

**Mémoire présenté le :**

**pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA  
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : KABORE Tinbkieta Sidney Amos

Titre **Validation d'un générateur de scénarios économiques risque  
neutre et allocation de fuite de modèle par facteur de risque**

Confidentialité :  NON  OUI (Durée :  1 an  2 ans)

*Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus*

*Membres présents du jury de l'Institut  
des Actuaires*

David DUBOIS

Faris ROUCHATI

Eric RALAIMIADANA

*Membres présents du jury de l'ISFA*

Anne EYRAUD

signature *Entreprise :*

Nom : Abeille Assurances

*Signature :*

*Directeur de mémoire en entreprise :*

Nom : Aurélien CHOQUER

*Signature :*

*Invité :*

*Nom :*

*Signature :*

**Autorisation de publication et de mise  
en ligne sur un site de diffusion de  
documents actuariels (après expiration  
de l'éventuel délai de confidentialité)**

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat





# Résumé

Un générateur de scénarios économiques (GSE) est un outil stochastique qui permet de simuler différentes situations économiques possibles dans le futur sur la base d'un ensemble de variables, de données économiques et de modèles. Dans le secteur de l'assurance, il est principalement utilisé dans le cadre des contrats d'assurance vie afin de maîtriser le risque inhérent aux engagements financiers de ces contrats à long terme. L'utilisation des GSE en assurance vie répond à la contrainte du calcul des provisions techniques en valeur économique imposée par la réglementation prudentielle Solvabilité II, entrée en vigueur en Janvier 2016. Ces provisions techniques sont évaluées en univers risque neutre par le biais d'un modèle ALM qui prends en entrée les scénarios économiques. Cette approche "risque neutre" caractérisée par l'aversion au risque des investisseurs est cruciale pour de nombreuses applications financières, telles que l'évaluation des options et garanties des contrats ainsi que la tarification des produits dérivés.

La méthodologie d'évaluation des provisions techniques fait appel à l'utilisation de la moyenne empirique de celles-ci calculées sur plusieurs scénarios économiques. L'utilisation d'un nombre limité de scénarios économiques induit *de facto* un problème de convergence vers la juste valeur de la meilleure estimation des provisions appelée best estimate. Cette problématique est typiquement matérialisée par des créations ou des pertes de valeurs encore appelées fuite de modèle. Afin de limiter ces écarts, la réglementation Solvabilité II impose un processus de validation des GSE qui doivent satisfaire l'hypothèse de martingalité en cohérence avec l'univers risque neutre et l'hypothèse de market consistency qui est la capacité du GSE à reproduire les prix de marché. La validation de ces hypothèses

est primordiale pour la fiabilité du GSE au regard de son impact direct sur les décisions stratégiques.

Ce mémoire aborde les principaux tests statistiques utilisés pour la validation de la martingalité et de la market consistency des scénarios. Ces tests se fondent sur le théorème central limite qui établit la convergence en loi de la somme d'une suite de variables aléatoires vers la loi normale. Ce théorème permet de construire un intervalle de confiance autour de la moyenne empirique des scénarios économiques afin de valider son appartenance au seuil toléré.

La fuite de modèle est également un point clé de cette étude car elle est la valeur économique reflétant le biais de l'estimation des provisions techniques. Plutôt qu'effectuer une étude globale de la fuite, il s'agit dans ce mémoire d'observer la fuite induite par chaque facteur de risque. Pour se faire, les méthodes d'allocation sont mises en oeuvre pour appréhender les facteurs de risque contribuant le plus à la fuite en ALM. La théorie des risques et la théorie des jeux ont des littératures fournies en matière de méthode d'allocation. Les méthodes sélectionnées seront comparées et leur pertinence évaluée dans le cadre de leur application à la fuite de modèle en ALM.

**MOTS-CLES** : Solvabilité II, modèle ALM, générateur de scénarios économiques, fuite de modèle, risque neutre, méthodes d'allocation.

# Abstract

An economic scenario generator (ESG) is a stochastic tool used to simulate various possible future economic situations, based on a set of variables, economic data and models. In the insurance sector, it is mainly used for life insurance contracts, to control the risk inherent in the financial commitments of these long-term contracts. The use of ESG in life insurance meets the requirement to calculate technical provisions at economic value imposed by Solvency II prudential regulations, which came into force in January 2016. These technical provisions are valued in a risk-neutral universe using an ALM model that takes economic scenarios as inputs. This "risk-neutral" approach, characterized by investors' risk aversion, is crucial for many financial applications, such as the valuation of contract options and guarantees, and the pricing of derivatives.

The methodology used to value technical reserves is based on the empirical average of reserves calculated on the basis of several economic scenarios. The use of a limited number of economic scenarios leads to a de facto problem of convergence towards the fair value of the best estimate of reserves. This problem is typically reflected in the creation or loss of value, also known as model leakage. In order to limit these deviations, Solvency II regulations impose a validation process for ESG, which must satisfy the martingality assumption, which is consistent with the risk-neutral universe, and the market consistency assumption, which is the ability of the ESG to reproduce market prices. The validation of these assumptions is crucial to the reliability of the ESG, given its direct impact on strategic decisions.

This paper discusses the main statistical tests used to validate the martingality and market consistency of scenarios. These tests are based on the central limit theorem, which establishes the convergence of the sum of a series of random variables towards the normal distribution. This theorem makes it possible to construct a confidence interval around the empirical mean of the economic scenarios, in order to validate that it falls within the tolerated threshold.

Model leakage is also a key point in this study, as it is the economic value reflecting the bias in the estimation of technical provisions. Rather than carrying out a global study of leakage, this report looks at the leakage induced by each risk factor. To this end, allocation methods are used to identify the risk factors that contribute most to ALM leakage. Risk theory and game theory have extensive literature on allocation methods. The selected methods will be compared and their relevance assessed in the context of their application to model leakage in ALM.

**KEYWORDS :** Solvency II, ALM model, economic scenario generator, model leakage, risk neutrality, allocation methods.

# Note de synthèse

## Cadre de l'étude

Les générateurs de scénarios économiques (GSE) constituent un ensemble de modèles stochastiques capables de simuler des trajectoires possibles des actifs représentatifs d'un portefeuille donné. Ils sont utilisés suite à l'introduction des modèles dits simulateurs qui utilisent la méthode de Monte Carlo pour évaluer les engagements en assurance vie en univers risque neutre conformément aux exigences de la norme prudentielle Solvabilité II. Ces modèles encore appelés modèles ALM (Asset and Liability Management) permettent de prendre en compte les interactions entre les actifs et le passif afin de quantifier les options et garanties des contrats d'assurance vie.

L'utilisation des scénarios économiques implique une création d'aléa conduisant à des écarts au niveau des sorties du modèle appelés fuite de modèle. Cette fuite peut d'autant plus être accentuée par une mauvaise qualité du GSE et ainsi entraîner une mauvaise évaluation des engagements de l'assureur. L'utilisation du moment matching comme technique de correction ou des variables antithétiques comme méthode de réduction de la variance permettent d'améliorer la qualité des scénarios économiques. Il convient malgré tout de procéder à des tests de validation. Les facteurs de risque étudiés dans ce mémoire sont les taux nominaux qui suivent un modèle DD LMM CEV, le crédit modélisé par un modèle JLT G2, l'action et l'immobilier qui suivent un modèle de Black Sholes respectivement à volatilité vectorielle et constante.

L'étude vise également à étudier l'impact de ces facteurs de risque sur la fuite de modèle en effectuant une allocation de la fuite par facteur.

## Validation d'un GSE

La validation du GSE consiste à vérifier deux conditions essentielles: la martingalité et la market consistency.

### Martingalité

La martingalité est spécifique à l'univers risque neutre dans lequel tout actif quelque soit son niveau de risque rapporte le taux sans risque. Théoriquement, l'espérance des prix actualisés des actifs est une martingale. Dans un cadre pratique, le test se résume à vérifier que la moyenne empirique des prix actualisés se situe entre les bornes de l'intervalle de confiance construit autour de l'espérance. En notant  $X$  la variable aléatoire représentant le prix actualisé, le théorème centrale limite (TCL) permet de construire l'intervalle de confiance de la manière suivante:

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma_X} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n - E(X_n) \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} t_{N-1}$$

Avec  $t_{N-1}$  une loi de Student à  $N-1$  degrés de liberté et  $\sigma_X$  l'écart type estimé empiriquement.

Le GSE étudié est composé de 3000 scénarios. Une loi de student à 2999 degrés de liberté s'apparente à une loi normale centrée et réduite. Ainsi, l'intervalle de confiance se reconstruit comme suit:

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma_X} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n - E(X_n) \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} N(0, 1)$$

L'intervalle de confiance au quantile d'ordre  $1 - \frac{\alpha}{2}$  de la moyenne empirique est donné

par:

$$I_c = \left[ E(X_n) - \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), E(X_n) + \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

Avec  $\phi$  la fonction de répartition de la loi centrée et réduite.

Pour une meilleure visualisation, il est possible de tester le rapport  $\frac{\bar{X}_n}{E(X_n)}$ . L'intervalle de confiance se réécrit:

$$I'_c = \left[ 1 - \frac{\sigma_X}{\sqrt{NE(X_n)}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), 1 + \frac{\sigma_X}{\sqrt{NE(X_n)}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

Le test sur les déflateurs est effectué sur le rapport entre l'espérance des déflateurs en T notée  $E(D(0, T))$  et le zéro coupon de maturité T représenté par  $P(0, T)$ . L'intervalle de confiance sans l'utilisation de variables antithétiques est donné par:

$$I_c = \left[ 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{N P(0, T)}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N P(0, T)}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

Le résultat au quantile de 95% est obtenu graphiquement comme suit:

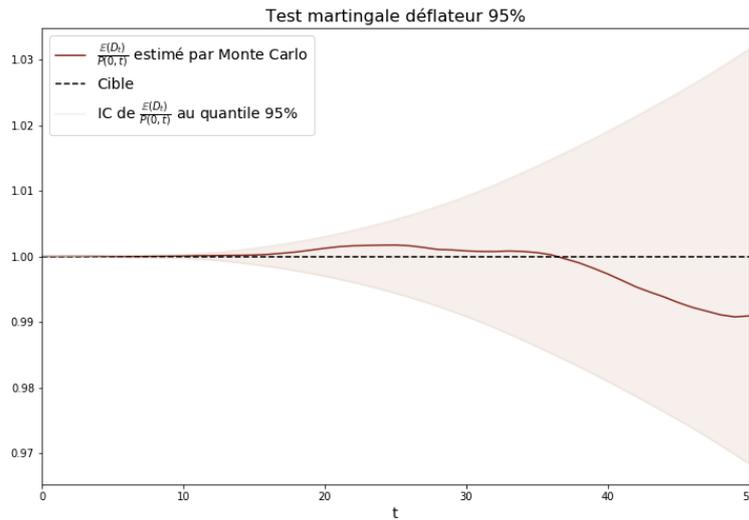


Figure 1: Test de martingalité des déflateurs au quantile de 95%

Il y a de légères créations de valeur entre la maturité 17 et 37 et une perte de valeur croissante par la suite. Mais il est possible de dire que le test est bien validé au quantile de 95% car le rapport représenté reste entre les bornes de l'intervalle de confiance.

## Market consistency

Un modèle est considéré comme "market consistent" s'il est capable de reproduire de manière cohérente les prix observés sur le marché ou les données financières. Le test de market consistency consiste donc à vérifier que l'écart entre les prix du marché et les prix simulés reste en dessous d'un seuil acceptable. Pour cela il est possible de construire un intervalle de confiance.

En prenant l'exemple du facteur de risque action, le test s'effectue comme dans le cas du test de martingalité en représentant le rapport entre l'espérance des prix de calls estimés et les prix de calls théoriques. Les maturités des calls testés sont  $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 25\}$ . Le résultat au quantile de 95% est donné par:

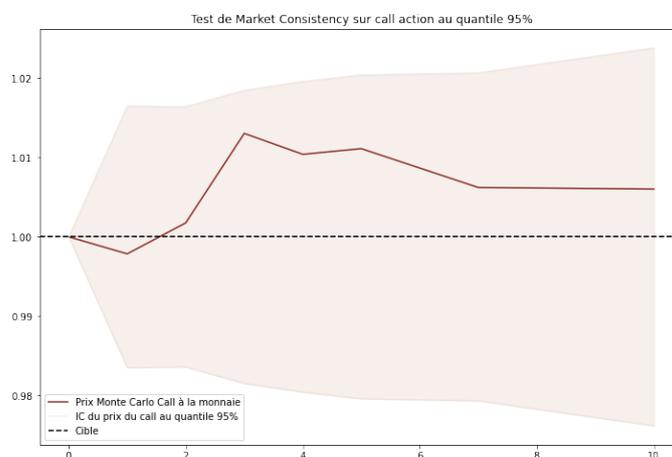
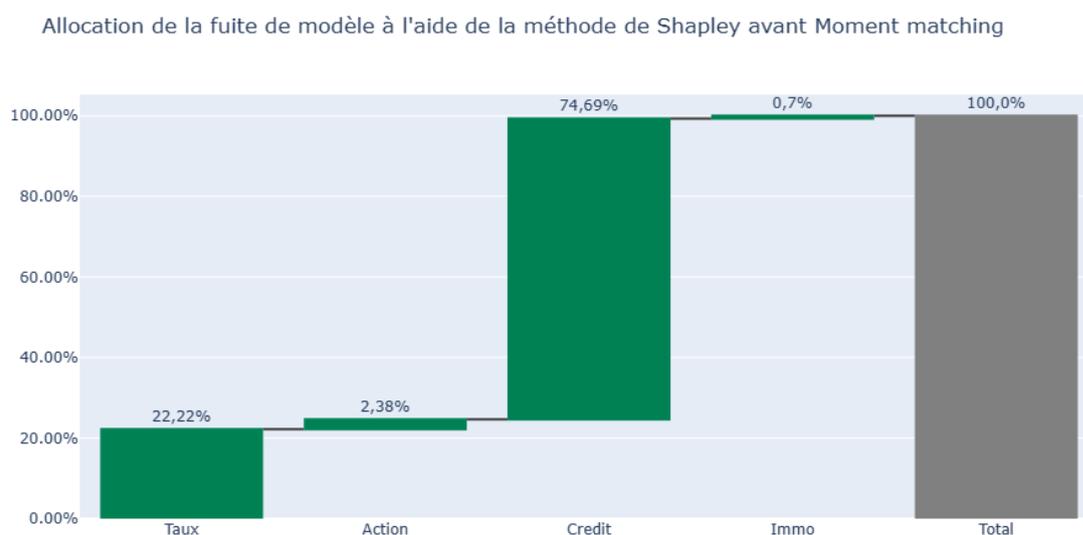


Figure 2: Test de market consistency action au quantile de 95%

Ce test montre des écarts de convergence importants entre les maturités 2 et 7 qui se stabilisent par la suite. Les prix de calls estimés restent néanmoins dans les bornes de l'intervalle de confiance. Cela permet donc de ne pas rejeter l'hypothèse de market consistency de l'action.

## Allocation de la fuite

Dans cette dernière étape, il s'agit de mettre en relief les différentes contributions des facteurs de risque à la fuite de modèle. Pour se faire les méthodes utilisées sont les méthodes proportionnelles et marginales basées sur la théorie des risques ainsi que la méthode de shapley qui se base sur la théorie des jeux coopératifs. L'accent est mis sur la méthode de shapley car elle tient compte des interactions existantes entre les segments de risque. Cette particularité est propre à un GSE où les différents facteurs de risque sont corrélés. Le résultat obtenu avant application du moment matching est donné par la figure suivante:



**Figure 3: Allocation de la fuite avec la méthode de Shapley**

Cette allocation montre un effet négligeable de l'action et de l'immobilier. Elle montre également une contribution majoritaire du crédit à la fuite de modèle suivi des taux nominaux. La grande contribution du crédit peut être liée à plusieurs facteurs comme par exemple le fait que le portefeuille des actifs soit composé majoritairement d'obligations. Pour isoler cet effet de volume les valeurs de fuite sont rapportées aux valeurs de marché des actifs correspondants. Le résultat devient:

Allocation de la fuite de modèle pondérée par la VM à l'aide de la méthode de Shapley



**Figure 4: Allocation de la fuite avec la méthode Shapley avec pondération par les valeurs de marché**

Ce graphique montre toujours une grande contribution du crédit à la fuite de modèle en ALM mais également une contribution relative non négligeable de l'action qui est supérieure à celle des taux. Cela montre que la quantité d'une classe d'actif peut augmenter la valeur de la fuite qu'elle induit et aussi dissimuler l'impact réel des classes d'actifs minoritaires. D'autres facteurs peuvent avoir un impact sur la fuite de modèle tels que l'application du moment matching et le calibrage des paramètres de modèle.

## Limites et analyse

La validation d'un GSE est essentielle dans la mesure où il a un impact direct sur la cohérence des estimations des provisions techniques. L'ensemble des tests de martingalité est effectué au pas de temps 0 et cela peut propager l'erreur à chaque pas de temps. Tester la martingalité au pas de temps ultérieur pourrait être une piste d'amélioration. La remarque est aussi faite que la fuite de modèle n'est pas forcément liée à un problème de martingalité comme vu dans le cas de l'effet de volume.

# Executive summary

## Framework of the study

Economic Scenario Generators (ESGs) are a set of stochastic models capable of simulating the possible trajectories of assets representative of a given asset portfolio. They are used following the introduction of so-called simulative models, which use the Monte Carlo method to evaluate life insurance commitments in a risk-neutral universe, in line with the requirements of the Solvency II prudential standard. These models, also known as ALM (Asset and Liability Management) models, take into account the interactions between assets and liabilities on which life insurance contract guarantees depend.

The use of economic scenarios implies the creation of hazards leading to deviations in model outputs, known as model leakage. This leakage can be further exacerbated by poor GSE quality, leading to mispricing of the insurer's commitments. Using moment matching as a correction technique or antithetic variables as a variance reduction method can improve the quality of economic scenarios. However, validation tests are still required. The risk factors studied in this thesis are nominal rates, which follow a DD LMM CEV model, credit, which is modeled by a JLT G2 model, and equities and real estate, which respectively follow a Black Sholes model with vector and constant volatility.

The study also aims to investigate the impact of these risk factors on model leakage by performing a leakage allocation by factor.

## Validation of a GSE

GSE validation consists in verifying two essential conditions: martingality and market consistency.

### Martingality

Martingality is specific to the risk-neutral universe, in which any asset, whatever its level of risk, yields the risk-free rate. Theoretically, the expectation of discounted asset prices is a martingale. In practical terms, the test boils down to verifying that the empirical mean of discounted prices lies between the bounds of the confidence interval constructed around the expectation. If we denote  $X$  the random variable representing the discounted price, the Central Limit Theorem (CLT) allows us to construct the confidence interval as follows:

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma_X} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n - E(X_n) \right) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} t_{N-1}$$

With  $t_{N-1}$  a student's law with  $N-1$  degrees of freedom and  $\sigma_X$  the empirically estimated standard deviation.

The GSE studied is made up of 3,000 scenarios. Given the large number of scenarios, a Student's law with 2999 degrees of freedom is similar to a centered and reduced normal distribution. Thus, the confidence interval can be reconstructed as follows:

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma_X} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n - E(X_n) \right) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} N(0, 1)$$

The confidence interval at the quantile of order  $1 - \frac{\alpha}{2}$  of the empirical mean is given by:

$$I_c = \left[ E(X_n) - \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), E(X_n) + \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

With  $\phi$  the distribution function of the centered and reduced distribution.

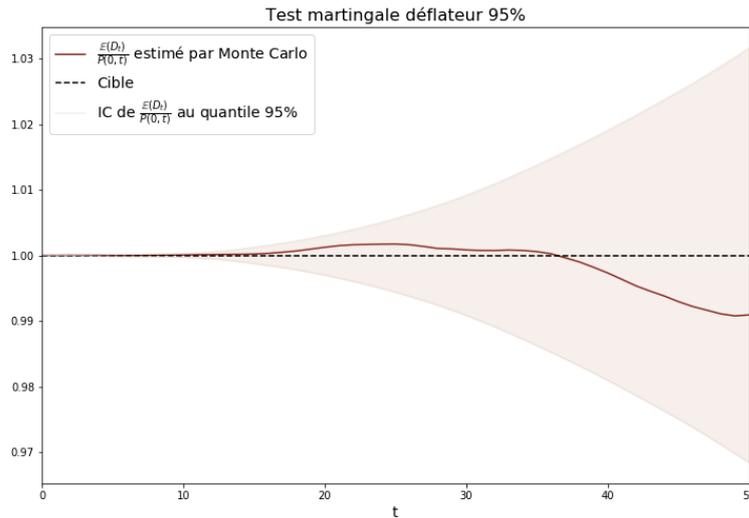
For better visualization, you can test the ratio  $\frac{\bar{X}_n}{E(X_n)}$ . The confidence interval is rewritten:

$$I'_c = \left[ 1 - \frac{\sigma_X}{\sqrt{NE(X_n)}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), 1 + \frac{\sigma_X}{\sqrt{NE(X_n)}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

The deflator test is performed on the ratio between the expectation of deflators in T denoted by  $E(D(0,T))$  and the zero-coupon maturity T represented by  $P(0,T)$ . The confidence interval without the use of antithetic variables is given by:

$$I_c = \left[ 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{N P(0,T)}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N P(0,T)}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

The result at the quantile of 95% is obtained graphically as follows:



**Figure 5: Deflator martingale test at 95% quantile**

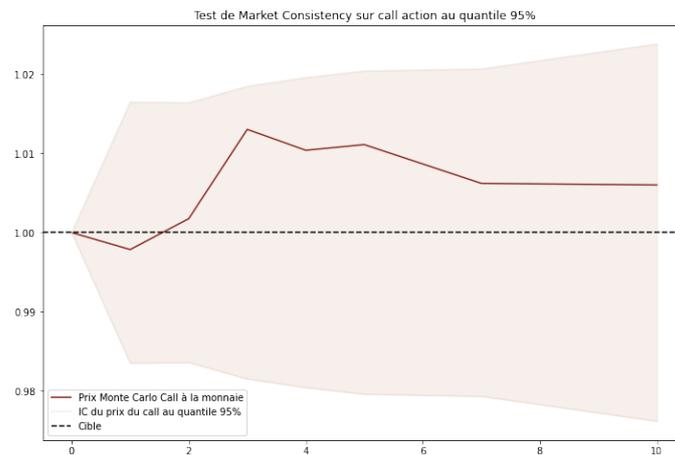
Slight value creation can be noted between maturity 17 and 37, and an increasing loss of value thereafter. But we can say that the test is well validated at the 95% quantile, since the ratio represented remains within the bounds of the confidence interval.

