvabilité (ORSA). Dans la structure des GSE, le modèle de taux agit comme une pierre angulaire puisque les taux simulés permettent la reproduction de la courbe des taux sans risque et sont nécessaires à la projection des autres actifs. Après une revue rapide des caractéristiques d'un GSE, l'objet de ce mémoire est la mise en place d'un nouveau modèle de taux : le modèle CIR2++. C'est un modèle à deux facteurs qui permet de balayer un spectre plus large de déformation de la courbe des taux sans risque. Une fois le nouveau modèle implémenté et validé, il s'agit de le calibrer correctement afin d'étudier son effet sur un modèle de gestion actif-passif d'un portefeuille épargne-retraite chez un assureur. Différents indicateurs comme le Best Estimate ou le ratio de solvabilité seront observés en détail afin de comprendre au mieux le fonctionnement du CIR2++. Entre plusieurs calibrages possibles – toujours sur des données de marché à fin 2016 – une volatilité non négligeable des résultats se crée. Ainsi des points d'attention seront évoqués pour mettre en garde ses potentiels utilisateurs. Le modèle reste néanmoins théoriquement robuste aux yeux des exigences réglementaires.

---

**Mots clés :** GSE, Modèle de taux, Hull & White, CIR2++, Courbe des taux, Test martingale, Zero-coupon, Swaption, Calibrage, Levenberg-Marquardt, Gestion actif-passif, Best Estimate, SCR

---

## Abstract

The economic scenario generator (ESG) provides asset's future returns stochastically and intervenes in the valuation of insurer commitments whatever the reference system considered (Embedded Value, Solvability 2, IFRS 17). It is furthermore used in the determination of the driving indicators in the internal risk assessment and solvency (ORSA) process. Within the ESG structure, the interest rate model acts as a cornerstone since the rates simulated permit the reproduction of the risk-free yield curve and are necessary in the projection of other assets. After a brief review of a GSE's characteristics, the purpose of this paper is to implement a new rate model: the CIR2++ model. It is a 2 factors model which considers multiple deformation of the risk-free yield curve. Once the new model has been implemented and validated, it is a matter of correctly calibrating it in order to study its effect on an insurer's asset-liability management model of a retirement savings portfolio. Different indicators such as the Best Estimate or the solvency ratio will be observed in details as to better understand the functioning of the CIR2 ++. Between several calibration candidates - always on 2016 end of year's market data - a significant volatility of the results is created. Thus points of attention will be evoked to warn its potential users. The model nevertheless remains theoretically robust in the eyes of regulatory requirements.

---

**Keywords:** GSE, Rate model, Hull & White, CIR2 ++, yield curve, martingale test, Zero-coupon, Swaption, Calibration, Levenberg-Marquardt, Asset-liability management, Best Estimate, SCR

---

# Synthèse

Le Générateur de Scénarios Economiques (GSE) fournit de manière stochastique les rendements futurs des actifs et intervient, de ce fait, dans la valorisation des engagements d'un assureur quel que soit le référentiel considéré (Embedded Value, Solvabilité 2, IFRS 17). Cet outil sert également dans la détermination des indicateurs de pilotage ou encore dans le processus d'évaluation interne des risques et de solvabilité (ORSA).

La valorisation du passif en univers risque neutre consiste à considérer la moyenne des flux futurs actualisés aux taux sans risque.

La courbe des taux sans risque est fournie par EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*). Toutefois dans le cadre stochastique imposé par la réglementation Solvabilité 2, il devient nécessaire de diffuser cette courbe afin d'avoir une vision plus réaliste du contexte économique.

Dans la structure des GSE, le modèle de taux permet la simulation des taux d'intérêt instantanés et donc la reproduction de la courbe des taux considérée sans risque. Il participe également à la détermination du rendement des autres actifs. Dans une vision stochastique, on construit pour chaque itération une déformation de la courbe des taux sans risque. Les flux futurs sont alors valorisés avec cette courbe déformée qui, en moyenne sur toutes les trajectoires, tend vers la courbe des taux sans risque. L'utilisation d'un modèle de taux stochastique à déformation de la courbe a pour intérêt d'analyser les comportements d'un scénario pour une déformation de la courbe attendue.

Depuis quelques années, et suite aux efforts de la Banque Centrale Européenne pour relancer la croissance, les taux de la courbe EIOPA sont bas voire même négatifs pour des maturités courtes. Les modèles utilisés dans le GSE doivent donc désormais permettre de reproduire de tels contextes économiques, le modèle de taux quant à lui doit permettre de simuler une quantité raisonnable de taux négatifs.

Après avoir étudié les limites d'un modèle de taux classique à un facteur (**Hull & White**) qui génère une grande quantité de taux négatifs dans un contexte de taux bas, l'objet de ce mémoire est l'implémentation d'un second modèle de taux à deux facteurs (**CIR2++**) dans un GSE, et d'observer son impact sur un portefeuille épargne-retraite.

Dans ce modèle, et sous la mesure martingale  $Q$ , le taux d'intérêt instantané est donné par l'équation suivante :

$$r(t) = x_1(t) + x_2(t) + \varphi(t; \alpha) \quad r(0) = r_0$$

Avec  $\alpha$  vecteur des paramètres des deux processus.

Où les processus  $(x_1(t))_{t \geq 0}$  et  $(x_2(t))_{t \geq 0}$  satisfont les équations différentielles suivantes :

$$dx_1(t) = k_1(\theta_1 - x_1(t))dt + \sigma_1\sqrt{x_1(t)}dW^1(t), \quad x_1(0) = x_{1_0}$$

$$dx_2(t) = k_2(\theta_2 - x_2(t))dt + \sigma_2\sqrt{x_2(t)}dW^2(t), \quad x_2(0) = x_{2_0}$$

Avec :

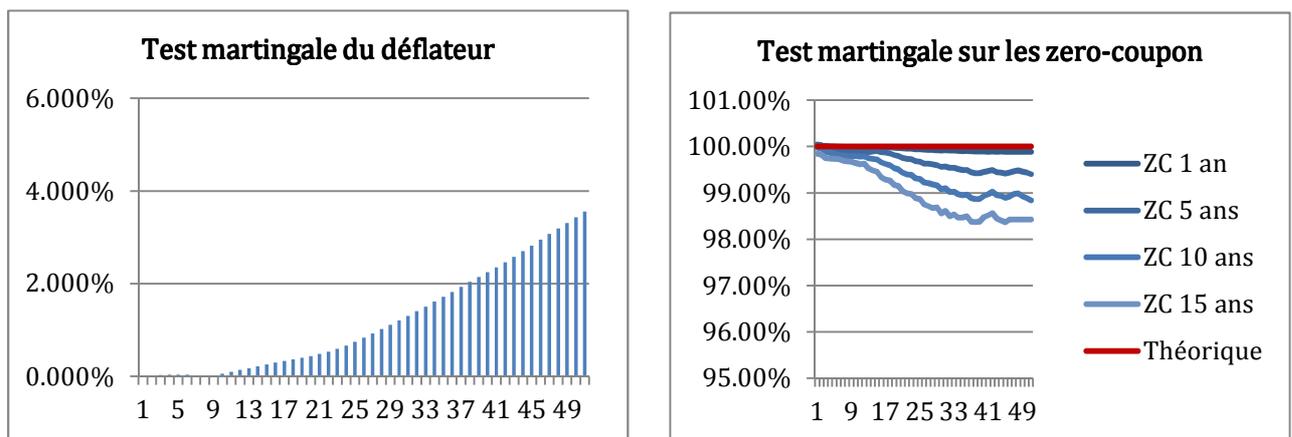
- Le paramètre  $k$  est le paramètre de retour à la moyenne ;
- Le paramètre  $\theta$  est le niveau de taux à long terme (pour un temps  $t$  suffisant) ;
- Le paramètre  $\sigma$  est la volatilité du processus.

Et  $W^1, W^2$  des mouvements browniens indépendants,  $\varphi$  une fonction déterministe qui permet de reproduire la structure par terme des taux initiale et de rendre le modèle *market consistent*.

Le choix d'un modèle à deux processus est motivé par la volonté de déformer plus précisément la courbe des taux sans risque. Chaque processus suit un modèle CIR et sa distribution est celle d'un khi-deux ce qui garantit la positivité des taux simulés. Toutefois, c'est grâce à la fonction  $\varphi$  que le taux d'intérêt instantané  $r$  peut prendre des valeurs négatives.

Le CIR2++ est caractérisé par des formules facilement utilisables pour la valorisation des zéro-coupon ainsi qu'une approximation numérique sophistiquée mais satisfaisante du prix des swaptions.

Afin d'être utilisé, le modèle doit respecter la contrainte des tests martingales, ce qu'il réussit avec une très bonne précision :



Le modèle de taux CIR2++ correspond aux exigences imposées par l'ACPR : sur la base de la courbe des taux réglementaire il reproduit la structure par terme initiale ainsi que les prix de marché avec une bonne précision. C'est de plus un modèle qui ne suppose aucune possibilité d'arbitrage. La possibilité de générer des taux négatifs rend le modèle adapté pour l'environnement de taux bas de la zone euro.

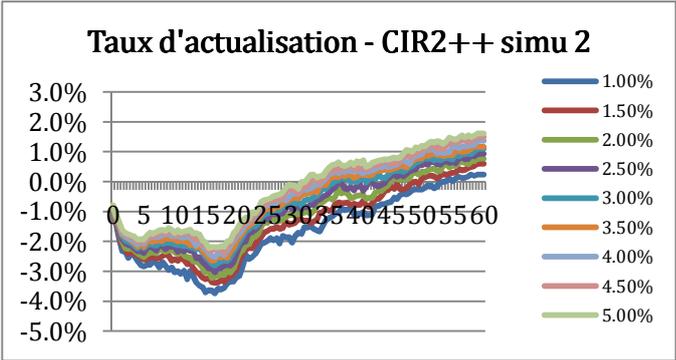
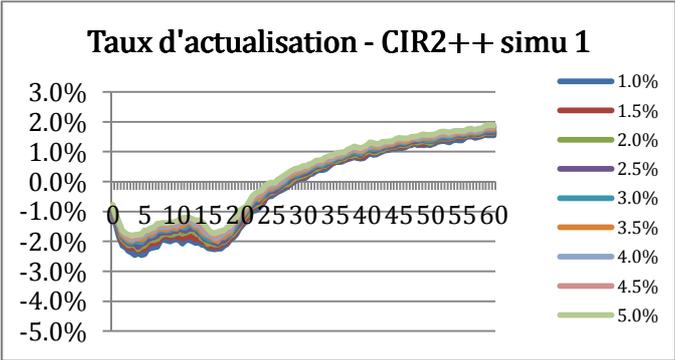
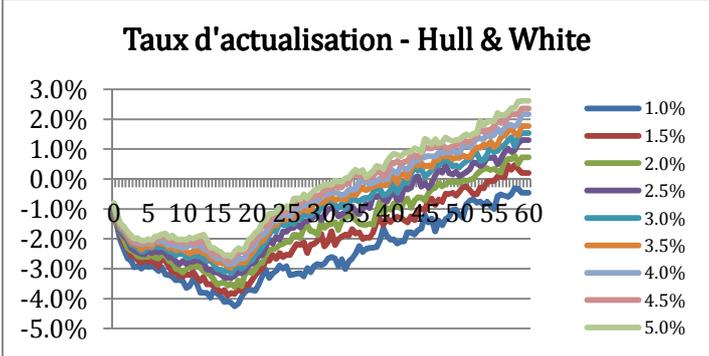
Afin d'être utilisé, le modèle doit être calibré à l'aide d'une méthode robuste adaptée à la courbe des taux en vigueur et à l'aide d'instruments financiers fiables.

Le CIR2++ prend 8 paramètres en entrée qui doivent être correctement calibrés. Pour cela, on utilise l'algorithme de Levenberg-Marquardt pour la minimisation d'une fonction objective du type :

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\sqrt{poids_i} (Prix^{i,marché} - Prix^{i,modèle})(x))^2$$

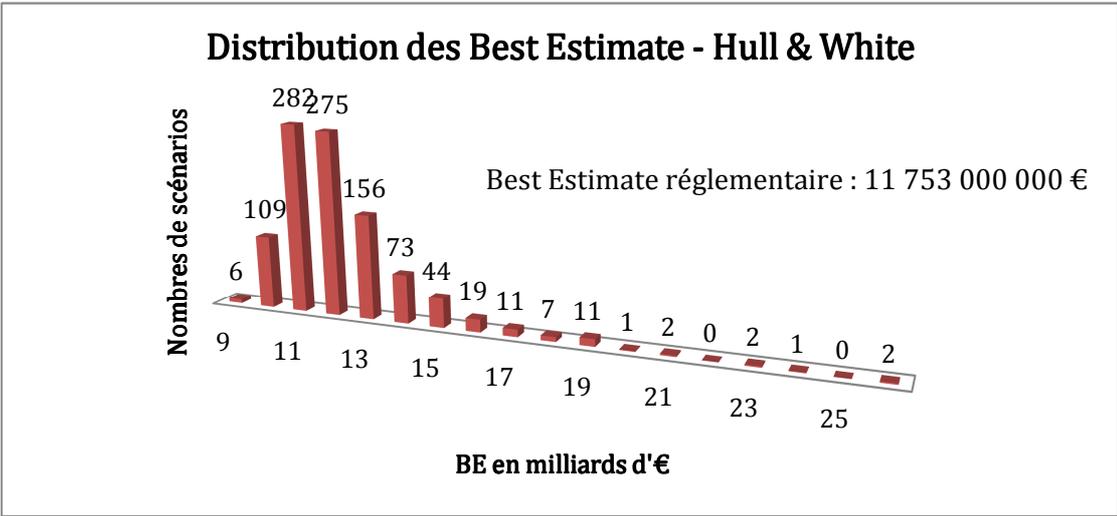
Dans le cadre de l'étude des impacts sur le modèle de gestion actif-passif dans le référentiel S2, le choix d'utiliser plusieurs réglages de l'algorithme de calibrage a été fait (quatre sensibilités au total) – sur des données au 31/12/2016 – enfin d'étudier les impacts par rapport au modèle Hull & White mais également d'estimer la volatilité des résultats que peut induire l'utilisation de jeux de paramètres différents. L'objectif de cette démarche est de définir une procédure de calibrage robuste.

L'observation des quantiles les plus faibles dans la diffusion des taux d'actualisation montre une certaine disparité entre les simulations, mais également une amélioration dans la problématique de réduction des scénarios présentant des taux négatifs.

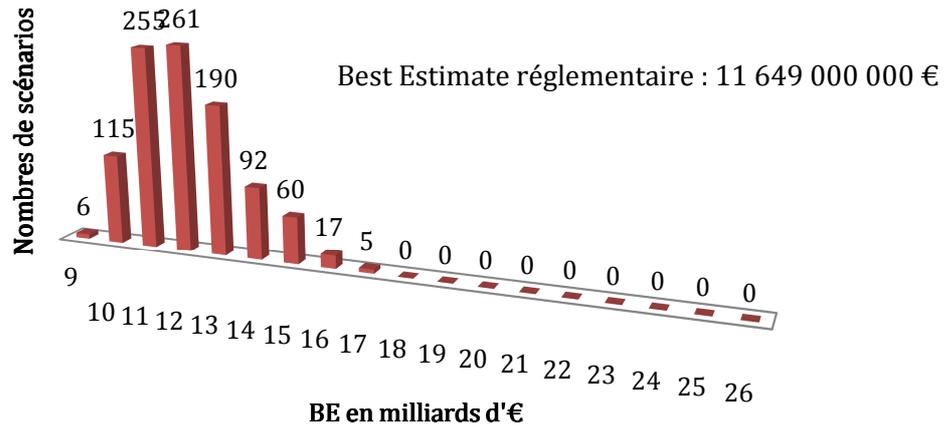


On retrouve les mêmes conclusions avec l'observation des taux zéro-coupon à diverses maturités.

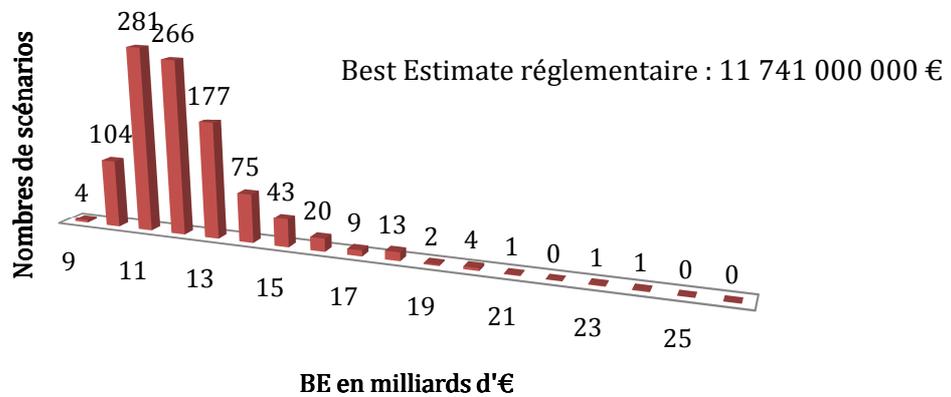
Le Best Estimate (BE) donne une idée du niveau des engagements de l'assureur à une date donnée. (*Les valeurs ont été modifiées par confidentialité*).



### Distribution des Best Estimate -CIR2++ simu 1



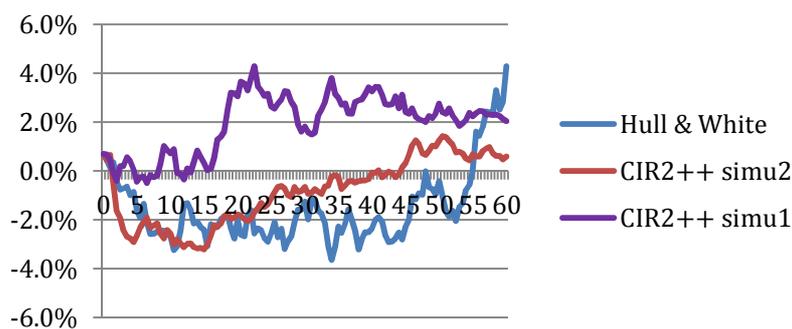
### Distribution des Best Estimate -CIR2++ simu 2



Même si entre deux calibrages différents du CIR2++ l'impact sur le BE peut varier de manière significative, ce modèle a tendance à systématiquement réduire la quantité de scénarios extrêmes qui présentent un niveau de BE élevé, diminuant de la sorte le BE réglementaire.

Le scénario le plus défavorable pour la seconde simulation est celui d'un contexte de taux négatif à long terme qui, par le biais d'une actualisation négative, conduit au BE le plus important. La première simulation, quant à elle, ne simule plus ce genre de scénario. Le scénario le plus défavorable est celui d'une période de taux bas suivie d'une remontée brutale des taux. Dans ce type de scénario, les taux bas provoquent une dilution de l'actif, il n'y a plus de richesse latente. Lorsque survient la remontée des taux, il n'est plus possible de servir le taux de participation aux bénéficiaires cible (qui est défini sur une référence de marché) et les lois dynamiques se déclenchent.

### Taux ZC 10 ans - scénario avec BE max



Le CIR2++ offre la possibilité de diminuer raisonnablement la proportion de scénarios à taux négatifs et leur persistance à long terme, ce qui rend les simulations plus en adéquation avec la vision attendue du marché. L'effet est de diminuer le Best Estimate réglementaire, il est cependant moins évident d'en déduire l'impact sur le ratio de solvabilité.

	<b>Hull &amp; White</b>	<b>Simulation 1</b>	<b>Simulation 2</b>
<b>Ratio</b>	Référence	+12%	-4,5%

L'impact sur le ratio de solvabilité est lui aussi marqué par cette volatilité des résultats. Le niveau des fonds propres, le SCR et plus particulièrement le SCR de marché, sont impactés par le changement de modèle de taux et son calibrage.

Il apparait dans la production des scénarios économiques de multiples et complexes étapes pour lesquelles plusieurs leviers interviennent. Les résultats obtenus à l'aide de ces scénarios peuvent présenter des écarts en fonction des choix effectués. Le CIR2++ est un modèle présentant une certaine complexité, mais qui une fois maîtrisé, peut s'adapter à de multiples contextes économiques.

Il convient d'établir, pour l'institution financière qui souhaite utiliser ce modèle, une procédure solide du calibrage valable dans tous les environnements économiques.

Plus généralement, un changement de modèle de taux nécessite systématiquement une bonne gouvernance. Le passage à un modèle plus compliqué demande une attention particulière, comme l'illustre le changement du Hull & White par le CIR2++.

# Executive Summary

The Economic Scenario Generator (ESG) stochastically provides future asset returns and intervenes in the valuation of an insurer's commitments regardless of the benchmark (Embedded Value, Solvency 2, IFRS 17). It is also used in the determination of management indicators or in the internal risk assessment and solvency (ORSA) process.

The valuation of the liabilities in the risk neutral universe consists in considering the average of the discounted future flows at the risk-free rate.

The risk-free rate curve is provided by EIOPA (European Insurance and Occupational Pensions Authority). However, in the stochastic framework imposed by the Solvency II regulation, it becomes necessary to deform this curve in order to have a more realistic view of the economic context.

In the GSE structure, the rate model allows the simulation of instantaneous interest rates and therefore the reproduction of the risk-free yield curve. It is also involved in determining the return on other assets. In a stochastic view, for each iteration we construct a deformation of the risk-free yield curve. Future flows are then valued with this deformed curve which on average on all trajectories tends towards the official risk-free yield curve. The use of a stochastic rate model with curve deformation has the advantage of analyzing the behavior of a scenario for a deformation of the expected curve.

In recent years and following the efforts of the European Central Bank to revive growth, the EIOPA curve rates are low or even negative for short maturities. The models used in the ESG must therefore be able to function accordingly; the rate model must allow to simulate a reasonable amount of negative rates.

After studying the limitations of a classical one-factor (**Hull & White**) rate model that generates a large amount of negative rates in a low-rate context, the object of this paper is the implementation of a second rate model (**CIR2++**) in an existing GSE, and to observe its impact on a retirement savings portfolio.

In this model and under the martingale measure  $Q$ , the instantaneous interest rate is given by the following equation:

$$r(t) = x_1(t) + x_2(t) + \varphi(t; \alpha) \quad r(0) = r_0$$

With  $\alpha$  vector of process parameters.

Where the processes  $(x_1(t))_{t \geq 0}$  et  $(x_2(t))_{t \geq 0}$  satisfy the following differentials equations :

$$\begin{aligned} dx_1(t) &= k_1(\theta_1 - x_1(t))dt + \sigma_1\sqrt{x_1(t)}dW^1(t), & x_1(0) &= x_{10} \\ dx_2(t) &= k_2(\theta_2 - x_2(t))dt + \sigma_2\sqrt{x_2(t)}dW^2(t), & x_2(0) &= x_{20} \end{aligned}$$

With:

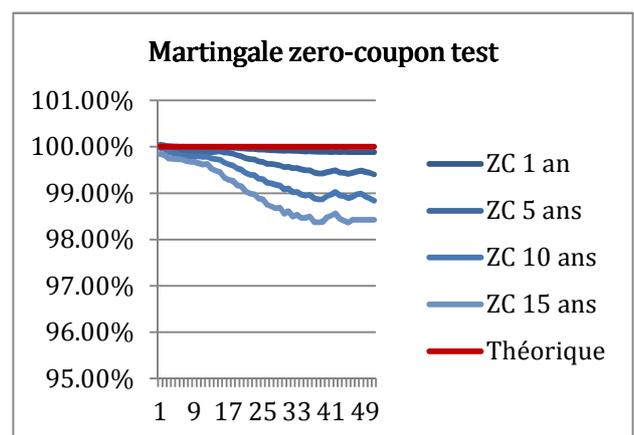
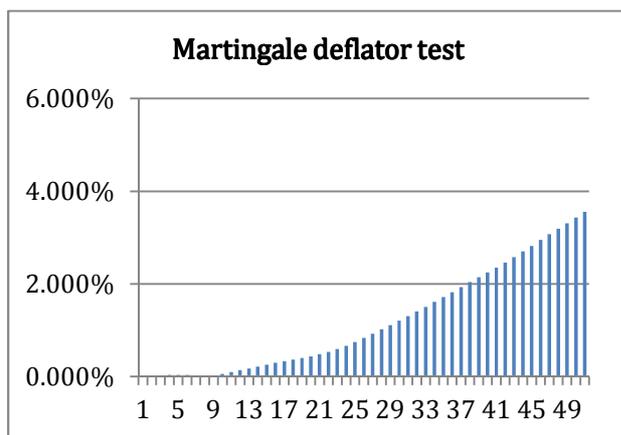
- The parameter  $k$  is the return to mean parameter ;
- The parameter  $\theta$  is the long-term rate level (for a sufficient time  $t$ ) ;
- The parameter  $\sigma$  is the volatility of the process.

And  $W^1, W^2$  independent brownian motions  $\varphi$  a deterministic function that allows to reproduce the initial term structure and to make the model a market consistent one.

The choice of a two-process model is motivated by the desire to deform the risk-free curve more precisely. Each process follows a CIR model and their distribution is one chi-square, which guarantees the positivity of the simulated rates. However, it is thanks to the function  $\varphi$  that the instantaneous interest rate  $r$  can assume negative values.

The CIR2 ++ gives easily usable formulas for the valuation of zero-coupon as well as a more complicated numerical approximation of the price of swaptions.

In order to be used, the model must respect the constraint of the martingale tests, which it succeeds with excellent accuracy.



The CIR2 ++ rate model corresponds to the requirements imposed by the ACPR: on the basis of the regulatory rate curve it reproduces the initial term structure as well as the market prices with good precision. It is also a model that does not imply any possibility of arbitrage. The possibility of generating negative rates makes the model suitable for the low-rate environment of the euro area.

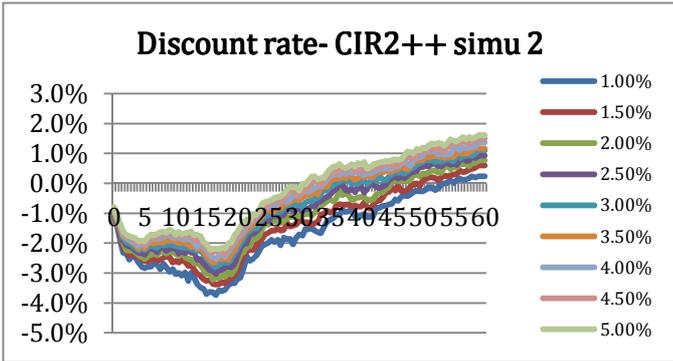
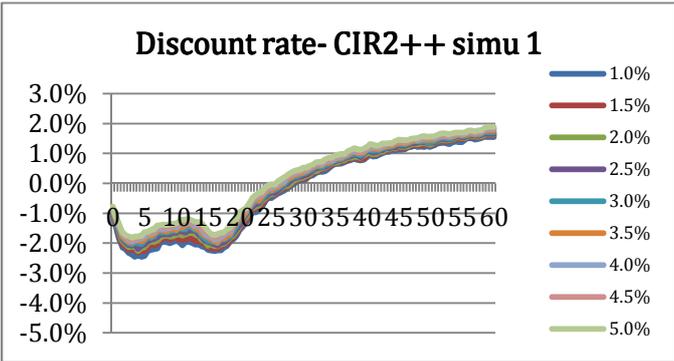
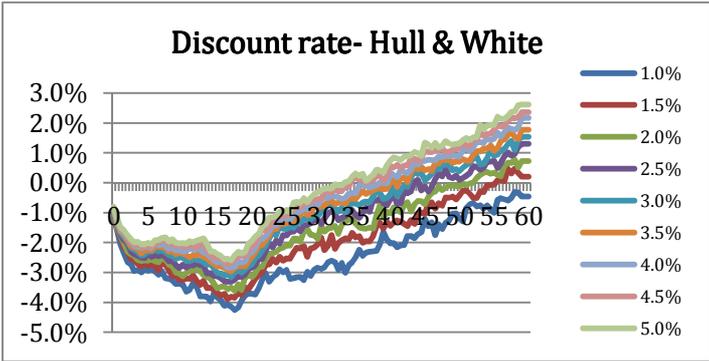
To be used, the model must be calibrated using a robust method adapted to the current yield curve and using reliable financial instruments.

The CIR2 ++ takes 8 input parameters which must be correctly calibrated. The Levenberg-Marquardt algorithm will be used in the minimization of that kind of objective function:

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (\sqrt{weight_i} (Price^{i,market} - Price^{i,model})(x))^2$$

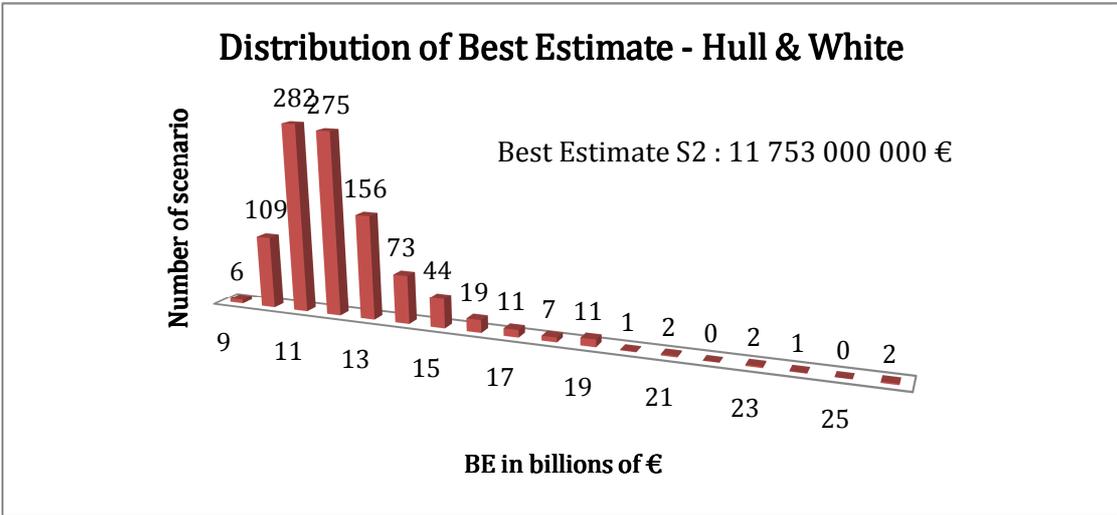
As part of the study of the impacts on the asset-liability management model, the choice of using several calibration algorithm settings was made - on data from 12/31/2016 - to study the changes compared to the former rate model but also to estimate the volatility of the results that can result from the use of different sets of parameters. The objective of this approach is to define a robust calibration.

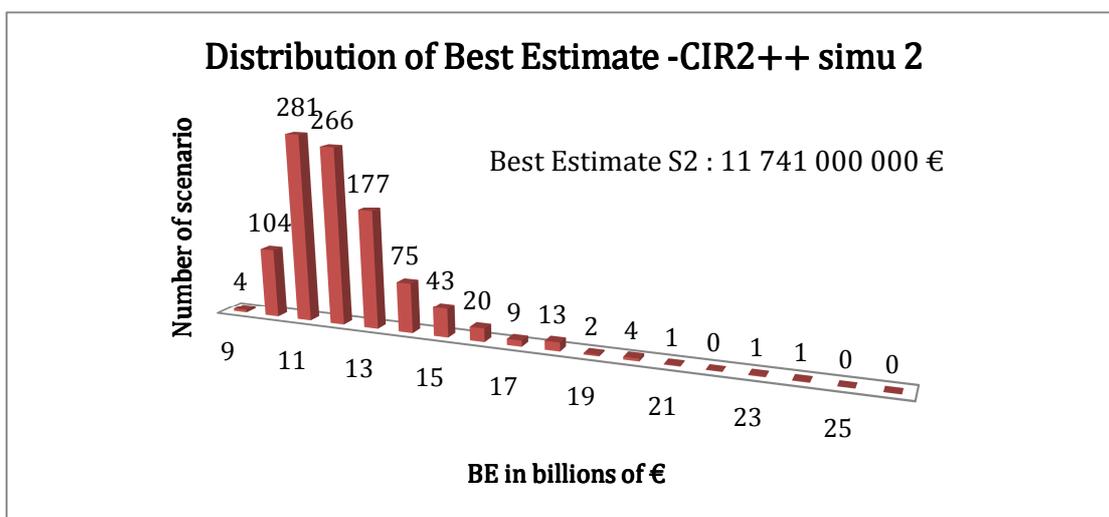
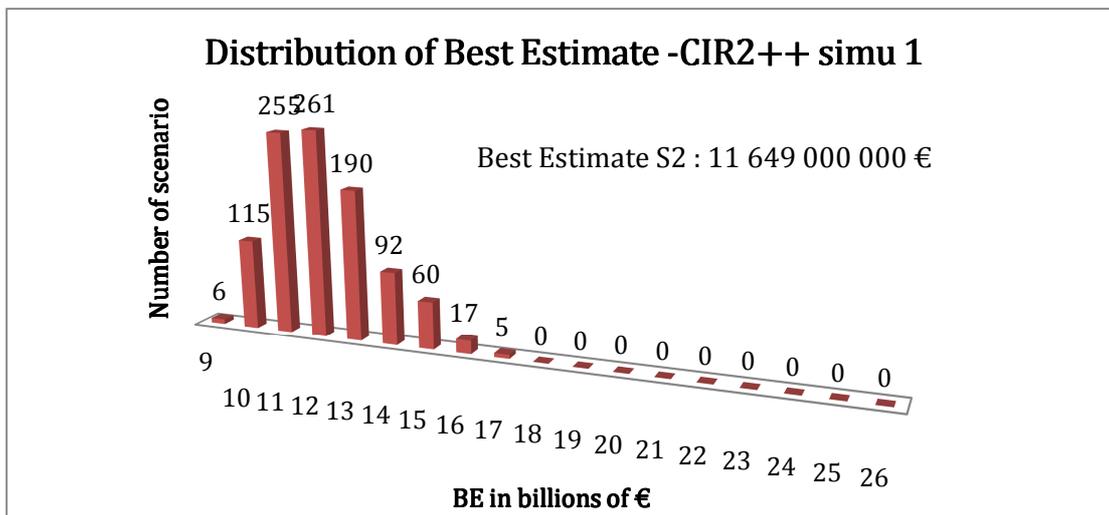
The observation of the lowest quantities in the generation of discount rates already shows a certain disparity between the simulations but also an improvement in the problem of the long-term negative rates of the Hull & White model.



We find the same conclusions with the observation of zero-coupon rates at various maturities.

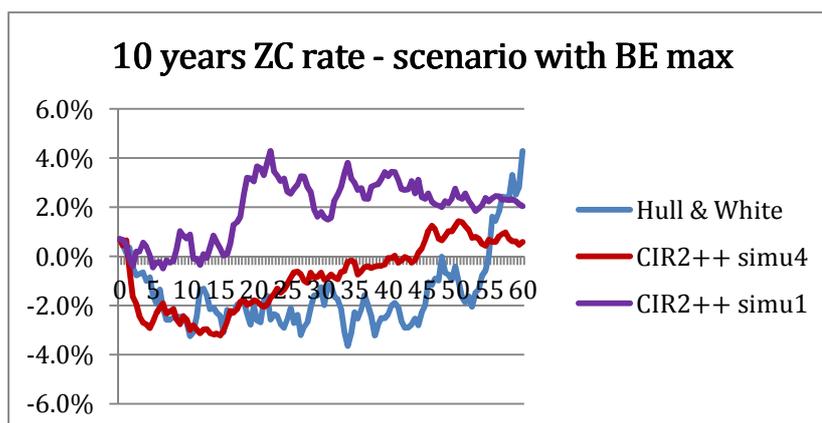
The Best Estimate (BE) gives an idea of the level of the insurer's commitments over time. (Values were changed by confidentiality).





Even if between two different calibrations of the CIR2 ++ the impact on the BE can vary significantly, this model tends to systematically reduce the amount of extreme scenarios that exhibit a high level of BE, thus decreasing the regulatory BE.

The worst-case scenario for the second simulation is that of a negative long-term interest rate environment, which, through negative discounting, leads to the largest BE. The first simulation, for its part, no longer simulates this kind of scenario. The worst-case scenario is a period of low interest rates followed by a sharp rise in interest rates. In this type of scenario, the low rates cause a dilution of the asset, there is no more latent wealth. When interest rate rises occur, it is no longer possible to serve the target profit-sharing rate (which is defined on a market benchmark) and dynamic laws are triggered.



The CIR2 ++ provide the opportunity to reasonably reduce the proportion of scenarios with negative rates and their persistence in the long term, which makes the simulations more in line with the expected market vision. The effect is to decrease the average Best Estimate, but it is less obvious to deduce the impact on the solvency ratio.

	<b>Hull &amp; White</b>	<b>Simulation 1</b>	<b>Simulation 4</b>
<b>Ratio</b>	Reference	+12%	-4,5%

The impact on the solvency ratio is also marked by this volatility in result. The level of own funds, the SCR and more precisely the market SCR are impacted by the change of model and its calibration.

It appears in the production of economic scenarios of multiple and complex stages for which several levers intervene. The results obtained using these scenarios may present deviations depending on the choices made. The CIR2 ++ is a model with a certain complexity, but once mastered, it can adapt to multiple economic contexts.

For the financial institution wishing to use this model, a robust calibration procedure valid for all economic environments should be established.

More generally, a change in the rate model systematically requires good governance. The transition to a more complicated model with more parameters requires special attention, as illustrated by the change of the Hull & White by the CIR2 ++.

# Remerciements

Je souhaite remercier tout particulièrement Alexandra Hermann, responsable de l'équipe modélisation au sein de la Direction des Risques Techniques et de la Solvabilité d'AG2R LA MONDIALE, qui me proposa un sujet de mémoire intéressant et stimulant et m'accompagna tout au long de sa réalisation, me faisant part de son expérience et en s'assurant que je ne manque de rien.

Mes remerciements vont également à Tahmoor Qureshi, actuair modélisateur au sein d'AG2R LA MONDIALE, qui m'enseigna avec patience une bonne partie de la théorie utilisée dans ce mémoire et me guida dans sa mise en pratique.

Je remercie Mathilde Jung, directrice des Risques Techniques et de la Solvabilité d'AG2R LA MONDIALE pour avoir pris au sérieux mon sujet du début jusqu'à la fin et m'avoir fait confiance en encourageant son développement.

Je remercie le reste de cette agréable équipe pour m'avoir accueilli avec convivialité et formé au métier de modélisateur en actuariat : Idriss, Laurence et Abdelhek ainsi que les anciens modélisateurs Jules et Ayoub.

Plus généralement je remercie l'ensemble de la Direction des Risques Techniques et de la Solvabilité pour sa bonne humeur et son accueil chaleureux.

Un merci également pour mon tuteur académique Olivier Winterberger, professeur à l'UPMC et membre du LSTA, qui prit le temps de relire avec attention mon mémoire.

Enfin je tiens à remercier mes parents pour leur soutien sans faille tout au long de ma scolarité, sans qui je n'aurais pu écrire ces lignes.

# Sommaire

<b>Résumé/Abstract</b>	<b>2</b>
<b>Synthèse</b>	<b>3</b>
<b>Executive summary</b>	<b>9</b>
<b>Remerciements</b>	<b>14</b>
<b>Introduction</b>	<b>17</b>
<b>1. Générateur de scénarios économiques</b>	<b>18</b>
1.1 Généralités et nécessité d'un GSE .....	18
1.2 Fonctionnement du GSE .....	19
1.2.1 Simulation des taux d'intérêt et des obligations zéro-coupon .....	20
1.2.2 Modèle action .....	21
1.2.3 Modèle immobilier .....	23
1.2.4 Générateur de nombres aléatoires et variables antithétiques .....	24
1.2.4.1 Nombres aléatoires .....	24
1.2.4.2 Réduction de la variance .....	25
1.3 Modèle de Hull & White .....	27
1.3.1 Cadre théorique .....	27
1.3.1.1 Diffusion des taux .....	27
1.3.1.2 Pricing de zéro coupon .....	28
1.3.1.3 Pricing de swaption et calibrage .....	28
1.3.2 Limite du modèle .....	30
1.3.2.1 Impact des scénarios de taux négatifs .....	32
1.3.2.2 Impact d'un calibrage manuel .....	34
1.3.2.3 Limite des modèles de taux à un facteur .....	36
<b>2. Changement de modèle de taux : CIR2++</b>	<b>38</b>
2.1 Modèle de taux à deux facteurs .....	38
2.2 Cadre théorique du CIR2++ .....	40
2.2.1 CIR et CIR++ .....	40
2.2.2 Diffusion des taux dans le modèle CIR2++ .....	42
2.2.3 Prix zéro-coupon .....	43
2.2.4 Pricing de swaptions .....	45
2.3 Calibrage.....	46
2.3.1 Hypothèses pour le calibrage .....	46
2.3.2 Algorithme de Levenberg-Marquardt .....	47
2.4 Validation des scénarios économiques .....	50
2.4.1 Test martingale du déflateur nominal .....	50
2.4.2 Test martingale sur les zéro-coupon .....	55
2.4.3 Test martingale sur le rendement des actions .....	56
2.4.4 Test martingale sur le rendement de l'immobilier .....	57
2.4.5 Test sur la simulation des taux d'intérêt instantanés .....	58

2.4.6	Sélection de la graine .....	60
2.5	Courbe des taux sans risque .....	62
2.5.1	Construction d'une courbe des taux sans risque .....	62
2.5.2	Méthode d'interpolation des splines cubiques .....	64
<b>3.</b>	<b>Impacts</b> .....	<b>67</b>
3.1	Impact sur les scénarios économiques .....	67
3.1.1	Résultats du calibrage .....	67
3.1.2	Distributions des taux .....	75
3.2	Impact sur le Best Estimate .....	83
3.2.1	Evolution des Best Estimate avec les différentes simulations .....	83
3.2.2	Impacts conjoncturels .....	89
3.2.3	Zoom sur un scénario en particulier .....	92
3.3	Impact sur le ratio de solvabilité .....	96
3.3.1	SCR de marché .....	96
3.3.2	Impacts sur les SCR et le ratio de solvabilité .....	98
3.4	Gouvernance du modèle CIR2+ .....	99
	<b>Conclusion</b> .....	<b>100</b>
	<b>Bibliographie</b> .....	<b>101</b>
	<b>Annexe</b> .....	<b>102</b>

# Introduction

Le générateur de scénarios économiques (GSE) fournit de manière stochastique les rendements futurs des actifs et intervient dans la valorisation des engagements d'un assureur quel que soit le référentiel considéré (Embedded Value, Solvabilité 2, IFRS 17). Cet outil sert également dans la détermination des indicateurs de pilotage ou encore dans le processus d'évaluation interne des risques et de solvabilité (ORSA). Dans la structure des GSE, le modèle de taux agit comme une pierre angulaire puisque les taux obtenus sont nécessaires dans la détermination des autres actifs.