### Market consistency

A model is considered "market consistent" if it is able to reproduce observed market prices or financial data consistently. The market consistency test therefore consists in

checking that the difference between market prices and simulated prices remains below an acceptable threshold. This can be achieved by constructing a confidence interval.

Taking the example of the equity risk factor, the test is carried out as in the case of the martingality test, by representing the ratio between the expectation of estimated call prices and theoretical call prices. The call maturities tested are  $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 25\}$ . The 95% quantile result is given by:



**Figure 6: Test of market consistency action at quantile 95**

This test shows significant convergence gaps between maturities 2 and 7, which subsequently stabilize. Nevertheless, the estimated call prices remain within the bounds of the confidence interval. This means that the market consistency hypothesis cannot be rejected.

## Leakage allocation

In this final step, we highlight the different contributions of risk factors to model leakage. The methods used are the proportional and marginal methods based on risk theory, and the shapley method based on cooperative game theory. Emphasis is placed on the shapley method, as it takes into account existing interactions between risk segments. This particularity is specific to a GSE where the various risk factors are correlated. The result obtained before applying moment matching is shown in the following figure:

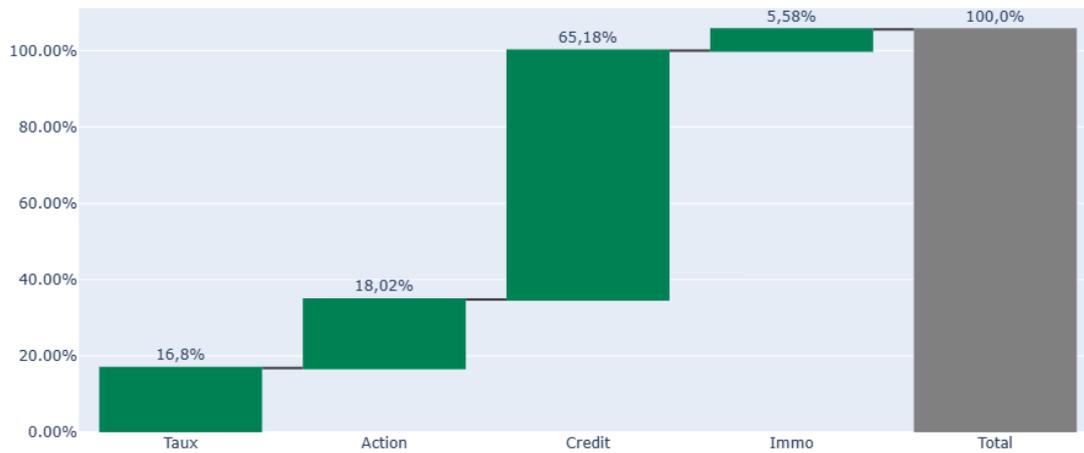
Allocation de la fuite de modèle à l'aide de la méthode de Shapley avant Moment matching



**Figure 7: Leakage allocation with Shapley's method**

This allocation shows a negligible effect from equities and real estate. It also shows a majority contribution from credit to the model escape followed by nominal rates. The large contribution of credit may be linked to several factors, such as the fact that the asset portfolio is composed mainly of bonds. To isolate this volume effect, the leakage values are related to the market values of the corresponding assets. The result is as follows:

Allocation de la fuite de modèle pondérée par la VM à l'aide de la méthode de Shapley



**Figure 8: Leakage allocation using the Shapley method with weighting by market values**

This graph still shows a large contribution from credit to model leakage in ALM, but also a non-negligible relative contribution from equities, which is greater than that from interest rates. This shows that the quantity of an asset class can increase the value of the leakage it induces, and also conceal the real impact of minority asset classes. Other factors can have an impact on model leakage, such as the application of moment matching and the calibration of model parameters.

## Limits and analysis

The validation of a GSE is essential, as it has a direct impact on the consistency of technical reserve estimates. All martingality tests are carried out at time step 0, and this can propagate error at every time step. Testing martingality at subsequent time steps could be an avenue for improvement. It is also pointed out that model leakage is not necessarily linked to a martingality problem, as seen in the case of the volume effect.

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes remerciements à Jonathan LIMBOURG et à toute l'équipe pour m'avoir accueilli au sein de la Fonction Actuarielle vie d'Abeille Assurances.

Je remercie en particulier Aurélien CHOQUER, mon maître d'apprentissage qui m'a accompagné tout au long de mes travaux à travers ses conseils avisés et son sens de la pédagogie.

Je remercie également ma tutrice académique Caroline CHAMPAGNE pour son investissement dans le suivi de mes travaux ainsi que ses conseils. Merci à l'ensemble du corps professoral de l'ISFA pour m'avoir ouvert les portes du métier passionnant qu'est l'actuariat.

Pour finir, je ne remercierai jamais assez ma famille et en particulier mes parents qui m'ont fait confiance, soutenu de manière indéfectible et ont créé le cadre propice à la réussite de mes études.

# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Les contrats d'épargne</b>	<b>23</b>
1	Cadre réglementaire . . . . .	23
2	Les modèles ALM . . . . .	26
3	Univers de modélisation . . . . .	28
4	La fuite de modèle . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Présentation du générateur de scénario économique</b>	<b>31</b>
1	Définition d'un GSE . . . . .	31
2	Le modèle de taux nominaux . . . . .	33
2.1	Dynamique du modèle . . . . .	33
2.2	Calibrage . . . . .	34
3	Le modèle de crédit . . . . .	39
3.1	Probabilité de défaut sous le modèle JLT G2 . . . . .	39
3.2	Diffusion de la prime de risque . . . . .	41
3.3	Calibrage du modèle . . . . .	42
4	Le modèle Action et Immobilier . . . . .	43
4.1	Dynamique du modèle . . . . .	43
4.2	Calibrage du modèle . . . . .	44
5	Utilisation de variables antithétiques . . . . .	45
6	Tests de Validation . . . . .	46

<b>3</b>	<b>Validation du générateur de scénarios économiques</b>	<b>48</b>
1	Présentation du Moment matching . . . . .	51
2	Taux nominaux . . . . .	53
2.1	Test de martingalité . . . . .	53
2.2	Test de Market Consistency . . . . .	59
3	Crédit . . . . .	62
3.1	Test de martingalité . . . . .	62
4	Action et Immobilier . . . . .	73
4.1	Test martingale . . . . .	73
4.2	Test de Market Consistency . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Allocation de la fuite</b>	<b>77</b>
1	Présentation du modèle utilisé . . . . .	77
1.1	Projection des actifs . . . . .	78
1.2	Modélisation du passif . . . . .	79
2	Méthode d'allocation cohérente . . . . .	79
3	Méthode proportionnelle . . . . .	81
4	Méthode marginale . . . . .	82
5	La méthode de Shapley . . . . .	83
5.1	Théorie des jeux . . . . .	83
5.2	Présentation de la méthode . . . . .	83
6	Méthodologie d'obtention de la fuite . . . . .	85
6.1	Fuite du risque de taux nominaux . . . . .	86
6.2	Fuite des risques action et immobilier . . . . .	86
7	Résultats d'allocation . . . . .	87
7.1	Méthode proportionnelle . . . . .	88
7.2	Méthode marginale . . . . .	89
7.3	Méthode de Shapley . . . . .	90
8	Analyse des résultats . . . . .	91
8.1	Effets du moment matching . . . . .	92

8.2	Effets de volume . . . . .	93
8.3	Effets du rating des obligations . . . . .	94
8.4	Analyse critique . . . . .	97

# Introduction

L'assurance vie en France occupe une place prépondérante dans le paysage financier et économique, jouant un rôle essentiel dans l'épargne, l'investissement et la protection des individus. Elle offre un vaste éventail d'options d'investissement, allant des fonds en euros à capitaux garantis aux placements plus risqués que sont les contrats en unité de compte (UC). Selon l'Autorité de Contrôle Prudential et de Résolution (ACPR), en fin d'année 2022 l'encours de l'assurance vie s'élevait à 1885 milliards représentant 33% du patrimoine financier des Français. L'assurance vie propose des solutions d'investissement à long terme qui nécessitent une planification prudente et une anticipation réaliste des futurs développements économiques.

Le pilier I de la norme prudentielle Solvabilité II relative aux exigences quantitatives des organismes d'assurance impose l'évaluation en juste valeur des passifs d'assurance. Le coût des options et garanties de ces contrats dépendent en particulier de l'évolution des marchés financiers. Parmi elles il est possible de citer la participation aux bénéfices dont la valeur dépend des rendements financiers. L'évaluation de ces engagements nécessite des modèles simulateurs capables de refléter les interactions entre actifs et passif appelés modèles ALM (Asset and Liability Management) ainsi qu'un générateur de scénarios économiques (GSE) pour la simulation de l'évolution des marchés financiers. Les GSE permettent aux compagnies d'assurance de mieux appréhender les risques et les rendements potentiels associés aux produits d'assurance vie. Les scénarios obtenus doivent donc faire l'objet de validation afin de s'assurer de leur qualité au risque de mal estimer les provisions

techniques.

Les actifs simulés dans un GSE doivent être en adéquation avec les facteurs de risque associés aux contrats et répondre à la condition essentielle de market consistency. Dans le cadre du pilier I de la norme Solvabilité II, l'évaluation des engagements des assureurs est effectuée en univers risque neutre qui correspond à un univers dans lequel tout actif risqué rapporte le même taux sans risque. Dans ce cas le GSE doit être risque neutre et satisfaire la condition de martingalité qui traduit l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA).

Les facteurs tels que le nombre limité de scénarios utilisés, le calibrage des modèles ainsi que l'aléa naturellement induite par le GSE entraînent des créations ou pertes de valeur en sortie du modèle ALM. Ces écarts sont encore appelés fuite de modèle.

La validation des générateurs de scénarios économiques dans le contexte de l'assurance vie revêt donc une importance critique pour garantir que les projections sont fiables et conformes à la réalité des marchés. D'autres part, la connaissance du niveau d'impact de chaque facteur de risque sur la fuite globale pourrait permettre d'analyser et d'améliorer les hypothèses des modèles utilisées dans le GSE.

L'objet de ce mémoire est d'étudier la qualité d'un GSE risque neutre et la fuite de modèle entraînée par son utilisation. L'étude consistera dans un premier temps à la présentation des différents modèles utilisés dans le GSE ainsi que leurs hypothèses de calibrage. La seconde partie relative à la validation du GSE abordera l'étude de la martingalité et de la market consistency des différents facteurs simulés. Dans la dernière partie, il sera question d'une étude de l'impact des différents facteurs de risque sur la fuite globale à travers une allocation de la fuite de modèle par facteur de risque en faisant appel à des méthodes d'allocation de capital.

# Evaluation des engagements des contrats d'épargne

## 1 Cadre réglementaire

Les assureurs ont développé des offres de contrats d'épargne dans un contexte fiscal favorable qui incite les assurés à investir sur ces supports sur le long terme. Les assureurs proposent des supports d'investissement en euros et en unité de compte (UC) ou encore des multisupports pouvant être composés des deux types de produits. L'assurance vie représente le produit de placement préféré des Français avec une majorité des encours sur les contrats en euro qui sont considérés comme des options relativement sûres pour investir de l'argent à long terme. Ces contrats ont la particularité de permettre aux assurés de céder le risque aux assureurs tandis que dans les contrats en UC qui se rapprochent des produits bancaires, le risque est plutôt porté par l'assuré. Cependant les contrats en UC proposent également certaines garanties en vue de fidéliser les assurés.

Toutes ces garanties représentent un risque pour les assureurs et il devient donc impératif, au regard de la volatilité des marchés financiers, d'évaluer les risques associés à ce type de contrat sous la réglementation Solvabilité 2 entrée en vigueur en 2016 et de mesurer finement l'exhaustivité des risques auxquels ils sont exposés.

Le pilier I de cette réglementation relative aux exigences quantitatives des sociétés d'assurance définit les principes et les modalités de calculs pour l'évaluation économique du bilan et pour la détermination du besoin en capital. L'article R351-2 du Code des Assurances, transposition en droit français de l'article 77 de la Directive Solvabilité 2 introduit le concept de Best Estimate pour désigner la valorisation économique des engagements de l'assureur envers l'assuré. Ainsi, le Best-Estimate (BE) correspond à la moyenne pondérée par leurs probabilités des flux de trésorerie futurs compte tenu de la valeur temporelle de l'argent estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente, soit la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs.

En notant  $Q$  la mesure de probabilité risque neutre on peut écrire la formule du Best estimate en  $t$  notée  $BE(t)$  tel que:

$$BE(t) = E^Q \left( \sum_{u>t} \frac{\delta(u)}{\delta(t)} F_u \right)$$

avec:

- $F_t$  les flux de trésorerie en  $t$
- $\delta(t)$  le facteur d'actualisation en  $t$
- $E^Q$  l'espérance sous la mesure de probabilité risque neutre  $Q$

Les contrats d'épargne et plus particulièrement les contrats en euros disposent de structures optionnelles complexes qui doivent donc être pris en compte dans le calcul du BE.

Il est possible de distinguer des options telles que:

- **Les rachats:** ils représentent la possibilité pour l'assuré de disposer d'une partie (rachat partiel) ou de la totalité (rachat total) de son épargne très souvent avec des pénalités.

- **La participation aux bénéfices (PB)**: C'est un mécanisme qui consiste à reverser aux assurés une partie des bénéfices réalisés par l'assureur grâce aux différents placements de leur épargne. Dans le cas des contrats en euros, l'assureur doit reverser une PB minimale correspondant à 85% de ses résultats financiers et 90% de ses résultats techniques.
- **L'arbitrage** : Il s'agit d'une option très courante dans les contrats multisupport. C'est la possibilité pour l'épargnant de pouvoir répartir son capital dans les différents supports proposés.
- **Les options de sortie en rente**: C'est la possibilité pour l'assuré de convertir son capital en rente lors de la phase de restitution.

En terme de garanties, il est également possible de citer:

- **Le taux minimum garanti(TMG)**: L'assureur garantit un rendement minimum sur toute la durée du contrat aux assurés. Ce rendement peut être également fixé annuellement. Le TMG est valable dans le cadre des contrats en euros.
- **La Garantie plancher**: En cas de moins-value constatée lors du règlement du capital décès dans les contrats en UC, la garantie Plancher prend en charge la différence entre les versements nets investis (diminués des éventuels rachats partiels) et la contre-valeur en euros des unités de compte détenues. Cette valeur peut cependant être plafonnée.

Le BE doit donc considérer toutes ces options et garanties financières. Sa qualité s'appuie autant sur la qualité des données de portefeuille (actif et passif) et des modèles que sur celle des hypothèses utilisées. Du fait de la complexité des marchés financiers, ces contrats ne peuvent pas être évalués de façon déterministe, c'est à dire sur un scénario unique. Il est donc impératif de valoriser ces caractéristiques de manière adéquate et de faire appel aux méthodes simulatoires dites stochastiques afin de capter au mieux les fluctuations liées aux marchés financiers et de mieux appréhender leur impact sur le

portefeuille de l'assureur.

Cela permet alors d'introduire la notion de générateur de scénarios économiques qui est un ensemble de modèles permettant de simuler aléatoirement différentes variations possibles des marchés financiers pouvant impacter les performances du portefeuille d'actifs de l'assureur. Ce générateur est représentatif des facteurs de risque comme les taux, les actions, l'immobilier et les spreads de crédit. Les scénarios sont utilisés dans un modèle de gestion actif/passif encore appelé modèle ALM (Asset and Liability Management) afin répliquer au mieux les flux liés aux engagements de l'assureur.

## 2 Les modèles ALM

Les modèles ALM (Asset and Liability Management) sont des outils utilisés dans la projection des flux relatifs aux contrats d'épargne en tenant compte des interactions actif/passif en vue d'évaluer le Best Estimate.

Dans le cadre de ces contrats l'assureur perçoit les primes et paie les prestations, commissions et les frais relatifs aux contrats souscrits par les assurés. L'épargne constituée est investie sur des actifs financiers et génère des flux. L'ensemble de ces mécanismes doit être reflété dans le modèle ALM.

Le modèle ALM tient compte d'un certain nombre d'hypothèses telles que :

- Les données comptables : provisions mathématiques, frais, etc
- Les données de gestion : nombre de contrats, sexe, etc
- Les dispositions contractuelles: taux de chargements, taux de commissions, taux garantis, revalorisation minimale/indexation
- Les sources extérieures (réglementaires ou non) : tables de mortalité

- Les modèles et statistiques annexes : lois de rachat, lois d'arbitrage, les scénarios économiques
- Les règles contractuelles relatives à différentes provisions ou de règles de gestion : Stratégie d'allocation d'actifs, participation aux bénéfices

Le portefeuille d'actif est regroupé en trois grandes classes: la classes obligataire, les indices et le monétaire.

La classe obligataire est relative aux obligations qui sont des emprunts dont les caractéristiques peuvent être la valeur de remboursement, le rating de l'obligation, les taux de coupons, des dates d'émission, la maturité de l'obligation ou des fréquences de versement des coupons. Il est possible de distinguer par exemple les obligations à taux fixe, à taux variables ou encore les obligations indexées sur inflation. Elles ont une nature complexe liée à leur dépendance aux taux et aux spreads de crédit. Les obligations subissent une correction importante appelée risque-neutralisation avant d'être projetées dans le modèle. Cette correction répond au besoin que la valeur de marché recalculée par le modèle et la valeur constatée à l'instant initial coïncident.

Les indices font référence aux indices action et immobilier et leurs produits dérivés. Ils permettent de diversifier le portefeuille et offrent des possibilités de rendements plus élevés que les obligations. Il n'y a pas de risque neutralisation qui leur est appliquée.

Le monétaire est un support d'investissement plus liquide que les précédents. Les investissements en monétaire concernent les liquidités de l'entreprise.

La prise en compte des scénarios économiques dans le modèle stochastique est donc nécessaire pour modéliser les actifs afin prendre en compte les interactions ALM telles que la participation aux bénéfices, les rachats conjoncturels qui sont des rachats massifs, les arbitrages et la volatilité de la revalorisation des contrats en unités de compte.

### 3 Univers de modélisation

Il existe deux univers pour estimer l'évolution des actifs financiers et les engagements d'un assureur: l'univers monde réel et l'univers risque neutre.

L'univers monde réel, encore appelé univers historique, est l'univers qui se rapproche de la réalité des marchés financiers: plus le risque est grand, plus les investisseurs exigent un taux de rentabilité élevé. L'espérance de rentabilité est donnée par

$$E(R) = r + \pi$$

où  $r$  est le taux sans risque et  $\pi$  la prime de risque.

L'univers risque neutre est un univers basé sur l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) qui suppose une martingalité des prix actualisés. Dans ce cas la prime de risque est nulle ( $\pi = 0$ ). C'est à dire que la rentabilité espérée de tout actif financier, quel que soit son niveau de risque, est égale au taux sans risque. Cet univers offre une facilité pour évaluer les actifs financiers car l'évaluation se ramène à un seul calcul d'espérance des flux futurs actualisés au taux sans risque. Le prix actualisé est donc une martingale.

Soit la filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  représentant l'ensemble des informations disponibles à l'instant  $t$ .

Un processus stochastique  $(X_t)_{t \geq 0}$  est une martingale par rapport à une filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  si :

- **Adaptation** : Pour tout  $t \geq 0$ ,  $X_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -mesurable.
- **Intégrabilité** : Pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ .
- **Condition de martingale** : Pour tout  $0 \leq s < t$ ,

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad \text{presque sûrement.}$$

Soit un actif dont le prix est donné par un processus  $(S_t)_{t \geq 0}$  adapté et intégrable. Pour tout  $s$  et  $t$  tel que  $0 < s < t$ , la martingalité du prix actualisé de cet actif est vérifiée en univers risque neutre par l'égalité:

$$E^Q(S_t \delta_t | F_s) = S_s \delta_s$$

Avec:

- $Q$  la mesure de probabilité risque neutre
- $\delta_t = e^{-\int_0^t r_u du}$  est le facteur d'actualisation en  $t$  en notant  $r_t$  le taux sans risque instantané
- $F_s$  l'ensemble des informations disponibles sur le marché en  $s$

Dans le référentiel Solvabilité 2 l'évaluation des engagements des assureurs s'effectue en univers risque neutre. L'Autorité Européenne des Assurances et des Pensions Professionnelles (EIOPA) fournit régulièrement la courbe de taux sans risque utilisée dans l'évaluation des provisions techniques. Cette courbe représente la base sur laquelle les assureurs définissent leurs hypothèses financières pour le calcul des engagements.

## 4 La fuite de modèle

La fuite de modèle est une conséquence de l'aléa générée par le GSE dans l'utilisation du modèle stochastique. Elle fait référence à une situation où les scénarios générés ne représentent pas correctement l'évolution des actifs ou sont basés sur des hypothèses inappropriées, conduisant à des résultats biaisés et potentiellement trompeurs dans l'analyse financière et économique.

La fuite de modèle peut être définie comme l'écart existant entre la valeur de marché des actifs en 0 notée  $VM_{actifs}(t=0)$  et l'espérance des flux de trésorerie actualisés composée du BE et de la marge futures notée VIF.

$$\text{fuite de modèle} = VM_{actifs}(t=0) - BE - VIF \quad (1.1)$$

En principe, cet écart est nul en déterministe c'est à dire qu'en l'absence d'aléa, toute variation de la valeur de marché des actifs doit être répartie entre la VIF et le BE.

Les facteurs pouvant expliquer la fuite de modèle sont:

- l'utilisation d'un nombre fini de scénarios
- la mauvaise qualité des scénarios
- l'utilisation d'une fonction d'interpolation sur les scénarios
- l'utilisation d'estimateurs empiriques
- une fuite de modèle en projection déterministe non nulle pouvant provenir de l'absence de prise en compte de certains flux

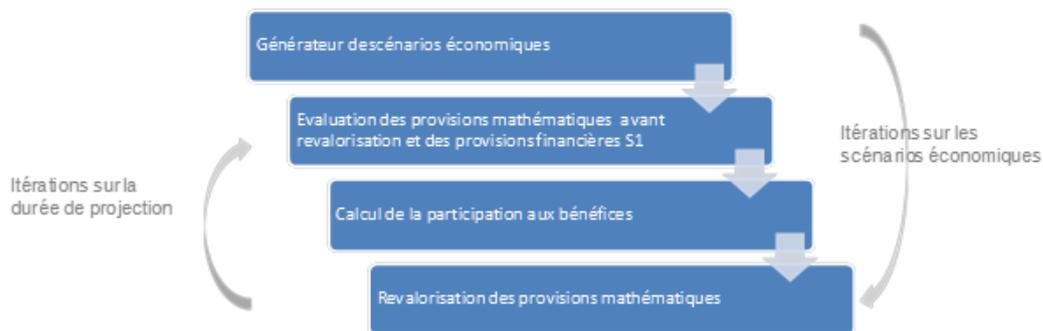
La fuite entraîne une création ou perte de valeur qui contredit l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage de l'univers risque neutre. Afin d'équilibrer le bilan économique elle doit être allouée de façon prudente pour assurer la qualité de l'estimation des provisions techniques. Si elle est positive, elle est additionnée à la valeur du BE et dans le cas contraire on la retranche à la VIF. Il est donc nécessaire de la limiter au maximum pour une juste estimation des flux de trésorerie.

# Présentation du générateur de scénario économique

## 1 Définition d'un GSE

Un générateur de scénarios économiques (GSE) est un outil permettant de projeter sur un horizon d'intérêt, de façon cohérente avec le marché, les variables financières ou économiques nécessaires à la projection du bilan d'une société d'assurance. Il permet de simuler les évolutions futures des marchés financiers en générant un jeu de scénarios stochastiques qui alimentent le modèle ALM.

Les GSE sont très importants en assurance vie car ils permettent d'avoir une bonne approximation des fluctuations des marchés financiers dans le cadre de la modélisation stochastique. Ces scénarios économiques doivent être Market Consistent c'est à dire être capables de répliquer les prix du marché car une évaluation en valeur de marché consiste à valoriser des grandeurs d'intérêt en se référant aux valeurs des actifs et des passifs réellement échangés. L'assureur doit justifier que les données sélectionnées sont pertinentes compte tenu des caractéristiques des obligations d'assurance.



Les différents facteurs qui peuvent influencer la qualité d'un GSE sont:

- **Données historiques inappropriées** : Si le générateur est calibré sur des prix d'instruments financiers qui ne sont pas représentatifs des conditions économiques futures, les scénarios générés peuvent ne pas refléter les véritables fluctuations économiques. C'est le cas par exemple de l'indice immobilier pour lequel le marché n'est pas suffisamment liquide et il est donc difficile d'avoir une grande quantité de données pour calibrer les paramètres du modèle.
- **Mauvaise sélection des facteurs de risque** : Si le générateur ne prend pas en compte tous les facteurs de risque pertinents en lien avec les garanties du contrat et des hypothèses d'investissement, il peut sous-estimer les risques potentiels.
- **Complexité des facteurs de risque**: Les modèles doivent être en mesure de répliquer les actifs financiers malgré leur complexité afin de satisfaire les conditions de market consistency. Le modèle de taux doit par exemple être capable de générer des taux négatifs.
- **Biais cognitifs** : Les concepteurs du modèle peuvent involontairement introduire des biais dans les scénarios générés en fonction de leurs croyances ou perspectives personnelles notamment dans les hypothèses basées sur un jugement d'expert.

Le GSE doit donc être représentatif du portefeuille de l'assuré et doit tenir compte de la complexité des risques modélisés afin de ne pas entraîner une sous-estimation des provisions techniques.

Le générateur de scénarios économiques étudié propose 3000 scénarios pour chaque facteur de risque simulé. Ces facteurs simulés sont:

- les taux nominaux
- les taux réels
- Les spreads de crédit et les matrices de transitions
- l'indice action et les dividendes
- l'indice immobilier et les loyers

Dans la suite l'accent sera mis sur les modèles de taux nominaux, de crédit, d'action et d'immobilier.

## 2 Le modèle de taux nominaux

### 2.1 Dynamique du modèle

Le modèle de taux utilisé dans ce GSE est un modèle appelé Displaced Diffusion Libor Market Model Constant Elasticity Volatility (DD LMM CEV). Ce modèle s'appuie sur un échéancier discret (annuel, mensuel,...) correspondant au pas de discrétisation qui sera utilisé par la suite et modélise le taux Libor Forward défini par :

$$F_k(t) = F(t, T_{k-1}, T_k) = \frac{1}{\tau_k} \left( \frac{P(t, T_{k-1})}{P(t, T_k)} - 1 \right)$$

En notant:

- $F(t, T_{k-1}, T_k)$  désigne le taux LIBOR forward (taux à composition unique) en vigueur entre  $T_{k-1}$  et  $T_k$  vu de la date  $t$
- $P(t, T_k)$  le prix du zéro coupon en  $T_k$  vu de  $t$

Sous la probabilité  $Q^k$  associé au numéraire  $P(t, T_k)$  (Brigo-Mercurio) le taux Libor Forward est une martingale et n'a par conséquent pas de terme de dérive. Le modèle fait l'hypothèse que la dynamique du taux Libor forward est donnée par:

$$dF_k(t) = (F_k(t) + \delta)^\eta (\sigma_1^k(t) dZ_1^k(t) + \sigma_2^k(t) dZ_2^k(t))$$

Avec  $Z_1$  et  $Z_2$  des mouvements browniens vérifiant  $d \langle Z_1, Z_2 \rangle = 0$

- Le modèle suppose que les variations proviennent de deux sources d'aléa. Cette hypothèse est en accord avec le fait que les 2 premières composantes principales d'une analyse en composante principale (ACP) permettent d'expliquer 95% de la variance des courbes de taux d'intérêt.
- Le paramètre  $\delta$  est un paramètre de déplacement de la diffusion qui permet de générer des taux négatifs.

## 2.2 Calibrage

Il est nécessaire de définir d'abord une paramétrisation de la volatilité à utiliser :

$$\sigma_k^q(t) = f_{\beta(t)-1} + g_{k-\beta(t)+1} \times PC_{k-\beta(t)+1}^q$$

Avec  $f_i = f_0 + (1 - f_0) e^{\gamma i}$  et  $g_i = (a + b \times i) \times e^{-ci} + d$ .

On définit le terme  $PC_{k-\beta(t)+1}^q$  comme les deux premières composantes d'une ACP sur l'historique des log ratio des taux forward. Sa formule est donnée par:

$$PC_j^q = \frac{w_q \sqrt{\lambda_q}}{\sqrt{w_1^2(j) \lambda_1 + w_2^2(j) \lambda_2}} \quad (2.1)$$

Les paramètres à calibrer sont finalement donnés par  $\psi = (f_0, a, b, c, d, \gamma)$ . A noter que les paramètres  $\eta$  et  $\delta$  sont choisis à partir d'une liste de valeurs possibles fixées en amont.

Les paramètres sont calibrés sur des données de swaptions provenant du marché. Ils sont utilisés en raison de leur liquidité, de leur sensibilité aux taux d'intérêt, de leur capacité à refléter la courbe des taux et de leur rôle dans la réplication des prix observés sur le marché. Le choix est fait sur la stabilité des paramètres obtenus lors du calibrage.

Un swaption est une option permettant à une date donnée d'acheter ou de vendre un swap. Un swap est un produit financier basé sur un échéancier  $T_1, \dots, T_n$  qui permet d'échanger un taux fixe  $K$  donné dans le contrat contre un taux variable (Libor ici) pour un montant de nominal donné  $N$ . Le taux variable est fixé à chaque date  $T_1, \dots, T_{n-1}$  et les paiements ont lieu à la date suivante.

Un swaption payeur dont la maturité d'exercice est égale à la première maturité du swap ne sera exercé que si la valeur du swap, au moment de la maturité de l'option, est positive.

Soit  $\tau_k = T_k - T_{k-1}$  l'écart temporel entre les deux dates en fraction d'année (les conventions de décompte des jours sont négligées ici). La formule utilisée pour le pricing d'un swaption de maturité  $T_1$  et de tenor  $T_n$  est donnée par :

$$PS(t) = E^Q \left( D(T_1) (N \times (P(T_1, T_1) - P(T_1, T_n)) - \sum_{i=2}^n P(T_1, T_i) \times N \times \tau_i K)^+ | F_t \right)$$

Le taux swap forward associé au swap vu de  $t$  est le taux qui annule la valeur du swap ie :

$$S_{T_1, T_n}(t) = S_{1, n}(t) = \frac{P(t, T_1) - P(t, T_n)}{\sum_{i=2}^n P(t, T_i) \tau_i}$$

$K$  est le strike calculée à la monnaie avec :

$$K = \frac{(P(T_1, T_1) - P(T_1, T_n))}{\sum_{i=2}^n P(T_1, T_i) \times \tau_i}$$

Les produits dérivés de taux ne sont pas cotés en prix mais en volatilité. Il est donc nécessaire de convertir ces volatilités de marché en prix pour les comparer aux prix obtenus par le modèle. La convention de calcul utilisée est celle de la volatilité implicite de Bachelier qui suppose que le taux swap forward suit un modèle normal. La formule de Bachelier suppose la dynamique suivante pour les taux swap forward associés au swap de maturité  $T_1$  et de ténor  $T_n$ :

$$dS_{1,n}(t) = \sigma_{Bach}^{1,n} dW_t \quad (2.2)$$

Avec  $W_t$  un mouvement Brownien Standard sous la probabilité associée au numéraire  $LVL(t, T_1, T_n)$  et  $\sigma_{Bach}^{1,n}$  est la volatilité implicite de Bachelier d'un swaption de maturité  $T_1$  et de ténor  $T_n$ .

Soit  $LVL(t, T_1, T_n) = \sum_{i=2}^n P(t, T_i) \tau_i$ .

En intégrant la formule de Bachelier de 0 à  $t$  :

$$S_{1,n}(t) = S_{1,n}(0) + \sigma_{Bach}^{1,n} \sqrt{T_1} \epsilon$$

Avec  $\epsilon \sim N(0, 1)$ .

Avec le passage sous la probabilité  $Q^{T_1}$  associée au numéraire  $P(t, T_1)$  le prix du swaption est obtenu par la formule:

$$PS(t) = P(t, T_1) \times E^{Q^{T_1}} \left( (N \times (P(T_1, T_1) - P(T_1, T_n)) - K \times \sum_{i=2}^n P(T_1, T_i) \times N \times \tau_i)^+ | F_t \right)$$

$$PS(t) = N \times P(t, T_1) \times E^{Q^{T_1}} \left( LVL(T_1, T_1, T_n) \times (S_{1,n}(T_1) - K)^+ | F_t \right)$$

En passant par la probabilité  $Q^{1,n}$  associée au numéraire  $LVL(t, T_1, T_n)$ ,  $PS(t)$  devient :

$$PS(t) = N \times LVL(t, T_1, T_n) \times E^{Q^{1,n}} \left( (S_{1,n}(T_1) - K)^+ \right)$$

Finalement le prix de marché des swaptions déterminés grâce à la formule de Bachelier est :

$$PS^{Bach} \left( 0, \tau, K, \sigma_{1,n}^K, (P(0, T))_{T \in \tau} \right) = N \times LVL(0, T_1, T_n) \times Bachelier \left( K, S_{1,n}, \sigma_{Bach}^{1,n}, T_1 \right) \quad (2.3)$$

Avec:

- $Bachelier \left( K, S_{1,n}, \sigma_{Bach}^{1,n}, T_1 \right) = \sigma_{Bach}^{1,n} \sqrt{T_1} \times d_1 \phi \times (d_1) \psi(d_1)$
- $d_1 = \frac{(S_{1,n} - K)}{\sigma_{Bach}^{1,n} \sqrt{T_1}}$
- $\Phi$  et  $\phi$  les fonctions de répartition et densités d'une loi  $N(0,1)$

Les volatilités à utiliser dans l'estimation des paramètres sont les volatilités associées au modèle normal issues de Bloomberg. La courbe de taux zéro coupon  $(P(0, T))_{T \in \tau}$  est la courbe de taux EIOPA à la date de calibrage.

Ainsi la fonction à minimiser est :

$$\sum_{1,n,K} \omega_{1,n,K} \left( PS^{Bach} \left( 0, \tau, K, \sigma_{1,n}^K, T_1 \right) - PS^{CEV} \left( t, N, K, 1, n, \psi, \delta, \eta \right) \right)^2 \quad (2.4)$$

En notant:

- $PS^{CEV}$  Le prix de swaption calculé par le modèle
- $\tau$  l'échéancier du swap sous jacent
- $\omega = 1$  pour un swaption payeur et  $\omega = -1$  pour un swaption receveur

Une approche basée sur des sensibilités de la matrice de volatilité est utilisée pour déterminer les poids  $\omega_{1,n,K}$ .

Dans le but de déterminer ces poids, des zones sont créées grâce à une analyse des cashflows du modèle et des *management action* de la modélisation ALM:

- La séparation des maturités est donnée par l'analyse des cashflows net. Pour la partie passif ces cashflows sont issus d'un run déterministe tandis que la partie actif est basé sur les paiements des coupons et le remboursement des nominaux. Le constat est que pour les maturités inférieures à 10 ans les cashflows de l'actif sont supérieurs à ceux du passif et au-delà de 10 ans le phénomène s'inverse.
- La séparation des tenors résulte de l'analyse des maturités de réinvestissement de l'ALM. La séparation est faite en 3 zones : courte, moyenne et longue durée.
- Le tenor 10 ans joue un rôle important dans la détermination du taux de marché ou taux concurrent qui correspond au taux limite en deça duquel on observe des rachats dynamiques: une zone y est consacrée.

On obtient la décomposition suivante:

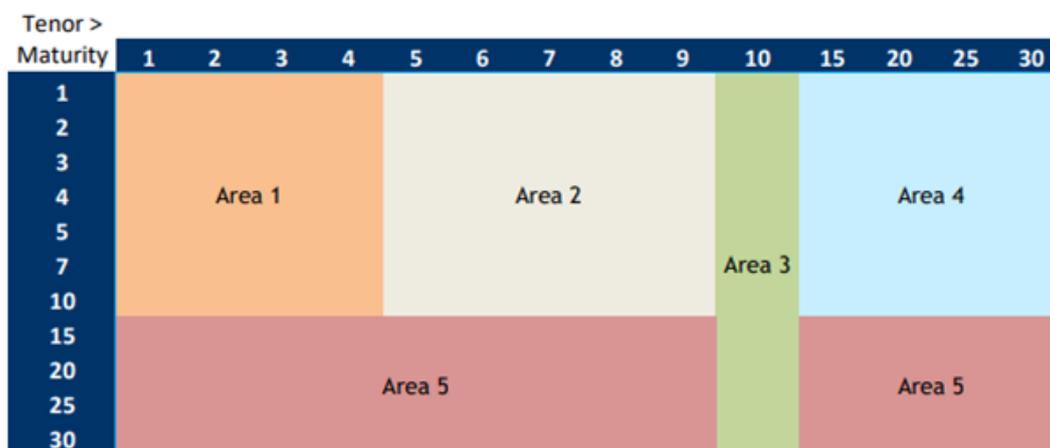


Figure 2.1: Représentation des zones en fonction de la maturité et du tenor

Les zone 1 , 2 et 4 correspondent respectivement aux swaptions de courte , moyenne et longue durée. La zone 3 correspond aux swaptions de tenor 10 tandis que la zone 5

représente les swaptions de très longue durée qui auront un faible impact dans le calibrage.

Les poids des zones sont maintenant déterminés sur la base de sensibilité de la VIF à la variation des volatilités des swaptions desdites zones.

### 3 Le modèle de crédit

Le modèle utilisé pour le crédit est un modèle Jarrow-Lando-Turnbull G2 (JLT G2) dont le principe est de simuler les changements de rating des obligations risquées à l'aide d'une matrice qui suit une chaîne de Markov, appelée matrice de transition stochastique.

Pour le processus de migration de crédit, le modèle prend en entrée la matrice de transition historique publiée chaque année par les agences de notation. Le modèle JLT suppose que la prime de risque  $\pi(t)$  est stochastique. Elle est modélisée par un processus de CIR (Cox, Ingersoll et Ross).

#### 3.1 Probabilité de défaut sous le modèle JLT G2

Le principe du modèle JLT est de simuler les changements de rating des obligations risquées à l'aide d'une matrice, appelée matrice de transition stochastique. Pour le processus de migration de crédit, le modèle se base sur la matrice de transition historique fournie par une agence de notation.

Une approche permettant la simulation de la prime de risque pour tous les ratings est introduite. Cette approche a l'avantage de donner des formules fermées de calcul de la probabilité de défaut associée à chaque rating. L'état de défaut est défini comme un état absorbant c'est-à-dire qu'il n'est plus possible pour une obligation qui fait défaut de migrer vers un autre rating.. La matrice génératrice historique  $\Lambda$  est supposée diagonalisable, en d'autres termes, il existe une matrice inversible  $\Sigma = (\sigma_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq K$  avec son inverse  $\Sigma^{-1} = (\sigma'_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq K$  et une matrice diagonale  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_K)$  telles que :

$$\Lambda = \Sigma D \Sigma^{-1}$$

Cette approche suppose également l'existence d'un processus univarié  $\pi(t)$  nommée prime de risque de crédit qui permet de passer d'une matrice historique vers une matrice risque neutre. La matrice génératrice risque neutralisée est alors écrite :

$$\tilde{\Lambda} = \pi(t) \Lambda = \Sigma \tilde{D}(t) \Sigma^{-1}$$

,

Avec  $\tilde{D}(t) = \text{diag}(\tilde{d}_1(t), \dots, \tilde{d}_K(t))$  une matrice diagonale stochastique dépendant du temps qui satisfait :

$$\tilde{D}(t) = \pi(t) D$$

.

Le modèle JLT G2 s'appuie sur un ajustement des valeurs propres de la matrice génératrice en prenant le logarithme népérien de celles-ci tout en laissant les vecteurs propres associés inchangés. Si on note  $L$  la matrice diagonale de  $D$  c'est à dire  $L = \text{diag}(\ln(d_1), \dots, \ln(d_K))$ , la matrice génératrice se réécrit:

$$\Lambda = \Sigma \exp(L) \Sigma^{-1}$$

Ce passage permet de conserver la matrice génératrice d'une chaîne de Markov de telle sorte que les ratings les moins forts aient plus de chance de faire défaut. Il permet également d'avoir la possibilité de passer plus facilement à une matrice multi-période.

La matrice de transition risque neutre est ensuite obtenue en prenant l'espérance sur l'ensemble des simulations de la prime de risque :

$$\tilde{Q}_{t,T} = \Sigma \tilde{E} \left[ \exp \left( \int_t^T \tilde{D}(s) ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] \Sigma^{-1} \quad (2.5)$$

En particulier la probabilité de défaut d'une obligation de rating  $i$  s'écrit:

$$\tilde{q}_{i,K}(t, T) = \sum_{j=1}^{K-1} \sigma_{ij} \sigma'_{jK} \left\{ \tilde{E} \left[ \exp \left( dj \int_t^T \pi(s) ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] - 1 \right\}$$

La relation entre le spread associé au rating  $i$  pour une obligation de maturité  $T$  observée en  $t$  et la probabilité de défaut est décrite par la formule suivante:

$$s_{i,t}^T = -\frac{1}{T-t} \ln[1 - (1 - \delta)\tilde{q}_{i,K}(t, T)]$$

$\delta$  est le taux de recouvrement qui correspond à la valeur remboursée dans le cas où une obligation risquée fait défaut.

Ainsi, Le prix d'une obligation risquée de rating  $i$  et de maturité  $T$  en  $t$  est donné par :

$$P_{risky}(t, T, i) = P(t, T) e^{-(T-t)s_{i,t}^T}$$

### 3.2 Diffusion de la prime de risque

Le modèle fait l'hypothèse que la prime de risque  $\pi(t)$  suit une dynamique de Cox-Ingersoll-Ross (CIR) :

$$\begin{cases} \pi(t) = \alpha(\mu - \pi(t))dt + \sigma\sqrt{\pi(t)}dW_t \\ \pi(0) = \pi_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Avec :

- $\mu$  la moyenne à long terme du processus
- $\alpha$  la vitesse de retour à la moyenne
- $\sigma$  la volatilité du processus
- $W_t$  un mouvement Brownien standard

L'expression de l'espérance du processus est donnée par:

$$E(\pi(t) | F_t) = \mu + (\pi_0 - \mu) \exp(-\alpha t)$$

Lorsque  $t$  tend vers l'infini, le processus converge vers sa moyenne de long terme  $\mu$ . Si la valeur de  $\alpha$  augmente, l'espérance converge plus rapidement vers  $\mu$ .

La variance théorique de  $\pi(t)$  est donnée par :

$$Var(\pi(t) | F_t) = \frac{\sigma^2}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha t)) (\pi_0 \exp(-\alpha t) + \frac{\mu}{2} (1 - \exp(-\alpha t)))$$

La contrainte  $2\alpha > \sigma^2$  doit être vérifiée afin d'avoir des solutions positives de l'équation différentielle stochastique [2.6](#)

La matrice de transition décrite par l'équation [2.5](#) peut s'écrire sous forme affine :

$$\tilde{E} \left[ \exp \left( dj \int_t^T \pi(s) ds \right) \middle| \mathcal{G}_t \right] = \exp(A_j(t, T) - \pi(t) B_j(t, T))$$

Avec :

$$A_j(t, T) = \frac{2\alpha\mu}{\sigma^2} \ln \left( \frac{2\nu_j \exp\left(\frac{1}{2}(\alpha + \nu_j)(T - t)\right)}{(\alpha + \nu_j)(\exp(\nu_j(T - t)) - 1) + 2\nu_j} \right)$$

$$B_j(t, T) = -\frac{2d_j(\exp(\nu_j(T - t)) - 1)}{(\alpha + \nu_j)(\exp(\nu_j(T - t)) - 1) + 2\nu_j}$$

$$\nu_j = \sqrt{\alpha^2 - 2d_j\sigma^2}$$

### 3.3 Calibrage du modèle

Les paramètres  $\alpha$ ,  $\mu$  et  $\sigma$  sont calibrés sur des données d'obligations de rating A et de maturité 7 ans obtenus sur le marché des spreads. Ce sont des obligations considérées

comme étant particulièrement liquides.