Depuis quelques années, les taux d'intérêts sont devenus le centre d'attention des banques et des assurances. Afin de relancer l'inflation en diminuant le coût du crédit, la Banque Centrale européenne (BCE) inonde les institutions financières de liquidités. La BCE en rachetant des grosses quantités d'obligations gouvernementales ou d'autres produits financiers sûrs et liquides à court terme (augmentant ainsi leurs prix) cherche à relancer l'investissement vers des secteurs privés plus risqués et sur des maturités plus longues. Le déséquilibre entre la demande et l'offre sur ces produits peu risqués à court terme entraîne une chute des taux et même l'apparition des taux négatifs.

Néanmoins, les taux pouvant prendre désormais des valeurs négatives, il convient aux assureurs et aux banques d'adapter leurs modèles de projection afin de pouvoir prendre également en compte des scénarios de taux d'intérêt négatifs. Le caractère négatif d'une grandeur mathématique telle que les taux peut poser des problèmes théoriques dans l'application de certaines lois de probabilités ou dans l'utilisation d'algorithmes non prévus pour cette utilisation. Le GSE utilisé dans ce mémoire utilise initialement le modèle de taux Hull & White à distribution gaussienne, permettant ainsi la simulation de taux négatifs. Le modèle de gestion actif-passif (ALM) utilisé est compatible avec des scénarios de taux négatifs. Toutefois, dans un contexte de taux bas, la proportion de taux négatifs est jugée trop importante et pousse la réflexion vers une nouvelle simulation plus en ligne avec notre vision des taux à long terme.

Le changement de modèle de taux est un exercice délicat qui demande de trouver un bon compromis entre la cohérence des simulations vis-à-vis de la situation économique, c'est-à-dire un modèle robuste et fiable satisfaisant les attentes du régulateur, de notre vision de l'évolution des taux mais aussi du confort d'utilisation.

La volonté de ce mémoire est de s'éloigner premièrement le plus possible des notions d'assurance-vie afin de se concentrer plus spécifiquement sur la construction du modèle implémenté. Ainsi, dans un premier temps, le mémoire traite de l'aspect théorique des modèles de taux utilisés ainsi que des différents concepts liés aux GSE puis présente une étude d'impacts valeurs (scénarios économiques, BE, SCR, ratio de solvabilité) qu'induit le changement de modèle de taux d'intérêt sur le modèle ALM utilisé.

# 1. Générateur de scénarios économiques

*Cette partie a pour but d'expliquer le fonctionnement d'un générateur de scénarios économiques de manière la plus générale possible avant d'introduire un premier modèle de taux, sa théorie, son utilisation et ses limites.*

## 1.1 Généralités et nécessité d'un GSE

Un scénario économique correspond aux rendements de grandeurs financières sur un horizon de temps. Les plus classiques étant le rendement des obligations gouvernementales, des obligations d'entreprise ou encore celui des actions, etc.

Le GSE permet de générer plusieurs scénarios représentant des situations financières possibles. Dans le cadre de Solvabilité 2 et des calculs stochastiques le générateur est nécessaire.

Les modèles d'actif utilisés au sein du GSE devront en outre :

- Ne pas sous-estimer les rendements défavorables ;
- Intégrer les fluctuations de court terme sur la valeur des actifs ;
- Être cohérents avec les contraintes économiques du long terme ;
- Intégrer la dépendance entre actifs ;
- Être justifiés aux besoins de la compagnie ;
- Respecter les tests martingales dans un cadre risque neutre.

Un générateur repose sur une théorie financière robuste, mais nécessite d'être calibré sur des données fiables et adaptées à l'assureur.

Enfin, avoir une bonne visibilité de la projection des actifs est primordial pour un assureur afin de mieux maîtriser ses activités (afin de, par exemple, pouvoir projeter correctement les valeurs des actifs et du passif du bilan, définir des rendements cibles, développer des stratégies d'investissement futures, construire de nouveaux produits ...). Un générateur de scénarios économiques permet de considérer les investissements long terme ainsi que l'influence des diverses variables financières et macro-économiques afin d'aiguiller au mieux le choix les paramètres techniques des contrats d'assurance, motivé par l'envie de garder un gain permanent entre valeur des actifs et engagements.

Les GSE utilisés pour les calculs réglementaires en assurance vie doivent simuler des trajectoires simultanées de tous les facteurs de risque financiers présents au bilan : taux, crédit, actions, immobilier, investissements alternatifs, change, etc.

## 1.2 Fonctionnement du GSE

Indépendamment des modèles utilisés, les GSE fonctionnent généralement de la même manière. Dans un premier temps, il y a une phase de calibrage des modèles selon des données de marché. Ensuite, à partir du business plan voulu (rendements cibles, courbes des taux...) on génère dans le temps les différentes classes d'actif en utilisant des nombres aléatoires préalablement choisis. Ces classes d'actif peuvent être les taux d'intérêt pour les rendements du monétaire et des obligations gouvernementales, le rendement des actions et de l'immobilier, celui des obligations d'entreprises, etc.

Suite à cela, les scénarios générés sont validés à l'aide de tests statistiques et martingales.

Enfin, les tables fournies par le GSE sont envoyées comme input dans le modèle de gestion actif-passif afin d'y faire les calculs réglementaires et les évaluations prospectifs.

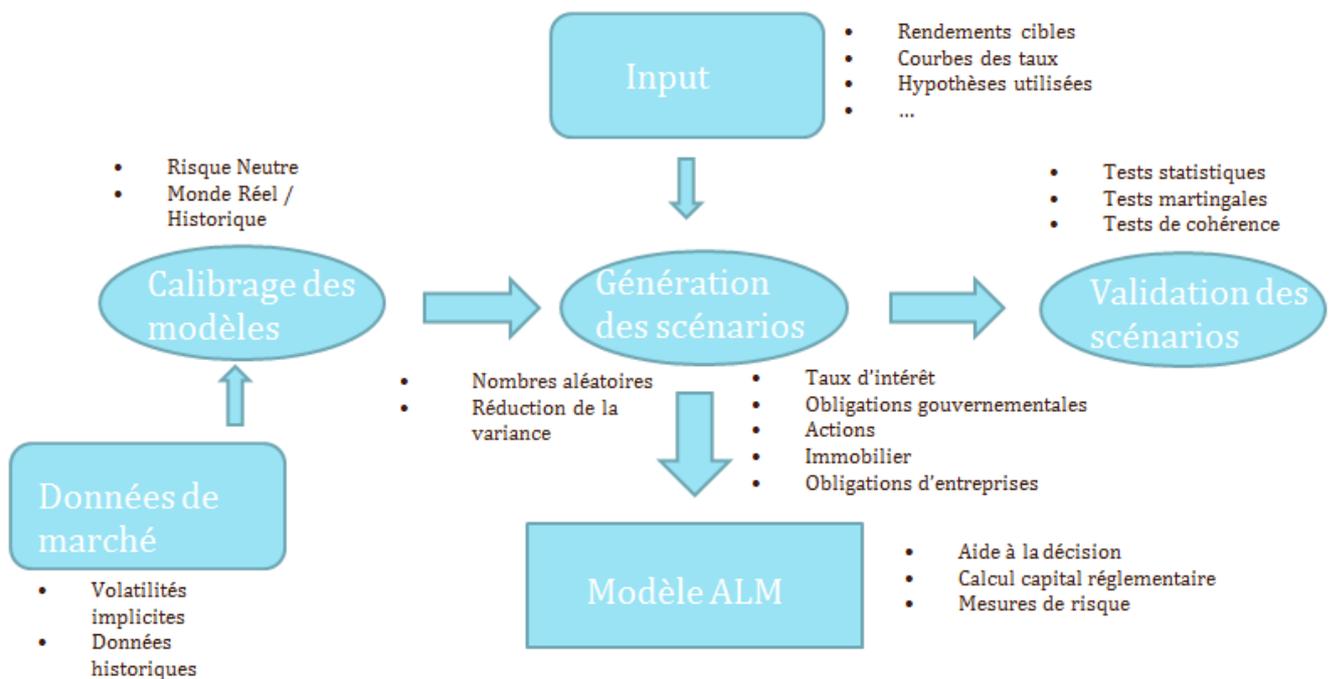


Figure 1 – Fonctionnement général d'un générateur de scénarios économiques

### 1.2.1 Simulation des taux d'intérêt et des obligations zéro-coupon

*Dans cette sous-partie voir Annexe - 0 (5 à 9) pour les définitions des différents taux.*

La valorisation du passif en univers risque neutre consiste à considérer la moyenne des flux futurs actualisés au taux sans risque.

La courbe des taux sans risque est fournie par EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*). Toutefois dans le cadre stochastique imposé par la réglementation Solvabilité 2 il devient nécessaire de déformer cette courbe.

Le modèle de taux permet la simulation des taux d'intérêt instantanés et donc la reproduction de la courbe des taux. Il permet également d'évaluer certains produits de taux à flux déterminés ou encore d'obtenir les courbes implicites.

Ainsi dans une vision stochastique on construit pour chaque itération cette déformation de la courbe des taux sans risque. Dans chaque itération, on actualise les flux futurs des actifs avec une courbe déformée qui en moyenne sur toutes les trajectoires est égale à la courbe des taux sans risque utilisée en amont.

L'utilisation d'un modèle de taux stochastique à déformation de la courbe a pour intérêt d'analyser les comportements d'un scénario pour une déformation de la courbe attendue. Il permet d'adapter sa gestion des risques si ce scénario se réalise.

Dans ce chapitre, nous allons considérer le modèle de taux **Hull & White à un facteur**. Ce modèle de taux est une généralisation du modèle de Vasicek. La dynamique du taux court instantané est donnée par :

$$dr_t = (\theta_t - a \cdot r_t)dt + \sigma^{taux} dW_t^{taux}$$

Avec :

$a$  le paramètre de retour à la moyenne, qui a pour but de ramener les taux simulés vers la moyenne théorique

$\sigma^{taux}$  la volatilité du modèle

$\theta_t = \frac{\partial}{\partial T} f^M(0, t) + a f^M(0, t) + \frac{\sigma^{taux^2}}{2a} (1 - e^{-2at})$  une fonction déterministe qui permet de reproduire la structure par terme des taux zéro-coupon initiale

$W_t^{taux}$  un mouvement brownien et  $f^M(0, t)$  le taux forward instantané de marché vu de 0 démarrant à  $t$ .

La distribution du taux spot  $r(t)$  est gaussienne.

Le modèle de Hull & White à un facteur est facilement utilisable puisqu'il fournit des formules dites « fermées » (entièrement connues, dépendantes des paramètres et des conditions de marché à l'instant initial) pour la diffusion du taux spot  $r(t)$  ainsi que pour le prix des zéro-coupon  $P(t, T)$ . C'est ce modèle qui permet la déformation – ou reproduction – de la courbe des taux zéro-coupon et toute l'actualisation des flux futurs qui en découlent.

Nous reviendrons plus en détail sur l'aspect théorique de ce modèle dans la suite du chapitre.

Le générateur de scénarios économiques interne utilisé projette les prix zéro-coupon de maturité de 1 à 50 ans.

## 1.2.2 Modèle action

La formule de Black & Scholes est un moyen de modéliser certaines classes d'actif comme les actions ou l'immobilier. Il repose sur un certain nombre de conditions :

- Le prix de l'actif sous-jacent  $S_t$  suit un mouvement brownien géométrique avec une volatilité  $\sigma$  constante et un drift  $\mu$  constant tel que :

$$dS_t = \mu S_t dt + S_t \sigma_a dW_t^{action}$$

- Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage ;
- Le temps est une fonction continue ;
- Il est possible d'effectuer des ventes à découvert ;
- Il n'y a pas de coût de transactions ;
- Il existe un taux d'intérêt sans risque, connu à l'avance et constant ;
- Tous les sous-jacents sont parfaitement divisibles ;
- Dans le cas d'une action, celle-ci ne paie pas de dividende entre le moment de l'évaluation de l'option et l'échéance de celle-ci.

Et bien que toutes ces hypothèses ne soient pas respectées dans la réalité, le modèle de Black & Scholes reste une référence utilisée par des organismes financiers.

### Simulation

Pour simuler le prix des actions, nous supposons que le prix de l'actif sous-jacent suit la diffusion suivante :

$$dS_t = S_t \cdot ((\mu_a - d) \cdot dt + \sigma_a dW_t^{action})$$

Avec  $\mu_a$  le taux de rendement moyen attendu de l'action,  $d$  le taux de dividendes attendu, et  $\sigma_a$  la volatilité des prix de l'action.

Sous la probabilité risque-neutre, on peut écrire :

$$dS_t = S_t \cdot ((r_t - d) \cdot dt + \sigma_a dW_t^{action})$$

Avec  $r_t$  le taux court spot à la date  $t$  suivant la dynamique Hull & White à un facteur.

En pratique, la simulation de l'indice actions se fait par discrétisation d'Euler :

$$S_{t+1} - S_t = S_t \cdot ((r_t - d) \cdot \Delta + \sigma_a \sqrt{\Delta} N(0,1))$$

Pour  $\Delta$  pas de temps suffisamment petit.

Cette discrétisation permet de générer des trajectoires de prix de l'action au cours du temps.

## Calibrage

Les paramètres du modèle à calibrer sont :

- $d$  : le taux de dividende moyen attendu
- $\sigma_a$  : la volatilité des prix de l'action

Dans le générateur, les paramètres sont calibrés comme suit :

- $d = 0\%$
- $\sigma_a$  est la volatilité implicite moyenne d'un panel d'options sur indice Eurostoxx 50, les plus liquide, à la monnaie ; la moyenne est pondérée par la maturité afin de donner plus de poids aux maturités les plus longues. Les données sont obtenues via Bloomberg.

## Génération des trajectoires

La génération des taux de rendement action se fait sur un horizon de 0 à 50 ans.

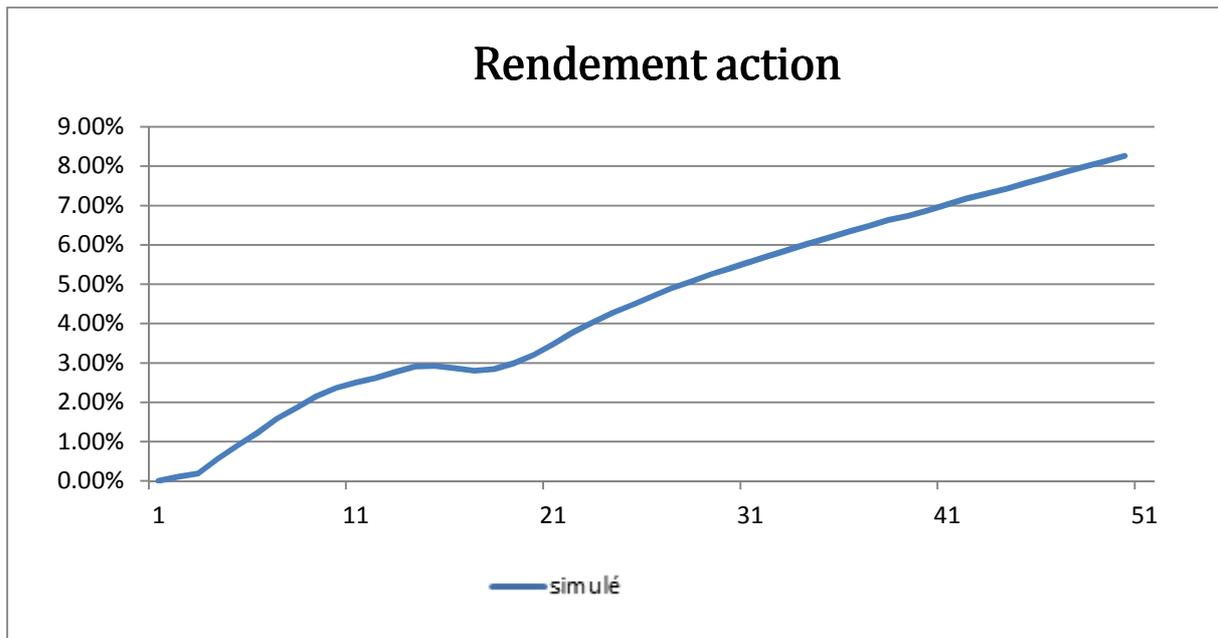


Figure 2 – Rendement des actions sur les hypothèses du 31/12/2015

### 1.2.3 Modèle immobilier

Contrairement aux actions, l'immobilier est un actif peu liquide ; toutefois il constitue une valeur refuge pour l'assureur car ses rendements sont meilleurs que les actions. De plus, l'immobilier permet de se protéger contre l'inflation car les prix y sont généralement indexés. C'est ainsi une classe d'actif très importante à modéliser pour n'importe quel assureur. Une fois encore c'est le modèle de Black & Scholes qui est utilisé.

#### Simulation

Pour simuler le prix des titres immobiliers, nous supposons, comme pour les actions, qu'il suit un mouvement brownien géométrique :

$$dS_t = S_t \cdot ((\mu_i - l) \cdot dt + \sigma_i dW_t^{imm})$$

Avec  $\mu_i$  le taux de rendement moyen attendu de l'immobilier,  $l$  les loyers attendus en pourcentage du prix de l'actif, et  $\sigma_i$  la volatilité des prix de l'immobilier.

Sous la probabilité risque neutre, on peut écrire :

$$dS_t = S_t \cdot ((r_t - l) \cdot dt + \sigma_i dW_t^{imm})$$

Toujours avec  $r_t$  le taux court spot à la date  $t$ .

De la même façon que la modélisation de l'action, si on considère un pas de temps suffisamment petit on peut discrétiser l'équation précédente de la manière suivante :

$$S_{t+1} - S_t = S_t \cdot ((r_t - l) \cdot \Delta + \sigma_i \sqrt{\Delta} N(0,1))$$

Cette dernière équation permet de générer des trajectoires de prix au cours du temps.

Ainsi en simulation risque neutre et dans un cadre stochastique, le taux d'intérêt instantané est un paramètre des modèles actions et immobilier, a un impact sur le modèle de crédit (que nous ne détaillerons pas ici) et il détermine également les rendements des obligations zéro-coupon et du monétaire.

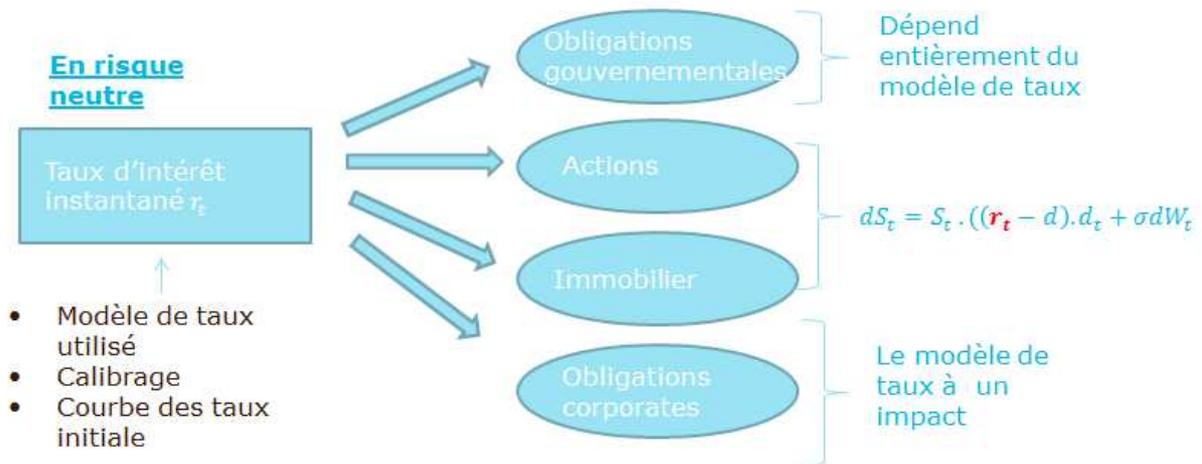


Figure 3 – Impact du modèle de taux dans la simulation des autres classes d'actif en risque neutre

## 1.2.4 Générateur de nombres aléatoires et variables antithétiques

### 1.2.4.1 Nombres aléatoires

Les nombres aléatoires sont utilisés dans la génération des aléas pour la simulation stochastique des classes d'actif. En pratique ils servent à la génération des gaussiennes utilisées pour les mouvements browniens selon le principe suivante :

$$W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \sim \sqrt{t_{i+1} - t_i} \times N(0,1)$$

La qualité de ces nombres aléatoires est primordiale pour la convergence des scénarios économiques générés.

Un générateur de nombres pseudo-aléatoire est un algorithme qui génère une séquence de nombres présentant certaines propriétés du hasard. Par exemple, les nombres sont supposés être approximativement indépendants les uns des autres, et il est potentiellement difficile de repérer des groupes de nombres qui suivent une certaine règle.

La raison pour laquelle on se contente d'un rendu pseudo-aléatoire est : d'une part qu'il est difficile d'obtenir de « vrais » nombres aléatoires et que, dans certaines situations, il est possible d'utiliser des nombres pseudo-aléatoires, en lieu et place de vrais nombres aléatoires ; d'autre part, que ce sont des générateurs particulièrement adaptés à une implantation informatique, donc plus facilement et plus efficacement utilisables.

## Mersenne Twister

Développé par Makoto Matsumoto et Takuji Nishimura en 1997, le Mersenne Twister est un générateur de nombres pseudo-aléatoires. Avec sa période de  $2^{19937}-1$  itérations, il distribue de manière uniforme sur 623 dimensions et s'avère être plus rapide que la plupart des méthodes statistiquement plus faibles. Ce générateur de nombres aléatoires prend en argument une graine, qu'il est nécessaire de déterminer le plus justement.

## Sélection de la graine

Pour chacune des classes d'actifs, on détermine la graine adéquate pour la simulation des nombres aléatoires.

Le principe de sélection se fait en simulant l'actif avec le nombre aléatoire généré par le Mersenne Twister et en effectuant un test martingale sur les résultats à l'instant  $t$ .

Une tolérance sur le test martingale est fixée pour chaque classe d'actif. Tant que le test martingale n'est pas suffisamment bon une nouvelle graine est générée. La tolérance augmente en fonction de nombre de simulation afin de ne pas avoir un processus de sélection de la graine trop long.

Dans le chapitre suivant, nous reviendrons plus en détail sur les tests effectués pour plusieurs classes d'actif.

### **1.2.4.2 Réduction de la variance**

Les techniques de réduction de la variance permettent d'augmenter la précision des estimations qui peuvent être obtenues avec un certain nombre de simulations par la méthode de Monte-Carlo. Dans le cadre d'un calcul stochastique au vu du grand nombre de simulations réduire la variance d'un estimateur devient crucial.

Un exemple assez répandu est l'utilisation de variable antithétique

On introduit une seconde variable aléatoire très fortement négativement corrélée avec la première, permettant de réduire la variance. L'élément clef est la formule suivante, valable pour deux variables  $X, Y$ :

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$$

## Principe des variables antithétiques

On souhaite estimer  $\theta = E[h(X)]$  par la méthode de Monte-Carlo qui consiste à simuler  $n$  variables iid (Indépendantes identiquement distribuées) selon la loi de  $X$ , disons  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , puis à estimer  $\theta$  par :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i)$$

On peut avoir une idée de l'erreur commise en construisant un intervalle de confiance, ce dernier nécessite un estimateur de la variance de l'estimateur  $\sigma_{\hat{\theta}}^2$ .

Supposons que l'on dispose de deux échantillons de taille  $n$  ; le premier est noté  $X_1, X_2, \dots, X_n$  et le second  $X'_1, X'_2, \dots, X'_n$ . Pour simplifier les notations, on pose  $m_1, m_2$  les estimateurs empiriques de l'espérance de  $h(X)$  sur respectivement l'échantillon 1 et 2. Autrement dit, on aura :

$$m_1 = \frac{h(X_1) + \dots + h(X_n)}{n} \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{h(X'_1) + \dots + h(X'_n)}{n}$$

L'estimateur Monte-Carlo sur l'échantillon complet est simplement :  $\hat{\theta} = \frac{m_1 + m_2}{2}$

Et, du point de vue de la variance :  $\sigma_{\hat{\theta}}^2 = \frac{\sigma_{m_1}^2 + \sigma_{m_2}^2 + 2Cov(m_1, m_2)}{4}$

Dans le cas iid, la covariance s'annule et  $\sigma_{m_1}^2 = \sigma_{m_2}^2$ , si bien que  $\sigma_{\hat{\theta}}^2 = \frac{\sigma_{m_1}^2}{2}$  : le facteur 2 s'explique car on a doublé la taille de l'échantillon.

La technique de la variable antithétique consiste à choisir l'échantillon 2 identiquement distribué selon la loi de  $X$ , mais en renonçant à l'indépendance, plus précisément en s'arrangeant pour que  $Cov(m_1, m_2) < 0$ . Il faut donc exploiter les éléments de symétrie de la loi de  $X$  afin de construire le second échantillon à partir du premier, en s'assurant de la négativité de la covariance. Se faisant, la variance sera inférieure à la variance "normale"  $\frac{\sigma_{m_1}^2}{2}$ .

Par exemple, si la loi de  $X$  est la loi uniforme sur  $[0,1]$ , le premier échantillon sera simplement  $u_1, \dots, u_n$ , où pour tout  $i$ ,  $u_i$  est tirée selon  $U(0,1)$ . On construit le second échantillon  $u'_1, \dots, u'_n$ , en posant pour tout  $i$  :  $u'_i = 1 - u_i$ . Si les  $u_i$  sont uniformes sur  $[0; 1]$ , alors il en va de même pour les  $u'_i$ . De plus, la covariance est négative, ce qui permet de réduire la variance initiale.

Un autre exemple concerne la loi normale  $N(\mu, s)$ . En appliquant la transformation  $x'_i = 2\mu - x_i$ , où  $x_i \sim N(\mu, \sigma)$ , on obtient un tirage qui est négativement corrélé avec le premier tirage  $x_i$ . C'est cet exemple qui sera retenu dans le modèle pour des  $N(0,1)$ . Cela revient à générer des couples de simulation en appliquant un facteur -1 devant l'un des deux à partir de l'autre.

C'est ainsi que les  $\frac{N}{2}$  premières simulations du générateur seront fortement corrélés négativement avec les  $\frac{N}{2}$  suivantes suivant les couples  $(1; \frac{N}{2} + 1), (2, \frac{N}{2} + 2), \dots, (\frac{N}{2}; N)$ .

## 1.3 Modèle de Hull & White

Dans cette partie nous allons nous intéresser plus particulièrement au modèle de taux Hull & White dans ses aspects théoriques et pratiques.

Il fut construit pour la première fois en 1990 par John C. Hull et Alan White et est un modèle très présent dans la littérature universitaire.

Le modèle Hull & White est utilisé pour simuler les taux d'intérêt futurs. Il a la particularité de reproduire la structure par terme des taux d'intérêt à l'instant initial. Il permet également de fournir facilement des prix des zéro-coupon ou encore des swaptions.

C'est dans sa version à un facteur que nous détaillerons les différentes formules.

### 1.3.1 Cadre théorique

#### 1.3.1.1 Diffusion des taux

La dynamique du taux court  $r(t)$  est donnée, sous la mesure martingale  $Q$ , par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = (\theta_t - a \cdot r_t)dt + \sigma^{taux} dW_t^{taux}$$

Avec :

$a$  le paramètre de retour à la moyenne

$\sigma^{taux}$  la volatilité

$W_t^{taux}$  un mouvement brownien et  $f^M(0, t)$  le taux forward instantané vu de 0 démarré à  $t$

$$\theta_t = \frac{\partial}{\partial T} f^M(0, t) + a f^M(0, t) + \frac{\sigma^{taux^2}}{2a} (1 - e^{-2at}) \text{ une fonction déterministe}$$

La fonction déterministe est ce qui permet de reproduire la courbe de taux à l'instant initial.

L'EDS de diffusion permet d'écrire une relation plus explicite pour la simulation de  $r(t)$  en fonction de deux instants  $T$  et  $t$  :

$$\begin{aligned} r(T) = & e^{-a(T-t)} r(t) + f^M(0, T) - e^{-a(T-t)} f^M(0, t) \\ & + \frac{\sigma^{taux^2}}{2a^2} [1 - e^{-a(T-t)} + e^{-2aT} - e^{-a(T+t)}] \\ & + N(0,1) \times \sigma^{taux} \sqrt{\frac{(1 - e^{2a(T-t)})}{2a}} \end{aligned}$$

La simulation des taux courts se fait généralement de manière mensuelle parfois même journalière. En considérant l'écart  $\Delta = T - t$  on obtient une relation de récurrence indépendante du pas de temps choisi qui permet de relier de proche en proche les taux courts.

$$r(\Delta(n+1)) = e^{-a\Delta}r(t) + f^M(0, \Delta(n+1)) - e^{-a\Delta}f^M(0, \Delta n) + \frac{\sigma^{taux^2}}{2a^2} [1 - e^{-a\Delta} + e^{-2a\Delta n} - e^{-a\Delta(2n+1)}] + \sigma^{taux} \sqrt{\frac{(1 - e^{2a\Delta})}{2a}} \times N(0,1)$$

La distribution du taux court instantané est gaussienne ce qui implique la possibilité de générer des taux négatifs avec une probabilité non nulle. C'est une spécificité du modèle.

### 1.3.1.2 Pricing de zéro coupon

Le modèle de Hull & White est un modèle affine c'est-à-dire que le prix des zéro-coupon peut s'écrire sous la forme :

$$P(t, T)^{H\&W} = A(t, T)e^{-r(t)B(t, T)} = E^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(s)ds} \right]$$

À partir de l'expression du taux court vue précédemment on retrouve l'expression du prix d'un zéro-coupon de maturité  $T$  pour un instant  $t < T$  :

$$P(t, T)^{H\&W} = A^{HW}(t, T)e^{-r_t B^{HW}(t, T)}$$

Avec

$$A^{HW}(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} e^{B(t, T)f^M(0, t) - \frac{\sigma^{taux^2}}{4a}(1 - e^{-2at})B^2(t, T)}$$

$$B^{HW}(t, T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$$

(Démonstration en annexe)

### 1.3.1.3 Pricing de Swaption et calibrage

Avant de parler de swaption, il semble nécessaire de parler dans un premier temps des swaps. C'est un produit financier classique qui permet à deux contreparties d'échanger à une date donnée des flux correspondants à un taux fixe et à un taux variable.

Un contrat swap se compose d'un nominal  $N$  à partir duquel les deux taux d'intérêt sont calculés, une durée du contrat (ténor), une date d'entrée dans le swap (maturité), une fréquence des paiements et une base de calcul calendaire.

Les deux contreparties s'échangent donc une branche fixe  $BF(t)$  et une branche variable  $BV(t)$

Soit  $k$  le taux fixe et  $T_i$  les dates d'échange pour  $i$  entre 0 et  $n$ , la branche fixe aura pour valeur à une date  $t$  inférieure à la date d'entrée dans le swap :

$$BF(t) = k \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1})P(t, T_j)$$

et de même la branche variable pour une date  $t < T_0$  :

$$BV(t) = P(t, T_0) - P(t, T_n)$$

Le taux swap est le taux fixe qu'il faudrait choisir pour obtenir l'égalité entre la jambe fixe et la jambe variable. À l'instant  $t$  inférieur à  $T_0$  on a :

$$S_t = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1})P(t, T_j)}$$

La valeur du swap est nulle à l'émission puisqu'il est émis au taux swap et que celui-ci représente l'égalité des deux jambes. En revanche, ce n'est plus le cas dans le futur quand le taux variable évoluera en fonction du marché tandis que le taux fixe  $k$  restera constant.

Un swaption fait référence à un swap et à une option, deux instruments financiers très utilisés qu'il va combiner. Un swaption payeur à l'image d'un call donne le droit de rentrer dans un swap et de payer un taux fixe en échange d'un taux variable. Inversement un swaption receveur donne le droit de rentrer dans un swap et de recevoir un taux fixe contre un taux variable.

Le prix d'une swaption payeuse de maturité  $T$  et de strike  $K$  à la date  $t$  est sous probabilité risque neutre :

$$Swn_t = E^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(s)ds} (BV(T) - BF(T))_+ | F_t \right]$$

Et d'après les expressions de  $BF(t)$  et  $BV(t)$  on obtient :

$$Swn_t = E^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(s)ds} \left( \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1})P(T, T_j) \right) (S_T - K)_+ | F_t \right]$$

On rappelle la formule de changement de numéraire :

$$E^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(s)ds} \frac{N_T}{N_t} CashFlow(T) | F_t \right] = E^{\mathbb{Q}^N} [CashFlow(T) | F_t]$$

Si on pose  $N_T = \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1})P(T, T_j)$  on obtient d'après la formule précédente :

$$Swn_t = \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1})P(t, T_j) E^{\mathbb{Q}^N} [(S_T - K)_+ | F_t]$$

Dans le cadre de prix de marché, les swaptions sont cotées en volatilité implicite de Black. On suppose que  $S_t$  suit une dynamique de Black & Scholes avec cette volatilité implicite. On obtient alors le prix du swaption en 0 de strike  $K$ , de maturité  $T_0$  de ténor  $T_n - T_0$ , de volatilité implicite  $\sigma^{imp}$  et de taux swap  $S_0$  :

$$Swn_0 = \sum_{j=1}^n (T_j - T_{j-1})P(0, T_j) Call^{Black}(S_0, 0, K, 0, T, \sigma^{imp})$$

Avec :

$$Call^{Black}(S_t, r, K, t, T, \sigma) = S_t \phi(d_1) - e^{(r(T-t))} K \phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Et  $\phi$  la fonction de répartition d'une gaussienne centrée réduite.

Il s'agit maintenant de déterminer l'expression du prix d'un swaption dans le modèle de taux de Hull & White à un facteur. En effet, ce modèle de taux fournit une formule de prix pour les swaptions (ce qui n'est pas le cas de tous les modèles de taux) et bien qu'on ne souhaite pas les modéliser dans nos scénarios économiques ils vont être cruciaux dans la phase de calibrage.

Pour calculer ce prix dans le modèle de H&W, nous commençons par définir la fonction  $ZBP$  correspondant au prix en  $t$  d'un put Européen de strike  $X$ , de maturité  $T_{i-1}$  et pour lequel le sous-jacent est un zéro-coupon de maturité  $T_i$ . Cette fonction est définie par l'expression ci-dessous :

$$ZBP(t, T_{i-1}, T_i, X) = XB(t, T_{i-1})\phi(d_+) - B(t, T_i)\phi(d_-)$$

Avec :

- $d_{\pm} = \frac{\ln\left(\frac{B(t, T_{i-1})X}{B(t, T_i)}\right)}{\sqrt{V(t, T_{i-1}) \times \beta(T_{i-1}, T_i)^2}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{V(t, T_{i-1}) \times \beta(T_{i-1}, T_i)^2}$
- $\phi$  fonction de distribution normale
- $V(t, T_{i-1}) = \frac{\sigma^{taux^2}}{2a} (1 - e^{-2a(T_{i-1}-t)})$
- $\beta(T_{i-1}, T_i) = \frac{1 - e^{-a(T_i - T_{i-1})}}{a}$

À partir de cette fonction, nous pouvons exprimer le prix d'une swaption en 0 de maturité  $T_\alpha$ , de ténor  $T_n$  et de strike  $K$ , dans le modèle Hull & White à un facteur, grâce à la formule suivante :

$$\begin{aligned} \text{PrixModèleSwaption}(0, T_\alpha, T_n, K) \\ = \sum_{i=1}^n K \times (T_i - T_{i-1}) ZBP(0, T_\alpha, T_i, Y_i) + ZBP(0, T_\alpha, T_n, Y_n) \end{aligned}$$

où  $Y_i$  est défini par  $Y_i = A(T_\alpha, T_i) \times \exp(-\beta(T_\alpha, T_i)r^*)$  avec :

- $r^*$  solution de l'équation  $\sum_{i=1}^n K \times (T_i - T_{i-1})Y_i + Y_n = 1$ .
- $A(T_\alpha, T_i) = \frac{P^M(0, T_i)}{P^M(0, T_\alpha)} \exp\left\{\beta(T_\alpha, T_i)f(0, T_\alpha) - \frac{\sigma^{taux^2}}{4a} (1 - e^{-2aT_\alpha})\beta(T_\alpha, T_i)\right\}$
- $\beta(T_\alpha, T_i) = \frac{1 - e^{-a(T_i - T_\alpha)}}{a}$

L'exercice de calibrage consiste à estimer les paramètres de l'équation de diffusion. Pour cela on calcule le prix d'un certain nombre d'instruments financiers à l'aide du modèle de taux étudié et on cherche à converger vers les prix de marché de ces mêmes instruments. En univers risque neutre on récupère les caractéristiques des swaptions et on calcul les deux prix. On compare les prix calculés à leur date d'émission, c'est-à-dire à  $t = 0$ .

On définit  $PrixMarchéSwaption(i) = Swn_0$  pour un swaption  $i$

Un algorithme d'optimisation détermine la valeur des paramètres qui minimise la différence quadratique des deux prix. C'est la méthode des moindres carrés.

$$\sum_i \left\| \frac{PrixMarchéSwaption(i) - PrixModèleSwaption(i)}{PrixMarchéSwaption(i)} \right\|^2$$

Avec  $i$  le nombre de swaption dont on calcule les prix.

Il existe d'autres moyens de calibrer les paramètres, il est possible de faire une étude statistique à partir d'un historique de données ou encore une approche « à dire d'expert ». Il est par ailleurs possible de coupler ces méthodes, par exemple en imposant certains paramètres par dire d'expert et de calibrer les autres par la méthode des moindres carrés sur des prix de marché.

## 1.3.2 Limite du modèle

Dans cette sous-partie voir Annexe - 0 (1 à 4) pour les définitions des différents indicateurs utilisés.

### 1.3.2.1 Impact des scénarios de taux négatifs

En simulation stochastique une large variété de scénarios est simulée. En fonction de la courbe de taux utilisée il y aura des taux simulés plus ou moins faibles. Dans un contexte de taux bas, on observe des scénarios avec des taux négatifs à long terme qui auront un impact sur le Best Estimate.

Sur la base de la courbe des taux EIOPA au 31/12/2015 et avec une table de scénarios économiques simulée selon les méthodes précédentes la répartition suivante des Best Estimate est obtenue (les valeurs ont été modifiées pour raison de confidentialité) :

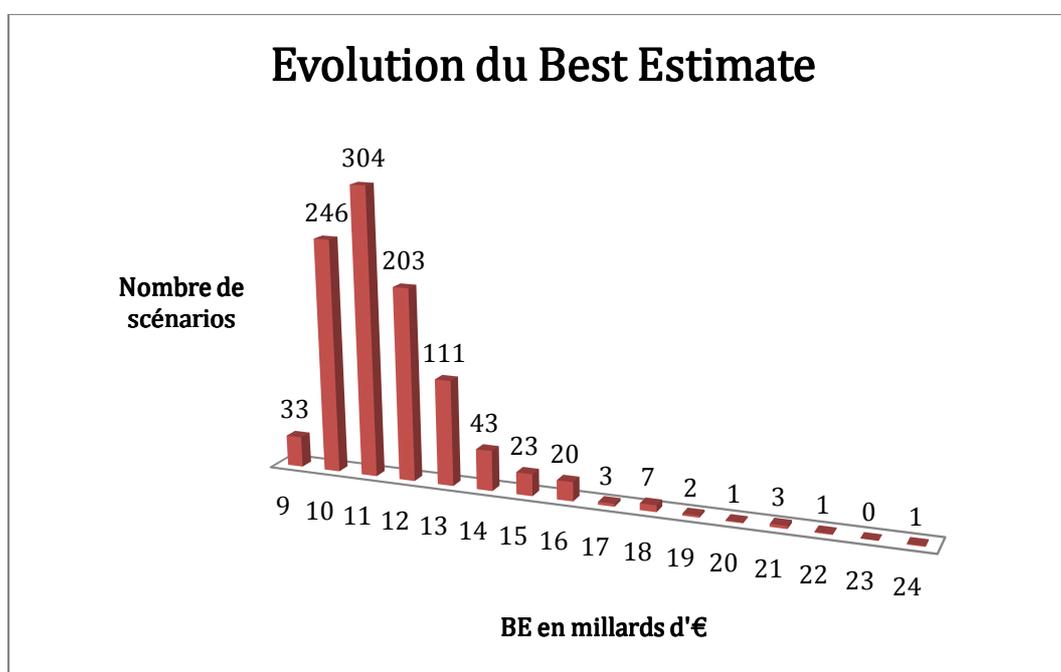


Figure 4 - Répartition du Best Estimate sur 1000 simulations

Le Best Estimate maximum vaut plus du double du Best Estimate réglementaire et est atteint pour la simulation 774 (parmi les  $N = 1000$  simulations).

Pour comprendre ce qui se passe dans les scénarios de taux négatifs, il faut s'intéresser aux implications d'une baisse des taux dans le bilan économique de l'entreprise.

Au passif, de manière non exhaustive, les versements et les profits futurs sont actualisés à des taux plus faibles. Ce taux d'actualisation peut même prendre des valeurs négatives entraînant un facteur d'actualisation supérieur à 1. De fait les engagements de l'assureur vont augmenter tandis que les rendements censés être « sans risque » du monétaire seront à perte (en raison de l'actualisation négative).

Les premiers rachats vont alimenter la réserve de capitalisation qui génère des produits financiers et si elle n'est pas reprise générera de la richesse finale. Toutefois, les réinvestissements futurs se font à des taux plus bas, réduisant les marges. Réinvestir à des taux négatifs, à perte donc, devient même théoriquement possible.

Pour ces mêmes raisons, la TVOG (coût des options et garanties) va augmenter (le réinvestissement ne sera pas assez rentable par rapport aux garanties servies aux assurés).

L'activité retraite et plus généralement les activités à long terme sont touchées durement. Plus la courbe des taux est basse plus les fonds propres sont faibles tandis que le SCR est élevé. Toutefois les éléments de richesse comme les diverses provisions spécifiques sont des moyens d'absorber les chocs en repoussant au maximum la situation où l'assureur doit effectuer des pertes pour financer ses engagements contractuels.

À l'actif, la valeur des obligations augmente. Les rendements des réinvestissements futurs sont moins élevés que précédemment. Ainsi, l'assureur doit s'attendre à une baisse du rendement projeté de ses actifs et devra adapter sa politique de reversement. L'assureur devra alors faire évoluer l'allocation stratégique de ses actifs afin de correspondre à sa nouvelle politique.

Ces événements combinés auront pour effet d'augmenter la valeur du Best Estimate.