Le paramètre  $\pi_0$  est calibré sur le portefeuille des obligations détenues par l'entreprise. Le calibrage est effectué sur des obligations risquées de rating A et de maturités comprises entre 5 et 10 ans. La prime de risque initiale est calibrée à chaque arrêté trimestriel.

## 4 Le modèle Action et Immobilier

### 4.1 Dynamique du modèle

Pour les facteurs de risque action et immobilier, le modèle utilisé est celui de Black Scholes dont la dynamique générale est donnée par:

$$d\ln S_{price}(t) = (r(t) - d)dt + \sigma_t dW_t$$

Avec:

- $S_{price}$  le prix de l'actif sous-jacent
- $r(t)$  le taux de rendement
- $d$  le dividende
- $\sigma_t$  la volatilité du sous-jacent
- $dW_t$  un mouvement brownien standard

Le modèle utilisé pour l'action est un modèle à volatilité déterministe variable dans le temps TVDV (Time Varying Deterministic Volatility ) pour modéliser les rendements d'actions en univers risque neutre. Le modèle TVDV étend le modèle d'actions standard lognormal (volatilité fixe) en permettant à la volatilité d'être une fonction déterministe du temps.

Le modèle suppose l'équation différentielle stochastique suivante pour le prix des actions  $S_{price}(t)$  dans un monde risque neutre :

$$d\ln S_{price}(t) = \left( r(t) - d(t) - \frac{1}{2}\sigma(t)^2 \right) dt + \sigma(t) dW(t)$$

La volatilité vectorielle est donnée par:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp(-\alpha t) + \sigma_\infty (1 - \exp(-\alpha t))$$

Pour l'indice immobilier, on utilise un modèle de Black Scholes à volatilité constante avec la dynamique définie comme suit:

$$d\ln S_{property}(t) = \left( r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t)$$

## 4.2 Calibrage du modèle

Une forme paramétrique est utilisée pour ajuster l'ensemble de la structure à terme des volatilités implicites des actions. L'outil de calibrage détermine les paramètres du modèle  $\sigma_0$ ,  $\alpha$  et  $\sigma_\infty$  de manière à minimiser la somme des carrés des erreurs pour chaque point de la courbe de volatilité implicite. Les volatilités utilisées sont les celles d'un call sur Eurostoxx 50 pour des maturités de 1 à 10 ans . Une pondération égale est appliquée à chacun des termes de maturité de la volatilité implicite lors de la minimisation de l'erreur quadratique.

Pour le cas de l'indice immobilier, le calibrage de la volatilité s'appuie sur un certain nombre d'étude sur les marchés immobiliers qui dépendent largement du jugement d'experts étant donné les caractéristiques générales inefficaces du marché immobilier. Les données utilisées sont les rendements historiques du portefeuille de l'entreprise.

## 5 Utilisation de variables antithétiques

Un GSE doit intégrer un générateur de nombres aléatoires qui en constitue la brique de base servant à la génération du mouvement Brownien.

Dans le contexte de la simulation Monte Carlo, les variables antithétiques sont une technique utilisée pour améliorer l'efficacité des estimations dans les modèles de calcul basés sur des simulations aléatoires.

Dans le cas de l'utilisation de variables antithétiques, on définit par  $2s$  le nombre de variables antithétiques simulées qui représente la moitié de l'échantillon. L'évaluation est donc faite avec des paires de simulation  $(2 \times s - 1, 2 \times s)_{1 \leq s \leq \frac{N_s}{2}}$  :

Pour une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{1 \leq n \leq N}$ , on génère  $\frac{N}{2}$  les paires de variables aléatoires  $(X_{2n-1}, X_{2n})$  corrélées négativement et de même loi que  $X_n$  et on pose  $Y_n = \frac{X_{2n-1} + X_{2n}}{2}$

On obtient :

- $E(Y_n) = E(X_n)$
- $\mathbb{V}(Y_n) = \frac{1}{2}\mathbb{V}(X_{2n})(1 + \rho)$

avec  $\rho$  le coefficient de corrélation de  $(X_{2n-1}, X_{2n})$ . Si ce coefficient tend vers -1, la variance de  $X_n$  tend vers 0.

En appliquant une fonction croissante à  $X_n$ , la variance de cette fonction sera réduite. Cela est le cas dans l'exemple où le prix d'un actif est donné par  $S_t = \exp^{r_t(t - \frac{\sigma^2}{2}) + \sigma W_t}$  avec  $W_t$  un mouvement Brownien simulé à l'aide de variables antithétiques. Si le coefficient de corrélation est égal à -1, la variance du mouvement Brownien sera nulle tandis que celle de  $S_t$  sera réduite mais non nulle.

L'idée derrière les variables antithétiques est d'utiliser des paires de variables aléatoires corrélées de manière négative dans le générateur de nombres pseudo-aléatoires de façon à réduire la variance.

En générant ces  $\frac{N}{2}$  paires de variables négativement corrélées la condition d'indépendance des prix simulés n'est pas satisfaite pour l'application du théorème central limite mais par somme on obtient une suite de  $\frac{N}{2}$  éléments indépendants.

D'après la loi des grands nombres, en posant comme approximation de l'espérance :

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n = \frac{1}{\frac{N}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \frac{X_{2n-1} + X_{2n}}{2} \quad (2.7)$$

On a la convergence de la moyenne empirique de  $X_n$  vers l'espérance:

$$\frac{1}{\frac{N}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \left( \frac{X_{2n-1} + X_{2n}}{2} \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} E(X_n) \quad (2.8)$$

Les variables antithétiques sont utilisées dans le GSE.

## 6 Tests de Validation

Les GSE doivent répondre aux critères essentiels de martingalité et de Market Consistency afin d'être en cohérence avec les hypothèses de départ: l'absence d'opportunité d'arbitrage traduite par la martingalité et la capacité à répliquer les données du marché.

Pour satisfaire les conditions de Market consistency le test consiste à vérifier que les prix simulés par le GSE reproduisent des prix théoriques en vérifiant que les écarts ne sont pas importants.

Concernant le test de martingalité, il convient de vérifier que l'espérance des prix actualisés au taux sans risque est une martingale ie: avec les notations de la section 3, le prix d'un actif  $(S_t)_{t \geq 0}$  doit vérifier pour tout  $s$  et  $t$ , tel que  $0 < s < t$ , l'égalité

$$E^Q(S_t \delta_t | F_s) = S_s \delta_s$$

Le respect de ces hypothèses permet de limiter les écarts de convergences encore appelés fuites de modèle qui correspondent à un gain ou une perte de valeur du modèle pouvant

altérer l'évaluation du Best-Estimate.

Dans la suite, il s'agira, de tester pour chaque facteur de risque les hypothèses de martingalité et de market consistency du GSE risque neutre avant son utilisation et d'étudier leur impact respectif sur la fuite de modèle en ALM.

## Validation du générateur de scénarios économiques

L'objectif de cette partie est de développer les tests réalisés et de présenter leur application sur les scénarios économiques obtenus par les modèles cités précédemment. Pour se faire, un outil de validation des GSE qui couvre les tests de martingalité et de market consistency est mis en place.

La nécessité de vérifier ces deux propriétés naît de deux constats :

- Les modèles sont calibrés théoriquement pour garantir la martingalité. Cependant le nombre de scénarios utilisé dans le cadre d'un modèle ALM est limité et les moments des lois sont estimés empiriquement. L'objet du test de martingalité est d'évaluer la qualité de la convergence de l'estimateur.
- De même les modèles sont calibrés pour reproduire au mieux les prix d'actifs. Le nombre de paramètres étant limité, il n'est pas possible de reproduire exactement les surfaces de prix. Le test de market consistency permet de valider l'aptitude du modèle à répliquer cette surface au travers du calibrage.

Des scénarios qui ne respectent pas ces propriétés induiront une incertitude plus importante dans l'évaluation des Provisions Techniques Solvabilité 2. La validation de ces scénarios apparaît donc nécessaire pour s'assurer de la qualité du Best Estimate.

Les taux ont été modélisés sur les maturités suivantes : 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35 et 40. Afin de réaliser les tests, une fonction d'interpolation linéaire est utilisée pour obtenir les valeurs des maturités manquantes. Pour le cas du risque de crédit, le test traité dans cette étude est uniquement le test de martingalité.

Dans le cadre du test de martingalité l'objectif est de construire un intervalle de confiance de niveau  $\alpha$  autour de l'espérance estimée des scénarios. Cet intervalle représente l'incertitude autour de la grandeur à estimer.

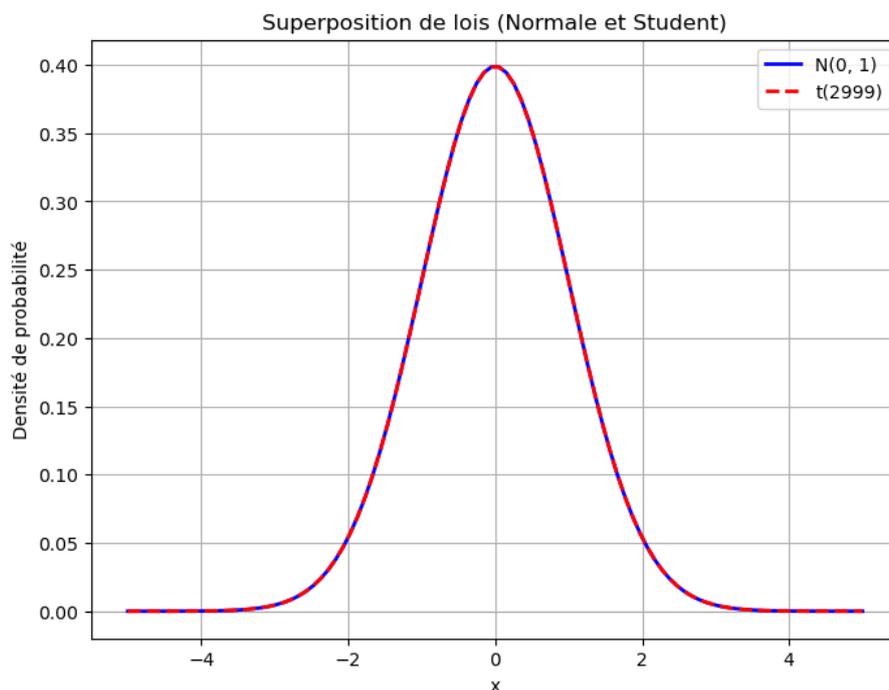
L'appartenance de l'espérance à cet intervalle permet d'écarter l'hypothèse d'une erreur liée à la convergence de son estimateur. Pour se faire, l'espérance et la variance sont estimés empiriquement.

Soit un facteur de risque représenté par une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \geq 1}$  indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), de taille N telle que  $E[X_n] < +\infty$ . D'après le théorème central limite (TCL) on peut construire un intervalle de confiance autour de sa moyenne empirique tel que:

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma_X} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n - E(X_n) \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} t_{N-1}$$

Avec  $t_{N-1}$  une loi de student à N-1 degrés de liberté et  $\sigma_X$  l'écart type estimé empiriquement.

Pour N=3000, la loi de student à N-1 degrés de liberté s'apparente à une loi normale centrée réduite comme le montre la figure suivante:



**Figure 3.1:** Comparaison des densité d'une loi de Student à 2999 degrés de liberté et d'une loi normale centrée et réduite

Par souci de simplicité, l'hypothèse est faite que la convergence du TCL se fait vers une loi normale centrée et réduite. L'intervalle de confiance est maintenant construit de la manière suivante:

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma_X} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n - E(X_n) \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} N(0, 1)$$

L'intervalle de confiance au quantile d'ordre  $1 - \frac{\alpha}{2}$  de la moyenne empirique est donné par:

$$I_c = \left[ E(X_n) - \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), E(X_n) + \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

Avec  $\phi$  la fonction de répartition de la loi centrée et réduite.

Dans le cas d'utilisation de variables antithétiques, en posant:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n = \frac{1}{\frac{N}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \frac{X_{2n-1} + X_{2n}}{2}$$

d'après le TCL l'intervalle de confiance se réécrit :

$$I_c = \left[ E(X_n) - \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), E(X_n) + \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

$$\text{Avec } \sigma = sd \left( \frac{X_{2n-1} + X_{2n}}{2} \right)$$

La loi des grands nombres montre que la moyenne empirique des scénarios converge vers l'espérance et le TCL montre la vitesse de convergence de ces scénarios. Cela implique qu'au fur et à mesure que le nombre de scénarios augmente, l'erreur de convergence tend vers une valeur nulle.

## 1 Présentation du Moment matching

Le « moment matching » est une technique de réduction de variance décrite dans l'article « Monte Carlo methods in financial engineering » de Paul Glasserman, sous le nom de « Moment matching through path adjustment ».

Cette technique permet l'ajustement des moments empiriques d'un jeu de scénarios économiques afin qu'ils correspondent à leurs valeurs théoriques. Elle permet donc d'améliorer la performance des scénarios économiques lors des tests de martingalité.

L'application la plus simple du « moment matching » est un ajustement de la moyenne d'un jeu de réalisations d'une variable aléatoire : par exemple, si l'on considère un jeu de 1000 réalisations d'une distribution normale centrée. La moyenne de l'échantillon sera proche mais non strictement égale à zéro. La méthode de « moment matching » permet de décaler des réalisations de la différence par rapport à la moyenne zéro de l'échantillon.

La moyenne de l'échantillon ajusté est alors égale à zéro.

L'objectif de l'utilisation de la méthode de « moment matching » est de renforcer la convergence des trajectoires simulées vers leur moyenne théorique. Les ajustements sont réalisés de manière à ce que la propriété de martingalité soit vérifiée pour chaque catégorie d'actif.

En supposant que le prix du sous-jacent  $S(t)$  suit un mouvement brownien géométrique avec un taux d'intérêt constant et que celui-ci ne verse pas de dividende, alors  $E(S(t)) = e^{rt}S(0)$  à tout instant  $t$ , avec  $S(0)$  le prix du sous-jacent à l'instant. En simulant  $n$  réalisations du prix du sous-jacent à l'instant  $t$ , notées  $S_1(t), \dots, S_n(t)$ , la moyenne de l'échantillon  $\overline{S(t)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i(t)$  n'est pas égale à la moyenne théorique  $e^{rt}S(0)$ . Pour y remédier on peut appliquer selon la méthode de moment matching la transformation suivante:

$$\widetilde{S}_i(t) = S_i(t) \frac{E(S(t))}{S(t)}$$

Et utiliser  $\widetilde{S}_i(t)$  à la place de  $S(t)$  pour l'évaluation de l'option. Sa moyenne empirique converge par construction vers l'espérance théorique  $E(S(t))$ :

$$\overline{\widetilde{S}_i(t)} = \overline{S(t)} \times \frac{E(S(t))}{S(t)} = E(S(t))$$

Il est important de souligner que les tests sont réalisés avant moment matching pour être conforme à aux exigences du régulateur sur les GSE. En outre, le moment matching n'est pas utilisé pour le facteur de risque crédit.

## 2 Taux nominaux

### 2.1 Test de martingalité

Ce test permet de valider l'implémentation des fonctions relatives à la bonne diffusion des taux stochastiques. Le prix d'un zéro coupon de maturité  $T$  vu en  $t$  est l'espérance sous la mesure risque neutre  $Q$  du pay off unitaire actualisé au taux sans risque par rapport à la filtration  $F_t$ . Cela se transcrit mathématiquement :

$$P(t, T) = E^Q[e^{-\int_t^T r_u du} | F_t]$$

Soit  $D(0, t)$  le déflateur utilisé pour l'actualisation des prix en  $t$ . Il est défini dans le cadre d'un modèle DD LMM CEV par la formule :

$$D(0, t) = \prod_{i=0}^{t+1} P(i, i+1)$$

Concernant la martingalité deux hypothèses sont testées:

- Pour les déflateurs utilisés dans l'actualisation des prix :  $E^Q[D(0, T)] = P(0, T)$
- Le prix des zéros coupons forward doit également respecter :  $E^Q[D(0, t)P(t, t+T)] = P(0, t+T)$

Le premier test permet de vérifier que les déflateurs répliquent les prix des zéros coupons de la courbe EIOPA et le deuxième test permet de vérifier la martingalité des prix de zéros coupons.

Les intervalles de confiance sont estimés de deux manières selon le choix d'utilisation ou non de variables antithétiques dans le générateur de nombres aléatoires pour la simulation du mouvement Brownien.

Pour une meilleure visualisation, il est choisi de représenter le rapport entre les espérances estimées par Monte Carlo et les prix des zéros coupons donnés par l'EIOPA. Ce rapport doit ainsi converger vers 1.

## Intervalles de confiance sans variables antithétiques

- **Intervalle de confiance des déflateurs:** Dans ce cas le théorème central limite donne la convergence suivante pour  $D(0, T)$  simulé  $N$  fois:

$$\frac{\sqrt{N}}{\sigma} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N D_n(0, T) - P(0, T) \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} N(0, 1)$$

Avec  $\sigma = sd(D(0, t))$  l'estimateur empirique de l'écart type.

L'intervalle de confiance de  $E(D(0, T))$  s'écrit donc:

$$I_c^0 = \left[ P(0, T) - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), P(0, T) + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

Selon l'hypothèse de martingalité il est possible de poser:

$$\frac{E(D(0, T))}{P(0, T)} \approx 1$$

Donc en divisant les bornes de l'intervalle de confiance par  $P(0, T)$  le rapport est testé sur l'intervalle suivant :

$$I_c = \left[ 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{N} P(0, T)} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N} P(0, T)} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

- **Intervalle de confiance des prix actualisés des zéros coupons:** L'intervalle de confiance de

$E[D(0, t) P(t, t+T)]$  estimé par le théorème central limite est donné par :

$$I_c = \left[ P(0, t+T) - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), P(0, t+T) + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

Avec  $\sigma = sd(D(0, t)P(t, t+T))$  l'estimateur empirique de l'écart type.

Donc en divisant les bornes de l'intervalle de confiance par  $P(0, t+T)$  l'espérance du rapport reste 1 et on obtient :

$$I'_c = \left[ 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{N} P(0, t+T)} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N} P(0, t+T)} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

### Intervalles de confiance avec l'utilisation de variables antithétiques

- **Intervalle de confiance des déflateurs:**

$$I_c = \left[ 1 - \frac{sd(D(0,T))}{\sqrt{\frac{N_s}{2} P(0,T)}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), 1 + \frac{sd(D(0,T))}{\sqrt{\frac{N_s}{2} P(0,T)}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

Avec:

$$sd(D(0, t)) = \sqrt{\frac{1}{\frac{N_s}{2} - 1} \sum_{s=1}^{\frac{N_s}{2}} \left( \frac{D^{2 \times s - 1}(0, T) + D^{2 \times s}(0, T)}{2} - P(0, T) \right)^2}$$

- **Intervalle de confiance des prix actualisés des zéro coupon:**

$$I_c = \left[ 1 - \frac{sd(D(0,t)P(t,t+T))}{\sqrt{\frac{N_s}{2} P(0,t+T)}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), 1 + \frac{sd(D(0,t)P(t,t+T))}{\sqrt{\frac{N_s}{2} P(0,t+T)}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

Où:

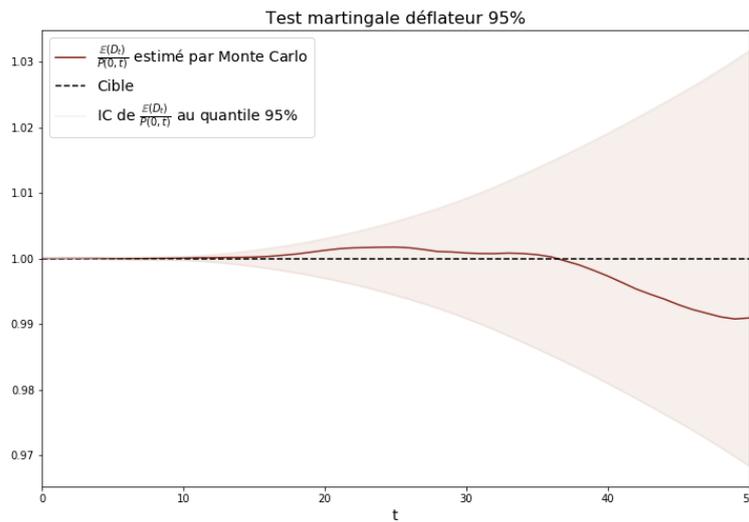
$$sd(D(0, t)P(t, T)) = \sqrt{\frac{1}{\frac{N_s}{2}-1} \sum_{s=1}^{\frac{N_s}{2}} \left( \frac{Prix\_Actualisé}{2} - P(0, t+T) \right)^2}$$

Et:

$$Prix\_Actualisé = D^{2 \times s-1}(0, t) P^{2 \times s-1}(t, t+T) + D^{2 \times s}(0, t) P^{2 \times s}(t, t+T)$$

### Résultats des tests

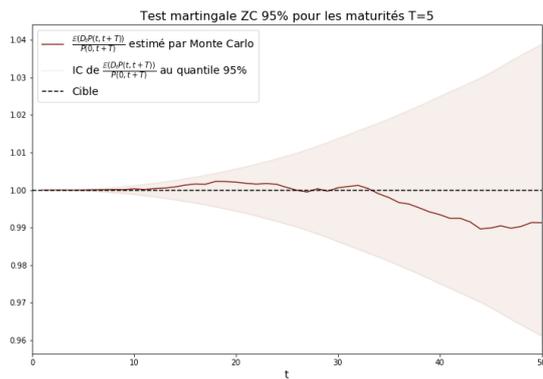
Le résultat du test de martingalité appliqué aux déflateurs :



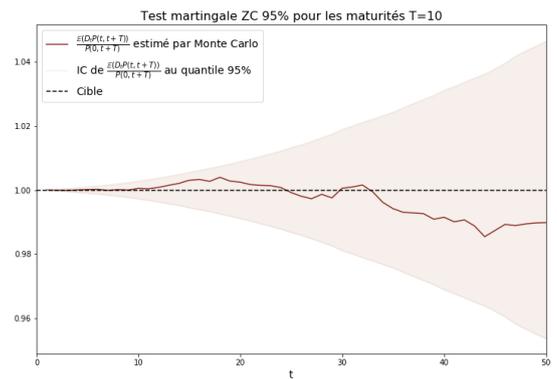
**Figure 3.2: Test de martingalité des déflateurs au quantile de 95%**

Le test est bien vérifié pour les déflateurs avec l'intervalle de confiance à 95%. Il y a une légère différence de valeurs entre 20 et 40 ans, montrant que le prix estimé est supérieur au prix théorique, puis une perte de valeur au-delà.