Ainsi si on regarde la courbe des taux zéro-coupon 10 ans (on peut supposer que le réinvestissement se fait sur ces taux) et celle des taux d'actualisation de l'itération 774 on obtient le graphique suivant :

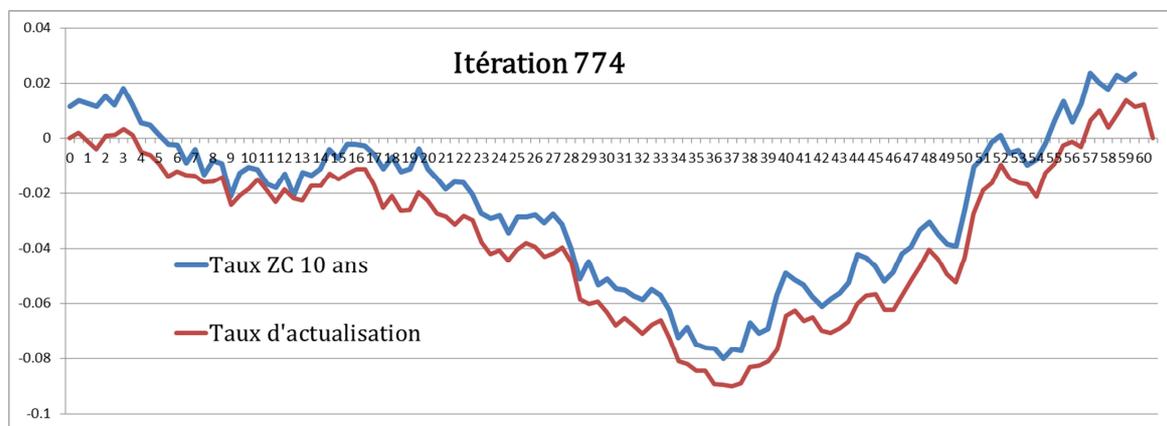


Figure 5 – Courbes des taux zéro-coupon 10 ans et des taux d'actualisation

On observe bien les implications théoriques d'une baisse des taux :

Le réinvestissement aura des rendements faibles voire même négatifs durant une longue période. Durant cette période le produit des placements est très bas, principalement sur les investissements obligataires. On observe cette tendance sur les rendements des zéro-coupon de maturité 10 ans, mais on constate la même chose pour les autres maturités.

L'actualisation suit la même tendance, on observe des taux d'actualisation allant jusqu'à -9%. Cela signifie que des capitaux placés sur du rendement monétaire, à priori sans risque, rapporteront du -9% tandis que la valeur des engagements augmente.

La remontée soudaine des taux pour des maturités élevés ne va pas arranger les choses puisque malgré des réinvestissements ultérieurs à des taux plus avantageux, les lois de rachats dynamiques pourront se déclencher.

En résumé, il se passe dans cette itération le scénario le plus défavorable et cela est dû à une génération excessive de taux négatifs. Ces scénarios sont rares (*cf la figure sur l'évolution des Best Estimate*), néanmoins pèsent dans la balance du calcul du BE réglementaire.

### 1.3.2.2 Impact d'un calibrage manuel

Le calibrage du modèle Hull & White consiste à définir deux paramètres,  $a$  et  $\sigma$  de façon à retrouver les valeurs de marché réellement observées d'instruments financiers, le choix se porte sur les swaptions.

#### Choix d'un paramètre

On fixe des bornes inférieures et supérieures pour les paramètres à calibrer que prendra en compte un algorithme d'optimisation, que nous ne détaillerons pas pour ce premier modèle de taux. Les bornes sont définies par dires d'expert.

La diffusion actuelle est obtenue avec un retour à la moyenne égal à 1%. Si on décide d'opter pour un paramètre de retour à la moyenne égal à 5% on obtient une nouvelle volatilité et ainsi une nouvelle diffusion.

Un retour à la moyenne plus fort va comme son nom l'indique ramener les taux plus ou moins rapidement vers leur moyenne théorique. Dans un contexte de taux bas il devient, à priori, intéressant d'augmenter ce paramètre afin de limiter l'explosion des taux dans le négatif. Toutefois, il faut aussi s'attendre à générer des taux moins forts dans le positif.

On présente ci-dessous les différents spectres des taux générés par les deux calibrages.

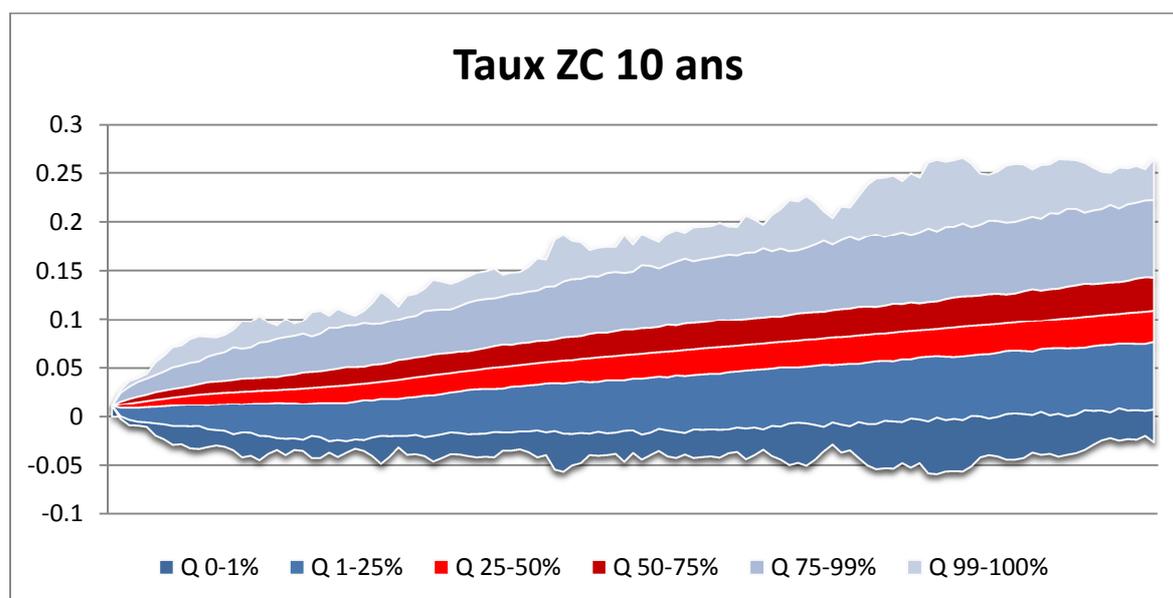


Figure 6 – Dispersion sur 50 ans des taux zéro-coupon 10 ans avec  $a = 1\%$

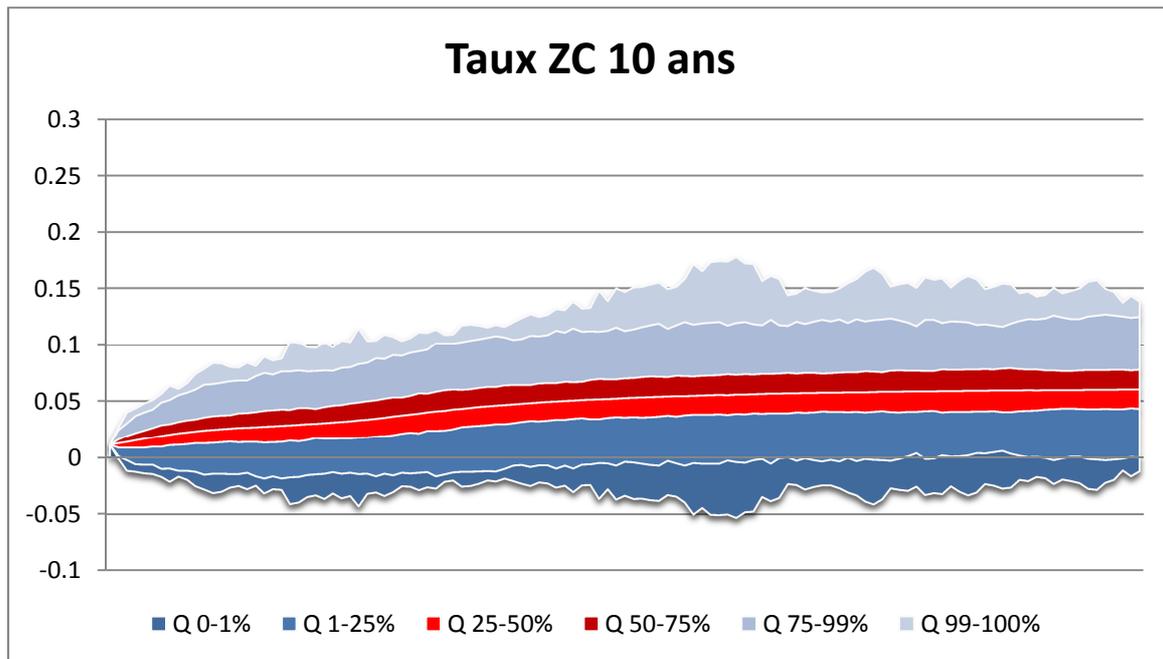


Figure 7 – Dispersion sur 50 ans des taux zéro-coupon 10 ans avec  $\alpha = 5\%$

Dans un contexte de taux bas le Hull & White à un facteur diffuse largement vers les taux négatifs et même sur des horizons longs. Comme vu précédemment la pénalisation par des scénarios trop persistants dans les taux négatifs est trop importante.

Le passage d'un paramètre de retour à la moyenne de 1% à 5% permet un aplatissement du spectre de diffusion. L'augmentation de ce paramètre semble avoir un effet sur la quantité de trajectoires avec des taux négatifs. De plus les tests martingales n'ont pas été affectés. La quantité de scénarios avec des taux très positifs a également été diminuée.

Un regard sur le modèle ALM nous dira que le passage du premier au deuxième calibrage engendre en stochastique un effet positif sur les indicateurs majeurs de solvabilité. On observe une diminution du Best Estimate de 0,4% ainsi qu'une augmentation sensible du ratio de solvabilité.

Si on regarde à présent plus précisément le ratio de solvabilité, le changement de scénarios économiques a deux principaux impacts sur les différents SCR de la formule standard :

- Le SCR de marché avec une baisse importante du SCR de *risque de taux*;
- Le SCR de souscription avec une baisse importante du SCR *risque de rachat en baisse*.

Il faut en garder en tête que les résultats observés n'ont de valeur que si le changement du paramétrage est justifié. Le modèle de taux doit être calibré de manière à répliquer les conditions économiques à la date de valorisation. Néanmoins, cette modification du spectre de diffusion des taux confirme l'intérêt à simuler moins de taux négatifs.

Une autre critique à prendre en compte avant de faire des conclusions trop hâtives est que réduire le champ de distribution des taux autour de la moyenne théorique est quasi systématiquement avantageux pour un indicateur tel que le Best Estimate Solvabilité 2 (moyenne de tous les autres), mais dénature le propos même de la simulation stochastique. Il faut avoir un modèle de taux capable de capter toutes les variations possibles de l'univers

économique. Le tout étant de ne pas obtenir des scénarios pouvant être considérés comme invraisemblables (un taux d'actualisation à -9% par exemple).

### 1.3.2.3 Limite des modèles de taux à un facteur

De manière plus générale, les modèles de taux à un facteur présentent des faiblesses intrinsèques. Ce sera l'une des motivations à passer à un modèle de taux à deux facteurs.

On a vu précédemment que le taux court est l'une des premières étapes dans la génération des scénarios économiques et caractérise toute la courbe des taux simulés grâce à la relation :

$$P(t, T) = E^{\mathbb{Q}}[\exp(-\int_t^T r(s)ds)]$$

À partir des prix zéro-coupon  $P(t, T)$  à un instant  $t$  pour toutes les maturités  $T$ , on peut reconstruire toute la courbe des taux zéro-coupon pour cet instant  $t$ . Ainsi il paraît clair que la courbe est entièrement caractérisée par la quantité mathématique  $r$ .

Si on considère le modèle de Hull & White à un facteur étudié précédemment, avec un taux court donné par l'équation stochastique différentielle gaussienne :

$$dr_t = (\theta_t - a \cdot r_t)dt + \sigma dW_t$$

On a obtenu pour le prix des zéro-coupon une formule fermée de la forme (modèle affine) :

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-r(t)B(t, T)}$$

À partir de cette formule, on peut en déduire le taux zéro-coupon continu en fonction de la quantité  $r$  :

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T) = -\frac{\ln A(t, T)}{T-t} + \frac{B(t, T)}{T-t} r(t) = a(t, T) + b(t, T)r(t)$$

Si on considère à présent un payoff quelconque qui dépend de la distribution jointe de deux de ces taux,  $R(t, T1)$  et  $R(t, T2)$  à un instant  $t$ , le payoff dépendra ainsi de la distribution jointe du taux zéro-coupon de maturité  $T1$  et de maturité  $T2$  à l'instant  $t$  et donc de la corrélation de ces deux taux.

$$\text{Corr}(R(t, T1), R(t, T2)) = \text{Corr}(a(t, T1) + b(t, T1)r(t), a(t, T2) + b(t, T2)r(t))$$

D'après la propriété suivante :  $\text{Corr}(a + bX, Y) = \pm \text{Corr}(X, Y)$  on a :

$$\text{Corr}(R(t, T1), R(t, T2)) = \pm 1$$

Une telle corrélation signifie qu'à chaque instant  $t$  les taux zéro-coupon instantanés pour toutes les maturités de la courbe sont parfaitement corrélés. Ainsi un taux d'intérêt 50 ans pour un instant donné est entièrement corrélé avec un taux d'intérêt 5 mois à ce même instant. Donc un choc des taux d'intérêt à l'instant  $t$  sera transmis de la même manière à toutes les maturités et la courbe des taux d'intérêt bougera dans la même direction. Il est en fait connu que les taux d'intérêt montrent des formes de décorrélation (à l'opposé de la corrélation parfaite théorique).

Le modèle de Hull & White reste cependant acceptable dans le cadre d'un pricing de produit ne dépendant pas de la corrélation de deux taux, mais d'un seul pour tout instant. Le cas de la modélisation des actions ne pose par exemple pas de problème. Une approximation acceptable peut également se faire quand le payoff dépend de deux taux proches (par exemple six mois et un an) et qu'ainsi la corrélation est naturellement élevée entre les deux.

Mais alors combien de facteurs doit-on prendre en compte ? Idéalement, un nombre de facteurs élevé permet une meilleure modélisation, mais nécessite des calculs plus lourds. Il s'agit de trouver un équilibre entre l'implémentation et la capacité du modèle à refléter les corrélations réalistes et à représenter suffisamment bien les données de marché dans des situations concrètes.

Une analyse en composantes principales effectuée en 1997 par Jamshidian et Zhu montre que deux facteurs peuvent expliquer entre 85% et 90% des variations de la courbe de rendement (en considérant les données sur les JPY, USD et DEM). Un seul facteur explique quant à lui entre 68% et 76% des variations de la courbe. Trois facteurs peuvent expliquer entre 93% et 94% des variations.

Une autre étude portant sur la structure par terme des taux des années 2000 à 2013 montre que deux facteurs expliquent 95% de l'information tandis que trois facteurs en expliquent 99%.

Les deux premiers vecteurs propres retenus étant :

- Translation ;
- Pentification.

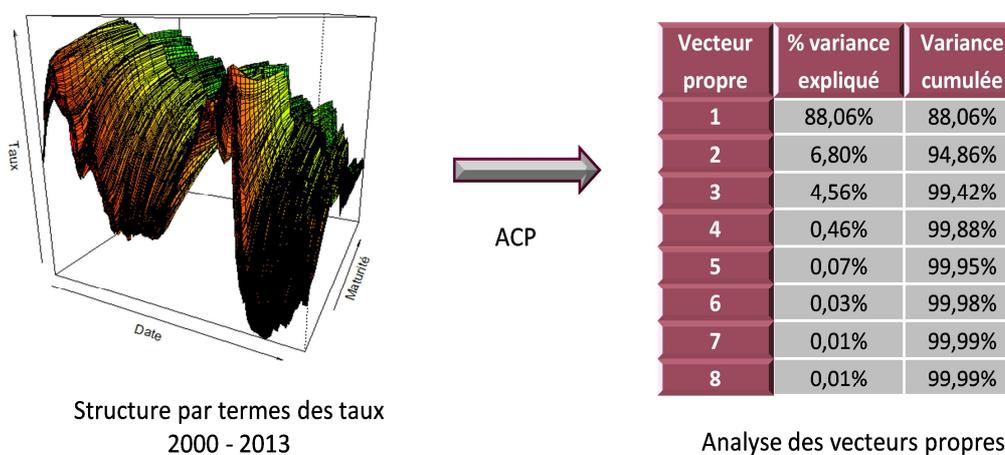


Figure 8 – Analyse en composantes principales sur la structure par termes des taux 2000-2013

Il semble clair qu'objectivement le choix de deux ou trois facteurs est suffisant pour reproduire l'information contenue dans la courbe. Le choix de deux facteurs est un bon compromis entre complexité opérationnelle et explication de l'information.

**En conclusion :**

*Le modèle actuel génère un trop grand nombre de taux négatifs et on a vu leurs impacts sur le modèle ALM.*

*De plus, les modèles de taux à un facteur (et particulièrement les modèles affines) présentent des inconvénients intrinsèques. Un changement de modèle de taux est envisageable.*

## 2. Changement de modèle de taux : CIR2++

*Cette partie sera entièrement théorique et traite en détail d'un deuxième modèle de taux. Le but est d'introduire de manière la plus exhaustive possible ce second modèle de taux et de présenter certaines étapes de son implémentation afin d'en comprendre le bon fonctionnement. De plus, diverses problématiques liées au générateur de scénarios économiques telles que la validation ou l'interpolation de la courbe des taux sans risque seront traitées théoriquement dans cette partie.*

### 2.1 Modèle de taux à deux facteurs

Il existe une multitude de candidats possibles pour le changement de modèle de taux. C'est sur les critères suivants que chaque modèle sera observé :

- La capacité à reproduire la structure par termes des taux initiales et à la projection des courbes de taux zéro-coupon ;
- La capacité à reproduire la nappe de volatilité des swaptions européennes ;
- Question des problématiques liées à la maîtrise de « l'explosivité des taux » lors des projections, particulièrement sur des horizons de temps très longs ;
- Question des problématiques liées à la projection de taux d'intérêt négatifs (voire très négatifs) en grande proportion ;
- Flexibilité laissée à l'utilisateur d'appréhender les paramètres du modèle lui permettant d'ajuster les projections de courbes de taux zéro-coupon ;

Modèles	Reproduction de la courbe de ZC		Reproduction de la nappe de volatilité des Swaptions		Projection des taux ZC		
	Qualité	Complexité	Qualité	Complexité	Taux explosifs	Taux négatifs	Maitrise des paramètres
<b>G2++</b>	Parfaite	Facile	Quelques écarts	Modérée	RAS	À surveiller	Bonne
<b>H&amp;W 2F</b>	Parfaite	Modérée	Quelques écarts	Modérée	RAS	À surveiller	Bonne
<b>CIR2++</b>	Parfaite	Modérée	Quelques écarts	Difficile	RAS	Pas un problème	Bonne
<b>Schaefer Schwartz</b>	- Quelques écarts	Difficile	Faible		RAS	Faiblesse du modèle	Bonne
<b>Longstaff Schwartz</b>	- Quelques écarts	Modérée	Bonne		RAS	Pas un problème	Moyenne
<b>Fong - Vasicek</b>	Quelques écarts	Difficile	Bonne		RAS	Pas un problème	Bonne
<b>LMM (shifté)</b>	Parfaite	Facile	Quelques écarts	Modérée	Important	Pas un problème	Mauvaise
<b>LMM (shifté)</b>	+ Parfaite	Facile	Bonne	Difficile	Important	Pas un problème	Mauvaise

Parce que l'objectif de ce mémoire n'est pas la présentation de tous les modèles de taux existants, nous ne détaillerons pas plus en détail chaque modèle.

Il en sort de cette rapide étude que le **G2++** et le **H&W 2F** (les deux fonctionnent en parallèle) sont des modèles très maniables avec une très bonne reproduction de la courbe de taux et des instruments, mais il faut faire attention à la génération des taux négatifs.

Le **CIR2++** a le défaut d'être un modèle complexe, mais qui une fois maîtrisé offre une bonne flexibilité. Il est également très robuste dans la simulation des taux. La génération de taux négatifs est limitée avec ce modèle.

Le **Schaefer – Schwartz** est à exclure de par le manque de référence et sa difficulté. C'est encore un modèle expérimental.

Le **Longstaff – Schwartz** et le **Fong – Vasicek** sont des modèles maniables, mais complexes. Ils ne présentent pas la possibilité d'un calibrage analytique des volatilités ce qui va les éliminer.

Enfin, les modèles **LMM** et **LMM +** (shifté) ont des problèmes d'explosion des taux en plus d'un haut niveau de complexité, surtout pour la version LMM+, et sont des modèles très peu maniables.

La sélection du modèle se fait par élimination. Les modèles trop expérimentaux et ceux qui génèrent des taux trop explosifs sont éliminés. Le choix de ne pas retenir le G2++ ainsi que le H&W 2F vient de leur nature gaussienne et d'une génération pouvant conduire aux mêmes problématiques vues dans le chapitre précédent.

C'est finalement le modèle CIR2++ qui retiendra notre attention.

## 2.2 Cadre théorique du CIR2++

### 2.2.1 CIR et CIR++

Le modèle de taux CIR2++ tient son nom du modèle CIR (Cox, Ingersoll and Ross). Avant de définir toutes les notions théoriques de ce dernier, il est nécessaire de revenir très rapidement sur sa version à un facteur non shifté : le CIR. Les résultats de celui-ci permettront de mieux comprendre la dynamique du CIR2++.

Sous la mesure martingale  $Q$  le taux spot est donné par l'équation suivante :

$$dr(t) = k(\theta - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t), \quad r(0) = r_0$$

Avec :

- Le paramètre  $k$  est le paramètre de retour à la moyenne, c'est-à-dire qu'il ramène plus ou moins fort la simulation vers sa moyenne (au même titre que le  $a$  du Hull & White) ;
- Le paramètre  $\theta$  est le niveau de taux à long terme (pour un temps  $t$  suffisant) ;
- Le paramètre  $\sigma$  est la volatilité du processus.

Toutes les constantes sont positives et sous la condition de Feller  $2k\theta > \sigma^2$  le taux spot  $r(t)$  est assuré de rester positif. La distribution de  $r$  est celle d'un Khi-deux non centré.

C'est un modèle de taux affine comme l'était le modèle de Hull & White et ainsi la formule du prix des zéro-coupon est de la forme :

$$P^{CIR}(t, T) = A^{CIR}(t, T)e^{-r(t)B^{CIR}(t, T)}$$

avec :

$$A^{CIR}(t, T; \alpha) = \left[ \frac{2h \exp\{(k+h)(T-t)/2\}}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)} \right]^{2k\theta/\sigma^2}$$

$$B^{CIR}(t, T; \alpha) = \frac{2(\exp\{(T-t)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)}$$

$$h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$$

Toutefois dans sa version la plus classique le CIR n'est pas *market consistent* et il ne permet pas de retrouver la courbe de taux initiale. Il a besoin d'une fonction déterministe qui ajuste la courbe des taux simulée. Cette fonction, qualifiée de shift, permet de conserver les propriétés martingales du processus.

Dans le cadre de ce CIR « shifté » : le CIR ++ l'équation de diffusion du taux spot devient :

$$r(t) = x(t) + \varphi(t)$$

$$dx(t) = k(\theta - x(t))dt + \sigma\sqrt{x(t)}dW(t), \quad x(0) = x_0$$

Il est intéressant de comprendre comment ce shift est construit.

À partir du CIR on a l'expression sous probabilité risque neutre, en prenant  $r(t) = x(t)$  :

$$P^{CIR}(0, T) = E^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_0^T x(s) ds} | F_0 \right]$$

À l'image du prix marché des zéro-coupon que l'on peut construire avec le taux forward instantané de marché on peut écrire le prix zéro-coupon avec une fonction déterministe  $f^{CIR}$  :

$$\begin{cases} P^M(t, T) = e^{-\int_t^T f^M(t, s) ds} \\ P^{CIR}(0, T) = e^{-\int_0^T f^{CIR}(0, s) ds} \end{cases}$$

À partir des deux expressions  $P^{CIR}(0, T)$  On obtient alors l'égalité suivante :

$$e^{\int_0^T f^{CIR}(0, s) ds} \times E^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_0^T x(s) ds} | F_0 \right] = 1$$

Puis :

$$e^{-\int_0^T f^M(0, s) ds} e^{\int_0^T f^{CIR}(0, s) ds} \times E^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_0^T x(s) ds} | F_0 \right] = e^{-\int_0^T f^M(0, s) ds}$$

En posant  $\varphi(t) = f^M(0, t) - f^{CIR}(0, t)$  et en sachant que  $P^M(0, T) = e^{-\int_0^T f^M(0, s) ds}$

On obtient l'égalité suivante avec le taux spot du CIR++ :

$$E^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_0^T r(s) ds} | F_0 \right] = P^M(0, T)$$

C'est-à-dire qu'on arrive à retrouver la courbe de taux initiale et on a ainsi déterminé l'expression du shift du modèle CIR++. Son expression analytique se déduit de la formule du prix d'un zéro -coupon pour tout  $t$  et  $T$  :

$$P^{CIR}(t, T) = e^{-\int_t^T f^{CIR}(t, s) ds}$$

En dérivant par rapport à  $T$  on obtient l'expression de  $f^{CIR}$

$$-\frac{\partial \ln(P^{CIR}(t, T))}{\partial T} = f^{CIR}(t, T)$$

En reprenant les expressions de  $A^{CIR}$  et  $B^{CIR}$  vu précédemment le calcul de dérivée donne :

$$f^{CIR}(t, T) = \frac{k\theta}{\sigma^2} \left[ \frac{2he^{(T-t)h}}{2h + (k+h)(e^{(T-t)h} - 1)} - 1 \right] + x(t) \frac{2he^{(T-t)h} (2h + (k+h)(e^{(T-t)h} - 1)) - 2h(k+h)e^{(T-t)h}(e^{(T-t)h} - 1)}{(2h + (k+h)(e^{(T-t)h} - 1))^2}$$

$$f^{CIR}(t, T) = \frac{2k\theta(e^{(T-t)h} - 1)}{2h + (k+h)(e^{(T-t)h} - 1)} + x(t) \frac{4h^2 e^{(T-t)h}}{(2h + (k+h)(e^{(T-t)h} - 1))^2}$$

On évalue la fonction avec  $T = t$  et  $t = 0$  de sorte à obtenir la fonction déterministe du shift :

$$f^{CIR}(0, t) = \frac{2k\theta(e^{th} - 1)}{2h + (k + h)(e^{th} - 1)} + x(0) \frac{4h^2 e^{th}}{(2h + (k + h)(e^{th} - 1))^2}$$

### 2.2.2 Diffusion des taux dans le modèle CIR2++

Sous la mesure martingale  $Q$ , le taux spot est donné par l'équation suivante :

$$r(t) = x_1(t) + x_2(t) + \varphi(t; \alpha) \quad r(0) = r_0$$

où les processus  $(x_1(t))_{t \geq 0}$  et  $(x_2(t))_{t \geq 0}$  satisfont

$$dx_1(t) = k_1(\theta_1 - x_1(t))dt + \sigma_1 \sqrt{x_1(t)} dW^1(t), \quad x_1(0) = x_{10}$$

$$dx_2(t) = k_2(\theta_2 - x_2(t))dt + \sigma_2 \sqrt{x_2(t)} dW^2(t), \quad x_2(0) = x_{20}$$

Nous notons  $\alpha := (x_0, y_0, k_1, \theta_1, \sigma_1, k_2, \theta_2, \sigma_2)$  le vecteur de paramètres du modèle avec  $\alpha_i := (k_i, \theta_i, \sigma_i)$  les paramètres pour chacun des processus.

Avec  $W^1$  et  $W^2$  deux Mouvements browniens indépendants

$\varphi$  une fonction déterministe qui à l'image de  $\theta_i$  du premier chapitre permet de reproduire la structure par terme initial.

On définit  $\varphi$  tel que :

$$\varphi(t; \alpha) = f^M(0, t) - f^{CIR}(0, t; x_0, \alpha_1) - f^{CIR}(0, t; y_0, \alpha_2)$$

$$f^{CIR}(0, t; z, \alpha) = \frac{2k\theta(\exp\{th\} - 1)}{2h + (k + h)(\exp\{th\} - 1)} + z \frac{4h^2 \exp\{th\}}{[2h + (k + h)(\exp\{th\} - 1)]^2}$$

$$\text{et } h = \sqrt{k^2 + 2\sigma^2}$$

L'un des facteurs est responsable de la pentification et l'autre de la translation.

De la même manière que le modèle de Hull & White à un facteur on détermine un schéma de discrétisation permettant de simuler le processus à l'instant  $t$  à partir de  $t - 1$  indépendamment du pas de temps  $\Delta = t_{i+1} - t_i$  choisi.

$$x_{t_{i+1}}^j = x_{t_i}^j + k_i(\theta_i - x_{t_i}^j)(t_{i+1} - t_i) + \sigma_i \sqrt{x_{t_i}^j \mathbf{1}_{\{x_{t_i}^j > 0\}}} (W_{t_{i+1}}^j - W_{t_i}^j)$$

Pour  $j = 1, 2$

De plus on peut réécrire :

$$W_{t_{i+1}} - W_{t_i} = \sqrt{t_{i+1} - t_i} \times N(0, 1)$$

De manière équivalente on a aussi le schéma suivant :

$$x_{t_{i+1}}^j = \left| x_{t_i}^j + k_i(\theta_i - x_{t_i}^j)(t_{i+1} - t_i) + \sigma_i \sqrt{x_{t_i}^j} (W_{t_{i+1}}^j - W_{t_i}^j) \right|$$

Les équations différentielles stochastiques admettent une unique solution forte strictement positive si la condition suivante (Feller) est vérifiée :

$$2k_i\theta_i > \sigma_i^2$$

Toutefois, même si les processus sont assurés d'être positifs, le taux d'intérêt instantané  $r(t)$  peut prendre des valeurs négatives en début de projection si la courbe des taux en hypothèse s'y prête. Cela est dû à la fonction de shift qui vient ajuster la simulation à la structure par terme initiale.

### 2.2.3 Prix zéro-coupon

#### Risque neutre

Comme pour le modèle de Hull & White on déduit une formule du prix des zéro-coupon sous probabilité risque neutre à partir du taux court selon :

$$P(t, T)^{CIR2++} = E^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(s) ds} \right] \text{ avec } t < T$$

Si on remplace la valeur du taux court par son expression, on obtient :

$$P(t, T)^{CIR2++} = E^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T x_1(s) ds} e^{-\int_t^T x_2(s) ds} e^{-\int_t^T \varphi(s; \alpha) ds} \right]$$

On retombe sur les expressions du prix zéro-coupon du modèle CIR :

$$P(t, T)^{CIR2++} = P(t, T)^{CIR_1} \times P(t, T)^{CIR_2} \times \exp \left\{ - \int_u^v \varphi(s; \alpha) ds \right\}$$

On trouve une impression explicite pour le prix à tout instant :

$$P(t, T; x_1(t), x_2(t), \alpha)^{CIR2++} = \Phi^{\xi}(t, T; \alpha) P^{\xi}(t, T; x_1(t), x_2(t), \alpha)$$

Avec :

$$P^{\xi}(t, T; x_1(t), x_2(t), \alpha) = P^{CIR}(t, T; x_1(t), \alpha_1) P^{CIR}(t, T; x_2(t), \alpha_2)$$

$$P^{CIR}(t, T; z, \alpha) = A^{CIR}(t, T; \alpha) e^{-B^{CIR}(t, T; \alpha) z}$$

$$A^{CIR}(t, T; \alpha) = \left[ \frac{2h \exp\{(k+h)(T-t)/2\}}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)} \right]^{2k\theta/\sigma^2}$$

$$B^{CIR}(t, T; \alpha) = \frac{2(\exp\{(T-t)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)}$$

Et :

$$\Phi^\xi(u, v; \alpha) = \exp\left\{-\int_u^v \varphi(s; \alpha) ds\right\}$$

$$\Phi^\xi(u, v; \alpha) = \frac{P^M(0, v) P^\xi(0, u; \alpha)}{P^M(0, u) P^\xi(0, v; \alpha)}$$

On retrouve une expression de  $P^{CIR}(t, T; z, \alpha)$  avec la même forme que le prix du modèle de Hull & White à un facteur. L'expression complète du prix des zéro-coupon est quant à elle plus élaborée, mais reste néanmoins relativement simple à implémenter.

### Monde réel

Le passage au monde réel pour le pricing des zéro-coupon nécessite une attention particulière. Sous probabilité historique nous avons :

$$P(t, T)^{CIR2++} = E^P \left[ e^{-\int_t^T r(s) ds} \right] \text{ avec } t < T$$

Avec P la probabilité historique monde réel et  $r$  le taux d'intérêt instantané monde réel, c'est-à-dire en incluant une prime de risque dans sa diffusion.

On effectue le changement de mesure risque neutre à la mesure monde réel de la façon suivante :

$$\begin{cases} W^{1P} = W^{1\mathbb{Q}} - \frac{\lambda_1}{\sigma_1} \times \sqrt{x} \\ W^{2P} = W^{2\mathbb{Q}} - \frac{\lambda_2}{\sigma_2} \times \sqrt{y} \end{cases}$$

En considérant les primes de risques  $-\frac{\lambda_1}{\sigma_1} \times \sqrt{x}$  et  $-\frac{\lambda_2}{\sigma_2} \times \sqrt{y}$ .

On obtient alors les EDS de diffusions suivantes :

$$\begin{cases} dx_1(t) = k_1(\theta_1 - x_1(t))dt + \lambda_1 x_1(t) + \sigma_1 \sqrt{x_1(t)} dW^{1P}(t) \\ dx_2(t) = k_2(\theta_2 - x_2(t))dt + \lambda_2 x_2(t) + \sigma_2 \sqrt{x_2(t)} dW^{2P}(t) \end{cases}$$

Les deux processus sont encore indépendants.

Et en ne s'intéressant qu'au premier processus (ce sera équivalent pour le second) on obtient comme diffusion :

$$dx_1(t) = k_1(\theta_1 - x_1(t))dt + \lambda_1 x_1(t) + \sigma_1 \sqrt{x_1(t)} dW^{1P}(t)$$

On peut transformer cette expression de sorte à retomber sur la diffusion du processus en vision risque neutre :

$$dx_1(t) = (k_1 - \lambda_1) \left( \frac{\theta_1 k_1}{k_1 - \lambda_1} - x_1(t) \right) + \sigma_1 \sqrt{x_1(t)} dW^{1P}(t)$$

C'est-à-dire :

$$x_1(t) = k_1'(\theta_1' - x_1(t))dt + \sigma_1\sqrt{x_1(t)}dW^{1^P}(t)$$

Avec

$$k_1' = (k_1 - \lambda_1)$$

$$\theta_1' = \frac{\theta_1 k_1}{k_1 - \lambda_1}$$

En utilisant cette nouvelle équation de diffusion, similaire à celle du monde risque neutre, on sera en mesure d'appliquer les formules de pricing des zéro-coupon précédentes.

Il ne reste plus qu'à calibrer  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sur des prix de marché en vision monde réel.

#### 2.2.4 Pricing de swaptions

Comme dans le chapitre précédent il est nécessaire de calculer des prix de swaption dans le but de calibrer des paramètres du modèle. Toutefois dans ce modèle, il n'existe pas de formule complètement fermée et il est nécessaire de passer par une procédure de pricing numérique.

La méthode utilisée sera la méthode Colling-Dufresne Goldstein (CDG). (Pierre COLLIN-DUFRESNE & Robert GOLDSTEIN (2002) - *Pricing swaptions within an affine framework. The Journal of Derivatives*)

C'est une méthode numérique à l'ordre 7 qui approxime le prix de la swaption. Pour des raisons opérationnelles on peut décider de limiter les calculs à l'ordre 5 tout en conservant une bonne précision.

Le détail de la méthode est disponible en annexe.

Notons également que les prix des swptions peuvent être évalués par la méthode Monte-Carlo sous réserve d'utiliser un nombre suffisant de simulations (de l'ordre de  $10^6$  au moins)

## 2.3 Calibrage

### 2.3.1 Hypothèses pour le calibrage

De même que pour le modèle de Hull & White on va procéder à une calibration par la méthode des moindres carrés selon :

$$\sum_i \left\| \frac{\text{PrixMarchéSwaption}(i) - \text{PrixModèleSwaption}(i)}{\text{PrixMarchéSwaption}(i)} \right\|^2$$

Avec  $i$  le nombre de swaption dont on calcule les prix.

L'étape de calibration sert bien évidemment à respecter le contexte économique afin d'assurer une utilisation pertinente des modèles d'actifs et de générer des scénarios économiques les plus réalistes possible, mais également à mieux maîtriser le modèle comme on a pu le voir dans le chapitre précédent. En ce sens, il est indispensable de connaître la signification de chacun des paramètres du modèle.

- Le paramètre  $k$  est le paramètre de retour à la moyenne, c'est-à-dire qu'il ramène plus ou moins fort la simulation vers sa moyenne (au même titre que le  $a$  du Hull & White) ;
- Le paramètre  $\theta$  est le niveau de taux à long terme ;
- Le paramètre  $\sigma$  est la volatilité du processus.

La difficulté de l'exercice de calibrage réside d'abord dans la compréhension des outils utilisés, des instruments financiers à prendre en compte et avec quelle importance (du poids à leur attribuer), mais également dans sa mise en œuvre. En effet, le modèle de taux CIR2++ prend 8 paramètres en entrée et nécessite une fonction d'optimisation robuste afin de tous les prendre en compte. Une difficulté supplémentaire réside dans l'implémentation du pricing de swaptions.

Le calibrage se fait sur une nappe des volatilités swaptions qui peut aisément être transformée en nappe des prix. La reproduction de toute la nappe est difficile, si bien qu'il est envisageable de la restreindre et de ne prendre que certains ténors et certaines maturités.

Une fois les instruments choisis il peut être judicieux d'imposer certaines conditions quant à leur reproduction. De par la difficulté pour certains modèles de reproduire parfaitement une nappe complète et l'illiquidité de certains instruments financiers, une matrice de poids  $\omega_i$  peut être introduite afin de contraindre l'algorithme à reproduire avec plus de précision certains points.

Plusieurs poids peuvent être combinés, afin de retranscrire les différentes contraintes que l'on souhaite faire porter sur l'algorithme de calibration.

1. **Poids permettant de donner le même ordre de magnitude aux différents points de marché**  
Si nous notons par  $\pi^i$  la  $i$ -ème donnée de marché à calibrer (prix, volatilité ...), le poids

$$\omega_i^1 := \frac{1}{\pi^i}$$

permet d'uniformiser l'influence des données de marché, et de donner notamment autant d'importance aux entrées dont la valeur est faible (options hors de la monnaie ...) qu'aux entrées dont la valeur est élevée.

On peut également combiner ces poids avec des poids nuls afin de se limiter à certains ténors et certaines maturités. Utiliser une matrice comme celle-là demande alors une bonne connaissance du modèle ALM et de maîtriser les stratégies d'investissements mises en place.

2. **Poids permettant de donner plus d'importance aux entrées liquides**

Si  $V^i$  dénote le volume d'échange (à la date de calcul) relatif à l'entrée de marché  $i$  et  $V = \sum_i V^i$  le volume total d'échange, le poids

$$\omega_i^2 := \left( \frac{V^i}{V} \right)^2$$

permet de donner plus d'importance aux entrées liquides et qui seront donc plus pertinentes.

Il existe bien évidemment un très grand nombre de matrices de poids. La démarche de sélection d'une matrice adaptée peut faire l'objet d'une étude à part entière.

### 2.3.2 Algorithme de Levenberg-Marquardt

L'algorithme de Levenberg-Marquardt permet de minimiser toute sorte de fonction objective. Dans le cadre du calibrage du CIR2++ la fonction objective utilisée est la suivante :

$$F(x) = \frac{1}{2} \|f(x)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m f_i(x)^2$$

Dans le cas de la calibration des nappes de volatilités des swaption, le vecteur  $x \in \mathbb{R}^d$  représente le vecteur de paramètres du modèle et la fonction vectorielle  $f(x) \in \mathbb{R}^m$  représente, pour le jeu de paramètres  $x \in \mathbb{R}^d$ , le vecteur de résidus, i.e. la différence, pour chacune de ses composantes  $i \in \{1, \dots, m\}$ , entre la valeur de marché calibré du  $i$ -ème point (prix ou volatilité) avec la valeur correspondante de cet instrument dans le modèle considéré :

$$f_i(x) = \sqrt{\omega_i} (\pi^{i,marché} - \pi^{i,modèle})(x) \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

Le vecteur de résidus peut être augmenté pour rajouter une fonction de pénalisation  $q(x)$ , permettant par exemple d'assurer le respect des conditions de type Feller, la régularité des paramètres d'un exercice à l'autre, etc.

Partant d'une graine  $x^0$  bien choisie, cet algorithme va construire par récurrence une suite  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant pour tout  $n \in \mathbb{N} : F(x^{n+1}) \leq F(x^n)$ . Cet algorithme se base sur l'approximation suivante :

$$f(x+h) \approx f(x) + J(x)h$$

où  $J(x)$  dénote la matrice Jacobienne de  $f$  au point  $x$ , i.e.

$$J(x) = \left( J_{i,j}(x) \right)_{i,j} \quad \text{avec} \quad J_{i,j}(x) := \frac{\partial f_i}{\partial x^j}(x)$$

Et  $h$  le vecteur de descente.

Plus précisément, la suite  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est construite à chaque étape (partant de la graine  $x^0$ ) en déterminant le vecteur de descente  $h$  tel que

$$x^{n+1} = x^n + h$$

L'objectif est de minimiser la fonction :

$$L(h) + \frac{\mu}{2} \|h\|^2$$

Avec

$$F(x+h) \approx L(h) = \frac{1}{2} \|f(x) + J(x)h\|^2 = F(x) + h^T J^T(x) f(x) + \frac{1}{2} h^T J^T(x) J(x) h$$

et où le terme  $\frac{\mu}{2} \|h\|^2$  est un terme de contrôle (initialisé à partir d'un paramètre  $\mu_0$  de contrôle initial que l'on définit en amont) permettant de contrôler la taille des vecteurs de descente (en pénalisant les pas trop grands). Le pas de descente est alors obtenu en annulant la dérivée de la fonction  $L(h) + \frac{\mu}{2} \|h\|^2$ . C'est-à-dire que  $h$  est solution de :

$$[J^T(x)J(x) + \mu]h = -J^T(x)f(x)$$

L'algorithme étant basé sur une approximation du pas de descente il s'agit de vérifier que le pas de descente choisi aboutit bien à une réduction de la fonction objective auquel cas le pas de descente  $h$  est accepté. Après un certain nombre de descentes acceptées, l'algorithme est en mesure de donner un minimum en fonction d'un seuil prédéfini.

L'algorithme est à la main de l'utilisateur qui peut choisir un domaine  $D$  dans lequel les paramètres peuvent évoluer, il peut choisir la graine de départ, divers paramètres sur le pas de descente et autres seuils d'acceptation. Des sensibilités sur ces paramètres peuvent avoir un effet important sur le résultat.

À nouveau, l'exercice de calibration est un exercice délicat :

- Influence du choix de la graine de calibration ;
- Influence du domaine considéré ;
- Problématique de minimums locaux ;
- Sensibilités de la fonction objective aux différents paramètres.

Ainsi et afin d'éviter un « *effet boîte noire* » et de laisser l'algorithme travailler seul, il est nécessaire d'introduire un jugement d'expert *a priori* avant d'utiliser l'algorithme. Ce jugement d'expert pourra par exemple se fonder sur une analyse *a priori* des sensibilités locales et globales de la fonction prix ou volatilité (et donc de la fonction objective) en fonction des différents paramètres.

Il conviendra en particulier de s'assurer que les bornes du domaine  $D$  contiennent les prix ou volatilités à calibrer (les bornes ne doivent ainsi pas être « trop hautes » ou « trop basses »). Par exemple, dans un contexte de volatilités implicites élevées, il pourra s'avérer judicieux de relâcher les contraintes pesant sur les paramètres de volatilité.

Afin d'assurer une certaine stabilité des résultats de la calibration, des fonctions de pénalisation peuvent être ajoutées à la fonction objective. Des termes de pénalisation peuvent aussi être envisagés pour contraindre la solution de l'algorithme de calibration à respecter des conditions données, type condition de Feller.

Les méthodes de pénalisation consistent à ajouter à la fonction à minimiser un terme de la forme :

$$\varrho(x) = \alpha \times \bar{q}(x).$$

Dans ces méthodes de pénalisation, le terme  $\bar{q}$  garantit généralement une pénalisation d'autant plus forte que le point  $x$  considéré « s'éloigne » des contraintes imposées. Une attention particulière doit néanmoins être apportée au choix du paramètre  $\alpha$ . En effet, si celui-ci est trop important, le terme de pénalisation prendra une importance trop grande sur l'algorithme de calibration, ce qui améliorera la stabilité de l'algorithme au détriment de sa précision et inversement si le paramètre  $\alpha$  est choisi trop faible.

Dans le cadre du CIR2++, deux pénalisations peuvent être envisagées :

1. **Pénalisation par rapport à la graine**

Cette pénalisation consiste à supposer que la graine de l'algorithme de calibration constitue un *best-guess* ou une valeur de laquelle il convient de ne pas s'éloigner, si l'on cherche par exemple à introduire une certaine stabilité entre deux exercices de calibration. Cette méthode de pénalisation consiste alors à retenir

$$\varrho_1(x) = \alpha_1 \times \|x - x^0\|_2^2$$

2. **Pénalisation relative aux contraintes de Feller**

Rappelons que dans le modèle CIR2++, la contrainte de Feller

$$2k\theta > \sigma^2$$

doit être respectée par les paramètres de chacun des facteurs afin de garantir que ceux-ci seront (théoriquement) positifs. Une pénalisation permettant de garantir que cette contrainte est vérifiée consiste à retenir

$$\varrho_2(x) = \alpha_2 \times [(\sigma^2 - 2k\theta)^+]^2$$

*L'algorithme de Levenberg-Marquardt est très complexe, mais également très robuste. Il correspond aux besoins exigeants du CIR2++. Toutefois, la phase de calibrage d'un modèle est probablement l'une des plus importantes et il est nécessaire de ne pas « se perdre » dans toutes les possibilités qu'offre l'algorithme d'optimisation et ne pas perdre de vue le contexte économique. Des études peuvent être faites sur les divers points abordés plus haut comme par exemple le choix d'une matrice de poids adaptée, les pénalisations à prendre en compte et le niveau du paramètre  $\alpha$ . Le choix de la graine et des seuils ne doit pas être fait par défaut.*

*Au même titre que le modèle CIR2++, la complexité peut aboutir à une grande précision à condition que la maîtrise de l'outil soit optimale.*

## 2.4 Validation des scénarios économiques

La validation des scénarios économiques a pour but d'assurer que les trajectoires produites par le générateur respectent les propriétés théoriques du modèle sous-jacent. Dans le cadre de Solvabilité 2 les scénarios économiques générés en simulation risque neutre doivent être *market consistent*. Pour cela les grandeurs simulées sont soumises à des tests martingales.

Un processus martingale  $X$  est tel que sa valeur espérée connaissant l'information disponible à une certaine date  $s$ , dénotée  $F_s$ , est la valeur à cette même date :

$$E(X_t | F_s) = X_s \text{ avec } (s \leq t)$$

Les prix actualisés des actifs doivent être des processus martingales. En pratique on doit vérifier la martingalité de tous les actifs que l'on simule. On applique ces tests martingales aux quatre grandeurs financières : les taux d'intérêt instantanés, les zéro-coupon, le rendement des actions et enfin ceux de l'immobilier.

Les graphiques sont obtenus sur un modèle CIR2++ calibré sur des données 2016 (ce sujet sera abordé bien plus en détail dans le prochain chapitre).

### 2.4.1 Test martingale du déflateur nominal

Le déflateur permet d'actualiser les prix et ainsi de rendre le processus martingale. On le définit en monde risque neutre en fonction du taux d'intérêt instantané de la façon suivante :

$$D_T = e^{-\int_{t_0}^T r(s) ds}$$

On remarque par ailleurs que l'espérance sous mesure martingale du déflateur donne le prix d'un zéro-coupon. Ce test se base sur la relation suivante :

$$E^{\mathbb{Q}}[D_T] = P(t_0, T)$$

De la même façon que les processus du CIR2++ on procède à une discrétisation pour simuler les déflateurs dans le temps.

$$D_{t_{i+1}} = e^{-\int_{t_0}^{t_{i+1}} r(s) ds} = e^{-\int_{t_0}^{t_i} r(s) ds} e^{-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r(s) ds}$$

Donc :

$$D_{t_{i+1}} = D_{t_i} \times e^{-\int_{t_i}^{t_{i+1}} r(s) ds}$$

Opérationnellement, et pour s'adapter aux contraintes de projection semestrielle du modèle ALM, l'intégrale est estimée de la manière suivante :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} r(s) ds \approx \left( \sum_{i=1}^6 r(i) \right)^{\frac{1}{6}}$$

### Maturité fixée

Le test martingale consiste à vérifier la convergence empirique par Monte-Carlo du moment précédent vers les prix zéro-coupon à l'instant initial, c'est-à-dire vers la courbe des taux initiale. En prenant  $t_0 = 0$  :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D_T^k \rightarrow P(0, T)$$

Avec  $D_T^k$  la kème simulation du déflateur à l'instant  $T$ .

$N$  le nombre de simulations

En effectuant le test sur toutes les maturités  $T$  on doit reproduire le plus fidèlement la courbe des taux initiale. En effet  $P(0, T)$  correspond à la courbe des taux rentrée en input.

Le respect de la contrainte de martingalité est indépendant du calibrage retenu même si une volatilité importante peut nécessiter plus de simulation pour converger.

Le résultat sur 1000 simulations pour des maturités de 1 an à 30 ans est affiché ci-dessous et est très satisfaisant :

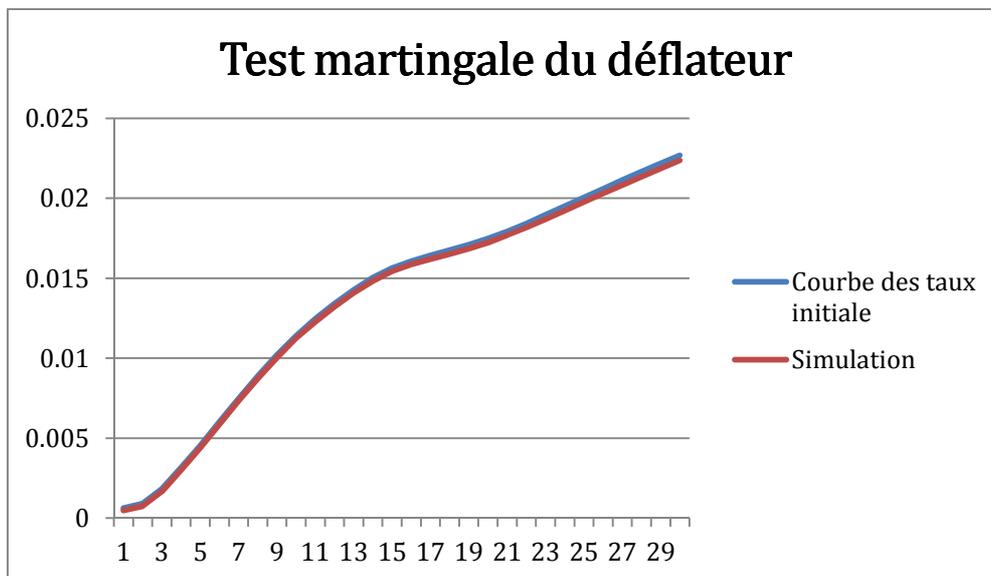


Figure 9 – Espérance empirique des déflateurs avec 1000 simulations

L'amélioration de la convergence du test martingale peut s'effectuer avec le choix de la graine utilisée dans la génération des nombres aléatoires.

À partir de cinq graines différentes préalablement sélectionnées par l'algorithme de sélection on reproduit les 1000 simulations pour le test martingale. En faisant la différence entre l'espérance empirique des déflateurs et la courbe des taux initiale en bp ( $10^{-5}$ ) pour les cinq graines, on obtient le graphique ci-dessous :

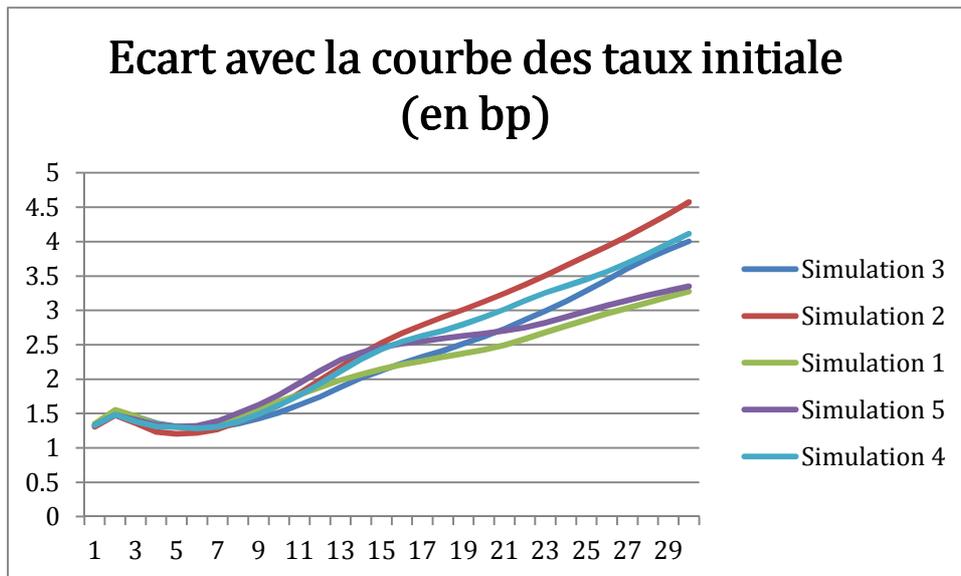


Figure 10 – Test martingale du déflateur pour les cinq graines pour 1000 simulations

Pour toutes les maturités, la reproduction de la courbe des taux initiale n'est jamais parfaite, mais l'impact de la graine a une importance puisqu'elle permet de réduire encore un peu l'écart de convergence. Toutefois pour les cinq graines cet écart demeure raisonnable même à des maturités élevées.

Un autre moyen d'améliorer la convergence, à défaut de diminuer les temps de calcul, est d'augmenter le nombre de simulations. L'intervalle de confiance se verra réduit. Néanmoins au vu des résultats, 1000 simulations semblent un bon compromis.

On peut reconstruire expérimentalement la courbe des facteurs d'actualisation et la comparer avec celle des facteurs d'actualisation théoriques.

Le cadre théorique donne  $facteur\ d'actu\ (T) = \frac{1}{(1+R(0,T))^T}$

En pratique on obtient les facteurs d'actualisation par transformation mathématique à partir du déflateur précédemment simulés.

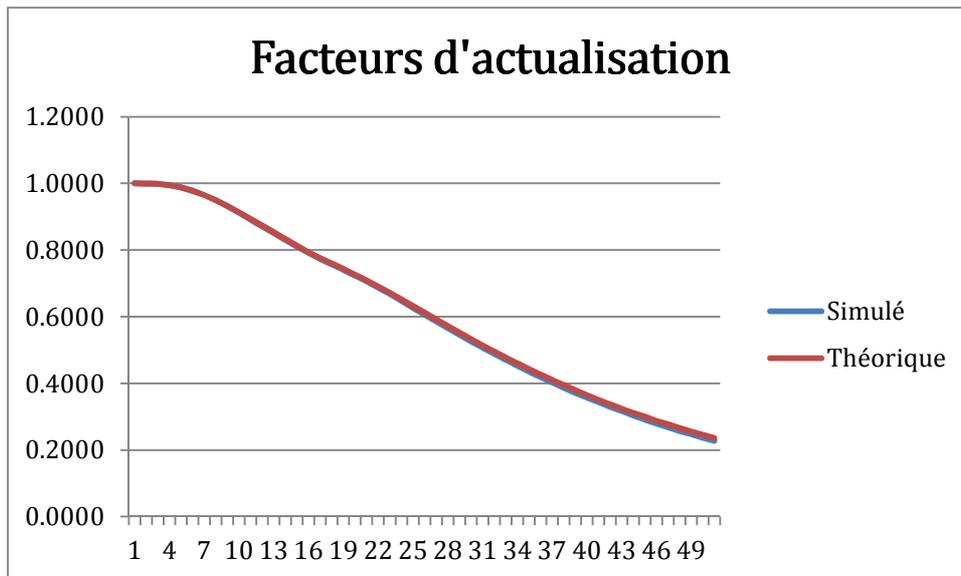


Figure 11 – Comparaison entre les facteurs d'actualisation théoriques et expérimentaux

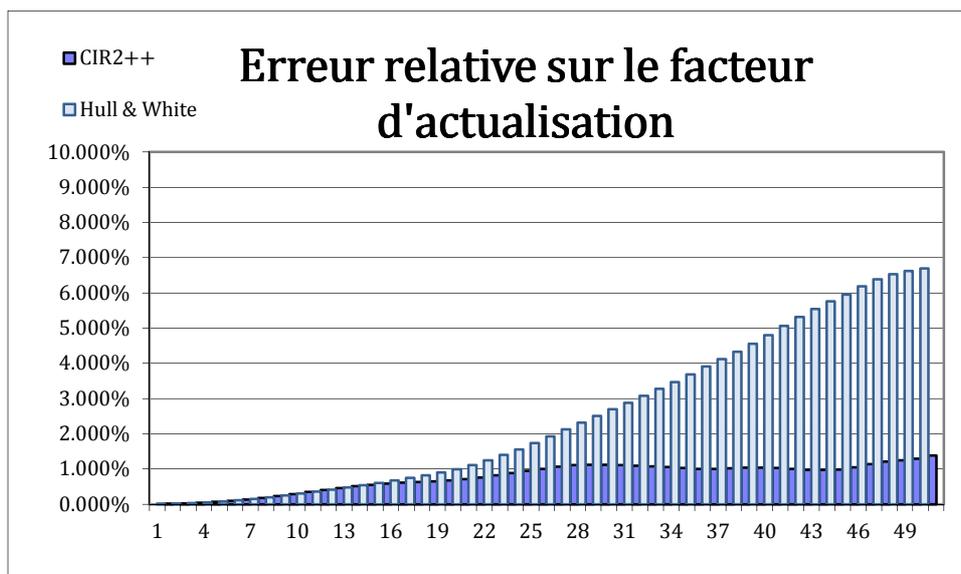


Figure 12 – Erreur de convergence du facteur d'actualisation pour 1000 simulations pour une simulation CIR2++ et Hull & White (sur des données 2016)

### Time-to-maturity fixé

Sur une grille de projection de  $t$ , le test martingale précédent peut être vu cette fois en fixant un *time-to-maturity* (temps avant échéance) et en incluant la simulation des zéro-coupon.

On va considérer le temps avant échéance  $t - T$  pour calculer la grandeur suivante :

$$\frac{D_t}{D_{t-T}} = \frac{e^{-\int_{t_0}^t r(s)ds}}{e^{-\int_{t_0}^{t-T} r(s)ds}} = e^{-\int_{t_0}^t r(s)ds + \int_{t_0}^{t-T} r(s)ds} \text{ pour tout } t_0 \leq t \leq s < T$$

Et finalement :

$$\frac{D_t}{D_{t-T}} = e^{-\int_{t-T}^t r(s)ds}$$

Ce qui sous espérance martingale donne le prix zéro-coupon de maturité  $t$  vu de  $t - T$  :

$$E^{\mathbb{Q}} \left[ \frac{D_t}{D_{t-T}} \mid F_{t-T} \right] = P(t - T, t)$$

En pratique on fixe différents  $t - T$  et on calcule le moment par Monte-Carlo afin de retrouver la convergence suivante :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{D_t^k}{D_{t-T}^k} \times \frac{1}{P(t - T, t)^k} \rightarrow 1$$

Ce test martingale permet de vérifier la bonne simulation des taux d'intérêt instantanés, mais également la bonne simulation des zéro-coupon de maturité  $t$  vu de  $t - T$ .

Les résultats sur 1000 simulations pour divers *time-to-maturity* sont affichés ci-dessous :

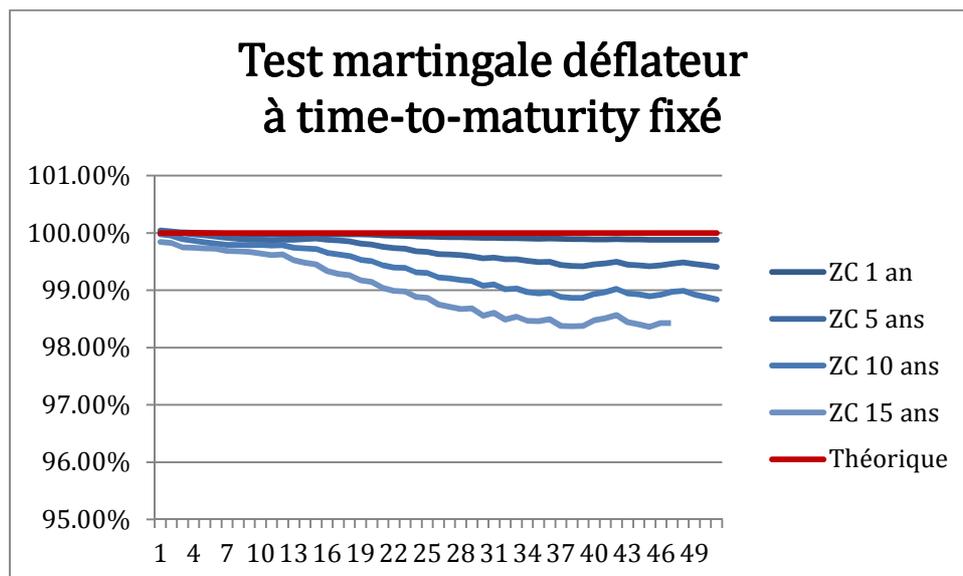


Figure 13 – Test martingale pour quatre *time-to-maturity* fixes

## 2.4.2 Test martingale sur les zéro-coupon

### Maturité fixée

Ce test consiste à vérifier la relation :

$$e^{-\int_{t_0}^t r_u du} P(t, T) = E^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_{t_0}^s r_u du} P(s, T) \mid \mathcal{F}_t \right] \quad \text{pour tout } t_0 \leq t \leq s < T$$

Appliqué à la date  $t_0$ , ce test se réécrit :

$$P(t_0, T) = E^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_{t_0}^s r_u du} P(s, T) \right] \quad \text{pour tout } t_0 \leq s < T$$

Ce qui se décline en pratique pour  $N$  simulations en vérifiant que, pour  $t_0 = 0$  :

$$\frac{1}{N} \times \sum_{k=1}^N D_t^k P(t, T)^k \rightarrow P(0, T)$$

### Time-to-maturity fixé

Ce test consiste à vérifier pour un *time-to-maturity*  $\tau$  la relation

$$e^{-\int_{t_0}^t r_u du} P(t, t + (s - t + \tau)) = E^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_{t_0}^s r_u du} P(s, s + \tau) \mid \mathcal{F}_t \right] \quad \text{pour tout } t_0 \leq t \leq s < T$$

Appliqué à la date  $t_0$ , ce test se réécrit :

$$P(t_0, t_0 + (s - t_0 + \tau)) = E^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_{t_0}^s r_u du} P(s, s + \tau) \right] \quad \text{pour tout } t_0 \leq s < T$$

Ce qui se décline en pratique pour  $N$  simulations en vérifiant que :

$$\frac{1}{N} \times \sum_{k=1}^N D_t^k P(t, t + \tau)^k \rightarrow P(t_0, t_0 + (t - t_0 + \tau))$$

Et en prenant  $t_0 = 0$  :

$$\frac{1}{N} \times \sum_{k=1}^N D_t^k P(t, t + \tau)^k \rightarrow P(0, t + \tau).$$

### 2.4.3 Test martingale sur le rendement des actions

Le test de martingale utilisé ici repose également sur l'actualisation du rendement des actifs à l'aide du déflateur nominal en t  $D_t$ . Cela consiste à vérifier l'égalité, sous probabilité risque neutre :

$$E^{\mathbb{Q}}[D_t S_t | F_0] = S_0 D_0$$

Avec  $S_t$  la valeur de l'indice action en t obtenue par Black-Scholes et  $D_0 = 1$

Pour rappel on a :

$$dS_t = S_t \cdot ((r_t - d) \cdot dt + \sigma_i dW_t^{action})$$

Avec les mêmes notations que précédemment, le prix de l'actif sous-jacent a pour équation (avec  $d = 0$ ) :

$$S_t = S_0 e^{(\sigma W_t^{action} + (r_t - \frac{1}{2}\sigma^2)t)}$$

En pratique nous allons tester si :

$$\frac{1}{N \cdot S_0} \sum_{k=1}^N D_t^k \cdot S_t^k = 1$$

Avec :

$N$  le nombre de simulations,  $D_t^k$  le déflateur nominal en t de la  $k^{ième}$  simulation

$S_t^k$  l'indice action en t de la  $k^{ième}$  simulation

On obtient les résultats suivants en prenant  $N = 1000$  simulations.

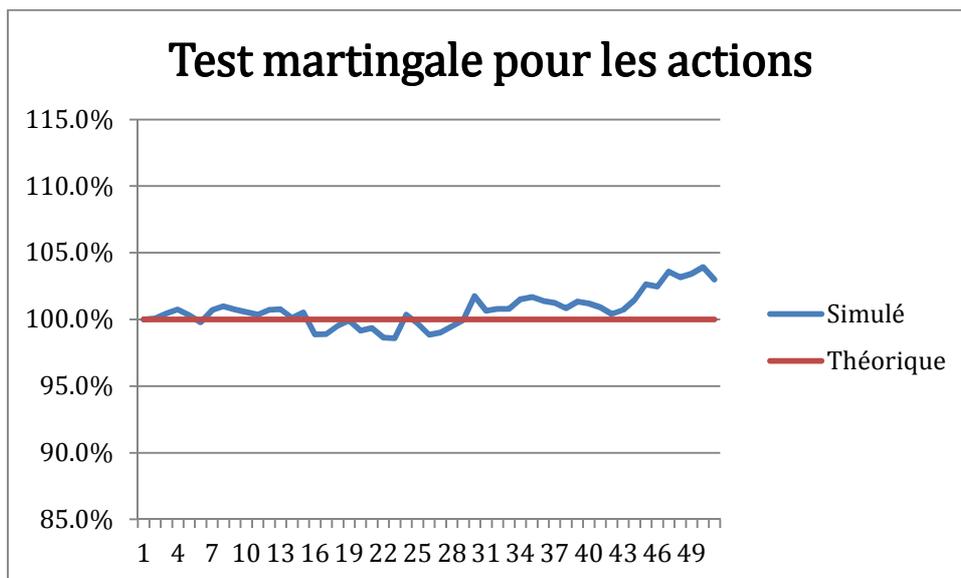


Figure 14 – Résultat du test martingale sur le rendement des actions

L'erreur maximale est de 3,93%.

Le test est dégradé à long terme, c'est dû au niveau des volatilités du modèle action.

En effet mécaniquement on a  $Var(S_t) < Var(S_{t+1})$  et ainsi les scénarios extrêmes des  $N$  simulations à des  $t$  éloignés vont éloigner la moyenne calculée de la valeur théorique. Un moyen d'améliorer la convergence est d'augmenter le nombre de simulations.

D'après le théorème central limite, on a en notant :

$$\overline{D_t S_t} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D_t^k \cdot S_t^k$$

Alors

$$\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{Var(\overline{D_t S_t})}} (\overline{D_t S_t} - S_0) \rightarrow N(0,1)$$

On obtient alors l'intervalle à 95% :

$$-1,96 \sqrt{Var(\overline{D_t S_t})} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} < \overline{D_t S_t} - S_0 < 1,96 \sqrt{Var(\overline{D_t S_t})} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}$$

On voit clairement qu'augmenter le nombre de simulations  $N$  permet de réduire l'intervalle de confiance et d'améliorer la convergence. Une autre solution est de diminuer  $Var(\overline{D_t S_t})$  mais c'est peu utilisable en pratique.

#### 2.4.4 Test martingale sur le rendement de l'immobilier

C'est le même test martingale que pour le rendement des actions qui sera utilisé. L'actif sous-jacent suit également un Black & Scholes.

De la même façon le test consiste à vérifier l'égalité suivante sous mesure martingale :

$$E^{\mathbb{Q}}[D_t S_t] = S_0 D_0$$

De même que précédemment on a :

$$dS_t = S_t \cdot ((r_t - l) \cdot dt + \sigma_i dW_t^{imm})$$

Avec les mêmes notations que précédemment, le prix de l'actif sous-jacent a pour équation (avec  $l = 0$ ) :

$$S_t = S_0 e^{(\sigma W_t^{imm} + (r_t - \frac{1}{2}\sigma^2)t)}$$

Les résultats suivants sont obtenus pour 1000 simulations.

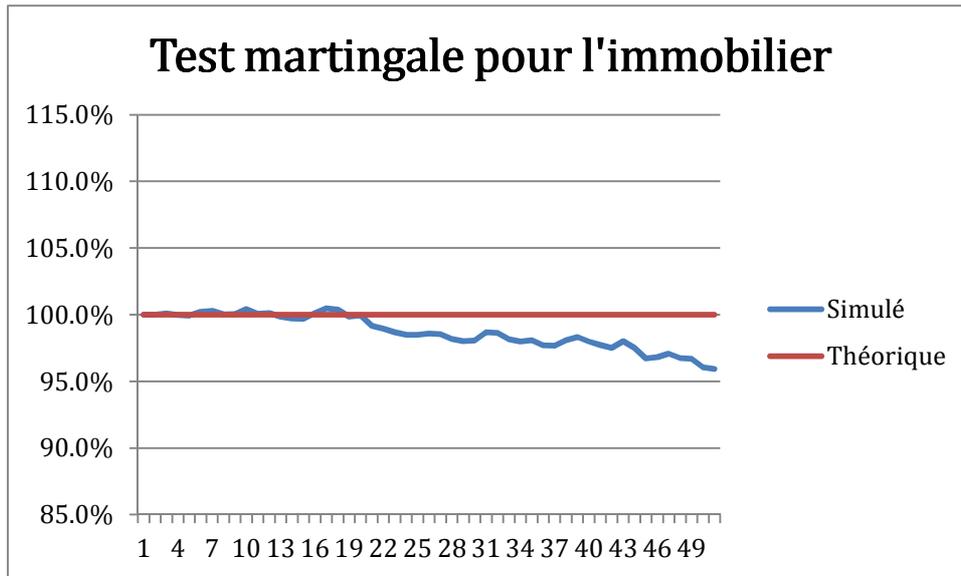


Figure 15 – Résultat du test martingale sur le rendement de l'immobilier

L'erreur maximale est de 4,08%.

#### 2.4.5 Test sur la simulation des taux d'intérêt instantanés

Ce test permet de vérifier que la simulation des taux d'intérêt instantanés respecte bien les propriétés basiques du modèle CIR2++.

Il s'agit de vérifier que la moyenne et la volatilité empirique correspondent bien avec leur valeur théorique.

À partir de l'équation de diffusion d'un processus CIR on a en intégrant entre 0 et  $t$  :

$$x(t) = x_0 + \int_0^t k(\theta - x(s))ds + \int_0^t \sigma\sqrt{x(s)}dW_s$$

On pose  $\varphi(t) = E[x(t)]$  de sorte à obtenir :

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t k(\theta - \varphi(s))ds$$

On dérive la fonction  $\varphi$  afin d'obtenir une équation différentielle du premier ordre avec deuxième membre non nul :

$$\varphi(t)' + k\varphi(t) = k\theta$$

La résolution de cette simple équation différentielle conduit à la solution suivante :

$$\varphi(t) = E[x(t)] = x_0 e^{-kt} + \theta(1 - e^{-kt})$$

En utilisant ce résultat et en procédant de la même manière, on obtient l'expression de la variance pour un processus CIR :

$$\text{Var}[x(t)] = x_0 \frac{\sigma^2}{k} (e^{-kt} - e^{-2kt}) + \theta \frac{\sigma^2}{2k} (1 - e^{-kt})^2$$

On a ainsi de façon plus générale dans le modèle CIR2++ pour chaque processus :

$$\begin{aligned} E[x_i(t)|\mathcal{F}_s] &= x_i(s)e^{-k_i(t-s)} + \theta_i(1 - e^{-k_i(t-s)}) \\ \text{Var}[x_i(t)|\mathcal{F}_s] &= x_i(s) \frac{\sigma_i^2}{k_i} (e^{-k_i(t-s)} - e^{-2k_i(t-s)}) + \theta_i \frac{\sigma_i^2}{2k_i} (1 - e^{-k_i(t-s)})^2 \end{aligned}$$

On peut en déduire l'espérance et la volatilité théorique du taux court à partir de sa diffusion.

$$r(t) = x_1(t) + x_2(t) + \varphi(t; \alpha)$$

$$E[r(t)] = \sum_{i=1}^2 x_i(0)e^{-k_it} + \theta_i(1 - e^{-k_it}) + f^M(0, t) - f^{CIR}(0, t; x_0, \alpha_1) - f^{CIR}(0, t; y_0, \alpha_2)$$

En se souvenant de l'expression de la fonction déterministe du CIR++

$$f^{CIR}(0, t; z, \alpha) = \frac{2k\theta(\exp\{th\} - 1)}{2h + (k + h)(\exp\{th\} - 1)} + z \frac{4h^2 \exp\{th\}}{[2h + (k + h)(\exp\{th\} - 1)]^2}$$

Pour  $\alpha_i := (k_i, \theta_i, \sigma_i)$

De la même manière, on obtient par indépendance des processus :

$$\text{Var}[r(t)] = \text{Var}[x_1(t)] + \text{Var}[x_2(t)]$$

$$\text{Var}[r(t)] = \sum_{i=1}^2 x_i(0) \frac{\sigma_i^2}{k_i} (e^{-k_it} - e^{-2k_it}) + \theta_i \frac{\sigma_i^2}{2k_i} (1 - e^{-k_it})^2$$

On affiche ci-dessous les résultats de la simulation superposés aux valeurs théoriques :

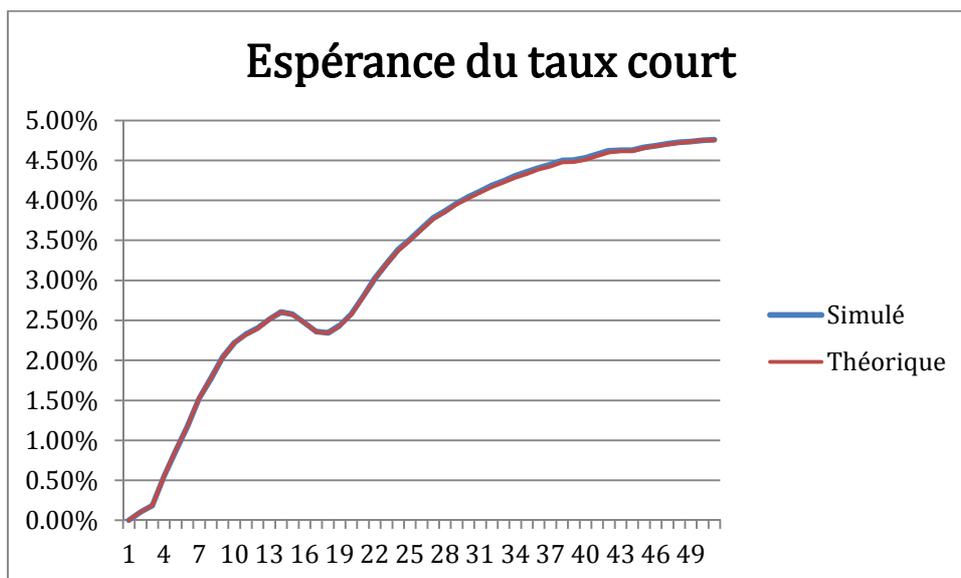


Figure 16–Comparaison entre espérance théorique et expérimentale du taux d'intérêt instantané

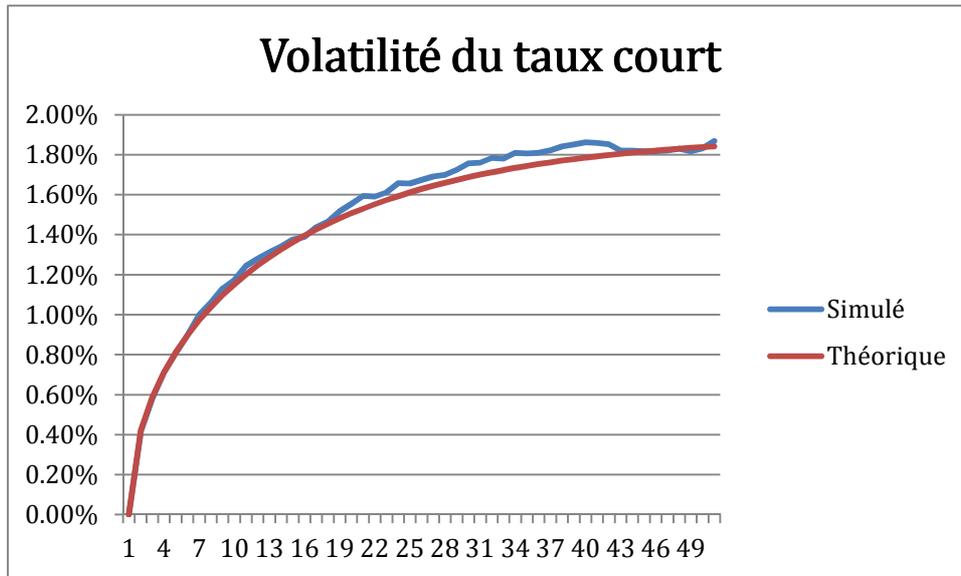


Figure 17 – Comparaison entre volatilité théorique et expérimentale du taux d'intérêt instantané

#### 2.4.6 Sélection de la graine

La graine utilisée dans la génération des nombres aléatoires a un rôle important. Elle assure la qualité de la génération des nombres. La graine totale est un vecteur regroupant chaque graine spécifique à chaque classe d'actif. La sélection se fait successivement sur chacun des facteurs de risque (classe d'actifs). Dans le cas de la simulation des taux d'intérêt il y a deux facteurs de risque : les deux processus.

La sélection de la graine se fait par tests martingales. Une graine est générée aléatoirement puis l'actif sous-jacent et le taux court sont simulés. À partir de simulations générées un test martingale est appliqué aux rendements simulés. Si le résultat est acceptable selon une tolérance imposée en amont alors la graine est validée.

#### Sélection de la graine action et immobilier

Considérons le cas d'indices simulés avec un modèle de Black & Scholes sous probabilité risque neutre

$$\widehat{S}_t = \widehat{S}_s \exp\left(\sigma(W_t - W_s) + \left(r_t - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t - s)\right)$$

Et en particulier

$$\widehat{S}_t = S_0 \exp\left(\sigma W_t + \left(r_t - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right)$$

Si nous notons  $\widehat{S}_t^i$  la simulation avec  $i \in \{1, \dots, N\}$ , la sélection de la graine se fait en définissant une tolérance  $\alpha$  et en lançant N simulations tant que :

$$\max_t \left| 1 - \frac{1}{N} \times \sum_{i=1}^N \frac{\widehat{S}_t^i}{S_0} \right| > \alpha$$

Après un certain nombre d'itérations (de graines générées) le seuil  $\alpha$  augmente.

Par ailleurs, cette approche ne prend pas en compte l'évolution dans le temps du seuil  $\alpha$ , ce qui a pour effet de rendre le test plus difficile à passer. En effet la dispersion de  $\frac{\hat{S}_t^i}{S_0}$  est croissante dans le temps. Il suffit de calculer la variance pour s'en rendre compte.

D'après la théorie du pricing sous Black & Scholes on a :

$$f(t) = Var \left( \frac{\hat{S}_t^i}{S_0} \right) = e^{2\mu t} (e^{\alpha^2 t} - 1)$$

On trouve bien que  $f$  est croissante dans le temps.

Une manière de prendre ce point en compte serait de définir un seuil  $\alpha$  qui dépend du temps en prenant par exemple :

$$\alpha(t) = \frac{q \times \sqrt{e^{2\mu t} (e^{\alpha^2 t} - 1)}}{\sqrt{N}}$$

Avec  $q$  un quantile de la loi normale  $N(0,1)$ .

### **Sélection de la graine obligations gouvernementales**

Pour les obligations gouvernementales, on effectue le test du déflateur nominal à *time-to-maturity* fixé pour toutes les maturités possibles.

De même que pour la sélection de la graine pour les modèles actions et immobilier on utilise un seuil  $\alpha$  qui augmente avec le nombre de tentative. On vient tester ensuite si pour tous les *time-to-maturity* le seuil est dépassé ou non.

$$\max_t \left| \max_{t-T} \left| 1 - \frac{1}{P(t-T, t)} \times \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{D_t^k}{D_{t-T}^k} \right| \right| > \alpha$$

## 2.5 Courbe des taux sans risque

Afin de conclure ce chapitre théorique, nous allons revenir sur la notion même de courbe des taux sans risque sans pour autant en aborder les points les plus techniques. C'est une notion fondamentale qui revient systématiquement au cours de la construction et de l'étude d'un générateur de scénarios économiques et d'un modèle de gestion actif-passif. La déformation de la courbe est l'enjeu même des modèles de taux précédemment étudiés.

### 2.5.1 Construction d'une courbe des taux sans risque

Un investissement sans risque est défini comme un investissement où le taux de rendement espéré est connu avec certitude. La courbe des taux sans risque doit reproduire cet investissement. Pour cela sa construction doit se baser sur des hypothèses et instruments financiers fiables.

La courbe des taux sans risque permet d'obtenir les facteurs d'actualisation utilisés dans la valorisation des engagements. C'est également le taux de rendement en moyenne des actifs.

EIOPA détermine les règles afin de construire une courbe des taux sans risque dans le cadre S2 :

#### Hypothèse de construction :

- Les instruments utilisés ne doivent **pas présenter de risque de défaut**. Cela élimine d'office toutes les obligations émises par les entreprises privées. Seules les valeurs gouvernementales sont susceptibles de répondre à ce critère. EIOPA ne considère par exemple que les obligations émises par les gouvernements notés AAA;
- Les instruments doivent être **réalistes**, un assureur doit obtenir un taux sans risque sans être soumis à d'autres risques. Si ce n'était pas le cas, le bilan de l'assureur ne serait pas complètement pertinent;
- Les instruments doivent être **liquides** pour toutes les maturités. Afin de limiter toutes distorsions, les taux doivent être construits à partir d'un marché profond, transparent et liquide ;
- Les instruments doivent être **fiables**;
- Les instruments ne doivent **pas présenter de biais technique** (parfois les caractéristiques intrinsèques de certains instruments financiers font que dans certaines conditions à certaines maturités un biais peut se créer);
- Les instruments doivent être **disponibles dans un maximum de devises différentes** (et pertinentes).

EIOPA conseille aussi une construction régulière de la courbe.

Bien entendu, les obligations gouvernementales sont les instruments à favoriser. Si elles ne répondent pas à tous les critères précédents alors il est nécessaire d'effectuer un ajustement (sur une, plusieurs ou la totalité des maturités). S'il n'est pas possible d'utiliser d'obligations gouvernementales alors les instruments choisis devront en être aussi proches que possible.

### Courbe EIOPA :

Les taux zéro-coupon de la courbe fournie par EIOPA sont issus des taux swaps sur *EURIBOR*, instruments ayant la particularité d'être très liquides et moins risqués que les obligations gouvernementales de la zone Euro. La courbe présente trois caractéristiques importantes :

- Le taux forward ultime (ou *Ultimate Forward Rate*, UFR) qui représente le taux forward final vers lequel les autres taux forward convergent;
- Le point de convergence et la vitesse de convergence;
- Le *Last Liquid Point* qui représente l'année au-delà duquel les taux swaps utilisés ne sont plus suffisamment liquides.

On affiche ci-dessous deux courbes EIOPA avec *Volatility Adjustment* (correction de la volatilité).

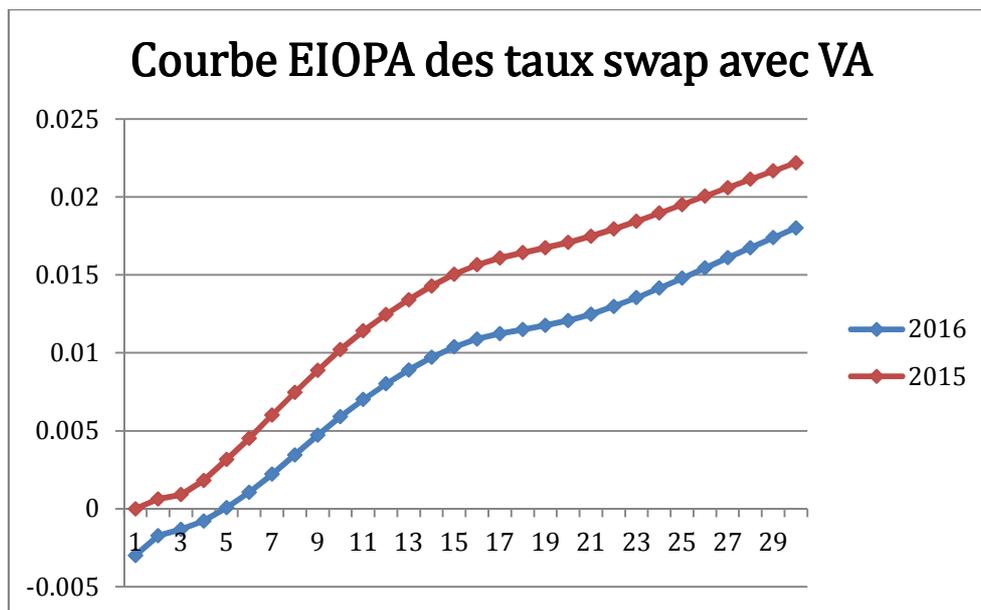


Figure 18 –30 premières années de la courbe EIOPA

Lors d'un marché stressé le spread de liquidité augmente dans les cotations toutefois un assureur a tendance à garder ses obligations jusqu'à maturité et est peu soumis au risque de liquidité. L'assureur ne « récupère » pas le spread de liquidité et se voit ainsi pénalisé.