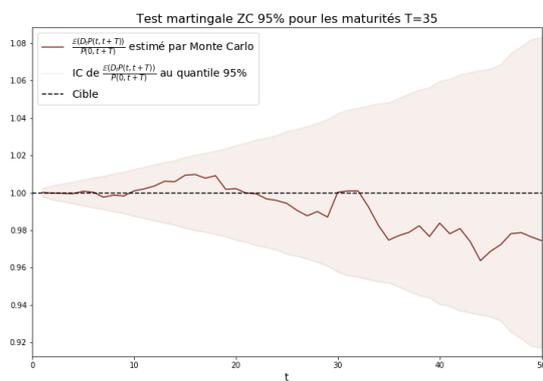
Les figures suivantes montrent les résultats de tests de martingalité pour les zéros coupons pour les maturités de 5, 10, 35 et 40 ans.



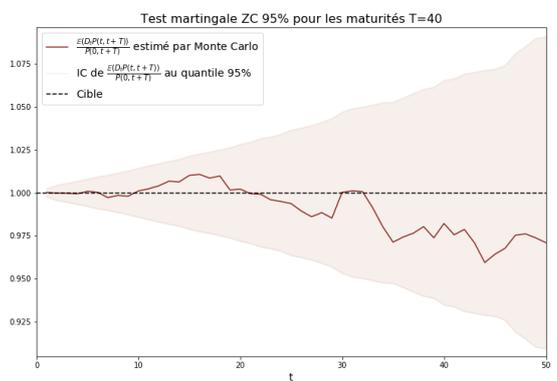
(a) Martingale ZC de maturité 5 ans



(b) Martingale ZC de maturité 10 ans



(c) Martingale ZC de maturité 35 ans



(d) Martingale ZC de maturité 40 ans

Figure 3.3: Test de martingalité des zéros coupons au quantile de 95%

Ces graphiques permettent donc de dire que la martingalité est vérifiée pour les zéros coupons sur un intervalle de confiance à 95% .Il est possible d’observer aussi une création de valeur puis une perte comme sur les déflateurs mais cela se décale dans le temps du fait de la projection à un horizon plus éloigné.

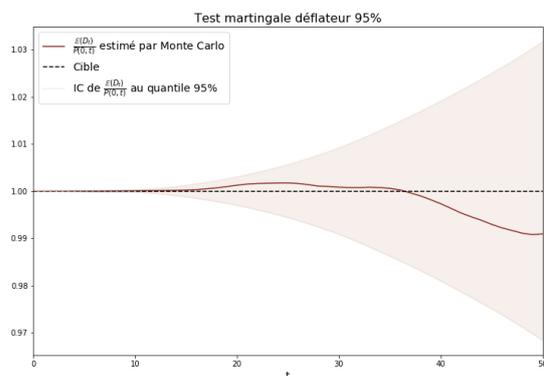
### Exemple d’application du moment matching

Les différents tests de martingalité sont effectués avant et après moment matching pour être conforme avec la notice de l’Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) sur les GSE. En prenant le cas du test sur les déflateurs, la transformation suivante est appliquée:

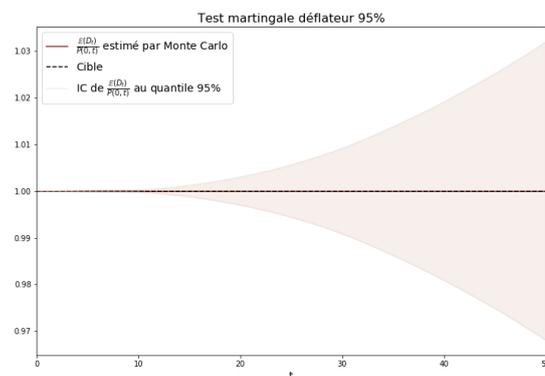
$$\widetilde{D}(0, T) = \frac{P(0, T)}{\overline{D(0, T)}} D(0, T)$$

Avec  $\overline{D(0, T)}$  la moyenne empirique des déflateurs générés.

Les résultats obtenus après cette correction montrent un meilleur test de martingalité.



(a) Martingale des déflateurs avant moment matching



(b) Martingale des déflateurs après moment matching

Figure 3.4: Comparaison du test de martingalité avant et après moment matching des déflateurs

Le facteur de correction appliqué aux déflateurs force par construction la convergence de

sa moyenne empirique vers son espérance.

## 2.2 Test de Market Consistency

Pour rappel le modèle utilisé pour les taux nominaux est un modèle DD LMM CEV calibré sur les swaptions.

Dans ce test l'objectif est de s'assurer que les prix des swaptions proposés par le modèle répliquent bien les prix observés sur le marché. Les prix de marché sont obtenus en inversant la formule de Bachelier à partir de volatilités implicites récupérées sur le marché Comme définit dans la partie 2.2 :

- la formule utilisée pour le pricing d'un swaption de maturité  $T_1$  et de tenor  $T_n$  est donnée par :

$$PS(t) = N \times E^Q \left( D(T_1) \times LVL(T_1, T_1, T_n) \times \left( \frac{P(T_1, T_1) - P(T_1, T_n)}{\sum_{i=2}^n P(T_1, T_i) \times \tau_i} - K \right)^+ | F_t \right)$$

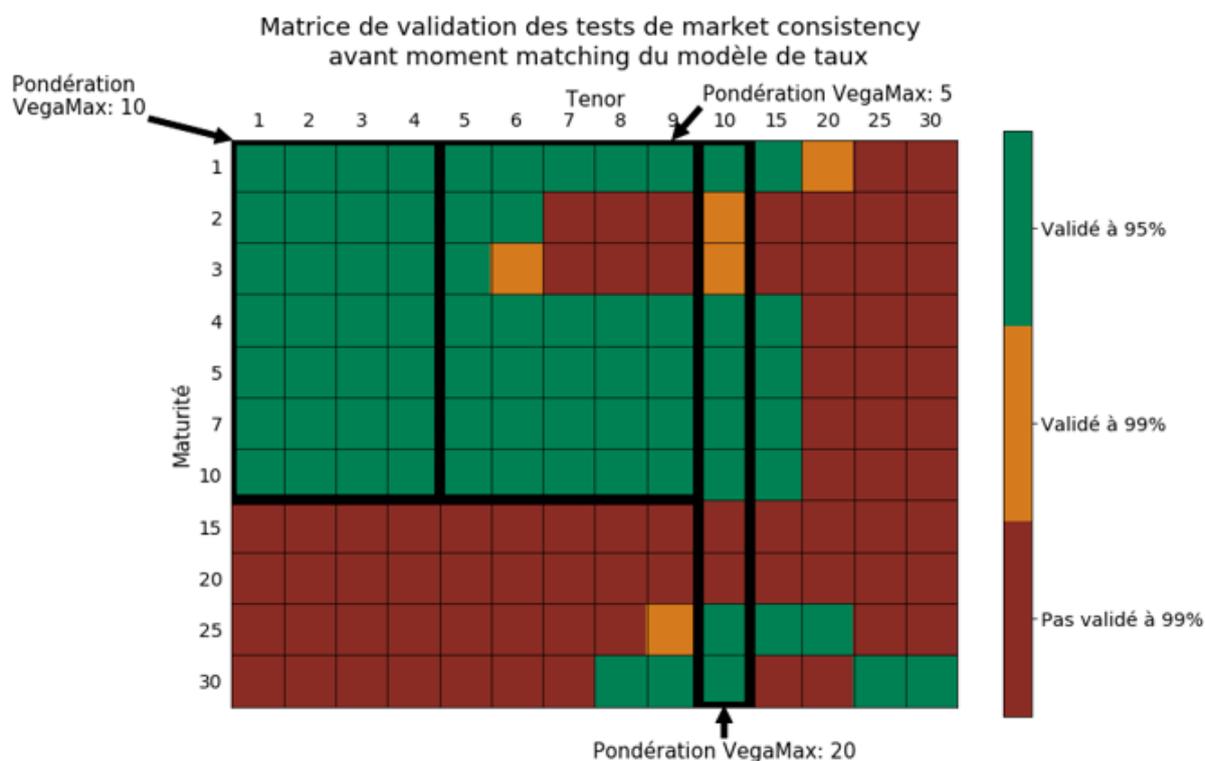
- Et le prix de marché des swaptions déterminé grâce à la formule de Bachelier est :

$$PS^{Bach} \left( 0, \tau, K, \sigma_{1,n}^K, (P(0, T))_{T \in \tau} \right) = N \times LVL(0, T_1, T_n) \times Bachelier \left( K, S_{1,n}, \sigma_{Bach}^{1,n}, T_1 \right)$$

Avec:

- $Bachelier \left( K, S_{1,n}, \sigma_{Bach}^{1,n}, T_1 \right) = \sigma_{Bach}^{1,n} \sqrt{T_1} \times d_1 \phi \times (d_1) \psi(d_1)$
- $d_1 = \frac{(S_{1,n} - K)}{\sigma_{Bach}^{1,n} \sqrt{T_1}}$
- $\Phi$  et  $\phi$  les fonctions de répartition et de densité d'une loi  $N(0,1)$

Le graphique suivant montre la matrice de validation du test de market consistency sur les taux nominaux.



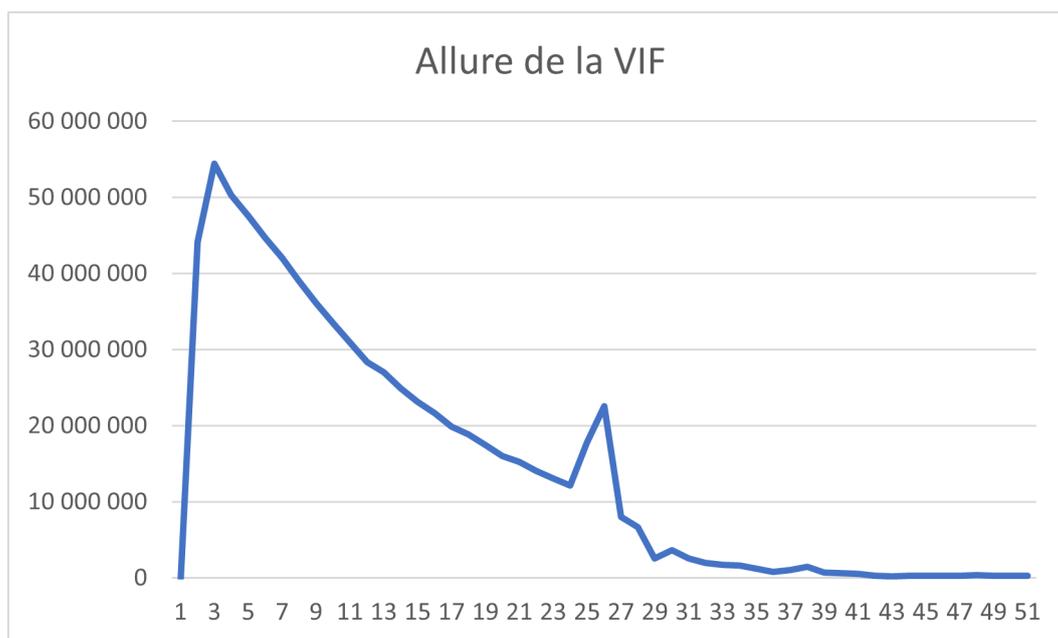
**Figure 3.5: Market consistency des taux nominaux**

Le test est globalement vérifié dans les zones 1, 2 et 3 qui correspondent respectivement aux obligations de maturité courte, de maturité moyenne et aux obligations de Ténor 10. Ce sont les zones qui ont les pondérations les plus élevées comme indiqué dans la figure avec 10 pour la zone 1, 5 pour la zone 2 et 20 pour la zone 3. Les autres zones ont chacun un poids de 1.

Au regard de la complexité du modèle et du nombre limité de paramètres de calibrage il est difficile de reproduire fidèlement l'intégralité des prix de la nappe de swaption. Les zones 4 et 5, représentant respectivement les swaption de longue durée et de très longue durée, sont les zones où le test n'a pas été validé. En pratique, peu de produits financiers sont concernés par des maturités aussi longues et il faut noter que les flux diminuent

dans le temps.

Comme décrit dans le calibrage du modèle DD LMM CEV, les poids des zones sont déterminés en fonction de la sensibilité de la VIF aux variations des volatilités des swaptions. Il est possible d'illustrer cela en observant la figure suivante représentant l'allure de cette VIF:



**Figure 3.6: Courbe représentative de la VIF**

Ce graphique montre que la VIF a une faible fluctuation au delà d'un horizon de projection de 36 ans. Cela montre que la VIF est faiblement sensible à la volatilité des swaptions de longue et de très longue durée. L'impact de ces zones est donc considéré comme négligeable avec un poids attribué de 1 permettant de ne pas rejeter le test de market consistency.

## 3 Crédit

### 3.1 Test de martingalité

#### Stratégie de Roll annuel

Dans cette première partie il s'agit de tester la martingalité en utilisant la stratégie de Roll annuel ou Rolling. Cette stratégie consiste à acheter en  $t$  une obligation zéro coupon risquée de maturité  $T > t$  et de rating  $i \in 0, \dots, 6$  avec  $i = 7$  le rating de défaut. L'obligation est revendue en  $t + 1$  et réinvestie dans une obligation de même rating.

Soit  $\nu_K(t, T)$  la valeur à la date  $t$  d'une obligation zéro coupon risquée de rating  $K$  et de maturité  $T$ . Cette valeur est donnée par:

$$\nu_K(t, T) = P_{risky}(t, T, K) = P(t, T) e^{-(T-t)s_{K,t}^T}$$

Avec:

- $s_{K,t}^T$  le spread à la date  $T$  pour le rating  $K$  observé en  $t$
- $P(t, T)$  le prix du zéro coupon risque neutre de maturité  $T$  vu en  $t$

L'évolution de ce zéro coupon risqué à la date  $t + 1$  peut se faire par une transition vers le rating de défaut noté D (état 7 défini précédemment) auquel cas il perd sa valeur et est remboursé au taux de recouvrement  $\delta$ . Il peut également effectuer une transition vers un autre rating différent du défaut et prendra ainsi une autre valeur  $P_{risky}(t + 1, T - 1, K)$ .

On définit la probabilité de transition d'un rating  $K$  vers un rating  $j$  en  $t + 1$  par  $\mathbb{P}_{K,j}(t, t + 1)$ .

La valeur probable de l'obligation  $V_{t+1}$  est donnée par :

$$V_{t+1} = \delta P(t + 1, T - 1) \mathbb{P}_{K,D}(t, t + 1) + \sum_{j=0}^6 P_{risky}(t + 1, T - 1, j) \mathbb{P}_{K,j}(t, t + 1)$$

En partant de  $t$  avec une richesse  $I_t$  qu'on investit dans une obligation risquée de rating  $K$ , la richesse en  $t + 1$  est définie par  $I_{t+1} = \frac{V_{t+1}}{V_t}$ . Si cette obligation est réinvestie en  $t+2$  dans une obligation risquée  $P_{risky}(t + 1, T, K)$  la richesse à cette date devient :

$$I_{t+2} = I_{t+1} \times \frac{\delta \times P(t+2, T-2) \mathbb{P}_{K, D}(t+1, t+2) + \sum_{j=0}^6 P_{risky}(t+2, T-2, j) \mathbb{P}_{K, j}(t+1, t+2)}{P_{risky}(t+1, T-1, j)} \quad (3.1)$$

Par récurrence :

$$I_{t_{i+1}} = I_{t_i} \times \frac{\delta \times P(t_{i+1}, T) \mathbb{P}_{K, D}(t_i, t_{i+1}) + \sum_{j=0}^6 P_{risky}(t_{i+1}, T, j) \mathbb{P}_{K, j}(t_i, t_{i+1})}{P_{risky}(t_i, T, j)} \quad (3.2)$$

Cette stratégie étant auto financée, pour tout  $t < s$  la relation suivante doit être vérifiée pour respecter l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) :

$$I_t = E^Q[D(t, s) \times I_s | \mathcal{F}_t]$$

L'intervalle de confiance est construit de la manière suivante :

**Sans l'utilisation de variables antithétiques:**

$$\left[ 1 - \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, 1 + \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\text{Avec } \sigma = sd(D(0, t)I_t) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{s=1}^N \left( \frac{D^s(0, t)I_t^s}{2} - 1 \right)^2}$$

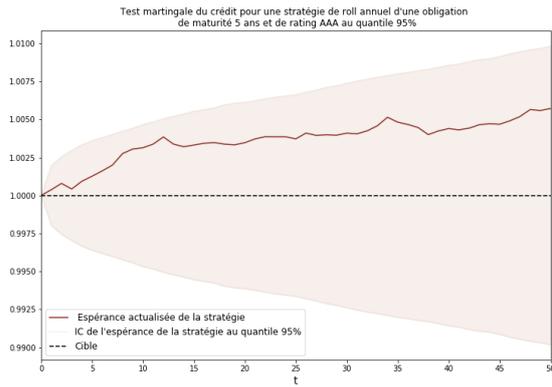
Avec l'utilisation de variables antithétiques:

$$\left[ 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

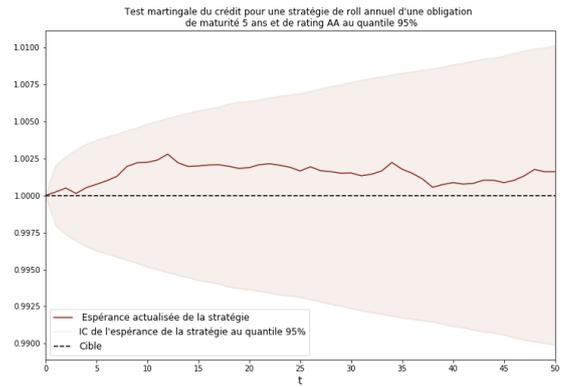
Avec:

$$sd(D(0, t)I_t) = \sqrt{\frac{1}{\frac{N_s}{2} - 1} \sum_{s=1}^{\frac{N_s}{2}} \left( \frac{D^{2 \times s-1}(0, t) I_t^{2 \times s-1} + D^{2 \times s}(0, t) I_t^{2 \times s}}{2} - 1 \right)^2}$$

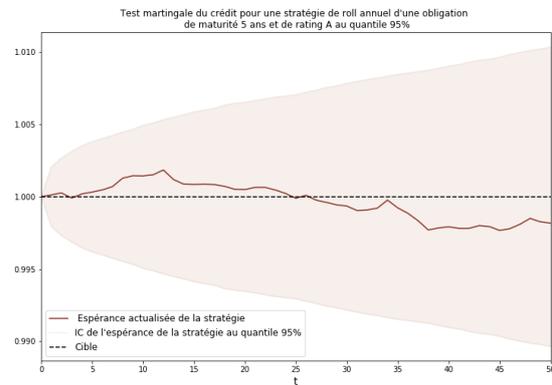
Les résultats suivants sont obtenus pour les ratings AAA, AA, A, BBB en testant au quantile à 95% la stratégie de rolling :



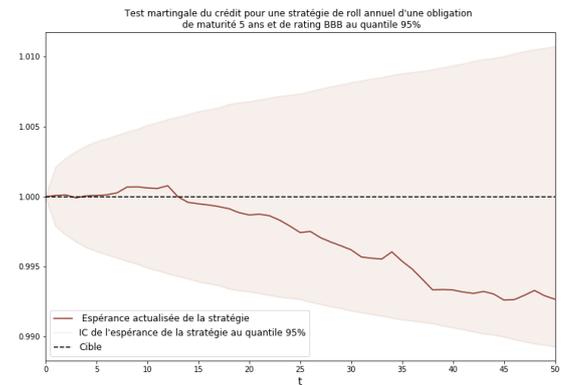
(a) Martingale rating AAA Rolling



(b) Martingale rating AA Rolling



(c) Martingale rating A Rolling



(d) Martingale rating BBB Rolling

**Figure 3.7:** Test de martingalité avec la stratégie de Rolling au quantile à 95% d'une obligation de maturité 5 ans

Les résultats obtenus valident le test de martingalité pour les différents ratings. Le test présente une meilleure convergence pour les ratings AA et A qui constituent la plus grande proportion du portefeuille obligataire. Cela peut être lié au calibrage du modèle JLT 2 sur les obligations de rating A. Il est possible d'observer une création de valeur pour les obligations de rating AAA qui décroît en fonction du fait que le rating soit moins risqué.

### Stratégie de Buy and hold

L'objectif de cette partie est de présenter un test de martingale du facteur de risque crédit en utilisant une stratégie qui consiste à acheter une obligation zéro coupon de rating donné et à la détenir jusqu'à sa maturité. A l'échéance de l'obligation le nominal perçu permet de racheter une obligation de même rating et de même maturité initiale. Cette stratégie, à la différence du rolling, se rapproche plus de la stratégie d'investissement des assureurs. Ces derniers privilégient les investissements à long terme.

Les notations restent les mêmes que pour la stratégie de *rolling*.

L'évolution de la stratégie sera caractérisée en date  $t$  par la quantité d'obligation détenue  $q_t$ , par le prix de l'obligation détenue  $V_t$  et par sa valorisation  $I_t = q_t \times V_t$ .

En  $t = 0$ , l'achat initial est effectué. A cette date l'obligation à un prix donné par l'équation :

$$\nu_K(0, T) = P(0, T) e^{-(T-0)s_{K,0}^T}$$

Une quantité initiale d'obligation notée  $q_0 = \frac{1}{\nu_K(0, T)}$  peut alors être achetée.