Afin de contrer cette pénalisation pour les assureurs EIOPA ajoute à sa courbe des taux une correction de la volatilité qui vient la rehausser.

Notons que la courbe des taux fournie par EIOPA présente 150 points annuels, mais les points pour des maturités supérieures à 21 ans ont été déjà obtenus par interpolation par la méthode de Smith-Wilson. En effet, la construction de la courbe des taux sans risque nécessite une méthode d'extrapolation afin d'obtenir les valeurs après le dernier point de liquidité.

Dans le cadre de nos calculs, il est nécessaire d'avoir une courbe des taux sans risque le plus continue possible, c'est-à-dire se conformant au pas de temps choisi (mensuel le plus généralement ou encore journalier).

EIOPA ne donne que des points par pas de temps annuel, en effet le marché obligataire ne présente pas de cotation pour toutes les maturités possibles. Il va être nécessaire de procéder à une interpolation de la courbe.

Il existe plusieurs méthodes comme par exemple :

- Smith-Wilson ;
- Splines cubiques ;
- Nelson-Siegel ;
- Linéaire.

C'est la méthode des splines-cubiques qui sera utilisée dans notre GSE pour interpoler la courbe des taux.

### 2.5.2 Méthode d'interpolation des splines cubiques

Soit une fonction  $f$  inconnue explicitement, c'est-à-dire qu'il est soit trop coûteux de l'évaluer ou alors qu'elle est seulement connue en  $n$  points  $x_i$ . Ce dernier cas est celui de la courbe des taux fournie par EIOPA. Le principe d'une interpolation est de représenter  $f$  par une fonction simple. Il existe une infinité de solutions pour approcher la fonction  $f$  (polynomiales, exponentielles, trigonométriques, polynômes par morceaux ...) mais nous allons nous intéresser ici à la méthode des splines cubiques.

Le principe de cette méthode d'interpolation est d'approcher la courbe par morceaux localement à l'aide de polynômes de degré au plus 3 de la forme suivante :

$$P(x) = a(x - x_1)^3 + b(x - x_1)^2 + c(x - x_1) + d$$

On appelle spline cubique une fonction notée  $g$  qui vérifie les propriétés suivantes :

- $g$  deux fois continûment dérivable,
- $g$  coïncide sur chaque intervalle de points connus de  $f$  avec un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ;
- $g$  coïncide exactement avec  $f$  sur les bornes des intervalles de points connus, autrement dit  $g(x_i) = f(x_i) = y_i$  pour  $i$  allant de 1 à  $n$

Ces conditions définissent un spline cubique d'interpolation, mais celui-ci n'est pas unique. Il faudrait rajouter des conditions supplémentaires.

De ces hypothèses on peut dire que  $g''$  est de degré 1 et est déterminé par les deux valeurs  $m_i = g''(x_i)$  et  $m_{i+1} = g''(x_{i+1})$ .

Dans la suite on notera :

- $h_i = x_{i+1} - x_i$
- $\delta_i = [x_i, x_{i+1}]$
- $g_i(x)$  le polynôme de degré 3 qui coïncide avec  $g$  sur  $\delta_i$

On sait que  $g_i''$  est linéaire sur l'intervalle  $\delta_i$  et on peut l'écrire pour tout  $x$  appartenant à cet intervalle sous la forme :



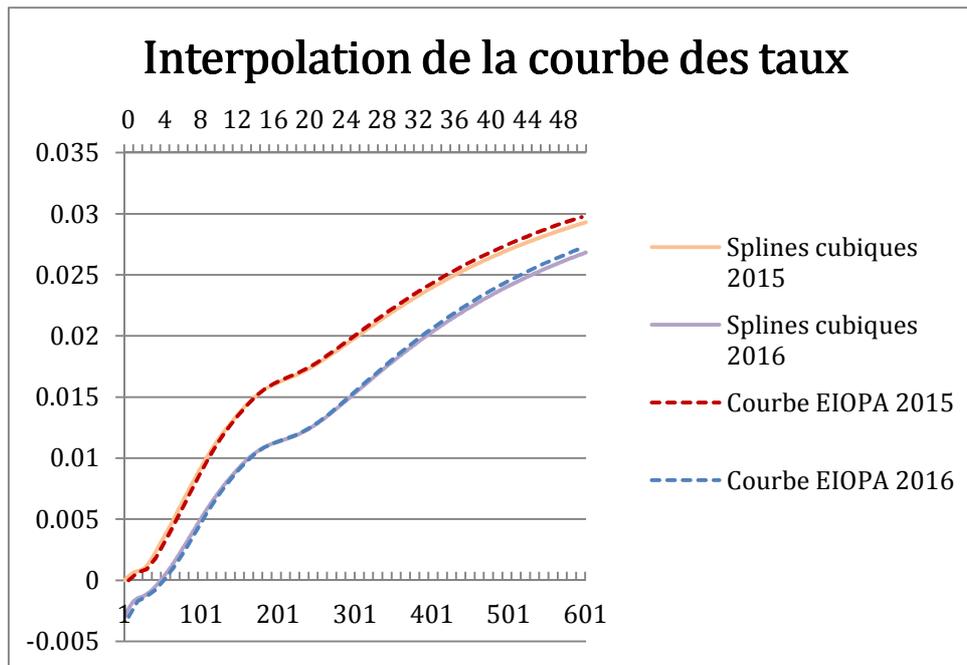


Figure 19 – Interpolation de la courbe EIOPA par splines cubiques sur 50 ans avec un pas de temps mensuel

**En conclusion :**

*D'un point de vue théorique le modèle de taux CIR2++ est éligible. C'est un modèle market consistent, il est capable de reproduire la courbe des taux initiale ainsi que des prix de marché et tous les tests martingales utilisés habituellement sont satisfaisant. Grâce à ses deux facteurs il déforme la courbe des taux précisément. De plus, il est techniquement possible d'obtenir des taux négatifs. Dans un contexte de taux bas c'est une condition nécessaire des modèles de taux.*

*Le passage à la pratique, présenté dans la section suivante, permet de mettre en exergue les problématiques de calibrage et de d'analyser des premières sensibilités à l'utilisation du CIR2++.*

## 3. Impacts

*Cette partie sera consacrée à l'application du modèle de taux vu précédemment dans le modèle de gestion d'actif-passif d'un assureur sur des produits Épargne-Retraite ainsi qu'aux impacts produit sur les indicateurs principaux de solvabilité. L'objectif est d'étudier le changement de modèle de taux entre le Hull & White à un facteur et le CIR2++ à travers les impacts dans le modèle ALM. L'étude se fera sur des données 2016.*

### 3.1 Impact sur les scénarios économiques

#### 3.1.1 Résultats du calibrage

##### Impact des paramètres

Le fonctionnement du calibrage a été décrit plus haut et des premiers résultats ont été obtenus, mais nous allons ici étudier l'impact sur les scénarios économiques. La phase de calibrage est une étape cruciale dans l'utilisation d'un modèle. La compréhension du fonctionnement du modèle permet de mieux appréhender la validation d'un calibrage par rapport à un autre.

Pour rappel :

- Le paramètre  $k$  est le paramètre de retour à la moyenne, c'est-à-dire qu'il ramène plus ou moins fort la simulation vers sa moyenne ;
- Le paramètre  $\theta$  est le niveau de taux à long terme ;
- Le paramètre  $\sigma$  est la volatilité ;

La fonction objective utilisée pour le calibrage dans l'algorithme d'optimisation est la suivante :

$$F(x) = \frac{1}{2} \|f(x)\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m f_i(x)^2 + \varrho(x)$$

Avec :

$$f_i(x) = \sqrt{\omega_i} (\text{PrixSwaption}^{i,\text{marché}} - \text{PrixSwaption}^{i,\text{modèle}})(x) \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

Avec  $(w_i)_i$  matrice de poids utilisée,  $w_i = \frac{1}{\text{PrixSwaption}^{i,\text{marché}}}$  afin de donner la même importance à tous les instruments.

$$\varrho(x) = \alpha \times [(\sigma^2 - 2k\theta)^+]^2 \text{ une fonction de pénalisation de Feller}$$

Des sensibilités sur ces paramètres permettent de comprendre leur rôle même si leur grand nombre rend une analyse exhaustive compliquée. On peut tout de même voir des tendances générales comme ci-dessous :

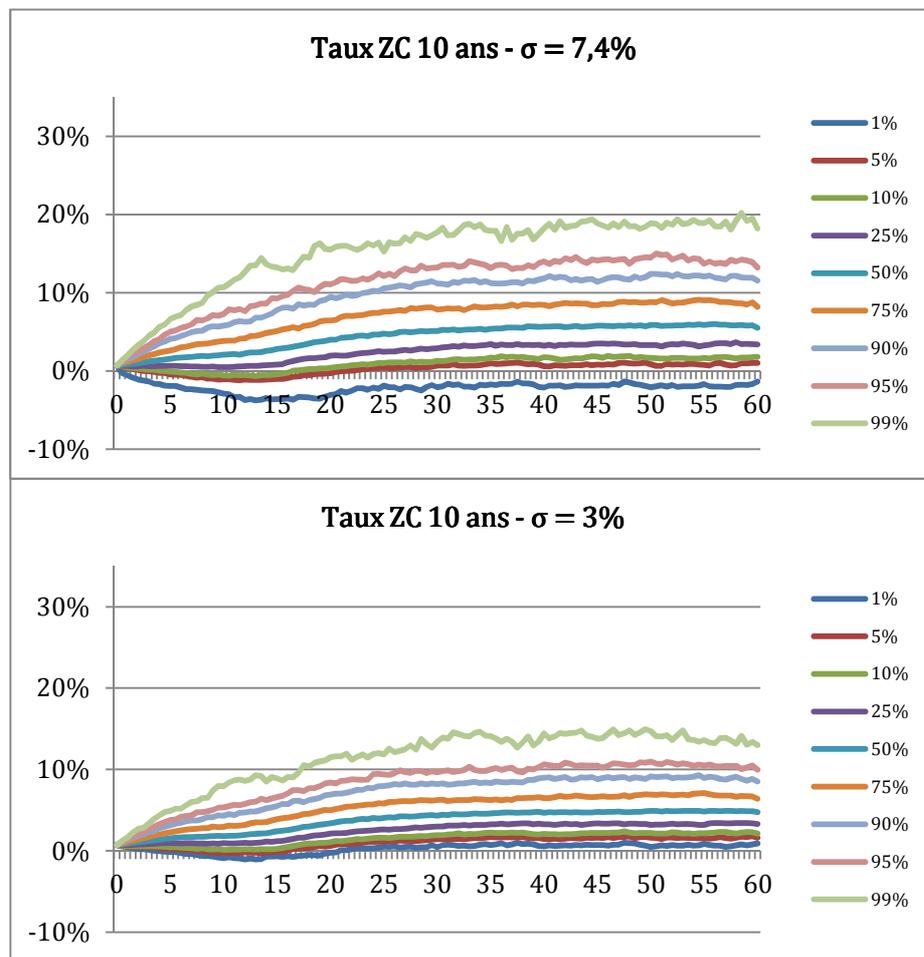
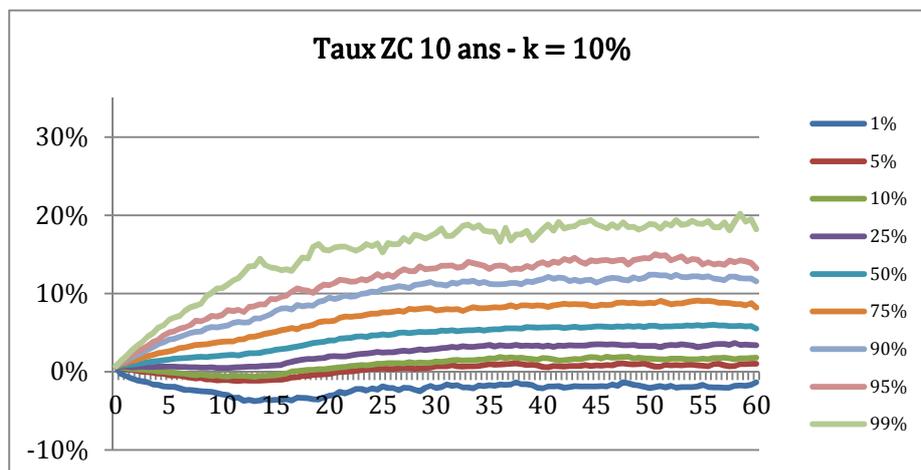


Figure 20 – Sensibilité sur la volatilité d'un seul des processus dans la génération des taux zéro-coupon maturité 10 ans

La volatilité permet de restreindre le faisceau de distribution et de générer au plus proche (ou au plus loin) de la moyenne théorique. Une diminution de la volatilité pour un ou deux processus empêche des simulations stochastiques trop extrêmes. C'est un paramètre avec un fort impact.



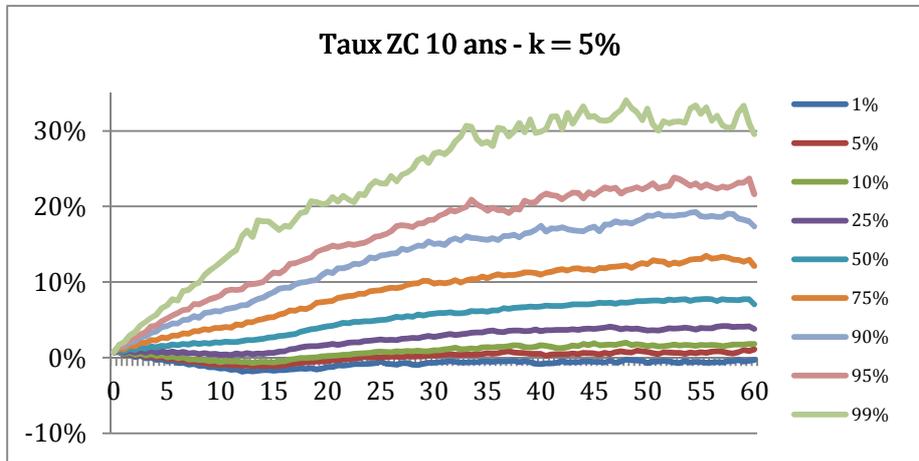


Figure 21 – Sensibilité sur le retour à la moyenne d’un seul des processus dans la génération des taux zéro-coupon maturité 10 ans

Le paramètre de retour à la moyenne permet, au même titre que la volatilité, d’élargir le faisceau de diffusion. Même si la tendance est plus vers l’explosion dans le positif que dans le négatif.

Ces deux paramètres doivent être ajustés simultanément afin de définir au mieux la diffusion des taux. L’un pouvant compenser l’effet de l’autre et permet d’avoir finalement une diffusion plus précise. C’est le rôle de l’algorithme d’optimisation devenir ajuster parfaitement le faisceau pour reproduire les prix de marché.

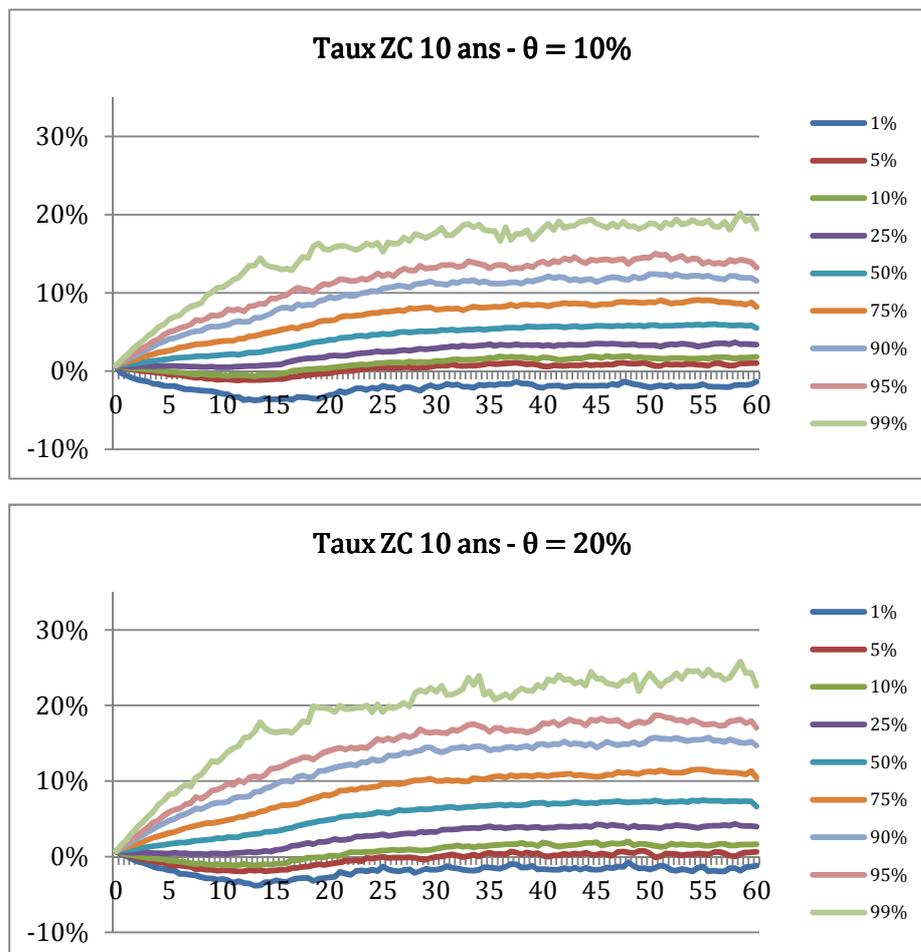


Figure 22 – Sensibilité sur le niveau de taux à long terme d’un seul des processus dans la génération des taux zéro-coupon de maturité 10 ans

Le niveau de taux à long terme a quant à lui un effet moins visible sur la distribution des scénarios économiques mais influe sur les niveaux de taux. En augmentant la valeur de ce paramètre sur un processus on observe en effet des niveaux légèrement plus hauts pour les taux simulés.

La réalisation de sensibilités sur un paramètre donné permet de comprendre les mécanismes d'un processus CIR mais il ne faut pas négliger la complexité et les effets croisés liés à l'utilisation de deux facteurs.

Pour réaliser des premières sensibilités, nous allons calibrer à partir de deux nappes de prix de swaptions différentes et initialiser l'algorithme d'optimisation à partir de deux graines.

La première graine est obtenue en fixant des valeurs arbitrairement. La seconde graine est obtenue en mettant tous les paramètres à 5%.

Dans ces exemples, la nappe de prix n'est pas calibrée entièrement, il est en effet très difficile, voire impossible, de la reproduire parfaitement surtout sur les bords.

### **Calibrage sur une matrice de poids ténor/maturité 3-12 ans**

On utilisera pour la détermination des jeux de paramètres une matrice de poids sur la nappe ténor/maturité 3-12 ans. La matrice de poids est uniforme, c'est-à-dire en appliquant le coefficient  $\frac{1}{\text{prix}}$  afin de ne pas faire de distinction entre les instruments utilisés.

À partir des valeurs des différents paramètres des processus et en connaissant leur signification on peut prévoir grossièrement la diffusion des processus. Il faut néanmoins prendre en compte que le taux d'intérêt spot  $r(t)$  inclut la fonction déterministe qui vendra réajuster la simulation finale.

Les jeux de paramètres sélectionnés sont les suivants :

$x_0 = 4.0\%$	$k_1 = 0.4\%$	$\theta_1 = 16.3\%$	$\sigma_1 = 3.8\%$
$y_0 = 0.6\%$	$k_2 = 28.2\%$	$\theta_2 = 1.7\%$	$\sigma_2 = 0.9\%$

Figure 23 – Jeu de paramètres numéro 1

Le processus  $x(t)$  est de sorte à avoir un haut niveau à long terme ainsi qu'une faible volatilité. Toutefois, la vitesse de retour à la moyenne est très faible et on s'attend ainsi à avoir des valeurs naturellement élevées du processus au cours du temps, mais avec de forts extrêmes puisque sans retour à la moyenne les taux simulés seront plus libres d'exploser. Les taux générés par ce processus seront bien plus élevés que ceux qu'on observe dans la nature.

Le processus  $y(t)$  quant à lui agit très différemment puisque son niveau à long terme est très bas sa volatilité est également très basse et son retour à la moyenne est très important. On peut s'attendre à une génération de taux très bas centrée autour d'une trajectoire moyenne avec ce processus qui viendra compenser le processus  $x(t)$ .

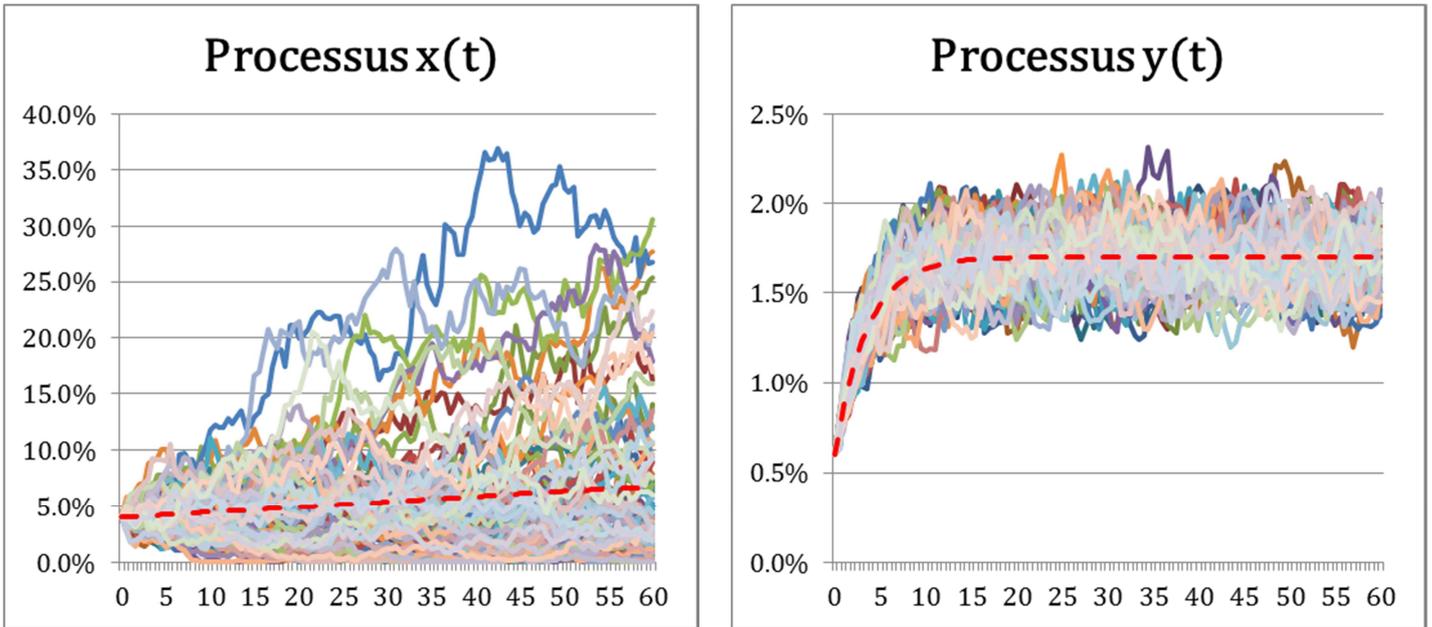


Figure 24 – Dispersion des processus x et y et trajectoire moyenne en pointillé rouge

Comparaison (Prix Swaption ATM CDG - Prix Swaption ATM Marché) / Prix Swaption ATM Marché															
Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1	259.19%	179.48%	128.92%	88.31%	61.50%	45.60%	32.18%	22.96%	15.91%	10.40%	4.89%	-1.99%	-10.69%	-17.06%	-22.65%
2	119.00%	94.74%	69.84%	53.08%	37.99%	27.97%	19.64%	13.58%	8.78%	4.82%	1.16%	-3.78%	-10.74%	-16.51%	-21.63%
3	57.51%	50.33%	39.66%	30.89%	23.21%	16.95%	11.26%	7.06%	3.51%	0.75%	-1.64%	-4.72%	-10.58%	-15.79%	-20.52%
4	31.22%	28.09%	23.29%	17.71%	13.13%	9.29%	5.84%	2.92%	0.54%	-1.71%	-3.08%	-5.34%	-10.59%	-14.96%	-19.23%
5	17.03%	15.89%	12.97%	9.69%	7.20%	4.72%	2.31%	0.30%	-1.52%	-3.42%	-4.06%	-5.62%	-10.36%	-13.98%	-18.00%
6	10.74%	9.48%	7.52%	5.88%	4.19%	2.26%	0.46%	-1.30%	-3.03%	-4.72%	-5.11%	-6.03%	-9.91%	-13.34%	-17.14%
7	6.94%	5.72%	4.48%	3.42%	2.13%	0.80%	-0.79%	-2.43%	-3.94%	-5.23%	-5.41%	-5.73%	-9.43%	-12.48%	-16.09%
8	5.49%	3.92%	3.02%	2.11%	1.16%	-0.18%	-1.57%	-2.88%	-4.29%	-5.54%	-5.86%	-6.07%	-9.46%	-12.68%	-15.94%
9	4.54%	2.89%	2.05%	1.27%	0.42%	-0.67%	-1.96%	-3.17%	-4.43%	-5.66%	-5.91%	-6.17%	-9.41%	-12.51%	-15.57%
10	4.73%	2.86%	1.87%	1.11%	0.47%	-0.70%	-2.05%	-3.20%	-4.37%	-5.57%	-5.65%	-5.82%	-8.73%	-11.70%	-14.84%
12	6.35%	4.06%	2.35%	1.61%	0.74%	-0.85%	-2.38%	-3.71%	-4.73%	-5.77%	-5.81%	-5.71%	-7.77%	-10.39%	-13.12%
15	8.01%	5.23%	3.32%	1.40%	-0.56%	-2.00%	-3.20%	-4.31%	-5.40%	-6.36%	-6.10%	-5.57%	-6.15%	-8.17%	-10.17%
20	5.91%	3.08%	1.08%	-0.53%	-2.12%	-3.39%	-4.31%	-5.03%	-5.82%	-6.60%	-6.22%	-5.47%	-4.83%	-6.64%	-8.09%
25	6.37%	3.02%	1.25%	-0.21%	-1.32%	-2.36%	-3.26%	-3.97%	-4.79%	-5.46%	-5.35%	-4.92%	-4.70%	-7.13%	-9.19%
30	7.31%	3.93%	2.42%	1.37%	0.59%	-0.59%	-1.61%	-2.59%	-3.62%	-4.75%	-4.90%	-4.87%	-5.17%	-7.86%	-10.36%

Figure 25 – Écart relatif des prix par la méthode CDG et les prix de marché sur la nappe de prix utilisée pour le premier jeu de paramètres

Notons que la trajectoire moyenne ne converge pas vers son niveau de taux à long terme parce que dans ce cas précis  $t = 60$  ans n'est pas suffisant :

$$4\% * e^{-0.4\%*60} + 16.3\% * (1 - e^{-0.4\%*60}) = 6.6\%.$$

On observera ce phénomène plusieurs fois dans la suite du mémoire.

Le deuxième jeu de paramètre qui optimise la fonction objective est le suivant :

$x_0 = 4.5\%$	$k_1 = 0.5\%$	$\theta_1 = 5.7\%$	$\sigma_1 = 2.4\%$
$y_0 = 4.5\%$	$k_2 = 0.5\%$	$\theta_2 = 5.7\%$	$\sigma_2 = 2.4\%$

Figure 26 – Jeu de paramètres numéro 2

Les deux processus ont la particularité d'agir de la même façon. À long terme, les processus ont un niveau plutôt haut par rapport aux taux du marché ainsi qu'une volatilité très faible, mais un retour à la moyenne quasi inexistant. On s'attend à une génération de taux plutôt centré sur une diffusion qui tend vers 5,7%, mais avec une grande liberté qui permettra de capter des taux proche de zéro comme très positifs.

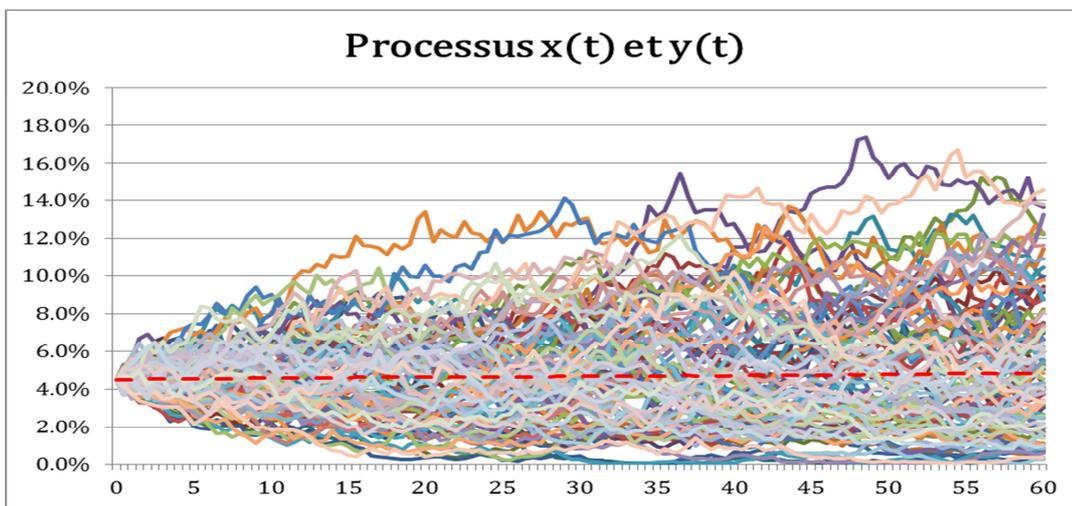


Figure 27 – Dispersion des processus x et y et trajectoire moyenne en pointillé rouge

Comparaison (Prix Swaption ATM CDG - Prix Swaption ATM Marché) / Prix Swaption ATM Marché															
Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	25	30
1	237.55%	175.75%	126.18%	86.26%	59.95%	44.41%	31.31%	22.38%	15.59%	10.34%	5.36%	-0.70%	-7.97%	-12.95%	-17.33%
2	116.77%	91.84%	67.58%	51.25%	36.54%	26.86%	18.82%	13.04%	8.51%	4.82%	1.73%	-2.28%	-7.59%	-11.68%	-15.28%
3	54.63%	47.91%	37.64%	29.21%	21.85%	15.89%	10.49%	6.57%	3.30%	0.84%	-0.93%	-2.95%	-6.85%	-10.00%	-12.78%
4	28.77%	25.88%	21.39%	16.13%	11.84%	8.28%	5.13%	2.50%	0.41%	-1.52%	-2.20%	-3.24%	-6.19%	-8.02%	-9.83%
5	14.65%	13.79%	11.16%	8.17%	5.96%	3.77%	1.66%	-0.04%	-1.54%	-3.10%	-2.97%	-3.15%	-5.20%	-5.76%	-6.78%
6	8.31%	7.40%	5.74%	4.40%	3.00%	1.37%	-0.11%	-1.54%	-2.93%	-4.24%	-3.78%	-3.16%	-3.95%	-3.81%	-4.09%
7	4.53%	3.66%	2.73%	1.98%	1.00%	-0.01%	-1.26%	-2.55%	-3.69%	-4.58%	-3.82%	-2.42%	-2.63%	-1.59%	-1.14%
8	3.03%	1.86%	1.30%	0.72%	0.11%	-0.90%	-1.93%	-2.86%	-3.86%	-4.68%	-3.99%	-2.33%	-1.86%	-0.59%	0.71%
9	2.08%	0.83%	0.36%	-0.05%	-0.54%	-1.27%	-2.17%	-2.98%	-3.81%	-4.58%	-3.74%	-1.97%	-1.01%	0.79%	2.73%
10	2.18%	0.81%	0.24%	-0.14%	-0.38%	-1.17%	-2.11%	-2.83%	-3.53%	-4.25%	-3.16%	-1.14%	0.49%	2.85%	5.08%
12	3.73%	2.05%	0.86%	0.59%	0.16%	-0.98%	-2.05%	-2.90%	-3.41%	-3.90%	-2.64%	-0.09%	3.00%	6.39%	9.78%
15	5.42%	3.44%	2.19%	0.86%	-0.56%	-1.47%	-2.14%	-2.72%	-3.23%	-3.58%	-1.85%	1.43%	6.73%	11.47%	16.44%
20	3.79%	2.00%	0.87%	0.02%	-0.87%	-1.48%	-1.77%	-1.84%	-1.96%	-2.04%	-0.01%	3.74%	10.73%	15.96%	21.77%
25	4.95%	2.89%	2.18%	1.69%	1.45%	1.23%	1.09%	1.14%	1.06%	1.16%	3.01%	6.47%	12.79%	16.74%	21.06%
30	6.98%	4.98%	4.72%	4.83%	5.11%	4.87%	4.74%	4.60%	4.37%	4.01%	5.63%	8.57%	13.80%	16.59%	19.37%

Figure 28 – Écart relatif des prix par la méthode CDG et les prix de marché sur la nappe de volatilité utilisée pour le deuxième jeu de paramètres

Les deux jeux de paramètres sont différents. L'un présente une symétrie et l'autre est plus atypique avec des processus opposés. Néanmoins les deux représentent bien des minimums de la fonction objective.

On appellera dans la suite *simulation 1* les résultats obtenus avec le premier jeu de paramètres du CIR2++ et *simulation 2* ceux obtenus avec le deuxième jeu de paramètres du CIR2++.

### Calibrage sur une matrice de poids ténor/maturité 7-15 ans

Le modèle de gestion actif-passif utilisé est plus centré sur des produits financiers à maturité longue, que ce soit dans le portefeuille de départ ou dans la stratégie de réinvestissement. La gestion du modèle ALM dépend de chaque assureur mais généralement les maturités plus longues sont favorisées pour une activité de retraite. On utilisera pour la détermination des jeux de paramètres une matrice de poids sur la nappe ténor/maturité 7-15 ans.

A partir de la première graine on obtient le jeu de paramètre suivant :

$x_0 = 5.4\%$	$k_1 = 0.5\%$	$\theta_1 = 9.3\%$	$\sigma_1 = 3.1\%$
$y_0 = 2.8\%$	$k_2 = 4.9\%$	$\theta_2 = 15.0\%$	$\sigma_2 = 1.8\%$

Figure 26 – Jeu de paramètres numéro 3

Le processus  $x(t)$  affiche un retour à la moyenne très faible avec une volatilité plutôt basse. Il débute à 5,4% et son niveau à long terme se situe vers les 9%. On s'attend à avoir une distribution assez large autour de ces valeurs.

Le processus  $y(t)$  affiche une volatilité faible ainsi qu'un retour à la moyenne non négligeable. A partir de valeur initiale de 2.8% jusqu'à 15% à long terme les valeurs du processus resteront plutôt centrées sur sa trajectoire moyenne.

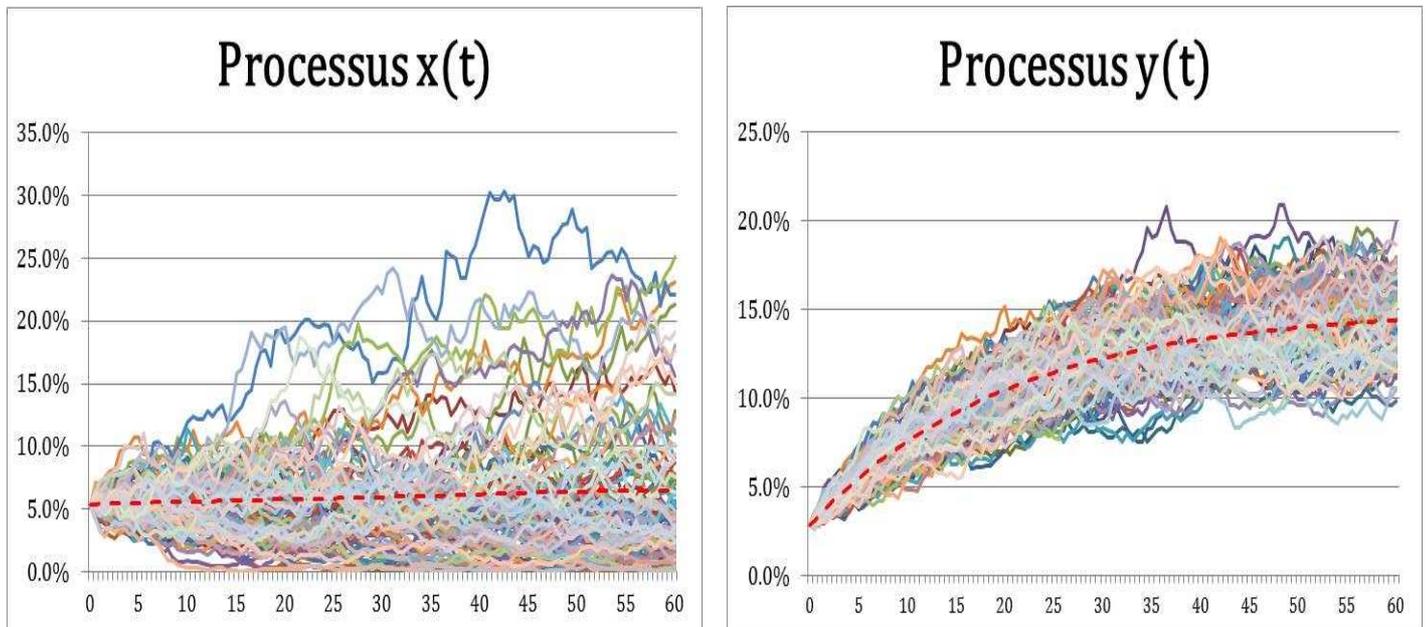


Figure 29 – Dispersion des processus x et y et trajectoire moyenne en pointillé rouge

Maturité \ T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
1	260.89%	189.63%	137.02%	94.70%	66.75%	50.08%	35.94%	26.16%	18.63%	12.73%	6.74%	-0.12%	-7.66%
2	129.14%	102.19%	76.14%	56.63%	42.64%	31.99%	23.08%	16.54%	11.35%	7.07%	3.08%	-1.46%	-7.30%
3	64.05%	56.50%	45.19%	35.82%	27.56%	20.75%	14.67%	9.96%	6.09%	3.08%	0.58%	-1.80%	-6.60%
4	37.25%	33.74%	26.50%	22.39%	17.30%	13.01%	9.15%	5.89%	3.24%	0.84%	-0.37%	-1.73%	-5.98%
5	22.72%	21.33%	16.00%	14.25%	11.33%	8.45%	5.69%	3.41%	1.42%	-0.52%	-0.74%	-1.33%	-5.09%
6	16.28%	14.76%	12.40%	10.37%	8.29%	6.01%	3.92%	1.96%	0.18%	-1.42%	-1.23%	-1.19%	-4.03%
7	12.35%	10.81%	9.20%	7.78%	6.15%	4.52%	2.73%	1.02%	-0.42%	-1.51%	-1.03%	-0.42%	-3.02%
8	10.63%	8.74%	7.51%	6.28%	5.05%	3.49%	2.02%	0.77%	-0.45%	-1.45%	-1.12%	-0.49%	-2.69%
9	9.37%	7.38%	6.25%	5.21%	4.17%	3.00%	1.76%	0.73%	-0.30%	-1.27%	-0.93%	-0.40%	-2.35%
10	9.14%	7.03%	5.80%	4.87%	4.18%	3.05%	1.86%	0.93%	0.03%	-0.95%	-0.50%	0.09%	-1.41%
12	10.03%	7.65%	5.94%	5.32%	4.64%	3.27%	1.96%	0.84%	-0.01%	-0.88%	-0.51%	0.36%	-0.07%
15	11.20%	8.89%	7.41%	5.85%	4.15%	2.90%	1.84%	0.81%	-0.18%	-1.05%	-0.41%	0.94%	2.31%
20	11.54%	8.36%	7.80%	6.49%	5.07%	3.93%	3.09%	2.47%	1.77%	1.10%	1.94%	3.69%	6.66%

Figure 30 – Écart relatif des prix par la méthode CDG et les prix de marché sur la nappe de volatilité utilisée pour le troisième jeu de paramètres

A partir de la deuxième graine le quatrième jeu de paramètres est obtenu :

$x_0 = 3.5\%$	$k_1 = 0.7\%$	$\theta_1 = 6.7\%$	$\sigma_1 = 3.0\%$
$y_0 = 3.5\%$	$k_2 = 0.7\%$	$\theta_2 = 6.7\%$	$\sigma_2 = 3.0\%$

Figure 26 – Jeu de paramètres numéro 4

A nouveau sur cette graine on retrouve une symétrie des processus  $x(t)$  et  $y(t)$ . Le retour à la moyenne très faible avec une valeur de volatilité assez importante font qu'on peut s'attendre à une large dispersion entre la valeur initiale et la valeur théorique à long terme.