En  $t=1$ , deux cas de figure se présentent :

- Soit  $T = 1$  et l'obligation arrive à échéance. Le mécanisme de réception du nominal et de rachat d'obligation est mis en place.
- Soit  $T > 1$  et l'obligation doit être revalorisée

Dans le cas où l'obligation arrive à échéance le nominal est perçu ainsi que la quantité  $q_0$ . La valorisation de cette obligation de maturité  $T$  est de plus :

$$\nu_K(1, T) = P(1, T) e^{-(T-1)s_{K,1}^T}$$

Par conséquent la quantité d'obligation qu'il est possible d'acheter est  $q_1 = \frac{q_0}{\nu_K(1, T)}$ . La valorisation de la stratégie est définie par  $I_1 = q_1 \times \nu_K(1, T) = q_0$ .

Dans le cas où l'obligation n'arrive pas à échéance, la nouvelle valorisation de l'obligation dépend en particulier de son éventuelle transition vers un nouveau rating ou de son défaut :

- Dans le cas où l'actif fait défaut, le propriétaire de l'obligation touchera un montant  $\delta$  à la date de maturité de l'obligation. Cet évènement se produit avec probabilité  $\mathbb{P}_{K,D}(0, 1)$ .
- L'obligation peut également migrer de son rating  $K$  vers un rating  $j$ . Sa valorisation est alors  $\nu_j(1, T - 1)$ . Cet évènement se produit avec probabilité  $\mathbb{P}_{K,j}(1, T - 1)$ .

La valorisation de l'obligation risquée étudiée est alors :

$$V_1 = \delta \times \mathbb{P}_{K,D}(0, 1) \times P(1, T - 1) + \sum_{j=0}^6 \mathbb{P}_{K,j}(1, T - 1) \times \nu_j(1, T - 1)$$

La stratégie est alors valorisée  $I_1 = V_1 \times q_0$ . Le mécanisme d'achat et vente ayant été présenté, l'hypothèse est faite dans la suite que  $T > 2$  afin de présenter la méthode de valorisation sur plusieurs périodes.

Notons  $\tilde{\mathbb{P}}_{K,j}(t, t_i)$  la probabilité que l'obligation se trouve dans l'état  $j$  au temps  $t$  sachant qu'elle a été achetée dans l'état  $K$   $t_i$  périodes plus tôt. L'enjeu est de calculer  $\tilde{\mathbb{P}}_{K,j}(t, t_i) \forall t$ . Cette probabilité est définie par la relation :

$$\tilde{\mathbb{P}}_{K,j}(t, t_i) = \sum_{u=1}^7 \tilde{\mathbb{P}}_{K,u}(t-1, t_i-1) \times \mathbb{P}_{u,j}(t-1, t) \quad (3.3)$$

La relation précédente traduit le fait que l'obligation peut arriver dans l'état  $j$  à la date  $t$  en partant de  $t-1$  dans l'un des 6 états de notation .

En notant

$$\tilde{\mathbb{P}}_K(t, t_i) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbb{P}}_{K,1}(t, t_i) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbb{P}}_{K,7}(t, t_i) \end{pmatrix}$$

la matrice de probabilité de transition en  $t$  partant de l'état  $K$   $t_i$  date plus tôt,

et

$$Q_{t,t+1} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{1,1}(t, t+1) & \cdots & \mathbb{P}_{7,7}(t, t+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{P}_{1,7}(t, t+1) & \cdots & \mathbb{P}_{7,7}(t, t+1) \end{pmatrix}$$

la matrice de transition des états du modèle JLT G2, la relation 3.3 se traduit par :

$$\tilde{\mathbb{P}}_i(t+1, t_i+1) = Q_{t,t+1} \tilde{\mathbb{P}}_K(t, t_i)$$

Le prix de l'obligation de rating  $K$  en  $t$  peut alors être calculé sur le même modèle que le premier cas :

$$V_t = P(t, T) \tilde{\mathbb{P}}_K(t, t_i)' \nu(t, T - t_i)$$

$$\text{Avec } \nu(t, T - t_i) = \begin{pmatrix} \nu_1(t, T - t_i) \\ \vdots \\ \nu_6(t, T - t_i) \\ \delta \end{pmatrix} \text{ le vecteur des prix potentiels d'obligations.}$$

Cette méthode permet de pricer des obligations risquées sur plusieurs périodes. Par la suite, pour obtenir la richesse, il suffit de définir :  $I_t = q_t \times V_t$ . En définitif la richesse est donnée par la récurrence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{t+1} = q_t \text{ si } t \bmod T \neq 0 \\ q_{t+1} = \frac{q_t}{v_K(t, T)}, \text{ si } t \bmod T = 0 \\ I_{t+1} = q_t P(t, T) \tilde{\mathbb{P}}_i(t, t_i)' \nu(t, T - t_i) \text{ si } t \bmod T \neq 0 \\ I_t = q_{t-1} \text{ si } t \bmod T = 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble des calculs a été détaillé pour un scénario donné mais ces calculs devront être faits pour l'ensemble des 3000 scénarios permettant d'obtenir  $(I_t^i)_{1 \leq i \leq 3000}^{1 \leq t \leq 50}$ . Cette stratégie étant autofinancée elle doit être martingale. Par conséquent le test va consister à vérifier la propriété suivante :

$$E(D(0, t)I_t) = I_0 = 1$$

L'intervalle de confiance au quantile  $\alpha$  est défini comme pour la stratégie de *rolling* :

Sans l'utilisation de variables antithétiques:

$$\left[ 1 - \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, 1 + \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\text{Avec } \sigma = sd(D(0, t)I_t) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{s=1}^N \left( \frac{D^s(0, t)I_t^s}{2} - 1 \right)^2}$$

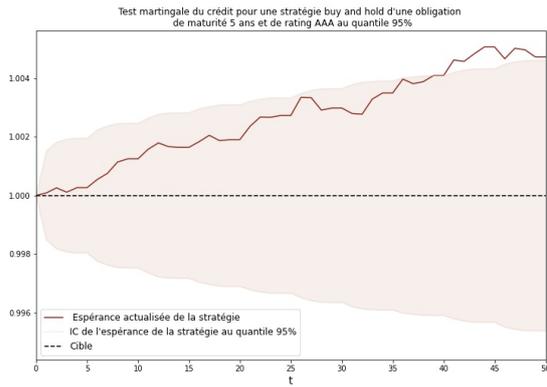
Avec l'utilisation de variables antithétiques:

$$\left[ 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right), 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \right]$$

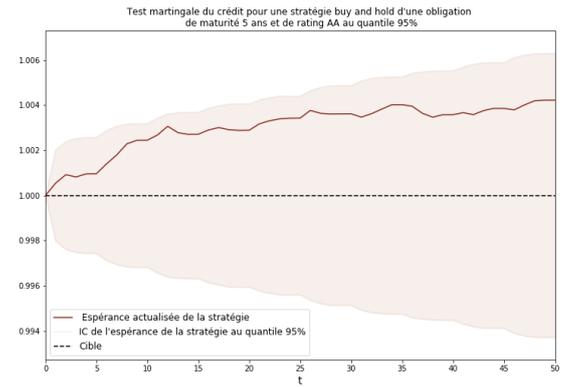
Avec:

$$sd(D(0, t)I_t) = \sqrt{\frac{1}{\frac{N_s}{2} - 1} \sum_{s=1}^{\frac{N_s}{2}} \left( \frac{D^{2 \times s - 1}(0, t) I_t^{2 \times s - 1} + D^{2 \times s}(0, t) I_t^{2 \times s}}{2} - 1 \right)^2}$$

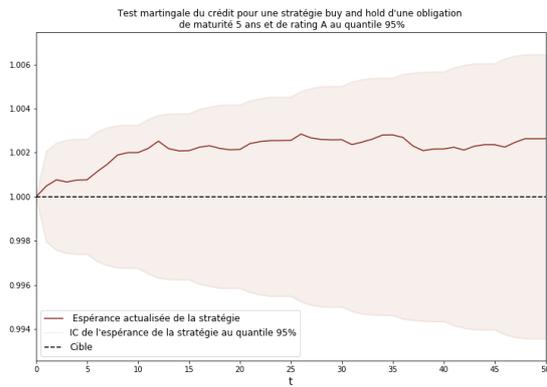
De même, on teste la martingalité au quantile à 95% d'une obligation de maturité 5 ans pour les différents ratings AAA, AA, A et BBB avec la stratégie du *buy and hold*.



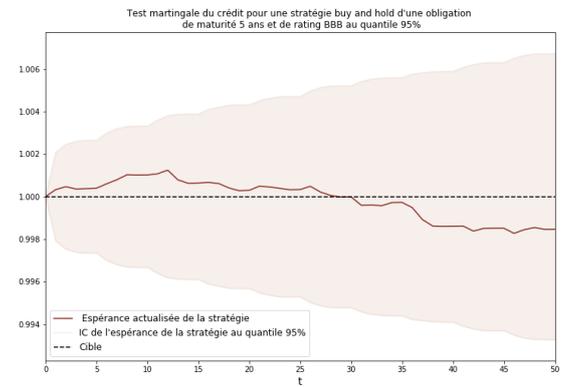
(a) Martingale rating AAA Buy and hold



(b) Martingale rating AA Buy and hold



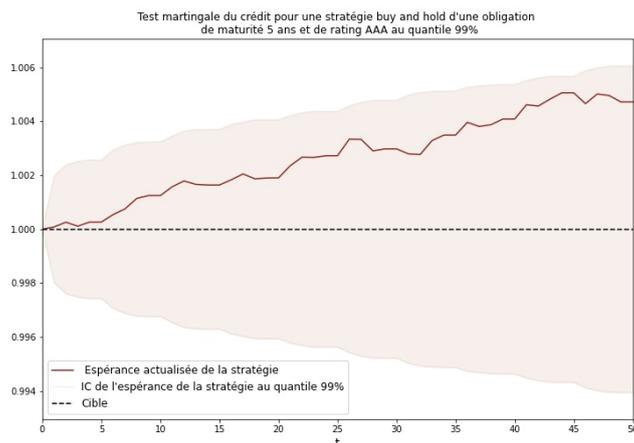
(c) Martingale rating A Buy and hold



(d) Martingale rating BBB Buy and hold

**Figure 3.8: Test de martingalité avec la stratégie de Buy and hold au quantile de 95% d'une obligation de maturité 5 ans**

En utilisant la stratégie de buy and hold, de meilleurs résultats sont obtenus avec le rating BBB. Il y a une création de valeur pour les ratings AAA, AA et A. Comme observé au niveau de la stratégie de rolling, la création de valeur est réduite au fur et à mesure que l'on baisse de rating. La martingalité pour le rating AAA n'est pas vérifiée pour le quantile à 95%. Le test au quantile à 99% avec ce rating donne le résultat suivant:



**Figure 3.9: Test de martingalité avec la stratégie de Buy and hold au quantile de 99% d'une obligation de maturité 5 ans et de rating AAA**

Le test montre que la martingalité pour cette stratégie est vérifiée pour le rating AAA au quantile de 99%. De plus la quantité d'obligation de rating AAA est relativement faible dans le portefeuille d'actif. Cela permet de ne pas rejeter l'hypothèse de martingalité du facteur de risque crédit avec cette stratégie.

La stratégie du buy and hold est plus complexe du fait qu'il est possible de propager l'erreur en multi période contrairement à la stratégie de rolling. Elle est cependant celle utilisée dans le modèle ALM en raison de son adéquation avec la stratégie d'investissement des sociétés d'assurances.

## 4 Action et Immobilier

### 4.1 Test martingale

Le modèle utilisé pour les chroniques action et immobilier est le modèle de Black & Sholes à volatilité déterministe. Pour rappel, le modèle immobilier utilise une volatilité constante tandis que celui de l'action utilise une volatilité vectorielle.

Le test de martingalité est appliqué aux prix actualisés des indices action et immobilier simulés. Pour les deux indices, le prix initial  $S_0 = 1$  et l'intervalle de confiance est défini comme suit selon le Théorème central limite :

**Sans l'utilisation de variables antithétiques:**

$$I_c = \left[ 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

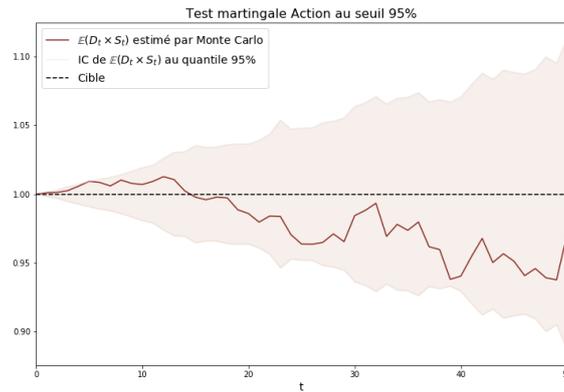
Avec  $\sigma = sd(D(0, t) S_t)$

**Avec l'utilisation de variables antithétiques:**

$$\left[ 1 - \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{N_s}{2}}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right), 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{\frac{N_s}{2}}} \phi^{-1} \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

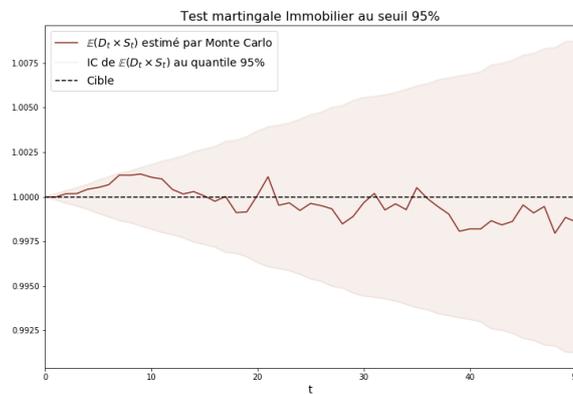
Avec:

$$sd(D(0, t) S_t) = \sqrt{\frac{1}{\frac{N_s}{2} - 1} \sum_{s=1}^{\frac{N_s}{2}} \left( \frac{D^{2 \times s-1}(0, t) S_t^{2 \times s-1} + D^{2 \times s}(0, t) S_t^{2 \times s}}{2} - 1 \right)^2}$$



**Figure 3.10: Test de martingalité action**

Le test de martingalité appliqué au risque action montre un intervalle de confiance irrégulier dû à la volatilité vectorielle. Ce test n'est pas validé en année 5 au quantile à 95%. Ce dépassement de l'intervalle de confiance représente une erreur de moins de 1% du prix initial et une sortie de l'intervalle de 0,02% du prix initial. Les autres maturités étant validées, cela n'est pas de nature à remettre en question la validation des scénarios.



**Figure 3.11: Test de martingalité immobilier**

Le test appliqué à l'immobilier montre que la martingalité est validée au quantile de 95%. L'intervalle de confiance de l'immobilier est plus resserré du fait d'une volatilité plus faible. Il est cependant mieux estimé car la volatilité est constante ce qui réduit le risque d'accumuler de l'erreur dans le temps.

## 4.2 Test de Market Consistency

Dans ce test il s'agit de reproduire les prix des calls des actions du portefeuille à partir des tables de GSE. Les calls sont évalués à la monnaie.

Les volatilités du marché utilisées sont les volatilités de calls de maturités  $\in \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 25\}$ . La formule de calcul du prix d'un call de maturité  $T$  et de strike  $K$  est donnée par:

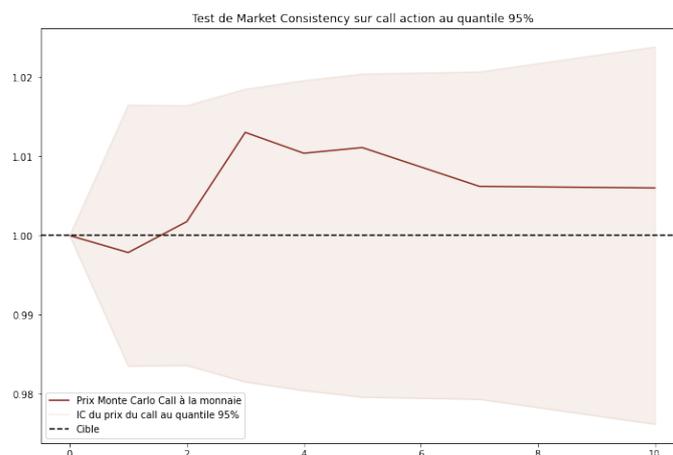
$$C(S_0, K, r, T, \sigma_T) = S_0\phi(d_1) - Ke^{-rT}\phi(d_2)$$

$$d_1 = \frac{1}{\sigma_T\sqrt{T}} \left[ \ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma_T^2}{2}\right)T \right]$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_T\sqrt{T}$$

Avec:

- $S_0$ : la valeur initiale de l'actif sous-jacent
- $r$ : le taux sans risque
- $\sigma_T$ : La volatilité du sous-jacent



**Figure 3.12: Test de market consistency action au quantile de 95%**

La figure représente le test effectué sur le rapport entre les prix de calls provenant du modèle et ceux du marché. Elle montre des écarts de convergence qui augmentent entre les maturités 2 et 7 puis qui se stabilisent au-delà. Le rapport étant situé entre les bornes de l'intervalle de confiance, la market consistency est donc vérifiée pour l'indice action.

Le test de market consistency n'est pas effectué sur l'indice immobilier. C'est un secteur qui ne satisfait pas les conditions de marché profond au regard du manque de données. Il a également un aspect moins financier surtout pour l'immobilier physique.

## Allocation de la fuite

L'objet de cette partie est d'étudier l'impact des facteurs de risques du GSE sur la fuite de modèle en établissant une allocation de cette fuite à chacun d'eux. Le périmètre concerné par cette étude est restreint aux contrats en euros.

Les facteurs de risque considérés dans cette partie sont : l'action, l'immobilier, le crédit et les taux nominaux. Pour des raisons de simplification l'inflation est supposée déterministe. Le portefeuille d'actif utilisé est privé des obligations indexées sur l'inflation ainsi que des options et obligations forward.

Pour réaliser l'allocation de la fuite, les méthodes considérées sont notamment la méthode proportionnelle, la méthode marginale et la méthode de shapley. Dans la suite, il s'agira de présenter les différentes méthodes utilisées, la méthodologie d'obtention de la fuite par facteur ou groupes de facteurs et les résultats obtenus.

### **1 Présentation du modèle utilisé**

Le modèle ALM utilisé prend en entrée les scénarios risque neutres générés et projette l'actif et le passif tout en tenant compte de leur interaction afin de déterminer le best estimate. Les interactions sont matérialisées par le calcul de la participation aux bénéfices ainsi que la prise en compte des rachats dynamiques qui sont des flux de passif dépendant

des produits financiers.

## 1.1 Projection des actifs

Les différents actifs détenus et décrits dans la partie 2 sont projetés dans le modèle en représentation du passif. Pour chaque classe d'actif, il est possible d'illustrer cette projection de la manière suivante:

- **Les obligations:** la valeur de marché des obligations est donnée à chaque pas de temps par:

$$VM_{bonds}(t) = \sum_{i=t+1}^T \frac{C_i N}{(1+r_i)^i} + \frac{N}{(1+r_T)^T}$$

avec :

- $C_i$  le taux de coupon en  $i$
- $N$  La valeur du nominal
- $r_i$  le taux zéro coupon sans risque à la date  $i$

Le taux de coupon  $C_i$  est constant dans le cas des obligations à taux fixe.

- **Les indices:** les trajectoires des indices action et immobilier sont données en entrée du modèle par le GSE.
- **Le monétaire:** l'actif monétaire est en représentation des liquidités de l'entreprise. Cette liquidité est investie au taux sans risque sur horizon un an. Ainsi, la valeur du monétaire en  $t$  est donnée par:

$$Monétaire(t) = Monétaire(t-1) + Flux\_entrants(t) - prestations(t)$$

avec:

$$Flux\_entrants(t) = coupons(t) + nominaux + dividendes(t) + loyers(t)$$

Au regard de la fluctuation de la valeur des actifs au cours du temps, une stratégie d'allocation des actifs est définie par l'entreprise avec des seuils de tolérance autour d'une allocation cible et doit être respectée à chaque pas de temps. Le modèle possède donc un algorithme de réallocation qui consiste à effectuer des achats et ventes à chaque période afin de corriger les déformations de l'allocation et converger vers la cible.

Les obligations connaissent une correction au pas de temps initial appelée risque neutralisation. Cette correction répond au besoin d'égaliser la valeur des obligations calculée en univers risque neutre par le modèle et la valeur observée sur les marchés.

## 1.2 Modélisation du passif

Comme dans le cas des actifs, le passif est également évalué à chaque pas de temps. Les provisions mathématiques (PM) sont projetées en tenant compte des prestations telles que les rachats et les décès. Cette PM est revalorisée des intérêts techniques et de la participation aux bénéfices. Ainsi, on peut écrire:

$$PM(t) = PM(t - 1) + \text{primes}(t) + TMG + PB(t) - \text{prestations}(t)$$

## 2 Méthode d'allocation cohérente

En considérant une mesure de risque d'un ensemble de facteurs consolidés, une méthode d'allocation vise à évaluer la contribution de chaque facteur à ce risque global. Dans ce cas, le risque alloué est la fuite de modèle. La fuite est calculée à une maille globale ce qui la rend dépendante des interactions entre les différents facteurs de risque du GSE. Cet exercice permettra de répartir cette fuite sur chaque facteur risque sélectionné en fonction de son impact sur la fuite globale.

Soit  $N = \{1, \dots, n\}$  l'ensemble des segments de risque considéré dans l'allocation.

Dans le mémoire de Sophie Décupère (2011), en notant  $X$  le risque global,  $(X_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$

les différents segments et  $A$  l'ensemble des mesures de risques, une méthode d'allocation est définie comme étant une fonction  $\Lambda_{n,\lambda} : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui associe à chaque mesure de risque  $\rho$  l'allocation unique :

$$\Lambda_{n,\lambda} = \begin{pmatrix} \rho^\lambda(X_1|X) \\ \rho^\lambda(X_2|X) \\ \dots \\ \rho^\lambda(X_n|X) \end{pmatrix}$$

Avec  $\rho^\lambda(X_i|X)$  la contribution au risque global du segment  $i$ , déterminée à partir de la méthode d'allocation  $\lambda$  et de la mesure de risque  $\rho$ . La méthode d'allocation doit vérifier l'égalité  $\sum_{i \in N} \rho^\lambda(X_i|X) = \rho(X)$  appelée "full allocation" afin de ne pas être dans une situation où une partie du risque global n'est pas allouée.

On dit qu'une méthode d'allocation  $\lambda$  est cohérente si elle vérifie les propriétés suivantes :

- **full allocation:**  $\sum_{i \in N} \rho^\lambda(X_i|X) = \rho(X)$  la somme des contributions marginales doit être égale au risque global. Cette condition permet de garantir une allocation totale du risque global aux différents segments. La propriété de "full allocation" est fondamentale car il n'est pas logique que le risque global soit inférieur à la somme des allocations proposée pour chaque segment. Cela contredirait le principe de l'allocation et impliquerait une création de valeur.
- **Symétrie:** si deux segments  $X_i$  et  $X_j$  ont le même impact marginal sur le même sous-ensemble alors leur contribution au risque global est identique. On obtient :

$\rho^\lambda(X_i|X) = \rho^\lambda(X_j|X)$ . La propriété de symétrie garantit que l'allocation dépend strictement de la contribution au risque global des différents segments de risque.

- **No undercut** ou encore appelé non sur-allocation: Pour tout sous-ensemble de segment, la somme des contributions de chaque segment est inférieure à la contribution consolidée des segments du sous-ensemble. Cela s'illustre mathématiquement par:  $\forall S \subseteq N, \sum_{i \in S} \rho^\lambda(X_i|X) \leq \rho(\sum_{i \in S} X_i)$ . Cette propriété permet d'avoir un bénéfice de diversification de risque et d'éviter une surallocation d'un segment qui consiste à ce que ce segment ait une allocation supérieure à son impact réel.
- **Riskless allocation**: Si un segment  $X_i$  n'a pas d'impact sur le risque global, alors  $\rho^\lambda(X_i|X) = 0$ . Cette propriété permet de ne pas tenir compte des segments qui n'ont pas d'incidence sur le risque global.

Dans cette étude  $\rho^\lambda(X_i|X)$  représente la fuite allouée au segment  $X_i$  selon la méthode d'allocation  $\lambda$ .

### 3 Méthode proportionnelle

La méthode d'allocation proportionnelle est une méthode qui vise à répartir le risque global par segment au *prorata* de leur contribution évaluée en *stand alone* sur la somme des contributions en *stand alone* de l'ensemble des segments. La contribution au risque global  $X$  d'un segment  $X_i$  associée à la mesure de risque  $\rho$  est donnée par la formule suivante:

$$\rho^{prop}(X_i|X) = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j=1}^n \rho(X_j)} \rho(X) \quad (4.1)$$

avec  $\rho(X_i)$  la contribution en *stand alone* du facteur  $X_i$

La proportion du risque global allouée au segment  $X_i$  encore appelée clé d'allocation est le coefficient donné par:

$$\alpha_i = \frac{\rho(X_i)}{\sum_{j=1}^n \rho(X_j)}$$

Cette méthode d'allocation est appréciée pour sa simplicité de mise en oeuvre et pour la possibilité d'avoir une première appréciation des différentes contributions. Elle vérifie également la condition de full allocation. Cependant, elle ne permet pas de tenir compte des dépendances entre les différents segments ce qui n'est pas en adéquation avec la nature d'un GSE où les facteurs de risque sont corrélés en plus de l'interaction existante au sein de la projection ALM.

## 4 Méthode marginale

La méthode marginale permet d'évaluer l'impact marginal de chaque segment dans l'allocation du risque global. La contribution au risque du segment  $X_i$  est donnée par:

$$\rho^{marg}(X_i|X) = \frac{\rho(X) - \rho(X_{N \setminus \{i\}})}{\sum_{j=1}^n [\rho(X) - \rho(X_{N \setminus \{j\}})]} \rho(X) \quad (4.2)$$

avec  $\rho(X_{N \setminus \{i\}})$  la contribution au risque de l'ensemble des segments consolidés sauf le segment  $X_i$ . La clé d'allocation dans ce cas est:

$$\alpha_i = \frac{\rho(X) - \rho(X_{N \setminus \{i\}})}{\sum_{j=1}^n [\rho(X) - \rho(X_{N \setminus \{j\}})]}$$

Cette méthode présente également une facilité de mise en oeuvre tout en prenant en compte les effets des apports des segments sur le risque global. Bien que tenant compte des contributions marginales des différents segments, cette méthode ne permet pas de tenir compte des contributions marginales des sous-ensembles générés par ces segments. Elle vérifie néanmoins la propriété de full allocation.

## 5 La méthode de Shapley

### 5.1 Théorie des jeux

La théorie des jeux est une branche des mathématiques et de l'économie qui étudie les interactions stratégiques entre des agents rationnels. Elle se concentre sur la modélisation et l'analyse des décisions prises par des individus ou des organisations lorsque leurs choix dépendent des actions des autres parties prenantes. La théorie des jeux offre un cadre pour comprendre et prédire le comportement dans des situations de concurrence, de coopération ou de conflit. Dans la thèse de Denault (2001) la théorie des jeux est l'étude de situations dans lesquelles les joueurs adoptent diverses stratégies pour atteindre au mieux leurs objectifs individuels.

Dans les jeux non coopératifs, les joueurs agissent de manière individuelle pour maximiser leur propre gain, tandis que dans les jeux coopératifs, les joueurs peuvent collaborer pour atteindre des objectifs communs.

La méthode de Shapley est basée sur la théorie des jeux coopératifs. Celle-ci prend généralement la forme d'une coordination des stratégies ou d'un arrangement visant à partager les gains engendrés par le jeu.

### 5.2 Présentation de la méthode

Denault (2001) définit un jeu coopératif comme étant constitué :

- d'un ensemble  $M$  de  $m$  joueurs
- d'une fonction de coût  $C$ , qui à chaque sous-ensemble ou coalition  $S$  de  $M$ , associe une valeur réelle  $C(S)$

La fonction de coût est dite sous-additive si pour deux sous-ensembles  $V$  et  $W$  de  $M$ ,  
 $C(V \cup W) \leq C(V) + C(W)$ .

## Fonction de valeur

Soit  $\Omega$  l'ensemble des coalitions. La notion de fonction de valeur est introduite afin d'allouer le coût total  $C(M)$  entre tous les joueurs:

Une fonction de valeur est une fonction  $\Psi_M : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui à chaque fonction de coût associe une unique allocation

$$\Psi_M(c) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \\ \psi_m \end{pmatrix}$$

Avec  $\psi_i$  le coût alloué au joueur  $i$  et  $\sum_{i \in M} \psi_i = C(M)$ .

## Noyau

Le noyau est défini comme étant l'ensemble des allocations vérifiant les deux conditions:

- $\sum_{i \in V} \psi_i \leq C(V)$  pour chaque coalition  $V$  de  $M$
- $\psi_i \leq C(i)$  pour chaque élément  $i$  d'une même coalition.

## Valeur de Shapley

La valeur de Shapley  $\gamma_i^{Shapley}$  correspondant à la valeur allouée du coût total au joueur  $i$  est donnée par la formule:

$$\gamma_i^{Shapley} = \sum_{S \in \mathbb{D}_i} \frac{(s-1)(m-s)}{m!} (C(S) - C(S \setminus \{i\})) , i \in M \quad (4.3)$$

Où:

- $s$  est le cardinal de  $S$

- $\mathbb{D}_i$  l'ensemble des coalitions de  $M$  contenant  $i$
- $S \setminus \{i\}$  la coalition  $S$  privée de l'élément  $i$

La méthode vérifie la propriété de full allocation et il est possible de l'appliquer à l'allocation de la fuite de modèle en identifiant chaque facteur de risque comme un joueur et la fuite de modèle comme la fonction de coût.

Il est important de souligner que la méthode de Shapley nécessite la possibilité d'obtenir le coût des différentes coalitions possibles qui sont au nombre de  $2^m - 1$ . Cela peut entraîner un important temps de calcul quand le nombre de facteurs de risque est élevé.

Cependant cette méthode est en adéquation avec l'objet de cette étude au regard de l'interaction entre les différents facteurs de risque du GSE. La prise en compte des contributions de chaque sous ensemble permet de prendre en considération les effets de compensation entre les fuites induites par les différents facteurs de risque.

## 6 Méthodologie d'obtention de la fuite

L'application de ces méthode à la problématique d'allocation de la fuite nécessite la possibilité d'obtenir une valeur de la fuite par facteur de risque c'est à dire en *stand alone* ainsi que par coalition de facteurs de risque.

L'approche utilisée se base sur le fait que la fuite de modèle en déterministe est nulle. Pour obtenir la fuite générée par un facteur de risque, le principe utilisé est de garder ce facteur stochastique et le reste est mis en déterministe. Le GSE modifié est donc utilisé pour projeter le bilan en vue de calculer la fuite suivant la formule énoncée en [1.1](#).

En ce qui concerne les taux nominaux, l'action et l'immobilier, une prise en compte de leur interaction est nécessaire pour garder la martingalité du GSE. Pour rappel, le crédit est supposé indépendant des autres facteurs de risque et de ce fait, une prise en compte de

l'interaction avec les autres facteurs n'est pas nécessaire dans la construction des scénarios. Ces différents scénarios sont construits de la manière suivante:

## 6.1 Fuite du risque de taux nominaux

Dans ce cas de figure, les taux nominaux sont stochastiques donc les rendements des indices sont recalculés avec ces taux afin de tenir compte de leur corrélation existante et de conserver les propriétés de martingalité du GSE. L'aléa de l'action et de l'immobilier est de ce fait nul .

Le prix des indices action et immobilier à l'instant  $t$  est donné par:

$$S_t = \frac{1}{D(0, t)}$$

$D(0, t)$  étant le déflateur stochastique.

## 6.2 Fuite des risques action et immobilier

En prenant le cas de la construction du GSE permettant le calcul de la fuite générée par l'indice action, les autres facteurs de risque sont déterministes à l'exception de celui-ci et de ses dividendes. Le taux sans risque est une composante du rendement de l'indice action et de ce fait une correction est apportée pour tenir compte du fait que les taux nominaux soient déterministes. Le prix de l'action devient dans ce cas:

$$S_t^{corrigé} = \frac{S_t * D(0, t)}{P(0, t)}$$

Avec  $P(0, t)$  le prix du zéro coupon déterministe.

Cette correction permet d'annuler la volatilité induite par les taux stochastiques tout en conservant la martingalité de l'indice action. Le rendement de l'indice immobilier dans ce cas est donc donné par:

$$S_t^{immo} = \frac{1}{P(0, t)}$$

Un raisonnement analogue s'applique pour le calcul de la fuite générée par l'indice immobilier.

## 7 Résultats d'allocation

Les différentes projections ont permis d'obtenir les valeurs de fuite en *stand alone*, par coalition et au global en millions d'euros. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant:

Taux	Action	Crédit	Immobilier	Taux/Action/Crédit/Immobilier
10.2 M	- 5.85 M	76.85 M	- 0.49 M	110.45 M

**Table 4.1: Valeurs de la fuite de modèle en *stand alone* et pour les facteurs consolidés en millions d'euros**

Les méthodes marginales et de Shapley nécessitent le calcul de la fuite pour différentes coalitions de facteurs. En prenant l'exemple du crédit, les différentes valeurs des coalitions possibles sont données par:

Crédit/Taux	Crédit/Action	Crédit/Immobilier
96.7 M	72.64 M	76.14 M

**Table 4.2: Valeurs de la fuite de modèle pour les coalitions de rang 2 du Crédit en millions d'euros**

Crédit/Action/Immobilier	Crédit/Taux/Immobilier	Crédit/Taux/Action
71.29 M	99.1 M	108.26

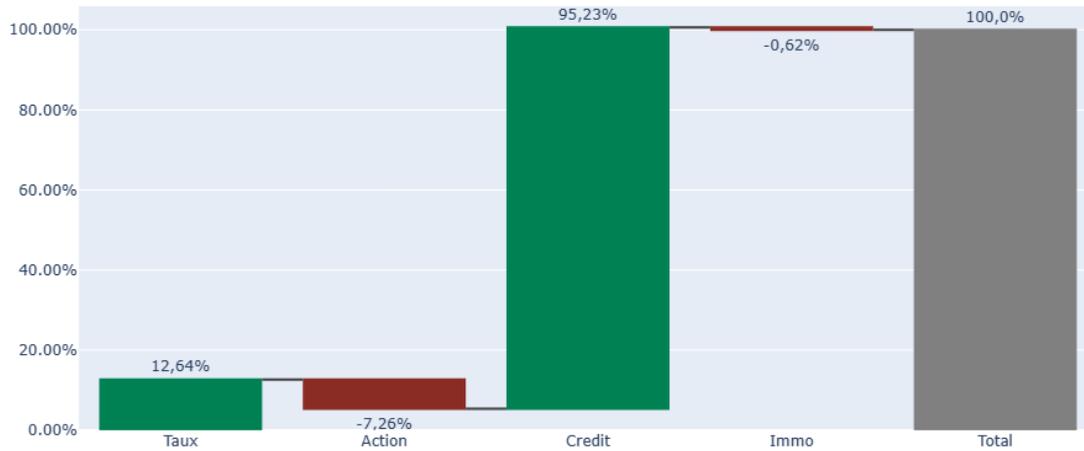
**Table 4.3: Valeurs de la fuite de modèle pour les coalitions de rang 3 du Crédit en millions d'euros**

La fuite est interprétée comme une création de valeur lorsqu'elle est positive et une perte de valeur dans le cas inverse. Afin de mesurer le réel impact de ces facteurs de risque sur la fuite consolidée, une allocation sera nécessaire avec l'utilisation des méthodes définies précédemment. Le constat est fait que la fuite n'est pas sous-additive. Il est important de souligner que dans cette partie, les valeurs de fuite allouées sont calculées sans application du moment matching sur les scénarios.

## 7.1 Méthode proportionnelle

Le graphique suivant montre l'allocation de la fuite de modèle avec la méthode proportionnelle par rapport aux différents facteurs de risque sans l'application du moment matching. Les valeurs allouées sont exprimées en pourcentage de la fuite totale.

Allocation de la fuite de modèle à l'aide de la méthode Proportionnelle avant Moment matching



**Figure 4.1: Allocation de la fuite avec la méthode proportionnelle**

L'utilisation de la méthode proportionnelle montre une création de valeur par les taux nominaux et le crédit. Cette valeur est plus importante au niveau du GSE crédit qui constitue le facteur prépondérant induisant de la fuite de modèle avec une valeur allouée de 95.23% de la fuite globale. Une perte de valeur est observée pour les scénarios action et immobilier avec un effet relativement minime de l'immobilier.

## 7.2 Méthode marginale

Dans cette partie, le résultat présenté fait référence à l'application de la méthode marginale à l'allocation de la fuite.

Allocation de la fuite de modèle à l'aide de la méthode Marginale avant Moment matching



Figure 4.2: Allocation de la fuite avec la méthode marginale

En utilisant la méthode marginale l'effet du crédit observé précédemment est réduit. Tous les autres facteurs de risque occasionnent des créations de valeur contrairement aux résultats de l'allocation par la méthode proportionnelle. Il semblerait que les impacts marginaux des différents facteurs ont fait ressortir les effets de création de valeurs des facteurs de risque taux, action et immobilier. Les facteurs de risque taux et crédit sont ceux qui contribuent le plus à la fuite globale.

### 7.3 Méthode de Shapley

L'objectif de cette partie est de présenter les résultats de l'allocation avec la méthode de Shapley qui vient répondre à la nécessité de prendre en compte les interactions existantes entre les différents facteurs de risque du GSE. Les résultats sont donnés par le graphique suivant:

Allocation de la fuite de modèle à l'aide de la méthode de Shapley avant Moment matching

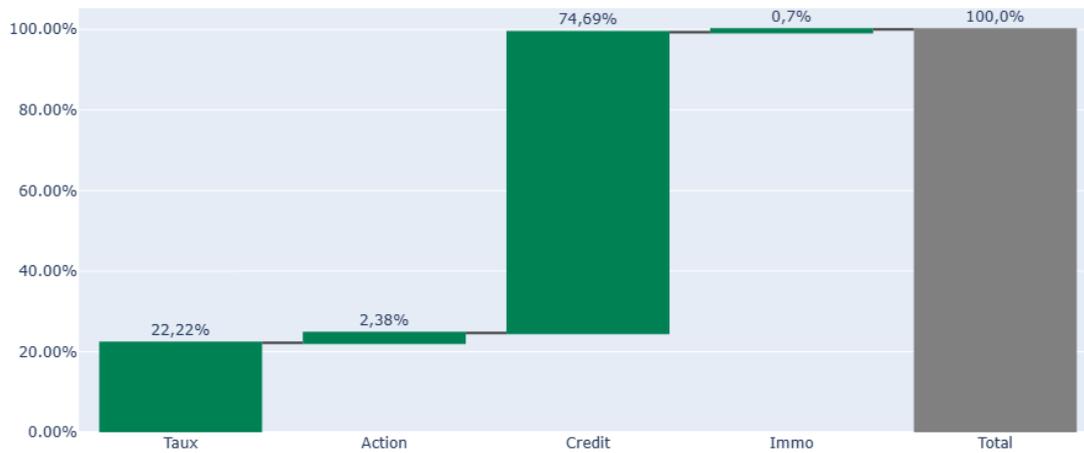


Figure 4.3: Allocation de la fuite avec la méthode de Shapley

L'utilisation de la méthode de Shapley fait ressortir des résultats similaires à la méthode marginale avec une création de valeur plus importante pour les risques taux nominaux et crédit. L'action et l'immobilier quant à eux ont un faible impact. Le crédit reste ici le facteur créant le plus de fuite de modèle suivi des taux nominaux. Cela est logique à cause du peu de paramètres de calibrage du modèle JLT G2, des probabilités de transition ainsi que de l'utilisation d'une fonction d'interpolation pour avoir les courbes.

## 8 Analyse des résultats

L'ensemble des méthodes utilisées vérifient la condition importante de **full allocation**. Cependant, l'analyse se fera sur la méthode de Shapley car elle prend non seulement en compte les dépendances entre facteurs de risque mais aussi les dépendances entre les sous ensembles générés par ces facteurs.

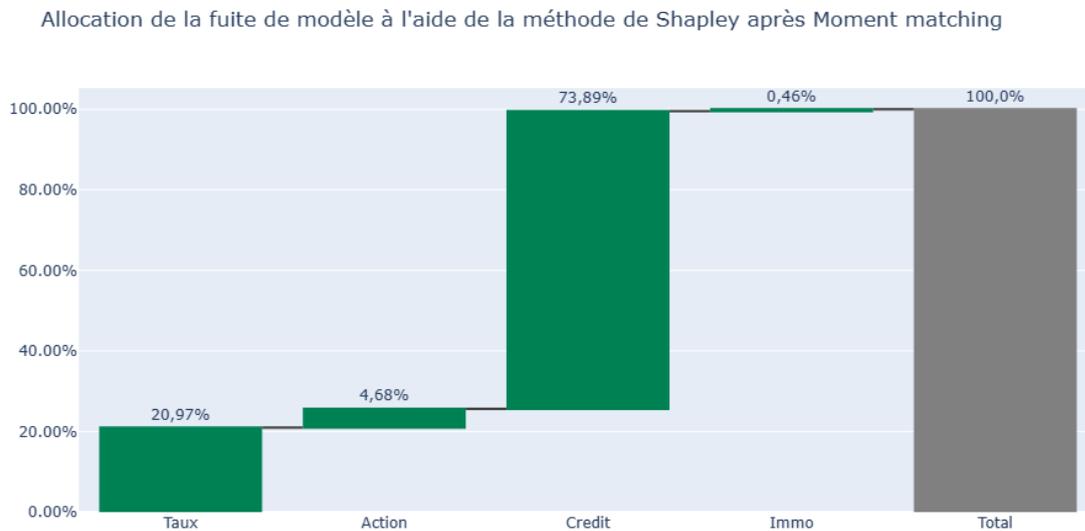
## 8.1 Effets du moment matching

Le modèle est testé dans cette partie avec les scénarios économiques après moment matching. Cette approche garde la même méthodologie d'allocation de fuite décrite précédemment. Les résultats de projection donnent les valeurs suivantes pour la fuite de modèle avec l'application du moment matching sur le GSE:

Taux	Action	Crédit	Immobilier	Taux/Action/Crédit/Immobilier
9.27 M	- 3.11 M	76.85 M	- 0.73 M	111.61 M

**Table 4.4: Valeurs de la fuite de modèle en *stand alone* et pour les facteurs consolidés après moment matching en millions d'euros**

L'allocation par facteur de risque est décrite par la figure suivante:



**Figure 4.4: Allocation de la fuite avec la méthode Shapley après moment matching**

Ces résultats mettent en évidence le fait que le moment matching n'a pas entraîné de changement significatif au niveau des montants alloués. De plus les valeurs de fuite avec l'application du moment matching sur le GSE ne sont pas très différentes de celles obtenues sans moment matching. Finalement le crédit est le plus grand contributeur de la fuite et il n'y a pas d'application de technique de moment matching sur ce facteur de risque. En revanche le résultat sur les autres facteurs de risque permet de se dire que la fuite n'est pas forcément un problème de martingale.

## **8.2 Effets de volume**

Il est habituel que les portefeuilles d'actifs des assureurs soient à majorité constitués d'actifs obligataires ce qui est le cas dans cette étude. Cette caractéristique pourrait entraîner l'observation d'une valeur importante de la fuite pour les facteurs de risque comme les taux et le crédit en raison du volume de cette classe d'actifs. Ce phénomène que nous appelons effet de volume peut dissimuler les réels impacts des autres facteurs de risque pouvant être plus important relativement à leurs proportion dans le portefeuille. Pour étudier cet aspect, les valeurs des fuites ont été rapportées aux valeurs de marché correspondantes pour chaque facteur de risque. Le résultat est observé dans la figure suivante:

Allocation de la fuite de modèle pondérée par la VM à l'aide de la méthode de Shapley



**Figure 4.5: Allocation de la fuite avec la méthode Shapley avec pondération par les valeurs de marché**

Ces résultats montrent un effet légèrement moins important du crédit sur la fuite au global. Il est possible également d'observer que l'action et les taux nominaux ont un effet presque identique. Cela met en lumière un effet non négligeable de l'action qui était caché par le volume des actifs obligataires présents dans le portefeuille.