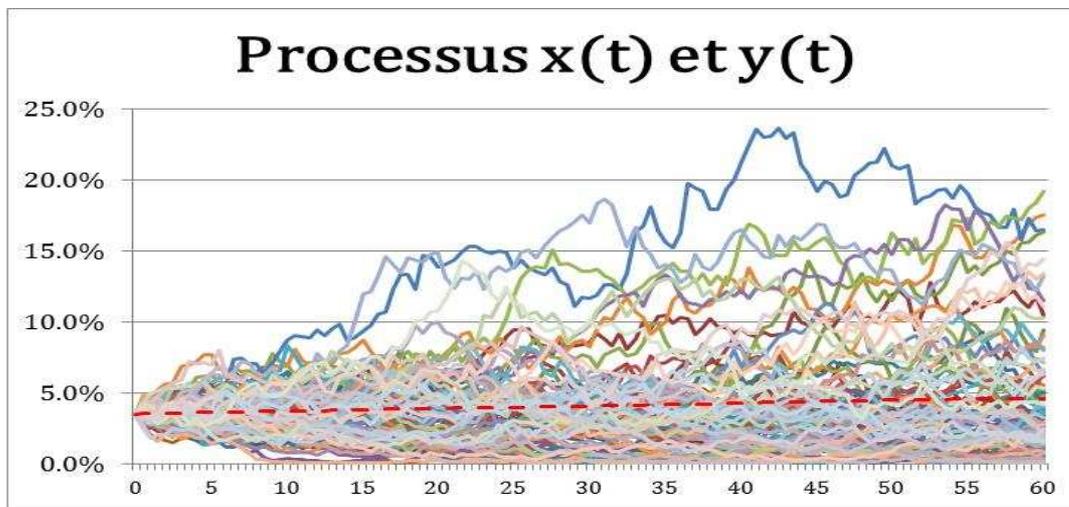


Figure 31 – Dispersion des processus  $x$  et  $y$  et trajectoire moyenne en pointillé rouge

Maturité \ Tenor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
1	-27295978.07%	-895617.21%	-103634.66%	-21142.43%	-6172.70%	-2316.33%	-1009.84%	-499.88%	-271.94%	-160.00%	-66.81%	-26.74%	-13.46%
2	-2361413.49%	-81399.66%	-9900.20%	-2171.02%	-643.25%	-234.32%	-96.78%	-43.94%	-21.71%	-12.01%	-3.98%	-2.51%	-5.68%
3	-522119.29%	-19267.19%	-2470.26%	-546.03%	-159.65%	-53.07%	-18.75%	-6.82%	-2.61%	-1.56%	-0.39%	-0.76%	-4.44%
4	-191571.64%	-7185.78%	-945.56%	-207.87%	-57.84%	-16.97%	-4.40%	-0.69%	0.01%	-0.61%	-0.10%	-0.36%	-3.80%
5	-91539.01%	-3475.23%	-459.92%	-100.63%	-26.77%	-8.87%	-1.22%	0.13%	-0.06%	-0.99%	-0.17%	0.04%	-2.98%
6	-52665.80%	-1991.84%	-263.83%	-57.03%	-14.29%	-3.16%	-0.25%	0.02%	-0.63%	-1.57%	-0.62%	0.09%	-2.01%
7	-33808.31%	-1274.62%	-168.74%	-35.96%	-8.66%	-1.63%	-0.12%	-0.33%	-0.97%	-1.57%	-0.48%	0.73%	-1.13%
8	-23660.26%	-685.29%	-116.56%	-24.42%	-5.56%	-1.02%	-0.14%	-0.30%	-0.91%	-1.52%	-0.67%	0.52%	-0.92%
9	-17520.08%	-681.48%	-85.17%	-17.63%	-3.89%	-0.56%	-0.04%	-0.22%	-0.77%	-1.40%	-0.59%	0.48%	-0.73%
10	-13657.61%	-503.87%	-65.02%	-13.00%	-2.31%	0.06%	0.26%	0.02%	-0.47%	-1.15%	-0.28%	0.84%	0.07%
12	-9269.50%	-335.08%	-41.21%	-6.86%	-0.08%	0.85%	0.50%	-0.12%	-0.63%	-1.26%	-0.50%	0.84%	1.11%
15	-6180.10%	-214.81%	-23.39%	-2.49%	0.54%	0.77%	0.36%	-0.29%	-1.02%	-1.68%	-0.70%	1.07%	3.05%
20	-4189.26%	-143.11%	-13.84%	0.06%	1.88%	1.79%	1.44%	1.12%	0.64%	0.16%	1.28%	3.36%	6.75%

Figure 32 – Écart relatif des prix par la méthode CDG et les prix de marché sur la nappe de volatilité utilisée pour le quatrième jeu de paramètres

On appellera dans la suite *simulation 3* les résultats obtenus avec le troisième jeu de paramètres du CIR2++ et *simulation 4* ceux obtenus avec le quatrième jeu de paramètres du CIR2++.

L'observation des résultats sur les optimums trouvés montre une volatilité. Calibré sur une même matrice mais à partir de deux graines différentes on obtient des optimums sensiblement différents. Pourtant ils restent des optimums de la fonction objective et sont donc légitimes par ce fait. Le changement de matrice de poids implique de nouveaux optimums même si on remarque une ressemblance dans le comportement des jeux de paramètres obtenus avec une graine à 5%.

Si ces jeux de paramètres sont à chaque fois les meilleurs, il serait légitime de questionner le niveau de précision quant à la reproduction de la nappe de prix des swaptions. En effet dans un cadre bancaire de pricing à court terme (pour des traders par exemple) la précision n'est pas assez bonne. Il est difficile de reproduire toute la nappe de prix et il est important de définir quelle partie de la matrice est la plus adaptée et suffisante pour le calibrage. Le choix peut se faire en adéquation avec la stratégie d'investissement de l'assureur par exemple.

Sur des hypothèses de calcul du 31/12/2016, la suite de cette partie se concentrera sur la diffusion des taux d'actualisation et de certains taux zéro-coupon du modèle de Hull & White et des quatre paramétrages du CIR2++.

### 3.1.2 Distributions des taux

**Taux d'actualisation :**

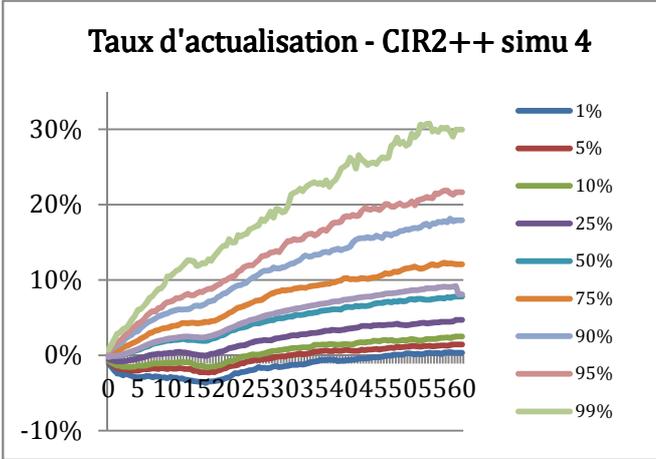
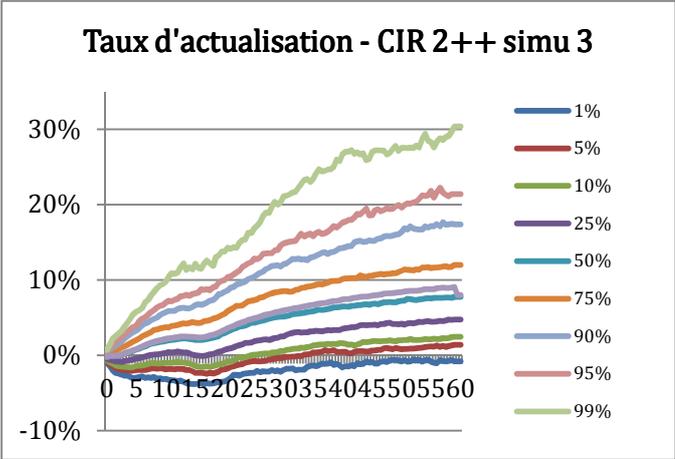
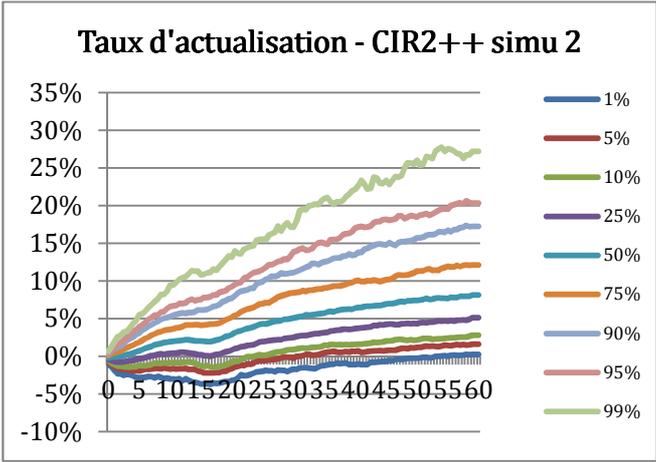
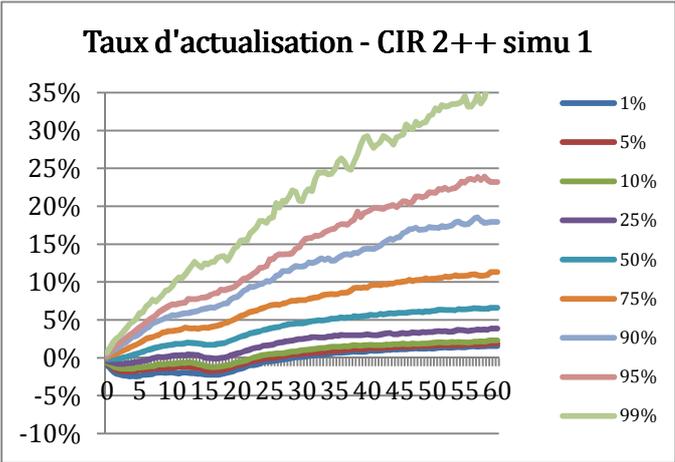
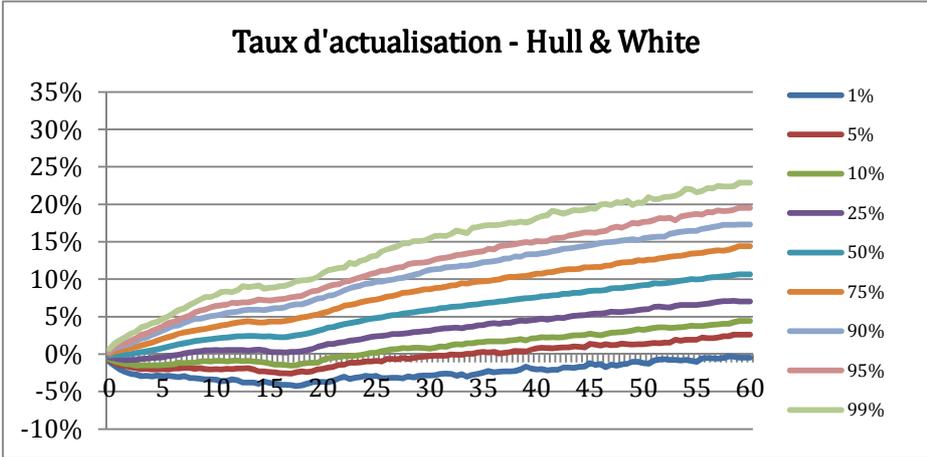


Figure 33 – Comparaison de la diffusion des quantiles des taux d'actualisation entre les trois modèles

La problématique de réduction des scénarios présentant des taux négatifs est respectée, le souhait est d'avoir des plus petits niveaux dans les quantiles extrêmes et une proportion moins importante qu'avec le Hull & White. Les quatre jeux de paramètres du CIR2++ donnent finalement une distribution globale similaire.

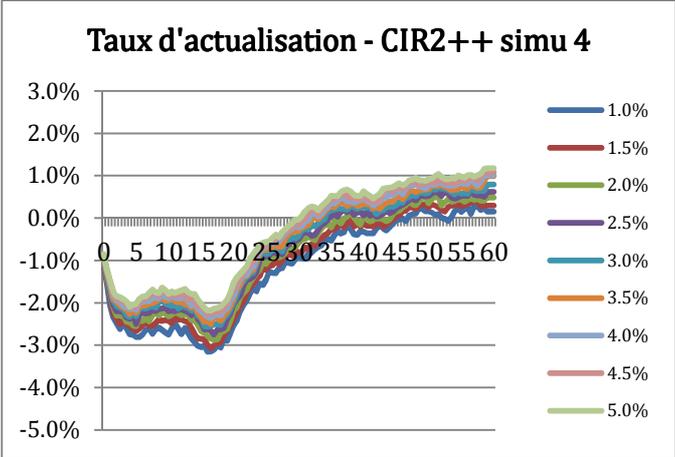
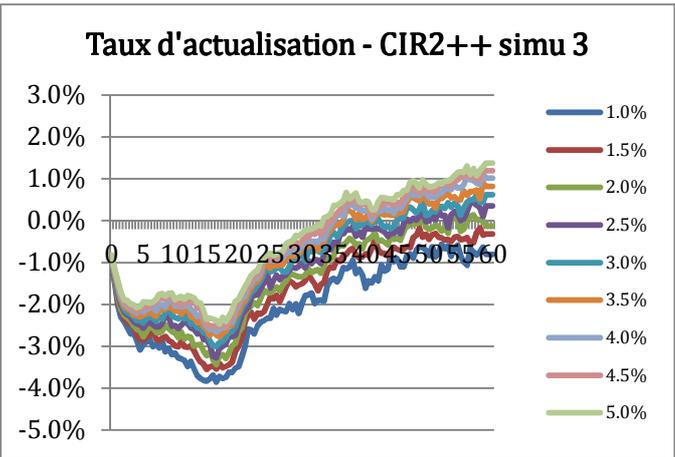
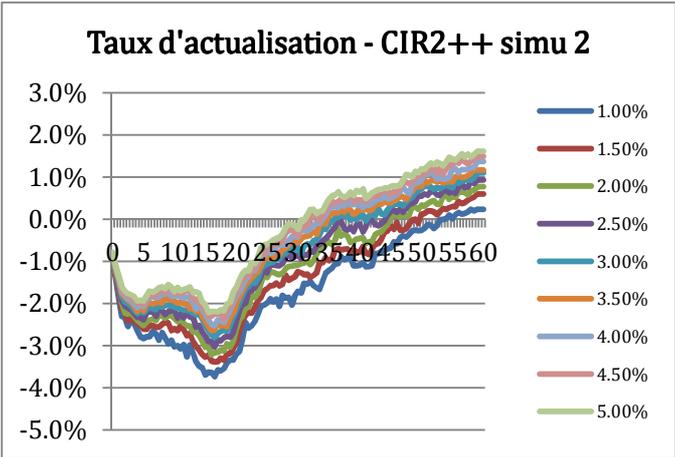
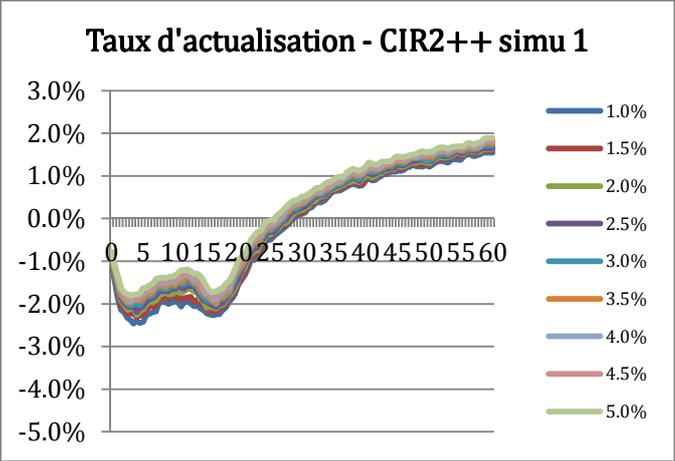
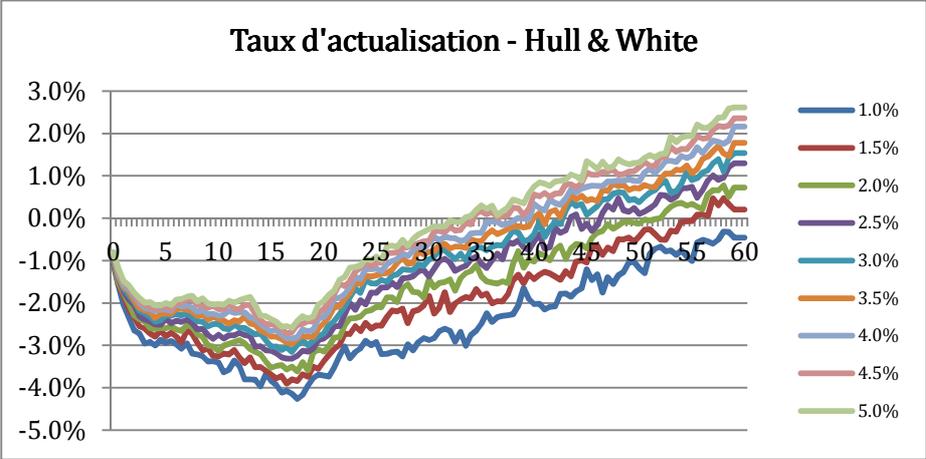


Figure 34 – Zoom sur les distributions des taux négatifs entre les deux modèles de taux

Les impacts négatifs du modèle de taux Hull & White sont bien représentés par les distributions des taux négatifs sur des quantiles de 1 à 5%. Le modèle diffuse assez largement dans le négatif sur des maturités longues. C'est dans ces zones qu'on observe les Best Estimate les plus élevés et qu'on retrouve les effets étudiés dans le chapitre 1 des scénarios à taux négatifs.

Les quatre simulations du CIR2++ diffusent présentent moins de valeurs négatives à des niveaux plus faibles :

- Dans la *simulation 1* on observe l'impact du très fort retour à la moyenne du processus  $y(t)$  qui maintient les taux dans un faisceau resserré. La dynamique du modèle et son paramétrage permettent une remontée assez forte des taux même dans les pires scénarios ;
- Dans la *simulation 2* et la *simulation 3* on observe un comportement très similaire à celui du Hull & White, les taux sont plus libres de se déplacer dans cette zone. La remontée des taux est néanmoins plus rapide que pour le Hull & White ;
- Dans la *simulation 4* on retrouve un comportement similaire à la première simulation mais avec un recentrage des taux et des niveaux moins importants.

Mise à part pour la *simulation 1* où le comportement des processus semble expliquer l'évolution des taux, il reste difficile d'attribuer un faisceau de distribution particulier à un jeu de paramètre.

A partir des quatre résultats de l'algorithme d'optimisation on obtient des distributions qui certes restent similaires dans leur globalité mais présentent des différences dans le détail. On observe ainsi une première volatilité des résultats.

Dans la suite les faisceaux des zéro-coupon 5, 10 et 20 ans seront affichés.

### Taux zéro-coupon :

Le portefeuille d'actif d'un assureur est majoritairement composé d'obligations. La valorisation de ces actifs est réalisée à l'aide des taux simulés dans le GSE.

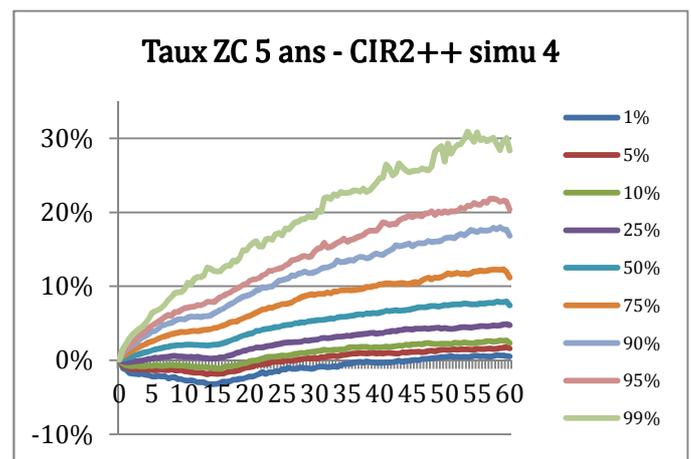
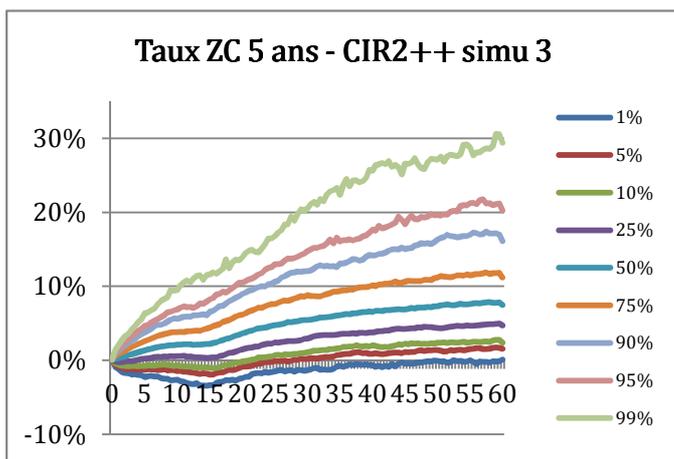
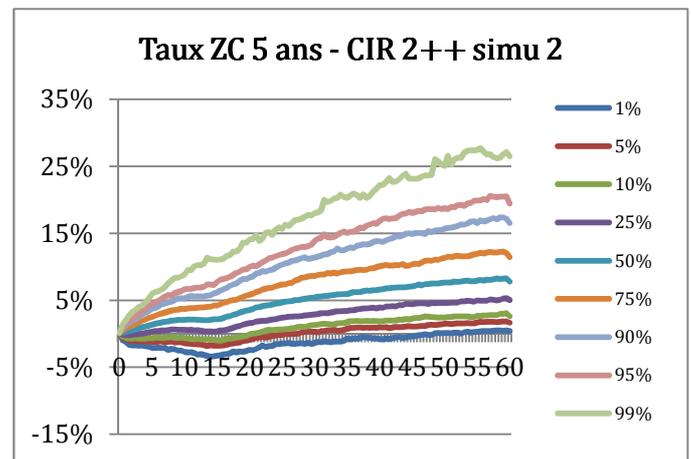
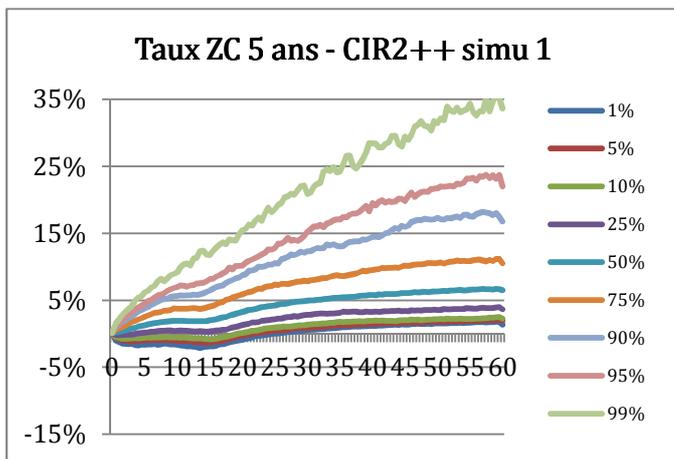
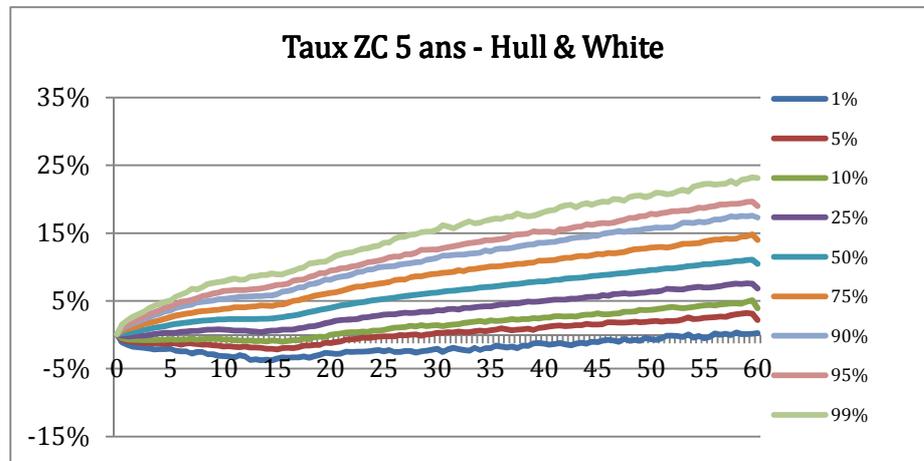


Figure 35 – Distribution des taux zéro-coupon 5 ans pour les différentes simulations

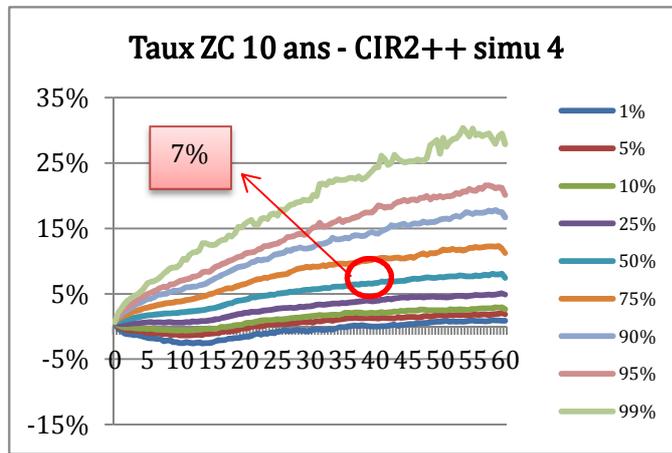
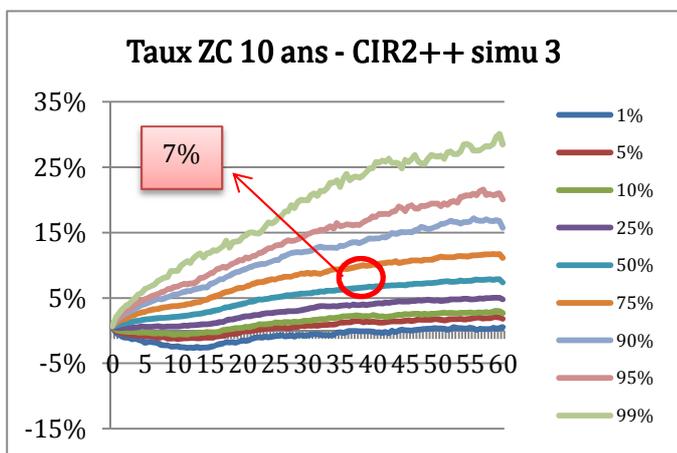
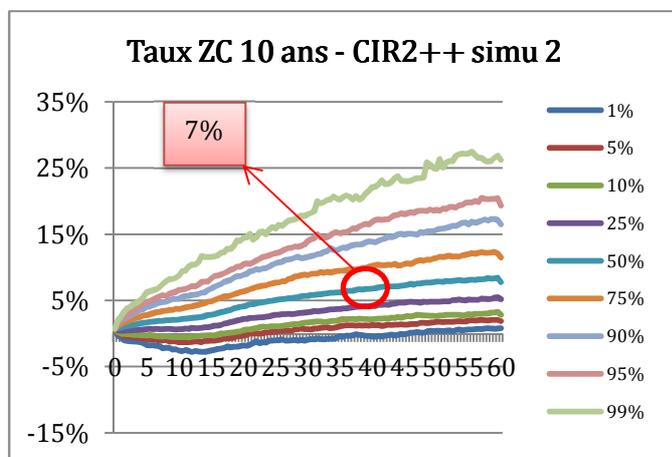
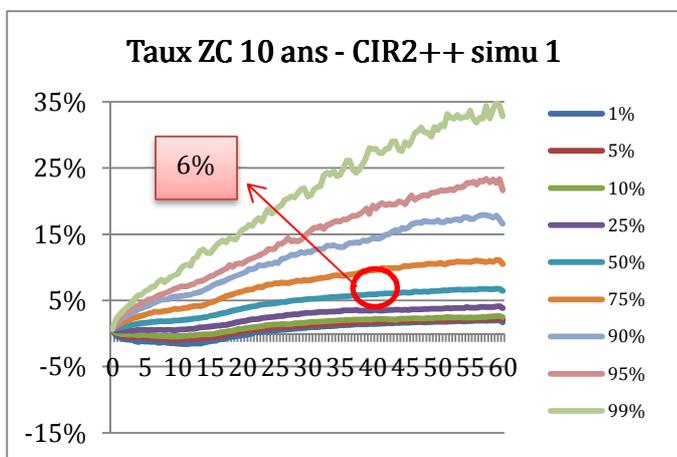
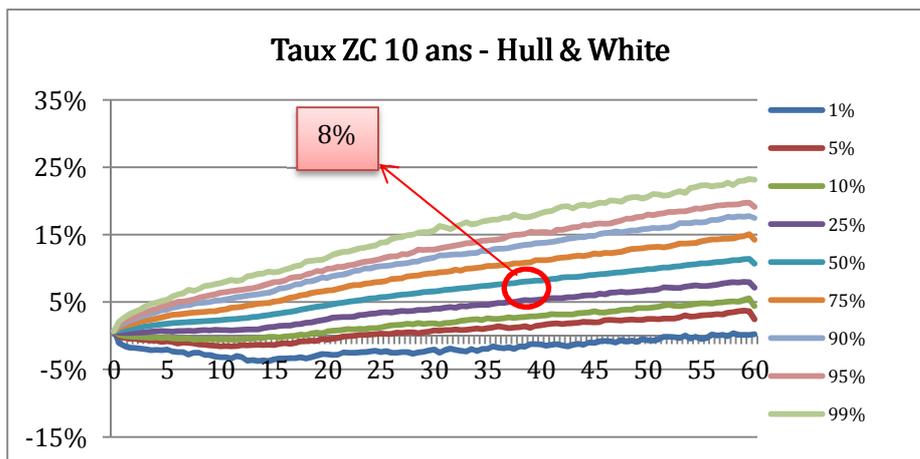


Figure 36 – Distribution des taux zéro-coupon 10 ans pour les différentes simulations

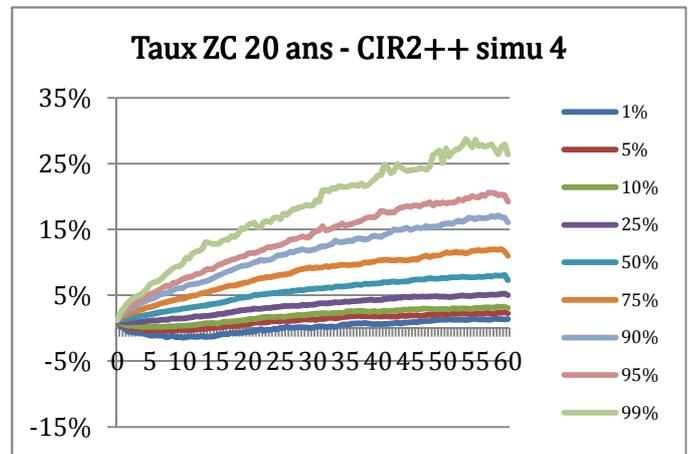
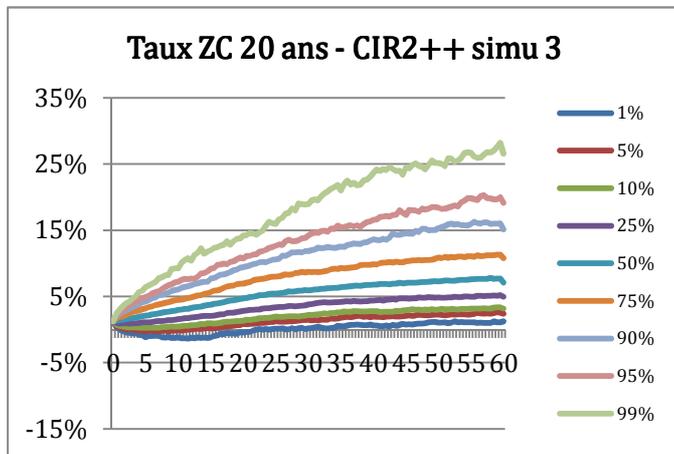
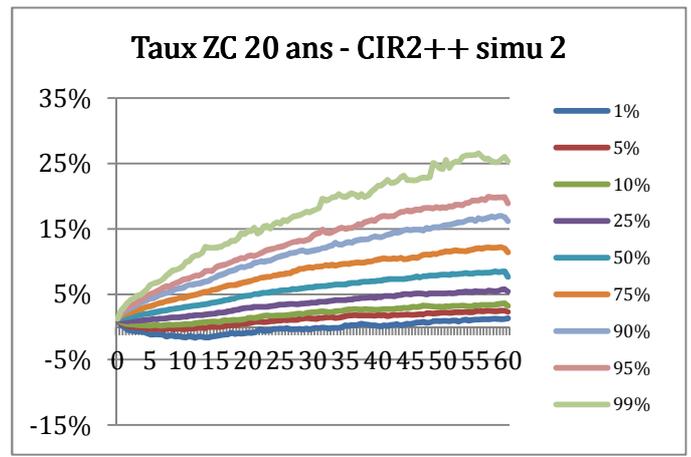
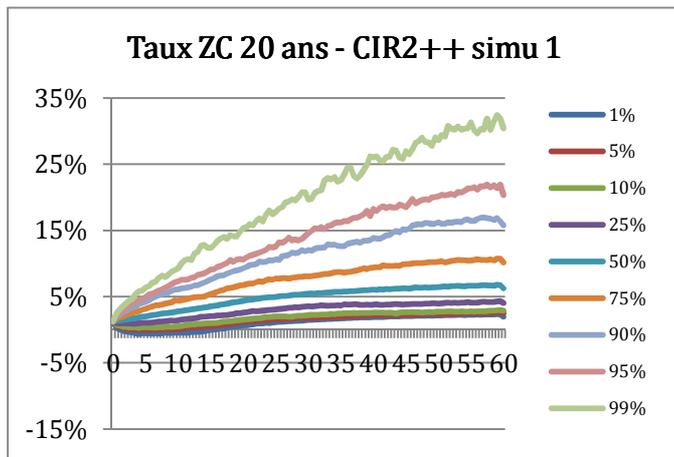
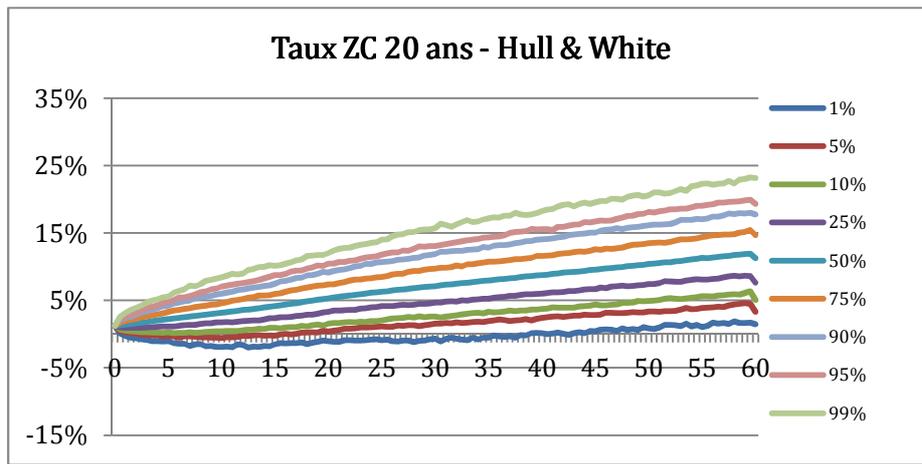


Figure 37 – Distribution des taux zéro-coupon 20 ans pour les différentes simulations

Les mêmes remarques que pour les taux d'actualisation à propos de la quantité de taux négatifs peuvent être faites. Les simulations CIR2++ génèrent des quantiles extrêmes plus importants dans les positifs mais on observe un aplatissement des taux à pour des maturités élevées sur les quantiles 25-75% par rapport à la simulation Hull & White (plus de détails dans la suite).

Encore une fois la *simulation 1* diffère des autres en affichant des taux moins négatifs moins longtemps.

L'observation de toute la distribution, du minimum au maximum, accentue l'impression vue précédemment au niveau des similitudes et des différences et laisse apparaître une nette amélioration du point de vue des taux négatifs à horizon long pour les deux simulations CIR2++ . Malgré des explosions positives plus importantes, les niveaux sont plus bas sur les quantiles 25-75%.

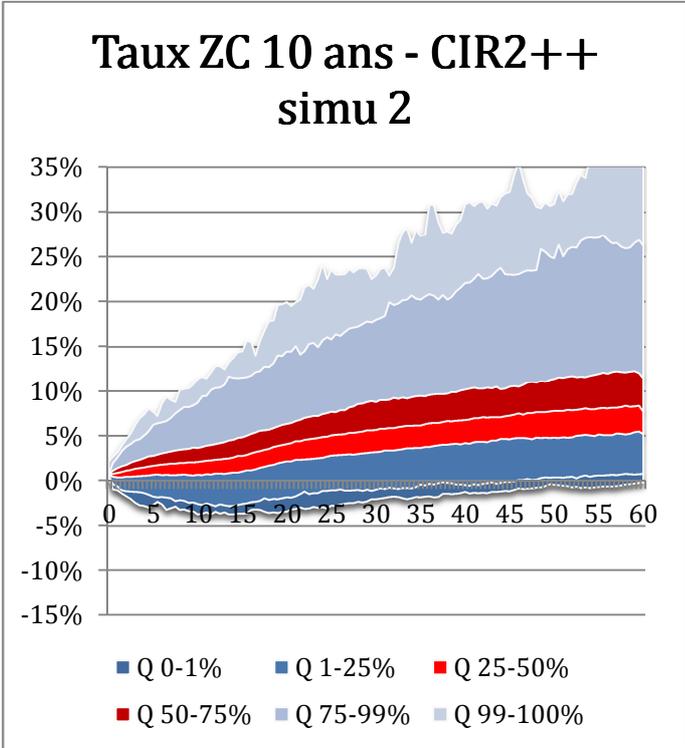
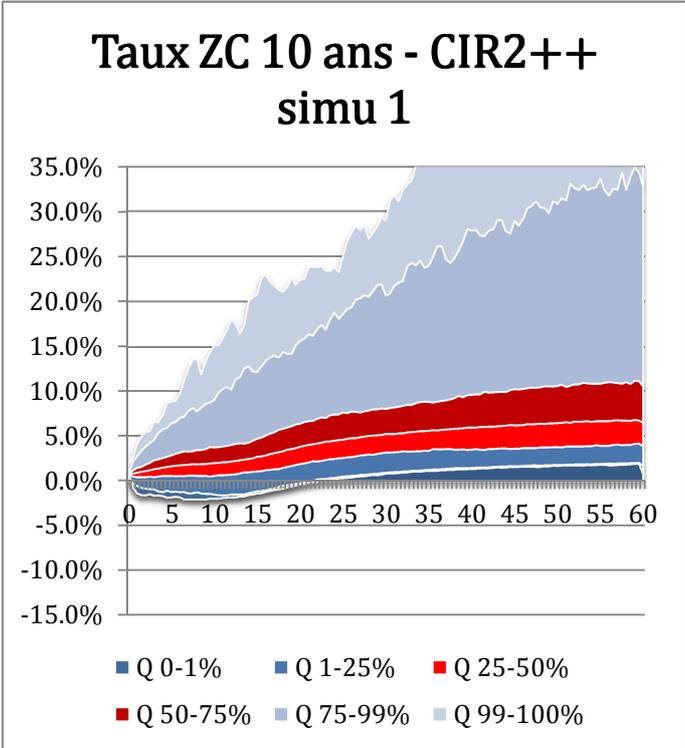
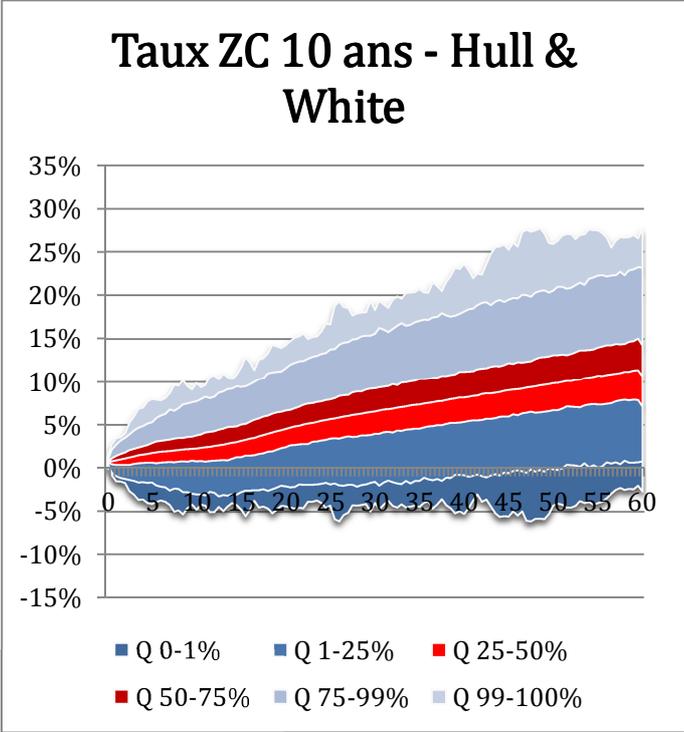


Figure 38 – Comparaison sur l'ensemble du spectre des taux zéro-coupon 10 ans entre le Hull & White et le CIR2++ simulation 1 et simulation 2

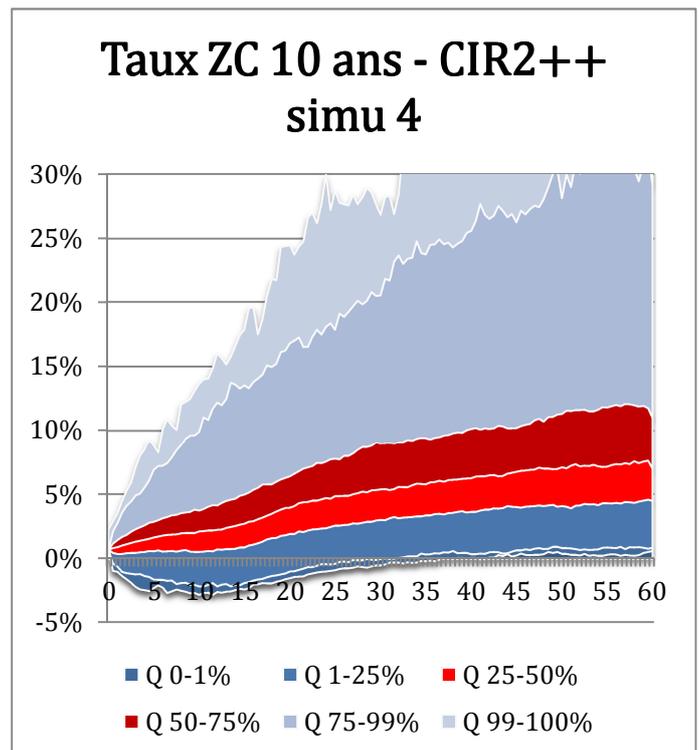
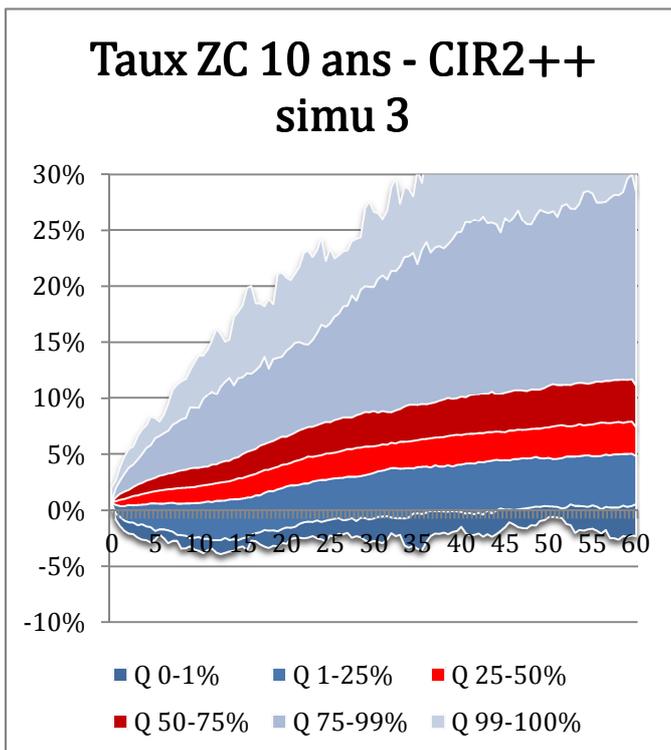
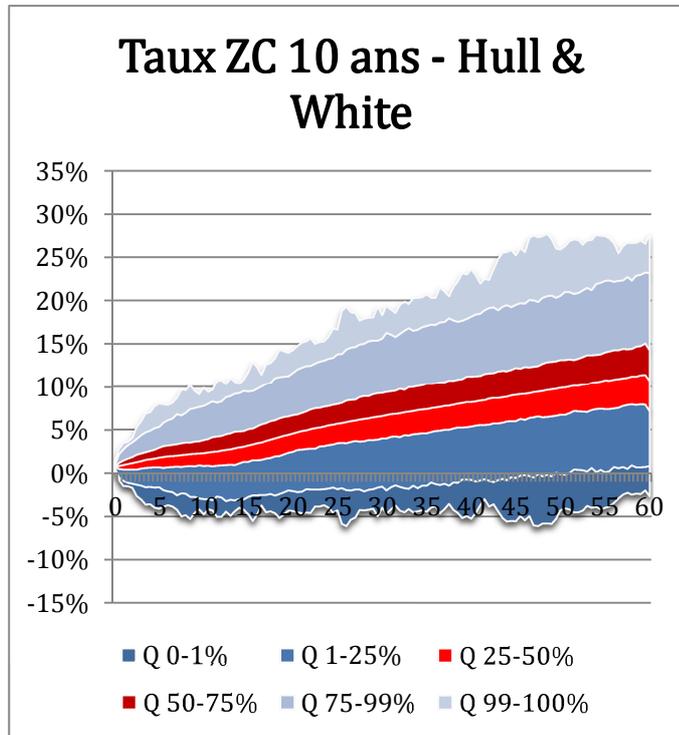


Figure 39 – Comparaison sur l'ensemble du spectre des taux zéro-coupon 10 ans entre le Hull & White et le CIR2++ simulation 3 et simulation 4

L'aplatissement des taux à long terme dans les simulations CIR2++ se justifie par la meilleure précision des tests martingales pour des maturités élevées. Les simulations collent mieux à la courbe des taux initiale et provoque la différence observée avec la simulation Hull & White.

La prise en main du modèle n'est pas évidente dans un premier temps à cause des nombreux paramètres. Les premières observations présentées permettent de sortir des axes d'analyse sur le comportement des diffusions en fonction des paramétrages.

Le changement de modèle de taux permet d'obtenir des générations de taux légèrement différentes et à priori satisfaisantes. L'objectif de diminuer la quantité de scénarios de taux trop négatifs est rempli. On peut s'attendre à ce que les résultats des scénarios extrêmes du modèle ALM soient moins importants.

Des sensibilités pourraient être effectuées sur les matrices de poids pour observer les différentes diffusions des taux et distributions des Best Estimate.

### 3.2 Impact sur le Best Estimate

Dans cette partie les valeurs des BE ont été modifiées pour raison de confidentialité.

#### 3.2.1 Evolution des Best Estimate avec les différentes simulations

Le Best Estimate (BE) donne une idée du niveau des engagements de l'assureur dans le temps. C'est un indicateur important de la compagnie. Le modèle de gestion actif-passif calcule un BE pour chaque choc. En central et pour tous les chocs les BE sont calculés de manière stochastique. Le Best Estimate central est celui qui nous intéresse en premier lieu. C'est le scénario standard sans choc avec la courbe des taux sans risque EIOPA non choquée (et avec *Volatility Adjustment* pour notre étude, cf 2.5 - Courbe des taux sans risque, chapitre 2). Pour chacun des jeux de paramètres du CIR2++ une table de scénarios économiques est générée et alimente le modèle afin de calculer le Best Estimate central. Dans toute la suite de cette partie les résultats seront obtenus sur un scénario central.

Ci-dessous la distribution de référence qui utilise le modèle de Hull & White.

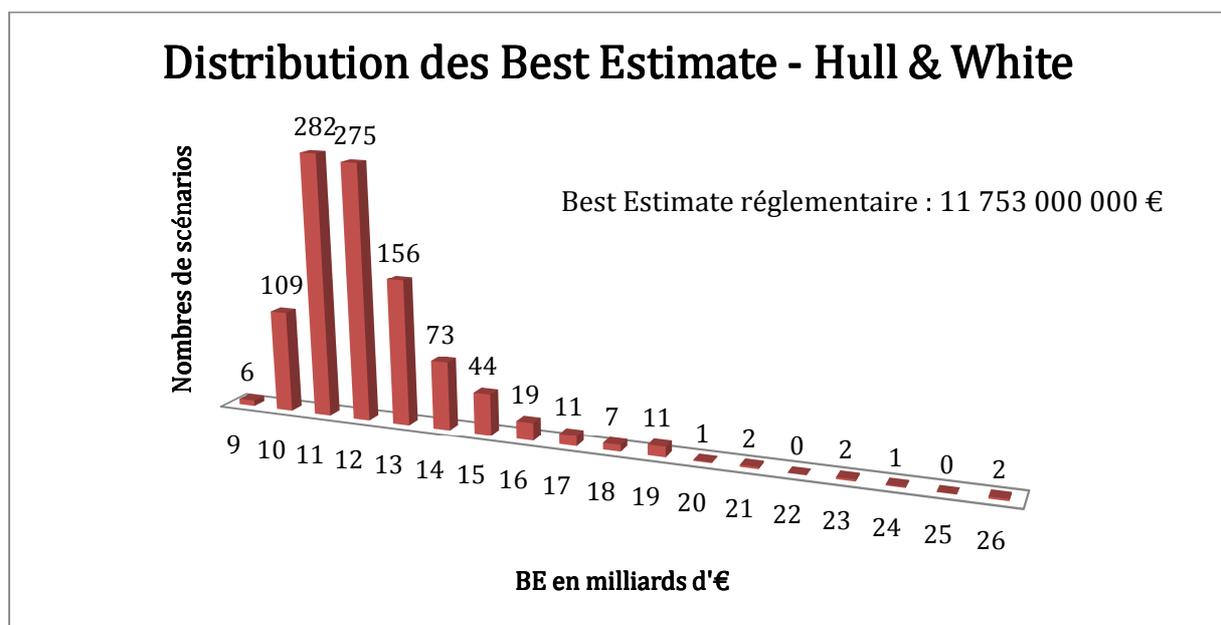
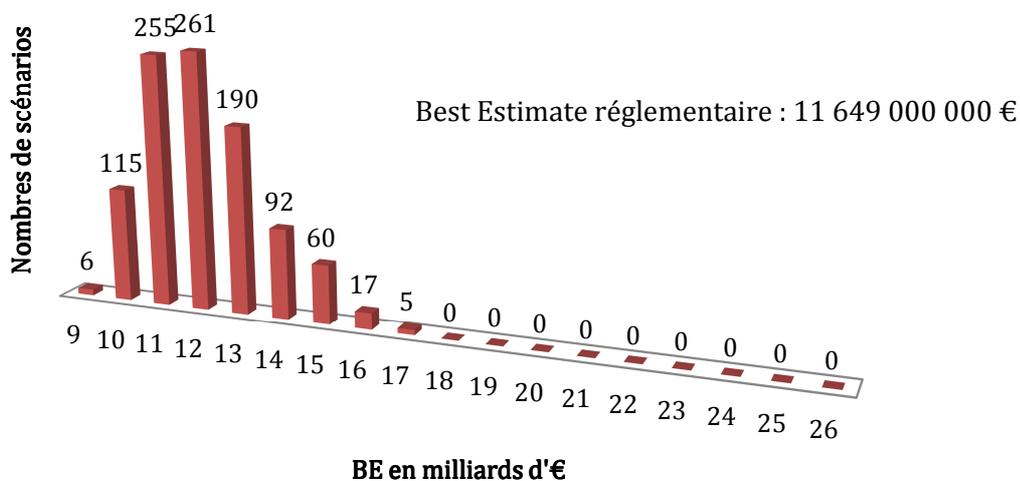


Figure 40 – Distribution des Best Estimate central pour une simulation Hull & White

## Distribution des Best Estimate -CIR2++ simu1



## Distribution des Best Estimate -CIR2++ simu 2

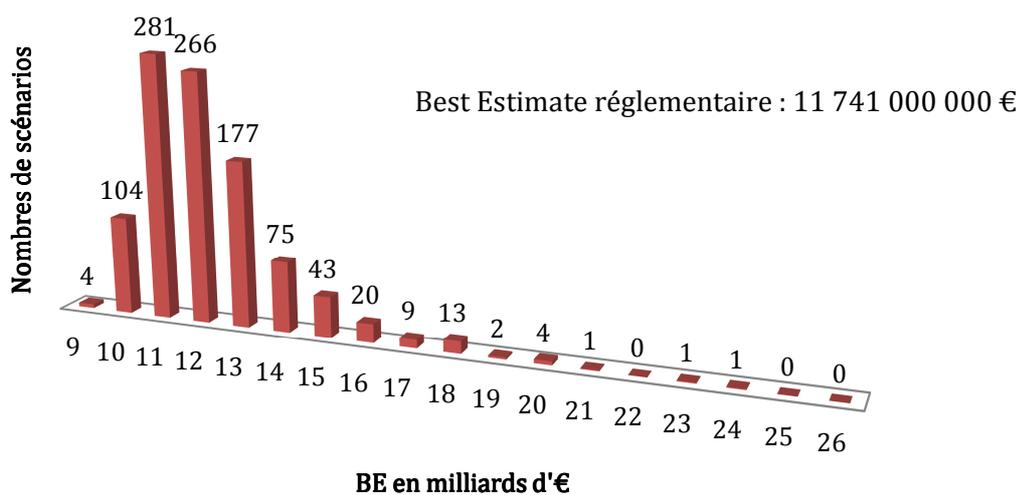
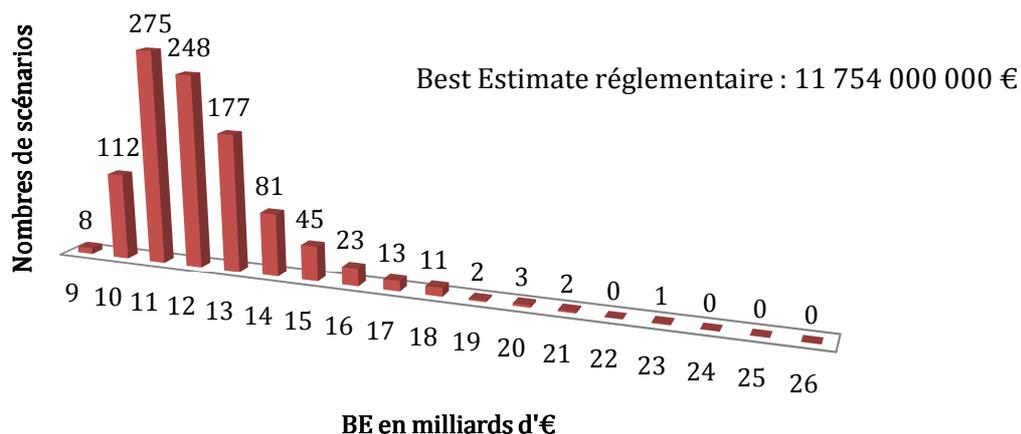


Figure 41 – Distribution des Best Estimate central pour les deux premiers jeux de paramètres du CIR2++

Les distributions des Best Estimate présentent des différences. La *simulation 1* élimine une bonne partie des scénarios extrêmes et se concentre plus dans la même zone. Cela a pour effet de diminuer le Best Estimate réglementaire de manière significative.

La *simulation 2* ressemble quant à elle plus à la celle du Hull & White, les scénarios extrêmes sont toujours présents bien que leur nombre a diminué. Pour cette raison le Best Estimate réglementaire est légèrement en baisse.

### Distribution des Best Estimate -CIR2++ simu 3



### Distribution des Best Estimate -CIR2++ simu 4

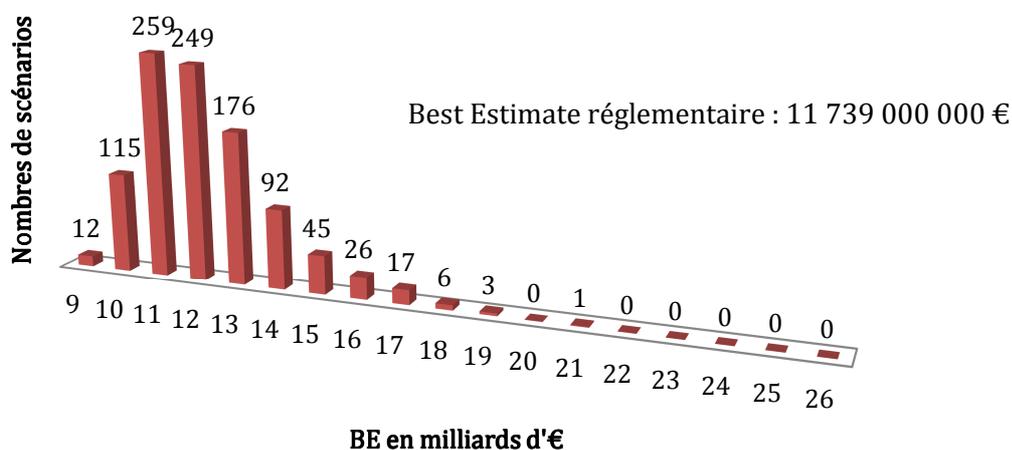


Figure 42 – Distribution des Best Estimate central pour les deux derniers jeux de paramètres du CIR2++

Ces deux simulations se comportent comme la *simulation 2*. Une baisse des scénarios extrêmes est observée sans pour autant les éliminer tous.

Le Best Estimate moyen de la *simulation 3* est égal à celui du Hull & White tandis que le Best Estimate moyen de la *simulation 4* est inférieur.

A partir des quatre jeux de paramètres issus des quatre calibrages de l'algorithme de calibrage on obtient quatre Best Estimate moyens différents avec une volatilité non négligeable. L'un des jeux de paramètres diminue fortement sa valeur par rapport à celui de référence en éliminant tous les scénarios extrêmes tandis que l'un ira même l'augmenter légèrement et paraît atypique en comparaison avec les autres simulations qui s'éloignent de manière plus modérée. La tendance du CIR2++ étant à la diminution des scénarios extrêmes que l'on peut désormais associer avec des scénarios de taux négatifs à long terme. La *simulation 1* qui en générale moins élimine un bon nombre de valeurs extrêmes des Best Estimate.







### 3.2.2 Impacts conjoncturels

Le Best Estimate est un indicateur important qui condense les calculs effectués dans le modèle mais et afin d'avoir une vision plus précise de l'évolution de son comportement suite à un changement de modèle de taux, il peut être judicieux d'étudier des indicateurs conjoncturels. C'est-à-dire les événements induits par le contexte économique en vigueur lors des calculs des scénarios utilisés.

Parmi ces indicateurs on retrouve le comportement des assurés les lois comportementales des assurés et le taux de participation aux bénéfices servi qui leur est servi.

Les résultats sont similaires sur les quatre simulations du CIR2++. On affiche arbitrairement la *simulation 3* en face de la simulation de référence (Hull & White).

#### **Comportement des assurés :**

Dans le cadre d'une projection d'une son portefeuille d'assurés sur des durées longues il est nécessaire important de modéliser au mieux le comportement des assurés de son passif. Plusieurs phénomènes reproduisant le comportement des assurés sont modélisés dans le modèle ALM : des rachats, des réductions, des versements ou encore la table de mortalité utilisée.

Les rachats ont un poids important dans la constitution du Best Estimate, il en existe deux type :

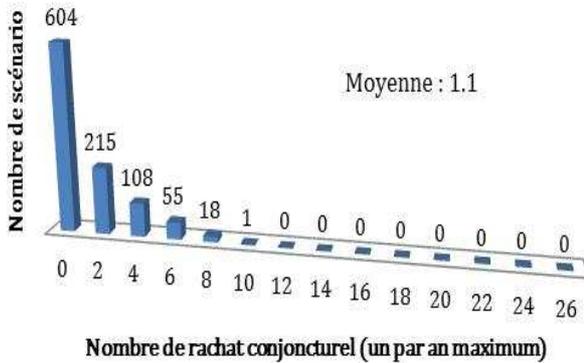
- Les *rachats structurels*, ce sont des rachats qui arrivent qu'importe le contexte économique. Le niveau des rachats structurels est issu de l'historique de la société ;
- Les rachats conjoncturels, ce sont des rachats liés à des paramètres externes. En pratique, ils sont déclenchés lorsque le taux de PB servi aux assurés s'éloigne trop d'une référence de marché.

Pour prendre en compte ces comportements le modèle ALM utilise des lois dynamiques.

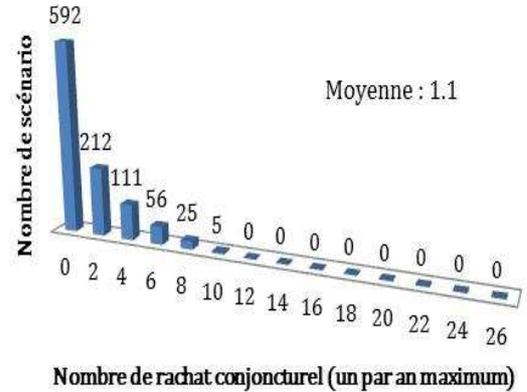
Le taux de rachat conjoncturel dépend de l'évolution des marchés financiers et du taux de rémunération proposé par la concurrence servi aux assurés. Ce type de rachat est déclenché dynamiquement quand l'écart entre le taux servi aux assurés et une référence représentant le taux de la concurrence est trop important.

Il existe plusieurs façons de modéliser le taux de la concurrence. Il est possible de prendre le rendement des zéro-coupon 10 ans de l'année précédente par exemple mais dans tous les cas Généralement ce taux est entièrement déterminé à l'aide de la table de scénarios économiques générée en amont. De la même manière que pour l'évolution des Best Estimate, la distribution stochastique sous forme de compteur de rachat (qui augmente de un si il y a des rachats durant l'année) permet de voir le changement de comportement lors du changement de simulation.

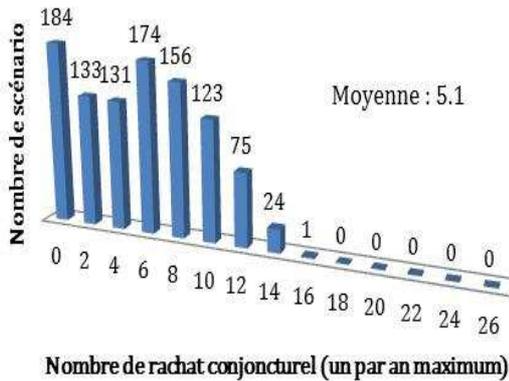
### Rachat conjoncturel 0-15 ans - Hull & White



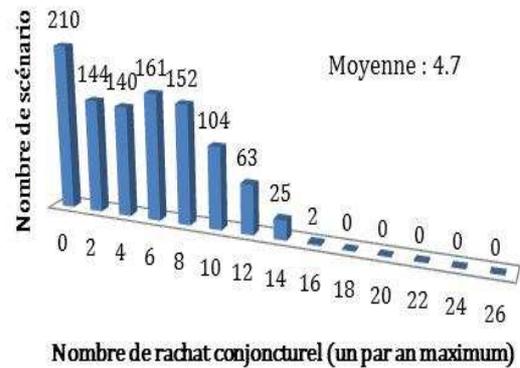
### Rachat conjoncturel 0-15 ans - CIR2++ simu 3



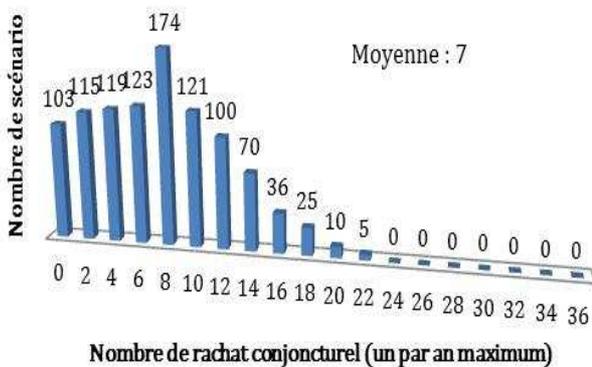
### Rachat conjoncturel 16-30 ans - Hull & White



### Rachat conjoncturel 16-30 ans - CIR2++ simu 3



### Rachat conjoncturel 31 ans et plus - Hull & White



### Rachat conjoncturel 31 ans et plus - CIR2++ simu 3

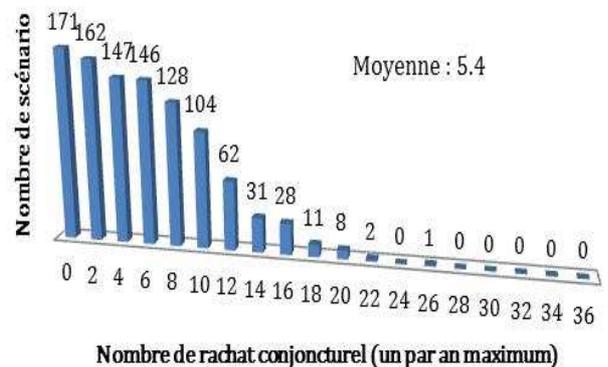


Figure 46 – Comparaison des distributions des scénarios en fonction du niveau de rachat entre une simulation Hull & White et CIR2++ (simulation 3)

Une légère diminution globale des rachats est observée, plus particulièrement à long terme. L'écart entre le taux de la concurrence et le taux servi aux assurés se réduit avec le passage au modèle CIR2++. La capacité de l'assureur à servir son taux reste autant en adéquation que le Hull & White avec les taux de la concurrence simulé

**Taux servi :**

Sa détermination dépend de la performance de l'assureur. Sa capacité à le servir facilement ou non peut se voir avec les deux indicateurs conjoncturels suivants :

- L'apparition d'une insuffisance de produits financiers à un pas de temps indique que les produits financiers ne sont pas suffisants pour servir les garanties de taux contractuelles (intérêts techniques des contrats) ;
- La dynamisation de la marge financière se produit lorsque les produits financiers et le fonds de PB ne sont pas suffisants pour servir une cible de taux de PB. L'assureur renonce alors à une partie de son résultat financier pour tenter d'atteindre la cible de PB prévue.

Une année sans dynamisation de la marge financière indique que l'assureur peut se rémunérer comme souhaité tout en satisfaisant son portefeuille d'assurés. Dans un contexte de taux bas cela reste néanmoins un scénario assez rare.

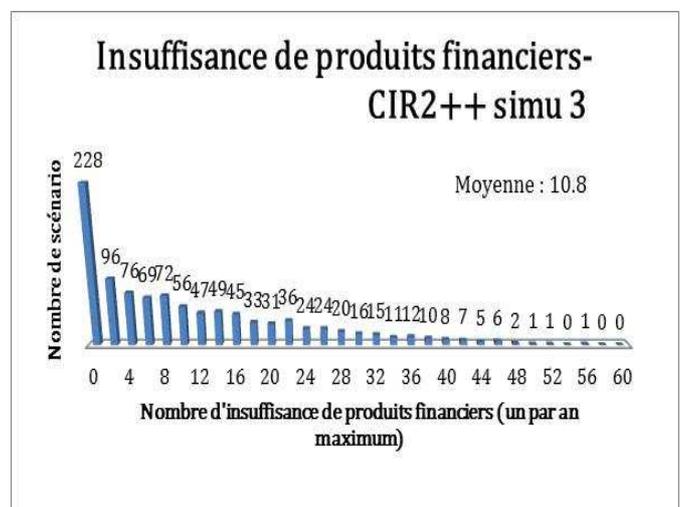
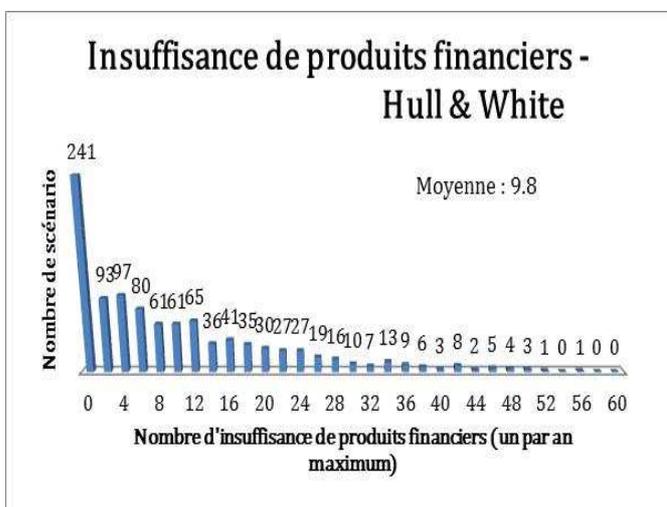
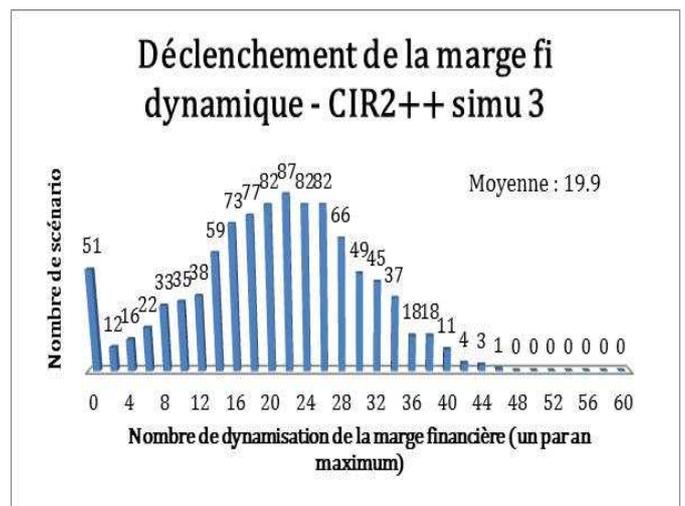
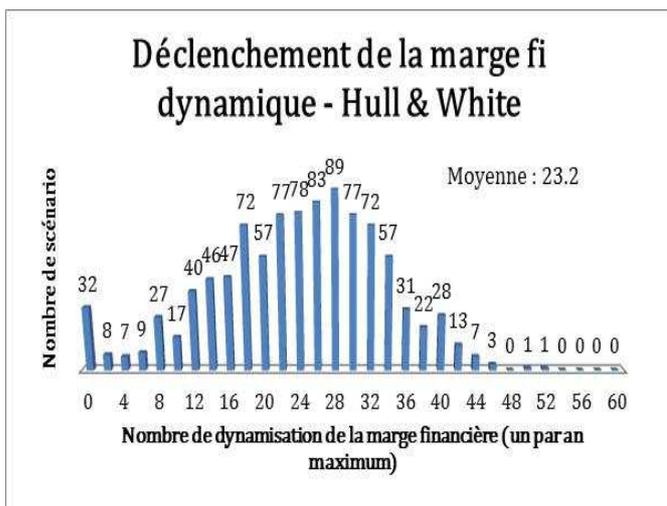


Figure 47 – Comparaison des distributions des scénarios en fonction des indicateurs conjoncturels du taux servi entre une simulation Hull & White et CIR2++ (simulation 3)

Tout en gardant une distribution similaire, la simulation sous CIR2++ augmente la quantité de scénarios où l'assureur ne réduit pas ou peu son résultat. Elle diminue également la quantité de scénarios défavorables.

La quantité d'insuffisance de produits financiers est très proche entre les deux simulations même si on observe une légère augmentation en moyenne via la simulation sous CIR2++. Rappelons néanmoins que les niveaux des taux des réinvestissements (ZC 10 ans) sont en moyenne plus bas sur la simulation CIR2++ que sur la simulation Hull & White et entraînent un rendement moindre du portefeuille obligataire.

### 3.2.3 Zoom sur un scénario en particulier

Afin de conclure l'étude de l'évolution du Best Estimate, cette dernière sous-partie sera consacrée à l'étude d'un scénario en particulier : le plus défavorable. Avec les quatre jeux de paramètres, les résultats du modèle ALM diffèrent parfois assez largement, c'est pourquoi nous reprenons ici les données de deux simulations, l'une avec la première graine et la première matrice de poids et l'autre avec la seconde graine et la seconde matrice de poids.

La *simulation 1* (première graine première matrice de poids) qui représente une distribution plus centrée des Best Estimate et la *simulation 4* (deuxième graine deuxième matrice de poids) qui se rapproche plus des résultats obtenus avec le modèle de taux Hull & White.

Pour rappel :

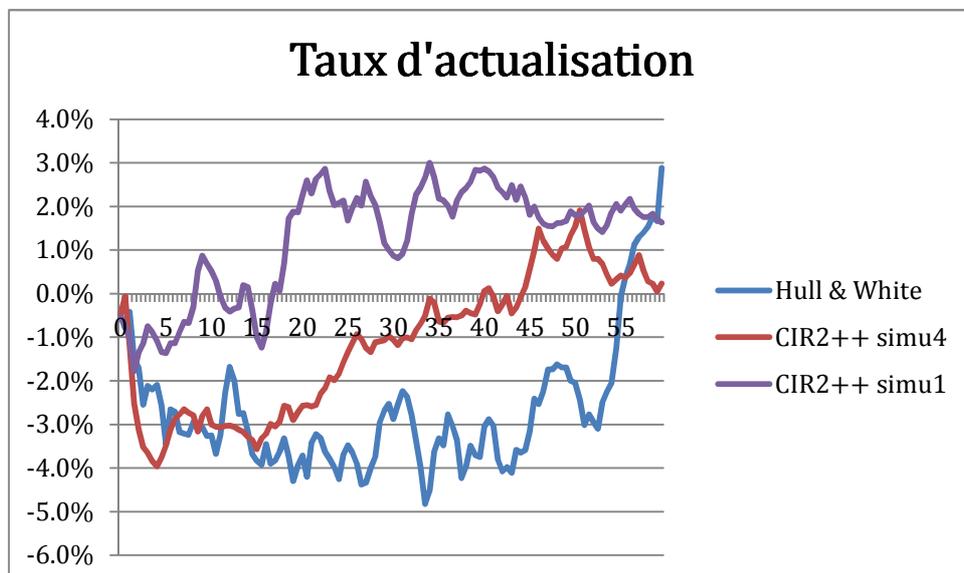
$$\begin{cases} Best\ Estimate^{Hull\&\ White}_{moyen} = 11\ 753\ 000\ 000\ \text{€} \\ Best\ Estimate^{CIR2++\ simu1}_{moyen} = 11\ 649\ 000\ 000\ \text{€} \\ Best\ Estimate^{CIR2++\ simu4}_{moyen} = 11\ 739\ 000\ 000\ \text{€} \end{cases}$$

Pour les trois simulations :

$$\begin{cases} Best\ Estimate^{Hull\&\ White}_{max} = 25\ 370\ 000\ 000\ \text{€} \approx +116\% \\ Best\ Estimate^{CIR2++\ simu1}_{max} = 16\ 000\ 000\ 000\ \text{€} \approx +37\% \\ Best\ Estimate^{CIR2++\ simu4}_{max} = 20\ 100\ 000\ 000\ \text{€} \approx +71\% \end{cases}$$

#### Contexte économique :

Dans un premier temps, le contexte économique en vigueur dans ces scénarios est présenté ci-dessous :



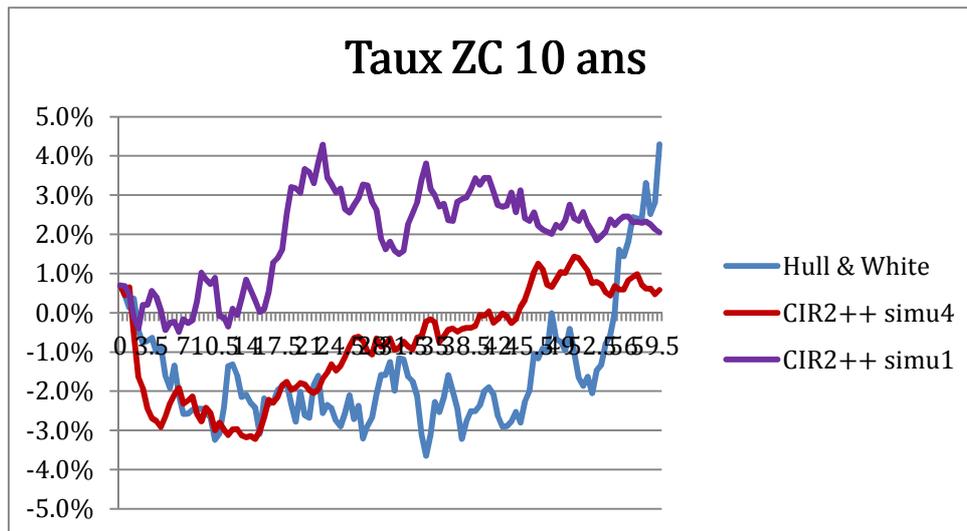


Figure 48 – Contexte économique en vigueur (valorisation et réinvestissement) dans le scénario le plus défavorable pour les trois simulations

Les contextes économiques sont les suivants :

- Simulation Hull & White et *simulation 4* : le niveau élevé des Best Estimate s'explique par des taux très négatifs et persistants durant toute la durée de projection. Ces scénarios s'approchent des quantiles minimums observés sur les distributions ;
- *Simulation 1* : Le scénario le plus défavorable est celui d'une période de taux bas suivie d'une remontée brutale des taux. Dans ce type de scénario, les taux bas provoquent une dilution de l'actif, il n'y a plus de richesse latente. Lorsque survient la remontée des taux, il n'est plus possible de servir le taux de participation aux bénéficiaires cible (qui est défini sur une référence de marché) et les lois dynamiques se déclenchent.

L'observation de ces contextes économiques est intéressante d'un point de vue macroéconomie.

D'abord la simulation Hull & White et la *simulation 4* affichent en toute logique les quantiles minimums des distributions sur certains points. C'est-à-dire des taux négatifs à long terme. C'est toutefois des situations que l'on peut considérer comme improbables. La BCE ne permettrait pas des taux aussi faibles aussi longtemps.

Dans la *simulation 1* on observe un scénario identifié dans les études de gestion de risque : celui d'une remontée brutale des taux à court/moyen terme. C'est une situation que les assureurs envisagent et craignent le plus puisqu'elle est plausible.

### Comportement du modèle ALM :

*Les valeurs ont été modifiées pour raison de confidentialité.*

Dans le cas de ces scénarios catastrophes le premier réflexe est de regarder le résultat de l'assureur.

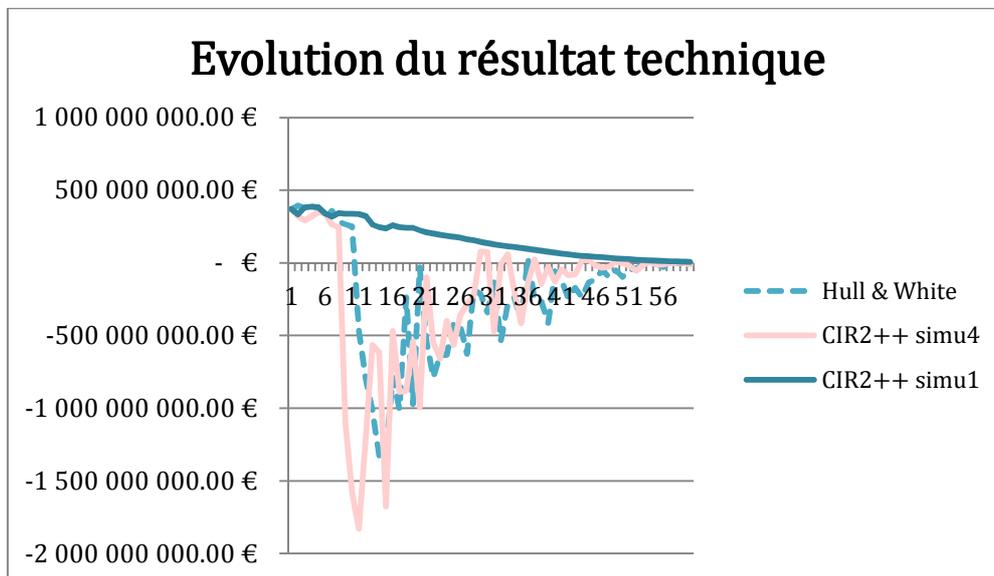


Figure 49 – Evolution du résultat pour les trois simulations ainsi que la trajectoire de référence

Le résultat technique est très largement négatif pour les deux simulations qui présentent des taux négatifs importants à long terme. Le résultat technique de la simulation correspondant à une remontée soudaine des taux reste positif tout au long de la projection.

La visualisation des revenus des placements financiers montre une tendance similaire :

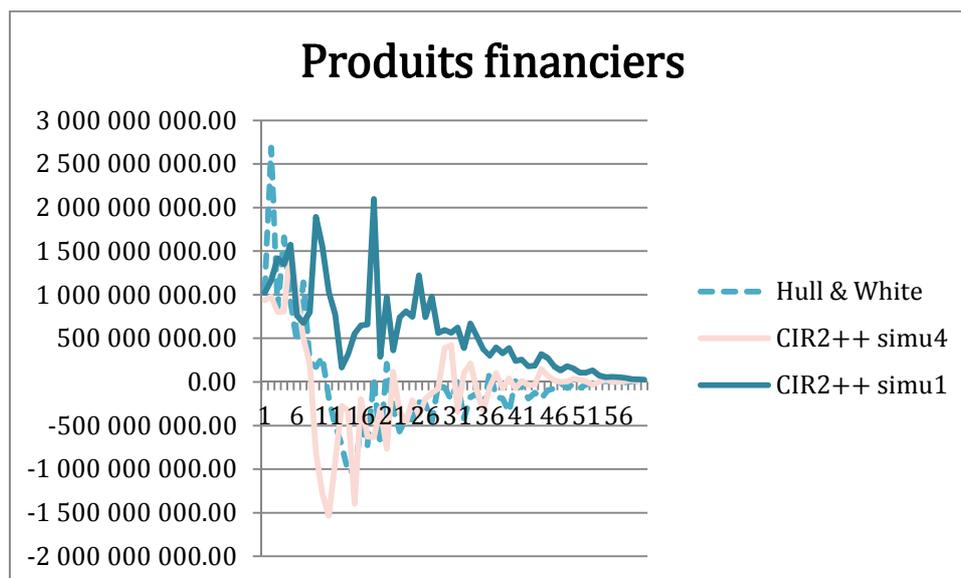


Figure 50 – Evolution des produits financiers pour les trois simulations ainsi que la trajectoire de référence

Pour les trois simulations les rendements des produits financiers sont positifs au début, ils sont liés à la richesse initiale du portefeuille obligataire. Toutefois une fois les maturités atteintes et dans le contexte de taux très négatifs de la simulation Hull & White et *simulation 4*, les produits financiers vont chuter. En effet le réinvestissement se fait sur de obligations à rendement négatif comme on a pu le voir précédemment.

Dans la *simulation 1*, les produits financiers rapportent bien plus que précédemment. Le résultat ne dépend bien sûr pas uniquement de ces rendements mais il se voit naturellement améliorer dans cette situation.

Les rendements faibles dus aux taux très bas dégradent fortement le compte de résultat de l'assureur et est tout de même contraint de servir ses engagements contractuels et réglementaires. L'insuffisance de produits financiers calculée suit alors les mêmes tendances.

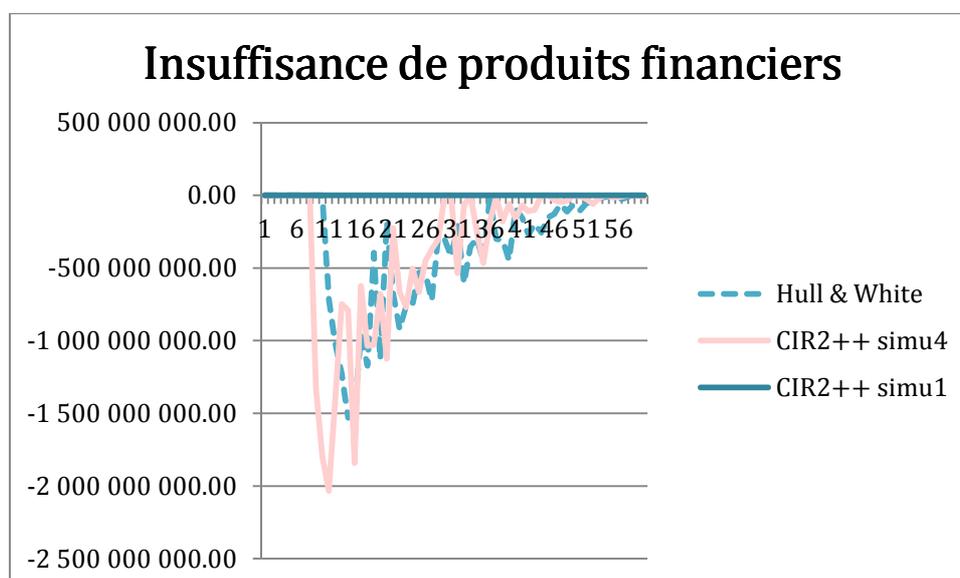


Figure 51 – Insuffisance de produits financiers pour les trois simulations ainsi que la trajectoire de référence

### **En conclusion :**

*Comme vu précédemment le CIR2++ offre la possibilité de diminuer raisonnablement la proportion de scénarios à taux négatifs et leur persistance à long terme ce qui rend les simulations plus en adéquation avec la vision attendue du marché. L'effet global est de diminuer la quantité de scénarios catastrophes et donc le Best Estimate moyen.*

*Les travaux présentés montrent que toutes les étapes de réalisation des scénarios économiques doivent être analysées et maîtrisées :*

- *Les paramètres influant sur la fonction objective : la matrice de poids, la graine, les pénalisations et les seuils*
- *Le choix du jeu de paramètres qui minimise la fonction objective ;*
- *Le comportement de la diffusion des taux.*

*Cet effet peut être plus ou moins important en fonction des choix réalisés.*

### 3.4 Impact sur le ratio de solvabilité

Les SCR prennent en compte tous les scénarios choqués par rapport au scénario central. L'agrégation des SCR de chaque risque et sous-risque donne le SCR total qui permet d'obtenir le ratio de solvabilité avec :

$$\text{Ratio de solvabilité} = \frac{\text{Fonds propres}}{\text{SCR}_{total}}$$

Les SCR de marché sont obtenus par la différence entre le Best Estimate choqué et le Best Estimate central ainsi que la variation de l'actif. Si la compagnie n'est pas sensible à un risque alors le Best Estimate choqué sera inférieur ou égal au Best Estimate central et le SCR valant zéro n'alimentera alors pas le SCR total.

Dans le cadre d'un changement de modèle de taux on s'attend à des impacts sur le SCR de marché.

La détermination des différents SCR se fera par formule standard.

#### 3.4.1 SCR de marché

Le risque de marché est défini comme les risques provoqués par une fluctuation défavorable de la situation financière qui affecte la valeur de marché des différents instruments financiers qui constituent le portefeuille de la compagnie. La directive Solvabilité 2 impose une exigence de capital associée à ce risque qui doit permettre d'absorber une perte probable suite à la réalisation d'un tel évènement à horizon un an.

Le risque de marché se décompose en plusieurs sous-risques et le capital réglementaire requis pour le risque de marché s'obtient en combinant les différents sous-risques à l'aide d'une matrice de corrélation.

##### **Risque action et immobilier :**

Le risque action sous-entend un changement majeur dans la volatilité des prix de marché des actions. Tous les actifs et passifs qui dépendent du rendement des actions seront impactés. Dans la formule standard, les actions sont séparées en deux catégories, *Autres* et *Global*. La première catégorie désigne les actions non cotées ou provenant de pays émergents ou d'investissements alternatifs. La seconde catégorie représente le reste des actions.

L'hypothèse de modélisation de ce risque est que les actions d'une même catégorie ont la même exposition au risque. Les chocs appliqués sont les suivants (dans une vision simplifiée) :

- Baisse de 39% de la valeur de marché des actions *Global*;
- Baisse de 49% de la valeur de marché des actions *Autres*.

Les deux catégories étant fortement corrélées elles viennent s'ajuster mutuellement dans le temps à hauteur de 10% maximum.

Le risque immobilier est modélisé de la même manière avec une baisse de 25% de la valeur de marché des actifs.

### **Risque de taux d'intérêt :**

C'est le risque provoqué par une variation de la courbe des taux sans risque sur les actifs et passifs concernés.

Du côté passif, les provisions sont affectées par ce risque. Le modèle doit recalculer les provisions techniques à partir de la nouvelle courbe des taux sans risque choquée.

Du côté actif, les obligations à taux fixe et variable sont également affectées ainsi que tous les produits de taux. Ils devront être valorisés avec la nouvelle courbe des taux sans risque.

Dans un cadre stochastique, c'est la courbe des taux sans risque en entrée du modèle qui sera modifiée puis déformée pour chacune des itérations.

Ce risque peut être modélisé pour une hausse ou une baisse des taux.

### **Risque de spread, de concentration et de devise :**

Le risque de spread correspond aux risques de l'évolution du spread des obligations d'entreprises. Sa modélisation se fait par des chocs en fonction du niveau de notation et de la maturité.

Le risque de devise est lié au taux de change entre les monnaies.

Le risque de concentration est issu du manque de diversification entre les différentes classes d'actifs.

Tous ces sous-risques sont agrégés selon la matrice de corrélation suivante afin d'obtenir le risque de marché :

<b>Corrélations de marché</b>	<b>Taux d'intérêt</b>	<b>Action</b>	<b>Immobilier</b>	<b>Spread</b>	<b>Devise</b>	<b>Concentration</b>
<b>Taux d'intérêt</b>	1					
<b>Action</b>	*	1				
<b>Immobilier</b>	*	0.75	1			
<b>Spread</b>	*	0.75	0.5	1		
<b>Devise</b>	0.25	0.25	0.25	0.25	1	
<b>Concentration</b>	0	0	0	0	0	1

\* = 0 si les taux d'intérêt sont choqués à la hausse, 0.5 sinon.

*Dans la suite, les valeurs des SCR ont été modifiés pour raison de confidentialité.*

### 3.4.2 Impact sur les SCR et le ratio de solvabilité

Pour l'observation de l'évolution des SCR, on procède de la même manière que le zoom sur un scénario en sélectionnant une simulation pour chaque matrice de poids. *Simulation 1* et *simulation 4* sont à nouveau les témoins pour cette partie.

Ci-dessous le détail des différents SCR composant le SCR de marché :

SCR	Hull & White	Simulation 1	Simulation 4
Action	190 972 000 €	201 864 000 €	195 135 000 €
Immobilier	118 114 000 €	124 411 000 €	121 248 000 €
Taux (à la baisse)	191 434 000 €	190 057 000 €	203 664 000 €
Concentration	0 €	0 €	0 €
Devise	18 456 000 €	19 449 000 €	18 604 000 €
Spread	243 800 000 €	253 346 000 €	249 224 000 €

Pour finalement obtenir les SCR de marché de chaque simulation :

	Hull & White	Simulation 1	Simulation 4
SCR de marché	626 000 000 €	648 000 000 €	646 000 000 €

Les SCR des autres modules sont sensiblement les mêmes pour les trois simulations.

Le SCR final est obtenue après agrégation des divers SCR des autres modules :

	Hull & White	Simulation 1	Simulation 4
SCR final	680 000 000 €	672 000 000 €	703 000 000 €

L'impact sur le ratio de solvabilité qui en découle est le suivant :

	Hull & White	Simulation 1	Simulation 4
Ratio	Référence	+12%	-4,5%

Entre les deux simulations du CIR2++, le SCR de marché non amorti n'est pas modifié et ceux malgré les différences observées précédemment. Ces deux SCR sont en légère hausses par rapport à la simulation Hull & White.

La diminution du Best Estimate permet l'augmentation des impôts différés qui viennent amortir le SCR final. La *simulation 1* est caractérisée par une forte baisse du BE. Ainsi malgré un SCR de marché en hausse par rapport à la simulation de référence, le SCR final est plus faible ce qui a pour effet d'augmenter les fonds propres et finalement d'augmenter le ratio de solvabilité. Les impôts différés de la *simulation 4* ne sont pas assez important pour amortir suffisamment le SCR et le ratio s'en voit ainsi dégradé.

Avec un écart de 16,5%, la volatilité du CIR2++ sur le ratio de solvabilité est importante.

### 3.5 Gouvernance du modèle CIR2++

Le CIR2++ est un modèle de taux exigeant en termes de maîtrise. Comme le montre l'étude, chaque choix dans son procédé d'utilisation peut avoir un impact significatif sur les résultats à venir.

Dans le calibrage, sur une même matrice de prix des swaptions l'utilisation de deux graines conduit à des résultats différents alors que pourtant les deux jeux de paramètres assurent d'avoir une bonne reproduction des prix. L'utilisation d'une seconde matrice de prix de swaptions (avec des tenors et des maturités différentes), vient rajouter à nouveau des différences dans les résultats observés. Si on finit par comparer les résultats issus de ces deux calibrages alors on peut obtenir des volatilités importantes sur des indicateurs tels que le ratio de solvabilité. Un écart aussi important (plus de 16%) introduit par un modèle de taux rend délicate la maîtrise de l'outil. Il existe d'autres réglages dans l'algorithme d'optimisation comme les seuils à respecter ou l'importance d'une pénalisation. Le choix des instruments financiers rentre également en jeu.

La visualisation des spectres de diffusion des taux ou même la valeur du Best Estimate n'est pas suffisante pour prévoir avec exactitude l'évolution du ratio de solvabilité. On le voit avec la *simulation 4* qui malgré un BE en baisse et des niveaux de taux plus élevés observe son ratio qui diminue.

Il convient d'établir pour l'institution financière qui souhaite utiliser ce modèle une gouvernance efficace et une procédure de calibrage robuste. Des axes de réflexion peuvent être envisagés :

- Effectuer un travail dans la sélection de la graine ;
- Imposer des seuils sur les paramètres ;
- Réfléchir sur la reproduction attendue des prix de marché. Comme le montre les matrices d'écart relatifs des prix obtenus par la méthode de CDG et des prix de marchés, même si la zone à reproduire souhaitée est satisfaisante, les autres prix (ayant un poids nul dans le calibrage) sont très éloignés de la réalité. Faut-il se focaliser sur une zone en particulier ou un plutôt essayer de reproduire au mieux toute la nappe ?
- Dans l'observation détaillée des scénarios on peut décider de conserver ou non certaines situations. Est-ce légitime de s'arrêter à des scénarios catastrophe du type « remontée soudaine des taux » ou souhaite-on aller plus loin et également simuler les scénarios encore plus catastrophiques ? D'autant que le contexte économique change chaque année et il s'agit de redéfinir la notion de crédibilité des scénarios extrêmes ;
- Envisager la possibilité de recalibrer le modèle pour les chocs liés à la courbe des taux.

## Conclusion

Le modèle de taux CIR2++ correspond aux exigences imposées par l'ACPR : sur la base de la courbe des taux réglementaire il reproduit la structure par terme initiale ainsi que les prix de marché avec une bonne précision. C'est de plus un modèle qui ne suppose aucune possibilité d'arbitrage. Son calibrage est effectué à l'aide d'une méthode robuste adaptée à la courbe des taux sans risque en vigueur, avec des instruments financiers fiables.

De plus, malgré la distribution en khi-deux des deux facteurs le CIR2++ génère naturellement des taux négatifs dans une quantité raisonnable. Le modèle s'adapte parfaitement pour l'environnement de taux bas de la zone euro.

Les simulations obtenus à l'aide de ce modèle satisfont notre vision des taux à long terme et présentent en moindre mesure des trajectoires considérées comme aberrantes.

Néanmoins il subsiste plusieurs points d'attention sur ce modèle et plus particulièrement sur les différents leviers possibles :

- Le nombre de paramètres en entrée est important, si bien qu'il devient difficile de faire une étude exhaustive sur les impacts de chacun et la manière dont ils fonctionnent ensemble. Néanmoins une bonne compréhension de leur rôle est nécessaire pour la maîtrise et l'utilisation du modèle ;
- Le calibrage est une étape cruciale qui ne peut être négligée. Parce que le modèle possède 8 paramètres l'algorithme de calibrage doit être performant. Son réglage à travers les différents d'expert et son fonctionnement doivent être maîtrisés : le choix de la matrice de poids doit être réfléchi en accord avec le profil de l'assureur, les instruments financiers à reproduire doivent également être pertinents et respecter plusieurs critères. La graine utilisée, les seuils ou encore la précision attendue doivent faire l'objet d'analyses et de justification.

Il apparait dans la production des scénarios économiques de multiples et complexes étapes pour lesquelles plusieurs leviers interviennent. Les résultats obtenus à l'aide de ces scénarios peuvent présenter des écarts en fonction des choix effectués.

Il convient d'établir, pour l'institution financière qui souhaite utiliser ce modèle, une procédure solide du calibrage valable dans tous les environnements économiques.

Plus généralement, un changement de modèle de taux nécessite une bonne gouvernance. Le passage à un modèle plus compliqué avec plus de paramètres demande une attention particulière, comme l'illustre le changement du Hull & White par le CIR2++.

# Bibliographie

**Frédéric PLANCHET & Aymric KAMEGA (2012)** - *Générateurs de scénarios économiques (GSE) en assurance*

**Stéphane CANU (INSA Rouen)** - *Méthodes numériques pour l'ingénieur*

**Philippe PRIAULET (Université d'Evry)** - *Modèles de la courbe des taux d'intérêt*

**EIOPA (2017)** - *Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures*

**CFO Forum (2009)** - *Market Consistent Embedded Value Basis for Conclusions*

**Alaeddine Faleh, Frédéric Planchet, Didier Rullière (2010)** - *Les générateurs de Scénarios Economiques : de la conception à la mesure de la qualité*

**ACPR (2015)** - *Calcul du SCR en formule standard*

**Damiano BRIGO & Fabio MERCURIO (2007)** - *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*

**Pierre COLLIN-DUFRESNE & Robert GOLDSTEIN (2002)** - *Pricing swaptions within an affine framework. The Journal of Derivatives*

**Mohamed MAJRI (ISUP)** - *Introduction à la gestion actif-passif d'une compagnie d'assurance*

**Tahmoor QURESHI (2013)** - *Scénarios économiques dans un contexte Solvabilité II*

**N. EL KAROUI, S. LOISEL, J-L. PRIGENT, J. VEDANI (2016)** - *Market inconsistencies of the market-consistent European life insurance economic valuations: pitfalls and practical solutions*

## Annexe 0 – Définitions et notations

*Dans cette partie, les notions utiles dans la suite sont invoquées succinctement et sans rentrer dans les détails. Elles sont décrites de sorte que le lecteur comprenne le cheminement logique des parties suivantes sans alourdir la rédaction. Ces notions seront détaillées si besoin dans les parties plus techniques du mémoire.*

### **1 - Solvabilité 2 et bilan économique**

La Directive Solvabilité 2 est un ensemble de règles édité par la Commission Européenne et adopté en 2009 par le Conseil de l'Europe et le Parlement Européen. Son but est de définir de nouvelles exigences de solvabilité des entreprises de façon harmonisée en Europe, et de les encourager à mieux connaître et évaluer les risques auxquels elles sont exposées. Cela passe notamment par la nécessité pour ces entreprises de mobiliser suffisamment de capital dans leurs fonds propres afin d'être solvable à horizon d'un an avec une probabilité 99,5%.

Une entreprise est solvable si elle est capable de faire face à ses engagements, c'est-à-dire de produire suffisamment pour rembourser ses dettes financières et ses assurés. Une partie des engagements est garantie par le capital détenu par les propriétaires de l'entreprise, les fonds propres. Cette sécurité de remboursement est renforcée par la Commission Européenne qui impose dans sa directive des fonds minimums à détenir.

Sans rentrer dans les détails Solvabilité 2 impose un nouveau bilan aux assureurs. L'actif doit être valorisé en "*fair value*", c'est-à-dire en prenant compte les plus-values qu'une fois réellement réalisées. L'actif du bilan économique est évalué en valeur de marché par actualisation des valeurs des placements selon la courbe des taux en vigueur. Cette méthode a pour objectif de mieux refléter la situation économique actuelle de l'entreprise. L'actif est constitué des placements dont la valeur fluctuera selon divers paramètres tels que la performance des marchés actions, les taux et courbes de taux en vigueur, etc.

Le passif du bilan se compose de deux grandes parties : les provisions techniques et les fonds propres. Dans l'évaluation des provisions, il faut distinguer deux types de passifs, les répliquables ("*hedgable*") et les non répliquables. On considère qu'un contrat est répliquable si ses flux sont parfaitement représentés par des instruments financiers disponibles dans un marché profond, liquide et transparent. On peut ainsi évaluer les provisions techniques liées à ce contrat d'assurance avec la valeur de marché du portefeuille répliquant. À l'inverse si le passif n'est pas répliquable alors la provision sera égale à la somme du Best Estimate et de la marge pour risque.

Les méthodes de calculs des provisions techniques sont les suivantes :

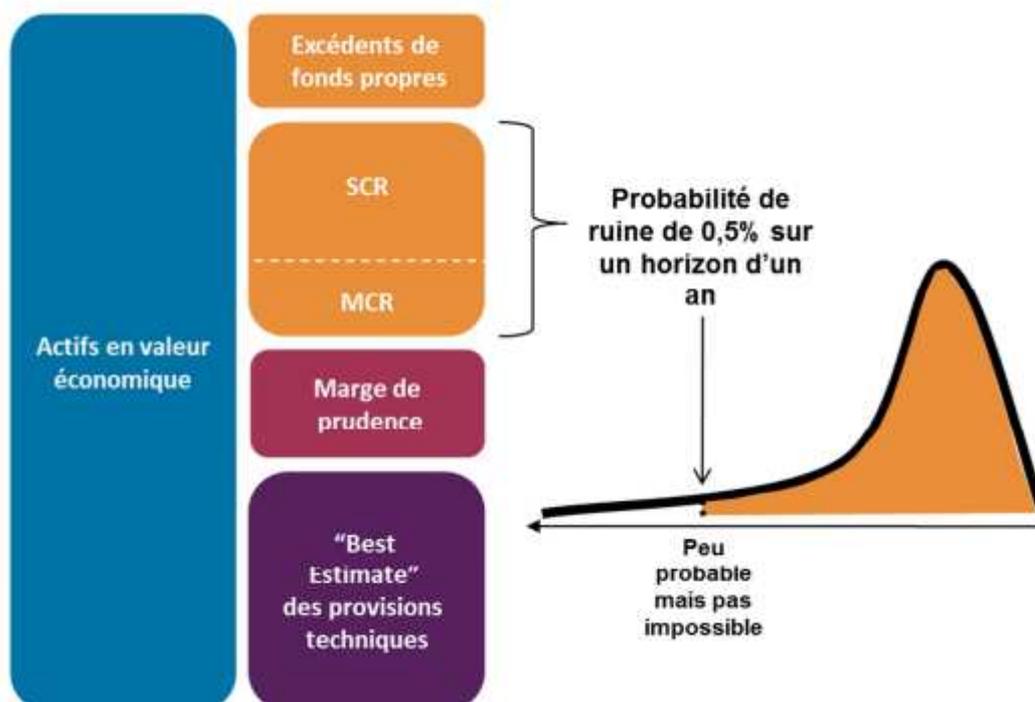
- **La marge pour risque** est calculée de manière à garantir que la valeur des provisions techniques prudentielles est équivalente au montant qu'une entreprise agréée pour pratiquer les opérations d'assurance demanderait pour reprendre et honorer les engagements d'assurance.
- **Le Best Estimate** correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs (cotisations, prestations, frais, fiscalité...) compte tenu de la valeur temporelle de l'argent estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente, soit la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs.

Les entreprises d'assurance procèdent à une évaluation séparée du Best Estimate et de la marge de risque.

Les fonds propres sont calculés comme la différence entre l'actif et les provisions techniques en vision Best Estimate augmentées de la marge pour risque de sorte à obtenir l'égalité entre le passif et l'actif. Les fonds propres servent à absorber les imprévus économiques. Ils sont composés d'un montant minimum imposé par les agences de régulation dont les méthodes de calculs sont strictes et si possible d'un excédent.

$$\text{Fonds propres} = \text{Montant minimum réglementaire (SCR + MCR)} + \text{Excédents}$$

Le nouveau bilan imposé par cette directive européenne est ainsi plus prudentiel que précédemment.



Bilan économique sous Solvabilité 2

## 2 - Complément sur le Best Estimate

Le calcul du Best Estimate doit s'effectuer sur un horizon suffisamment long pour le portefeuille d'assuré s'épuise complètement ou du moins que les provisions calculées avec cet horizon soient très proche de si le portefeuille était effectivement épuisé.

Les flux sortants pris en compte sont les prestations et tous types de dépenses et frais. De plus, les provisions en Best Estimate sont calculées brutes de réassurance. On peut noter qu'une partie des primes futures est maintenant prise en compte.

On obtient la formule suivante pour sa détermination :

$$BE = E \left[ \sum_{t=1}^T \frac{F_t}{(1 + r_t)^t} \right]$$

Avec :

$F_t$  les flux à l'année t (incluant prestations, frais, primes, chargements, etc.)

$r_t$  le taux sans risque à l'année t

$T$  l'horizon de projection (généralement 60 ans)

Dans un cadre stochastique sur un grand nombre de scénarios indépendants on obtient par la méthode de Monte-Carlo le Best Estimate réglementaire de la façon suivante :

$$BE^{Réglementaire} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \frac{F_t}{(1 + r_t)^t}$$

Le Best Estimate représente un indicateur solide dans le cadre d'études d'impacts divers.

## 3 - SCR, MCR et ratio de solvabilité

Solvabilité 2 impose des montants minimums de fonds propres :

- **Le MCR – Minimum Capital Requirement** : il correspond au niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'autorité de contrôle intervient systématiquement. Une intervention de l'ACPR peut conduire soit à la remise en bonne santé de l'entreprise soit à sa liquidation ;
- **Le SCR – Solvency Capital Requirement** : il représente le capital cible nécessaire pour absorber des pertes inattendues. Le SCR se décompose en SCR de module et sous-module pour les différents risques auquel un assureur est soumis (marché, longévité ...). Il doit permettre à l'assureur de subir une perte probable à un niveau de confiance prédéterminé à horizon un an. Le SCR est sensé assurer une probabilité de ruine au moins inférieur à 0,5% sur un an.

Ces deux montants sont calculés à partir du bilan économique de la compagnie en question, soit par une formule standard proposée par la Commission Européenne, soit par un modèle interne (complet ou partiel) développé par l'entreprise.

Le SCR est décomposé en plusieurs modules tels que *Marché, Vie, non-Vie*, etc. Dans chacun des modules on retrouve des sous-modules propre à chaque risque qui y est associé. Par exemple, le module du  $SCR^{Marché}$  est composé de 6 sous-modules : *Taux d'intérêt, Action, Immobilier, Spread de crédit, Change, Concentration*.

Un  $SCR^{sous-module}$  est calculé pour chaque sous-module en effectuant un stress par rapport au scénario central. Sa valeur est obtenue avec la manière suivante

$$SCR^{sous-module} = \max(0, BE^{Choc \text{ associé au sous-module}} - BE^{Central})$$

Tous les  $SCR^{sous-module}$  sont agrégés à l'aide d'une matrice de corrélation qui permet la prise en compte de l'interdépendance des risques.

L'agrégation permet d'obtenir le  $SCR^{module}$  final puis le SCR total.

Le ratio de solvabilité permet d'établir une estimation de la capacité à long terme d'une entreprise à rembourser ses dettes. On l'obtient en effectuant le rapport des fonds propres sur le SCR. C'est un indicateur efficace de la santé de l'entreprise.

#### **4 - Risques liés aux produits de taux**

Le risque lié aux taux nominaux est à l'intérieur du module marché du SCR de la formule standard. Les produits de taux portent trois types de risque.

- **Le risque de taux**, qui est le risque que les taux d'intérêt anticipés évoluent dans le temps. Par exemple, le produit de taux correspondant au taux sans risque est uniquement soumis à ce risque ;
- **Le risque de spread**, qui est le risque de voir les spread de crédit de l'émetteur du produit de taux se détériorer. Les obligations d'états, particulièrement celles des pays de la zone économique européenne, sont moins touchées par ce risque ;
- **Le risque de change**, c'est le risque de voir la volatilité des taux de change évoluer.

Comme vu précédemment, dans le cadre de la formule standard ces trois risques sont pris en compte dans le  $SCR^{marché}$  et chacun a son propre SCR.

#### **5 - Absence d'opportunité d'arbitrage et univers risque neutre**

L'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) est une hypothèse financière qui stipule qu'il est impossible de faire un investissement de 0€ aujourd'hui et qui rapporte une quantité certaine dans le futur. Autrement dit, deux actifs ayant les mêmes flux auront le même prix initial.

L'AOA est très importante dans la théorie financière puisqu'elle implique l'existence d'une probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$ . Sous cette probabilité, le prix actualisé au taux sans risque d'un actif est martingale sous  $\mathbb{Q}$ . On peut donc à partir de l'hypothèse d'AOA construire l'univers risque neutre.

En univers risque-neutre, les investisseurs sont "neutres" au risque, c'est-à-dire que pour un surplus de risque, ils ne demandent pas un surplus de rentabilité par rapport au taux sans risque. En moyenne, les actifs rapportent le taux sans risque.

C'est une hypothèse forte et nécessaire dans le cadre des calculs réglementaires imposés par Solvabilité 2.

## **6 - Obligation et taux zéro-coupon**

Un zéro-coupon de maturité  $T$  est un titre qui verse 1€ à l'instant  $T$ . En notant  $P(t, T)$  le prix d'un zéro-coupon à l'instant  $t$  de maturité  $T$ , on a l'égalité  $P(T, T) = 1$  avec  $t < T$

En particulier, on obtient le prix du zéro-coupon vu de 0 (avec  $r$  le taux actuariel) :

$$P(0, T) = \frac{1}{(1+r)^T} \text{ dans le cadre discret}$$

$$P(0, T) = e^{-rT} \text{ dans le cadre continu}$$

Un taux zéro-coupon pour un instant  $t$  et une maturité  $T$  est le rendement du zéro-coupon de maturité  $T$  à l'instant  $t$ . En notant  $R(t, T)$  ce taux on a le prix de l'obligation zéro-coupon :

$$P(t, T) = \frac{1}{(1-R(t, T))^{T-t}} = e^{-R(t, T)(T-t)} \text{ pour } t < T$$

Le taux zéro-coupon continu est alors obtenu avec :

$$R(t, T) = -\frac{1}{T-t} \ln P(t, T) \text{ pour } t < T$$

## **7 - Taux d'intérêt instantané**

Le taux d'intérêt instantané  $r(t)$ , ou taux spot ou encore taux court, est le taux d'investissement entre  $t$  et  $t + dt$  avec  $dt$  qui tend vers 0.

On peut voir mathématiquement le taux court instantané en  $t$  comme la limite du rendement  $R(t, T)$  lorsque la maturité  $T$  tend vers  $t$ .

$$r(t) = \lim_{T \rightarrow t} R(t, T)$$

On peut ensuite déduire la valorisation d'un zéro-coupon sous mesure martingale en fonction du taux d'intérêt spot avec la relation :

$$P(t, T) = E^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r(s) ds} \right]$$

## **8 - Taux forward et taux forward instantané**

Un taux forward est un taux d'intérêt d'un emprunt pour des périodes futures implicitement donné par les taux zéro-coupon. C'est en fait le taux zéro-coupon implicite qui se déduit de la structure par terme des taux zéro-coupon.

À partir du prix des zéro-coupon on peut déterminer le taux forward instantané  $f(t, T)$  déterminé à la date  $t$  et commençant à la date  $T$  avec :

$$f(t, T) = - \frac{\partial \ln P(t, T)}{\partial T} = \frac{\partial (R(t, T) \cdot T)}{\partial T} = R(t, T) + T \cdot \frac{\partial R(t, T)}{\partial T}$$

Avec  $R(t, T)$  le taux zéro-coupon continu vu de  $t$  de maturité  $T$

On peut déduire le prix des zéro-coupon de la façon suivante :  $P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s) ds}$

## **9 - Structure par terme des taux**

La structure par terme des taux est la fonction qui donne les différents taux de la date  $t$  en fonction de leur maturité  $T$ . Il existe une multitude de courbes de taux au sein d'un pays ou d'une zone économique. Il faut néanmoins distinguer les courbes de marché et les courbes implicites.

Une courbe de marché est construite directement à partir des cotations de marché tandis que les courbes implicites sont dérivées indirectement à partir des cotations de marché.

Parmi les courbes de marché, on retrouve par exemple la courbe des taux swap construite à partir des taux fixes payés dans un contrat de swap contre un taux variable pour différentes maturités. Parmi les courbes implicites, on retrouve la courbe des taux zéro-coupon ou la courbe des taux forwards instantanés construite à partir des grandeurs vues précédemment.

Avec la réglementation S2, les engagements envers les assurés doivent être évalués « en valeur de marché » (à l'opposé de la « valeur comptable ») en utilisant une courbe des taux supposée être sans risque.

On appelle donc la structure par terme des taux zéro-coupon à la date  $t$  la courbe donnée par  $T \rightarrow R(t, T)$ .

*La notion de courbe des taux sans risque sera revue plus en détail dans le chapitre 2.*

**Annexe 1 : Démonstration du prix des zéro-coupon avec un modèle de Hull & White à un facteur**

Le modèle de Hull & White est un modèle affine c'est-à-dire que le prix des zéro-coupon peut s'écrire sous la forme :

$$P(t, T)^{H\&W} = A(t, T)e^{-r(t)B(t, T)}$$

Le théorème de Feynman-Kac permet de trouver l'expression de  $f(t, x)$ , telle que :

$$f(t, x) = E \left[ e^{-\int_0^t h(X_s) ds} g(X_t) \right]$$

Avec  $X$  un processus stochastique solution d'une équation différentielle stochastique de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

Le théorème permet d'affirmer que  $f$  est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = a(x) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} b(x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) - h(x)f(t, x) \\ f(0, x) = g(x) \end{cases}$$

On peut appliquer ce résultat à notre problème en considérant  $P(t, T) = f(t, r_t)$  et en faisant les identifications nécessaires.

L'expression de  $P(t, T)^{H\&W}$  se trouve en résolvant donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t, r_t) + (\theta(t) - ar_t) \frac{\partial f}{\partial r}(t, r_t) + \frac{1}{2} \sigma^{taux^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = r_t f(t, r_t) \\ f(T, r_t) = P(T, T) = 1 \end{cases}$$

En se souvenant de l'expression théorique affine de  $P(t, T)$  on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t}(t, T) - \theta(t)A(t, T)B(t, T) + \frac{1}{2} \sigma^{taux^2} A(t, T)B^2(t, T) = 0 \\ \frac{\partial A}{\partial t}(t, T) = -aB(t, T) + 1 = 0 \end{cases}$$

Sachant que  $P(T, T) = 1$  on a les conditions  $\begin{cases} A(T, T) = 1 \\ B(T, T) = 0 \end{cases}$  et on obtient ainsi l'expression de  $B(t, T)$  avec la seconde équation :

$$B(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)})$$

On intègre la première équation de sorte à avoir :

$$\ln A(t, T) = - \int_t^T \theta(u)B(u, T)du - \frac{\sigma^{taux^2}}{2a^2} (B(t, T) - (T - t)) - \frac{\sigma^{taux^2}}{4a} B^2(t, T)$$

Il suffit maintenant de remplacer  $\theta(u)$  par sa valeur et d'intégrer en se souvenant que la définition du taux forward instantané donne la relation

$$-\int_t^T f^M(0, u) du = \ln \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)}$$

Il est à noter que l'on aurait pu retrouver la valeur de  $\theta(t)$  à partir de de l'expression précédente appliquée pour les prix zéro-coupon dans le modèle H&W puis en dérivant plusieurs fois.

Finalement on trouve l'expression du prix d'un zéro-coupon de maturité  $T$  pour un instant  $t < T$  :

$$P(t, T)^{H\&W} = A(t, T)e^{-r_t B(t, T)}$$

Avec

$$A(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} e^{\left[ B(t, T) f^M(0, t) - \frac{\sigma^2 \tau^2}{4a} (1 - e^{-2at}) B^2(t, T) \right]}$$

$$B(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)})$$

**Annexe 2 : Méthode de Colling-Dufresne Goldstein pour l'approximation du prix des swaptions dans le modèle CIR2++**

En reprenant les notations du chapitre 2, et afin d'être consistant avec les notations usuelles utilisées pour les modèles affines, nous avons

$$P(t, T; x(t), y(t), \alpha) = \Phi^\xi(t, T; \alpha) \times \exp\{B_0(t, T) - B_1(t, T)x_1(t) - B_2(t, T)x_2(t)\}$$

avec

$$B_0(t, T) := \log(A^{CIR}(t, T; \alpha_1)) + \log(A^{CIR}(t, T; \alpha_2))$$

$$B_j(t, T) := B^{CIR}(t, T; \alpha_j) \quad \text{pour } j \in \{1, 2\}.$$

Nous notons  $CB(T_0)$  le prix à la date  $T_0$  d'une obligation versant un flux  $C_i$  à chaque date  $T_i$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ , avec dans le cas d'une obligation à taux fixe  $k$ , de nominal  $K$ ,  $C_i = k\delta_i K$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N-1\}$ ,  $C_N := (k\delta_N + 1)K$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\delta_i := T_i - T_{i-1}$ . Nous avons alors :

$$CB(T_0) = \sum_{i=1}^N P(T_0, T_i) \times C_i.$$

Ainsi, nous obtenons dans le modèle CIR2++ :

$$[CB(T_0)]^m = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N (C_{i_1} \times \dots \times C_{i_m}) \times (\Phi^\xi(T_0, T_{i_1}) \times \dots \times \Phi^\xi(T_0, T_{i_m})) \\ \times \exp\{F_0^m - F_1^m \times x(T_0) - F_2^m \times y(T_0)\}$$

avec

$$F_j^m = \sum_{k=1}^m B_j(T_0, T_{i_k}) \quad \text{pour } j \in \{0, 1, 2\}.$$

Si nous notons maintenant  $W \geq T_0$  une maturité quelconque et  $\mathbb{Q}^W$  la mesure forward neutre associée, nous pouvons calculer le moment de la distribution de l'obligation :

$$L^m(t, T_0, W) = E_t^{\mathbb{Q}^W} [\exp\{F_0^m - F_1^m \times x(T_0) - F_2^m \times y(T_0)\}]$$

$$L^m(t, T_0, W) = \frac{E_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^W r_v dv} \exp\{F_0^m - F_1^m \times x(T_0) - F_2^m \times y(T_0)\} \right]}{P(t, W)}$$

$$L^m(t, T_0, W) = \frac{E_t^{\mathbb{Q}} \left[ E_{T_0}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_{T_0}^W r_v dv} \right] e^{-\int_t^{T_0} r_v dv} e^{F_0^m - F_1^m \times x(T_0) - F_2^m \times y(T_0)} \right]}{P(t, W)}$$

$$L^m(t, T_0, W) = \frac{E_t^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^{T_0} r_v dv} \exp\{F_0^{*,m} - F_1^{*,m} \times x(T_0) - F_2^{*,m} \times y(T_0)\} \right]}{P(t, W) \times 1/\Phi^\xi(T_0, W; \alpha)}$$

avec

$$F_j^{*,m} := F_j^m + B_j(T_0, W) \quad \text{pour tout } j \in \{0,1,2\}.$$

En résolvant l'EDP associée à l'espérance conditionnelle précédente, un argument de vérification nous donne la solution  $L^m(t, T_0, W)$  :

$$L^m(t, T_0, W) = \frac{\Phi^\xi(T_0, W; \alpha)}{P(t, W)} \times \exp\{M^m(t, T_0) - N_1^m(t, T_0)x_1(t) - N_2^m(t, T_0)x_2(t)\}$$

avec  $M^m, N_1^m$  et  $N_2^m$  solutions des équations

$$M'(t) = \varphi(t) + k_1\theta_1 N_1^m(t) + k_2\theta_2 N_2^m(t) \quad \text{et} \quad M(T_0) = F_0^*$$

$$N_j(t) = -1 + k_j N_j(t) + \frac{1}{2}\sigma_j^2 N_j^2(t) \quad \text{et} \quad N_j(T_0) = F_j^*$$

dont les solutions sont :

$$\begin{aligned} M^m(t, T_0) &= F_0^{*,m} - \int_t^{T_0} \varphi(v) dv \\ &+ \sum_{j=1}^2 \left( \frac{2k_j\theta_j}{\gamma_j - k_j} \right) (T_0 - t) - \frac{2k_j\theta_j}{\sigma_j^2} \log \left[ \frac{(F_j^{*,m} - \lambda_{j,-})e^{\gamma_j(T_0-t)} - (F_j^{*,m} - \lambda_{j,+})}{\frac{2\gamma_j}{\sigma_j^2}} \right] \\ N_j^m(t, T_0) &= \frac{F_j^{*,m}(\lambda_{j,+}e^{\gamma_j(T_0-t)} - \lambda_{j,-}) + \frac{2}{\sigma_j^2}(e^{\gamma_j(T_0-t)} - 1)}{F_j^{*,m}(e^{\gamma_j(T_0-t)} - 1) - (\lambda_{j,-}e^{\gamma_j(T_0-t)} - \lambda_{j,+})} \\ \gamma_j &:= \sqrt{k_j^2 + 2\sigma_j^2} \quad \text{et} \quad \lambda_{j,\pm} := \frac{-k_j \pm \gamma_j}{\sigma_j^2}. \end{aligned}$$

Au final, nous obtenons :

$$L^m(t, T_0, W) = \frac{\Phi^\xi(t, W; \alpha)}{P(t, W)} \times \exp\{\bar{M}^m(t, T_0) - N_1^m(t, T_0)x_1(t) - N_2^m(t, T_0)x_2(t)\}$$

avec

$$\bar{M}^m(t, T_0) = F_0^{*,m} + \sum_{j=1}^2 \left( \frac{2k_j\theta_j}{\gamma_j - k_j} \right) (T_0 - t) - \frac{2k_j\theta_j}{\sigma_j^2} \log \left[ \frac{(F_j^{*,m} - \lambda_{j,-})e^{\gamma_j(T_0-t)} - (F_j^{*,m} - \lambda_{j,+})}{\frac{2\gamma_j}{\sigma_j^2}} \right]$$

Dans le cadre d'une méthode numérique pour le pricing des swaptions on va utiliser les fonctions définies précédemment en 5 étapes :

1. Calcul pour tout  $m \in \{1, \dots, M\}$  et  $i \in \{0, \dots, N\}$  de :

$$\mu_m^i := E_t^{T_i}[(CB(T_0))^m] = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^N (C_{i_1} \times \dots \times C_{i_m}) \times L^m(t, T_0, T_i)$$

2. Calcul pour tout  $m \in \{1, \dots, M\}$  et  $i \in \{0, \dots, N\}$  de  $c_m^i$  :

$$c_1^i = \mu_1^i$$

$$c_2^i = \mu_2^i - (\mu_1^i)^2$$

$$c_3^i = \mu_3^i - 3\mu_1^i\mu_2^i + 2(\mu_1^i)^3$$

$$c_4^i = \mu_4^i - 4\mu_1^i\mu_3^i - 3(\mu_2^i)^2 + 12(\mu_1^i)^2\mu_2^i - 6(\mu_1^i)^4$$

$$c_5^i = \mu_5^i - 5\mu_1^i\mu_4^i - 10\mu_2^i\mu_3^i + 20(\mu_1^i)^2\mu_3^i + 30\mu_1^i(\mu_2^i)^2 - 60(\mu_1^i)^3\mu_2^i + 24(\mu_1^i)^5$$

$$c_6^i = \mu_6^i - 6\mu_1^i\mu_5^i - 15\mu_2^i\mu_4^i + 30(\mu_1^i)^2\mu_4^i - 10(\mu_3^i)^2 + 120\mu_1^i\mu_2^i\mu_3^i - 120(\mu_1^i)^3\mu_3^i \\ + 30(\mu_2^i)^3 - 270(\mu_1^i)^2(\mu_2^i)^2 + 360(\mu_1^i)^4\mu_2^i - 120(\mu_1^i)^6$$

$$c_7^i = \mu_7^i - 7\mu_1^i\mu_6^i - 21\mu_2^i\mu_5^i - 35\mu_3^i\mu_4^i + 140\mu_1^i(\mu_3^i)^2 - 630\mu_1^i(\mu_2^i)^3 + 210\mu_1^i\mu_2^i\mu_4^i \\ - 1260(\mu_1^i)^2\mu_2^i\mu_3^i + 42(\mu_1^i)^2\mu_5^i + 2520(\mu_1^i)^3(\mu_2^i)^2 - 210(\mu_1^i)^3\mu_4^i \\ + 210(\mu_2^i)^2\mu_3^i + 840(\mu_1^i)^4\mu_3^i - 2520(\mu_1^i)^5\mu_2^i + 720(\mu_1^i)^7$$

3. Calcul pour tout  $m \in \{1, \dots, M\}$  et  $i \in \{0, \dots, N\}$  de  $\gamma_m^i$  :

$$\gamma_0^i = 1 + \frac{3}{(c_2^i)^2} \left( \frac{c_4^i}{4!} \right) - \frac{15}{(c_2^i)^3} \left( \frac{c_6^i}{6!} + \frac{1}{2} \frac{(c_3^i)^2}{(3!)^2} \right);$$

$$\gamma_1^i = -\frac{3}{(c_2^i)^2} \left( \frac{c_3^i}{3!} \right) + \frac{15}{(c_2^i)^3} \frac{c_5^i}{5!} - \frac{105}{(c_2^i)^4} \left( \frac{c_7^i}{7!} + \frac{c_3^i c_4^i}{(3!)(4!)} \right);$$

$$\gamma_2^i = -\frac{6}{(c_2^i)^3} \left( \frac{c_4^i}{4!} \right) + \frac{45}{(c_2^i)^4} \left( \frac{c_6^i}{6!} + \frac{1}{2} \frac{(c_3^i)^2}{(3!)^2} \right);$$

$$\gamma_3^i = \frac{1}{(c_2^i)^3} \left( \frac{c_3^i}{3!} \right) - \frac{10}{(c_2^i)^4} \frac{c_5^i}{5!} + \frac{105}{(c_2^i)^5} \left( \frac{c_7^i}{7!} + \frac{c_3^i c_4^i}{(3!)(4!)} \right);$$

$$\gamma_4^i = \frac{1}{(c_2^i)^4} \left( \frac{c_4^i}{4!} \right) - \frac{15}{(c_2^i)^5} \left( \frac{c_6^i}{6!} + \frac{1}{2} \frac{(c_3^i)^2}{(3!)^2} \right);$$

$$\gamma_5^i = \frac{1}{(c_2^i)^5} \frac{c_5^i}{5!} - \frac{21}{(c_2^i)^6} \left( \frac{c_7^i}{7!} + \frac{c_3^i c_4^i}{(3!)(4!)} \right);$$

$$\gamma_6^i = \frac{1}{(c_2^i)^6} \left( \frac{c_6^i}{6!} + \frac{1}{2} \frac{(c_3^i)^2}{(3!)^2} \right);$$

$$\gamma_7^i = \frac{1}{(c_2^i)^7} \left( \frac{c_7^i}{7!} + \frac{c_3^i c_4^i}{(3!)(4!)} \right).$$

4. Calcul pour tout  $m \in \{1, \dots, M\}$  et  $i \in \{0, \dots, N\}$  de  $\lambda_m^i$ . Par souci de simplification des notations, nous notons pour tout  $i \in \{0, \dots, N\}$  :

$$D^i := \mathcal{N} \left[ \frac{c_1^i - K}{\sqrt{c_2^i}} \right] \text{ avec } \mathcal{N} \text{ la fonction de répartition d'une } \mathcal{N}(0,1);$$

$$d^i := \frac{1}{\sqrt{2\pi c_2^i}} \exp \left\{ -\frac{(K - c_1^i)^2}{2c_2^i} \right\}.$$

Les valeurs de  $\lambda_m^i$  pour tout  $m \in \{1, \dots, M\}$  et  $i \in \{0, \dots, N\}$  sont donc :

$$\lambda_0^i = D^i;$$

$$\lambda_1^i = c_2^i d^i;$$

$$\lambda_2^i = c_2^i D^i + c_2^i (K - c_1^i) d^i;$$

$$\lambda_3^i = [c_2^i (K - c_1^i)^2 + 2(c_2^i)^2] d^i;$$

$$\lambda_4^i = 3(c_2^i)^2 D^i + [c_2^i (K - c_1^i)^3 + 3(c_2^i)^2 (K - c_1^i)] d^i;$$

$$\lambda_5^i = [c_2^i (K - c_1^i)^4 + 4(c_2^i)^2 (K - c_1^i)^2 + 8(c_2^i)^3] d^i;$$

$$\lambda_6^i = 15(c_2^i)^3 D^i + [c_2^i (K - c_1^i)^5 + 5(c_2^i)^2 (K - c_1^i)^3 + 15(c_2^i)^3 (K - c_1^i)] d^i;$$

$$\lambda_7^i = [c_2^i (K - c_1^i)^6 + 6(c_2^i)^2 (K - c_1^i)^4 + 24(c_2^i)^3 (K - c_1^i)^2 + 48(c_2^i)^4] d^i.$$

5. Calcul du prix de la Swaption à date initiale  $t$  :

$$Swn(t) = \sum_{i=1}^N C_i \times P(t, T_i) \times \left( \sum_{j=0}^7 \gamma_j^i \lambda_j^i \right) - K \times P(t, T_0) \times \left( \sum_{j=0}^7 \gamma_j^0 \lambda_j^0 \right)$$