### 8.3 Effets du rating des obligations

Le facteur de risque crédit apparaît à ce stade comme étant celui qui contribue le plus à la fuite de modèle. Le calibrage du modèle de crédit présenté dans la partie 3.3 montre que le modèle de crédit a été calibré sur des obligations de rating A. L'objectif de cette partie est de tester l'impact des spreads de différents ratings sur la fuite créée par le facteur de risque crédit.

Pour cela le choix est fait d'effectuer l'allocation de la fuite avec des obligations de même rating. Pour se faire, on considère un portefeuille dont les investissements obligataires sont effectués à 100% sur un unique rating. La projection est ensuite faite pour obtenir la fuite associée au rating concerné. Les ratings testés sont les ratings AAA, AA et A car ce

sont les plus matériels. Les valeurs de la fuite sont rapportées à leurs valeurs de marchés associées pour isoler les effets de volume. Les résultats sont obtenus sans application du moment matching sur les scénarios.

- Rating AAA:

Allocation de la fuite de modèle pondérée par la VM à l'aide de la méthode de Shapley pour le rating AAA

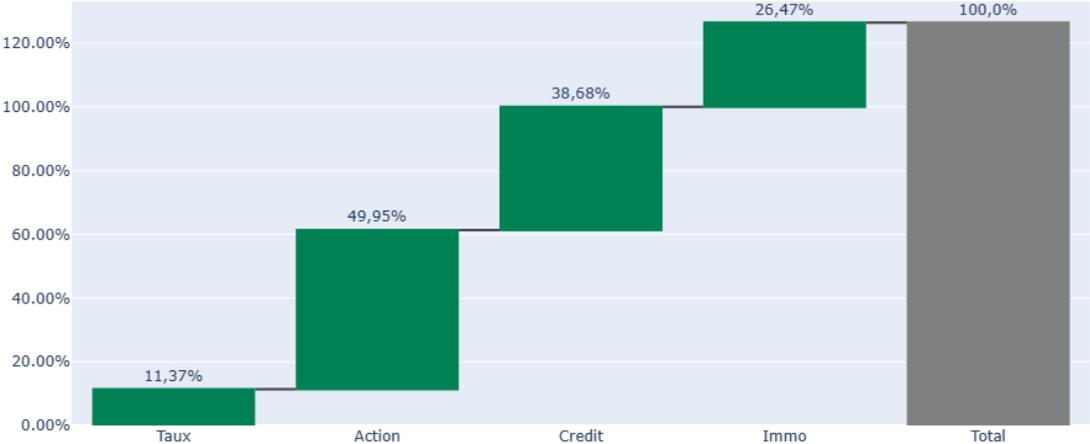


Figure 4.6: Allocation de la fuite avec la méthode Shapley pour le rating AAA

- Rating AA

Allocation de la fuite de modèle pondérée par la VM à l'aide de la méthode de Shapley pour le rating AA



Figure 4.7: Allocation de la fuite avec la méthode Shapley pour le rating AA

- Rating A

Allocation de la fuite de modèle pondérée par la VM à l'aide de la méthode de Shapley pour le rating A

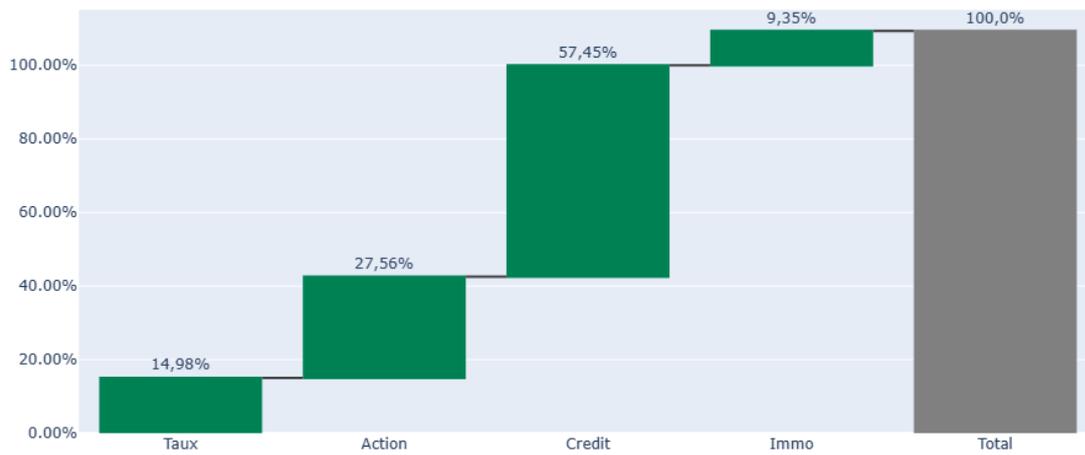


Figure 4.8: Allocation de la fuite avec la méthode Shapley pour le rating A

Lorsqu'on passe au rating AAA le facteur contribuant le plus à la fuite globale est l'action avec une contribution de 49,95 %. Le crédit contribue ici à 38,68% de la fuite globale. La baisse de la contribution du crédit pour les obligations de rating AAA peut être expliquée par le fait que ce rating est très peu risqué impliquant des spreads faibles et avec très peu de volatilité.

Le test effectué sur les obligations de rating AA montre que le crédit est à nouveau le facteur contribuant à majorité à la fuite de modèle avec une proportion de 65,75%. L'action a cependant plus d'impact que les taux nominaux dont la contribution est sensiblement égale à celle de l'immobilier.

Dans le cas de l'allocation de fuite avec les obligations de rating A, le résultat est similaire à celui du rating AA avec une contribution du crédit légèrement plus faible dont la proportion est de 57,47%.

Ces résultats montrent que le crédit cache des inégalités de contribution à la fuite entre différents ratings.

## **8.4 Analyse critique**

Les méthodes utilisées ne satisfont pas toujours les propriétés d'allocation cohérente mais il est utile de souligner que la fuite n'est pas considérée comme une mesure de risque cohérente et qu'elle est une valeur de sortie d'un modèle ce qui ne permet pas d'avoir une distribution de probabilité.

Les résultats donnés par cette allocation de fuite montrent une grande contribution du crédit à la fuite globale. Le constat a également été fait que certains effets tels que les effets de volume d'actifs peuvent dissimuler les impacts réels de certains facteurs de risque comme ce qui a été remarqué pour la fuite induite par l'action.

L'étude a aussi permis de démontrer que la fuite de modèle n'est pas principalement liée

à un problème de martingalité car l'application du moment matching aux facteurs de risque taux nominaux, action et immobilier n'a pas entraîné de changement significatif de la fuite globale ainsi que des valeurs allouées.

L'étude de la fuite de modèle ne peut donc se restreindre à l'étude de la qualité des scénarios économiques.

En outre, les tests de martingalité dans ce mémoire sont effectués au pas de temps 0. Il y a un risque de propager l'erreur à chaque pas de temps. C'est dans ce sens que dans les travaux de Ignacio N. Lobato et J. Carlos Escanciano (2009) "Testing the martingale hypothesis", il est proposé de tester la martingale sur les pas de temps ultérieurs.

# Conclusion

La validation des scénarios économiques en assurance vie est un processus essentiel qui confère une solide crédibilité aux projections financières dans le cadre de l'utilisation des méthodes simulatoires. Dans un environnement financier en constante évolution avec beaucoup d'incertitudes, cette étape de validation assure une base solide pour l'identification des forces et faiblesses des modèles, tout en renforçant la confiance des assureurs dans leurs prises de décisions. Elle vise par dessus tout à se mettre en conformité avec les exigences du régulateur sur l'évaluation des provisions techniques.

L'utilisation de la méthode de Monte Carlo entraîne naturellement une fuite de modèle du fait du nombre limité de scénarios. Même si la qualité des scénarios n'est pas le seul indicateur pouvant expliquer la fuite de modèle, l'étude a permis de montrer que certains facteurs contribuent plus que d'autres à la fuite de modèle en l'occurrence le crédit.

Une extension de cette étude pourrait être la recherche de l'origine de la fuite induite par ce facteur au regard de la taille du portefeuille obligataire des sociétés d'assurance.

L'utilisation d'une approche comme l'intelligence artificielle générative pourrait également contribuer à améliorer la précision des modèles en permettant de générer des données de calibrages afin de palier aux problèmes de profondeur de marché. Il sera donc utile d'explorer de nouvelles technologies émergentes pour renforcer les générateurs de scénarios économiques.

# Bibliographie

1. Catharine RAJASUNDRAM (2009): "Développement d'un générateur de scénarios économiques dans le cadre de Solvabilité II" Mémoire ISFA.
2. Florence CHIU (2014): "Méthodes d'allocation de capital dans le cadre de l'ORSA" Mémoire ENSAE
3. Frédéric Planchet : "MODÈLES FINANCIERS EN ASSURANCE ET ANALYSES DYNAMIQUES" Cours théoriques ISFA
4. Heidi LAKHDHAR (2012): " Modélisation du risque de crédit dans les modèles actuariels" Mémoire Dauphines
5. Lokmane BENADJAL (2020): "Optimisation de la qualité des tables de scénarios économiques" Mémoire ISUP.
6. Ignacio N. Lobato et J. Carlos Escanciano (2009): "Testing the martingale hypothesis"
7. Maxime DELCAMBRE (2014): "Allocation du capital réglementaire" Mémoire ISFA

8. Paul Glasserman (2004): "Monte Carlo methods in financial engineering"
9. Pierre VAUJANY (2020): "Impact du modèle de taux nominaux et de son calibrage sur les indicateurs Solvabilité II" Mémoire ISFA.
10. RÈGLEMENT DÉLÉGUÉ (UE) 2015/35 DE LA COMMISSION du 10 octobre 2014
11. Revue de l'ACPR (Décembre 2020) , "Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques"
12. Sophie DECUPERE (2011): "Agrégation des risques et allocation de capital sous Solvabilité II" Mémoire ENSAE
13. Stéphane LOISEL: " Enterprise Risk Management" Cours théorique ISFA
14. Timothée BOTREL(2021): "Modélisation risque-neutre du risque de crédit" Mémoire ISFA.

# Liste des graphiques

- 1 Test de martingalité des déflateurs au quantile de 95% . . . . . 7
- 2 Test de market consistency action au quantile de 95% . . . . . 8
- 3 Allocation de la fuite avec la méthode de Shapley . . . . . 9
- 4 Allocation de la fuite avec la méthode Shapley avec pondération par les  
valeurs de marché . . . . . 10
- 5 Deflator martingale test at 95% quantile . . . . . 13
- 6 Test of market consistency action at quantile 95 . . . . . 14
- 7 Leakage allocation with Shapley’s method . . . . . 15
- 8 Leakage allocation using the Shapley method with weighting by market  
values . . . . . 16
  
- 2.1 Représentation des zones en fonction de la maturité et du tenor . . . . . 38
  
- 3.1 Comparaison des densité d’une loi de Student à 2999 degrés de liberté et  
d’une loi normale centrée et réduite . . . . . 50
- 3.2 Test de martingalité des déflateurs au quantile de 95% . . . . . 56
- 3.3 Test de martingalité des zéros coupons au quantile de 95% . . . . . 57
- 3.4 Comparaison du test de martingalité avant et après moment matching des  
déflateurs . . . . . 58
- 3.5 Market consistency des taux nominaux . . . . . 60
- 3.6 Courbe représentative de la VIF . . . . . 61

3.7	Test de martingalité avec la stratégie de Rolling au quantile à 95% d'une obligation de maturité 5 ans . . . . .	65
3.8	Test de martingalité avec la stratégie de Buy and hold au quantile de 95% d'une obligation de maturité 5 ans . . . . .	71
3.9	Test de martingalité avec la stratégie de Buy and hold au quantile de 99% d'une obligation de maturité 5 ans et de rating AAA . . . . .	72
3.10	Test de martingalité action . . . . .	74
3.11	Test de martingalité immobilier . . . . .	74
3.12	Test de market consistency action au quantile de 95% . . . . .	76
4.1	Allocation de la fuite avec la méthode proportionnelle . . . . .	89
4.2	Allocation de la fuite avec la méthode marginale . . . . .	90
4.3	Allocation de la fuite avec la méthode de Shapley . . . . .	91
4.4	Allocation de la fuite avec la méthode Shapley après moment matching . . . . .	92
4.5	Allocation de la fuite avec la méthode Shapley avec pondération par les valeurs de marché . . . . .	94
4.6	Allocation de la fuite avec la méthode Shapley pour le rating AAA . . . . .	95
4.7	Allocation de la fuite avec la méthode Shapley pour le rating AA . . . . .	96
4.8	Allocation de la fuite avec la méthode Shapley pour le rating A . . . . .	96
4.9	Allocation de la fuite avec la méthode proportionnelle après moment matching . . . . .	106
4.10	Allocation de la fuite avec la méthode marginale après moment matching . . . . .	107
4.11	Allocation de la fuite avec la méthode proportionnelle avant moment matching en utilisant que les obligations de rating A . . . . .	107
4.12	Allocation de la fuite avec la méthode marginale avant moment matching en utilisant que les obligations de rating A . . . . .	108
4.13	Allocation de la fuite avec la méthode proportionnelle avant moment matching en utilisant que les obligations de rating AA . . . . .	108
4.14	Allocation de la fuite avec la méthode marginale avant moment matching en utilisant que les obligations de rating AA . . . . .	109

4.15 Allocation de la fuite avec la méthode proportionnelle avant moment matching en utilisant que les obligations de rating AAA . . . . .	109
4.16 Allocation de la fuite avec la méthode marginale avant moment matching en utilisant que les obligations de rating AAA . . . . .	110

# Liste des Tableaux

- 4.1 Valeurs de la fuite de modèle en *stand alone* et pour les facteurs consolidés en millions d'euros . . . . . 87
- 4.2 Valeurs de la fuite de modèle pour les coalitions de rang 2 du Crédit en millions d'euros . . . . . 87
- 4.3 Valeurs de la fuite de modèle pour les coalitions de rang 3 du Crédit en millions d'euros . . . . . 88
- 4.4 Valeurs de la fuite de modèle en *stand alone* et pour les facteurs consolidés après moment matching en millions d'euros . . . . . 92

# Annexe

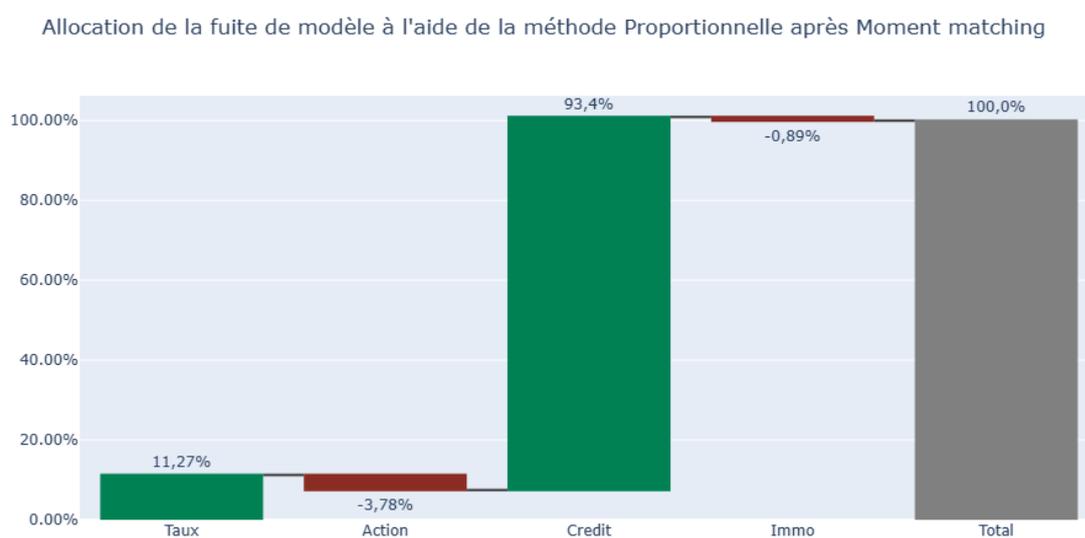


Figure 4.9: Allocation de la fuite avec la méthode proportionnelle après moment matching

Allocation de la fuite de modèle à l'aide de la méthode Marginale après Moment matching



Figure 4.10: Allocation de la fuite avec la méthode marginale après moment matching

Allocation de la fuite de modèle avec la méthode Proportionnelle avant Moment matching pour le rating A

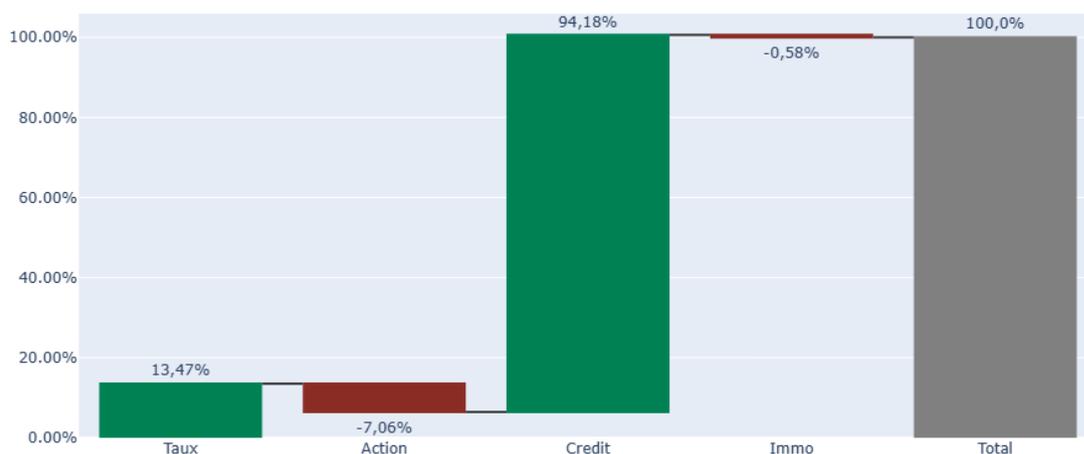


Figure 4.11: Allocation de la fuite avec la méthode proportionnelle avant moment matching en utilisant que les obligations de rating A

Allocation de la fuite de modèle avec la méthode Marginale avant Moment matching pour le rating A



Figure 4.12: Allocation de la fuite avec la méthode marginale avant moment matching en utilisant que les obligations de rating A

Allocation de la fuite de modèle avec la méthode Proportionnelle avant Moment matching pour le rating AA

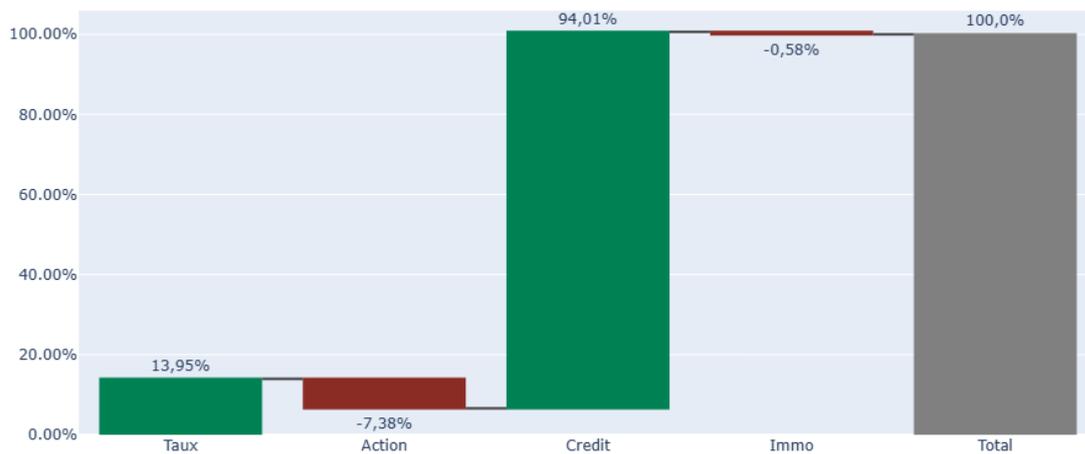


Figure 4.13: Allocation de la fuite avec la méthode proportionnelle avant moment matching en utilisant que les obligations de rating AA

Allocation de la fuite de modèle avec la méthode Marginale avant Moment matching pour le rating AA



Figure 4.14: Allocation de la fuite avec la méthode marginale avant moment matching en utilisant que les obligations de rating AA

Allocation de la fuite de modèle avec la méthode Proportionnelle avant Moment matching pour le rating AAA

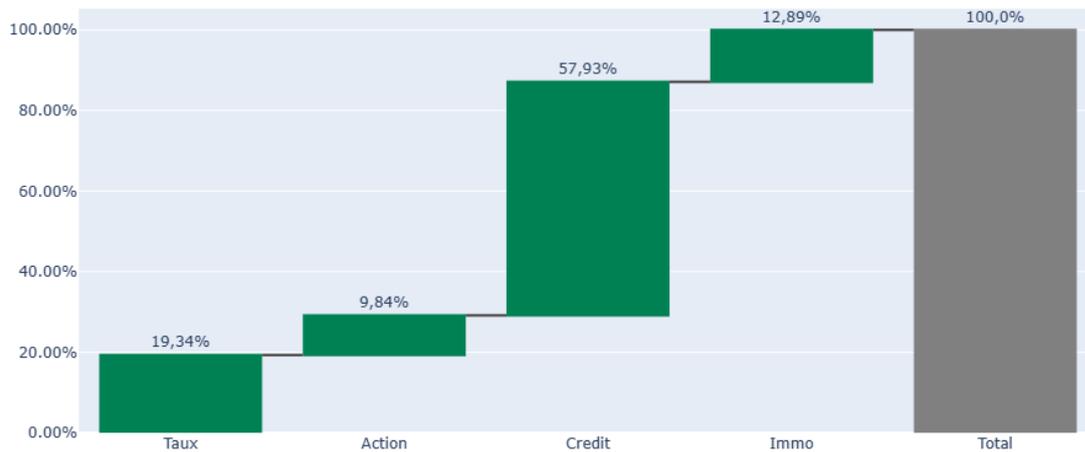


Figure 4.15: Allocation de la fuite avec la méthode proportionnelle avant moment matching en utilisant que les obligations de rating AAA

Allocation de la fuite de modèle avec la méthode Marginale avant Moment matching pour le rating AAA

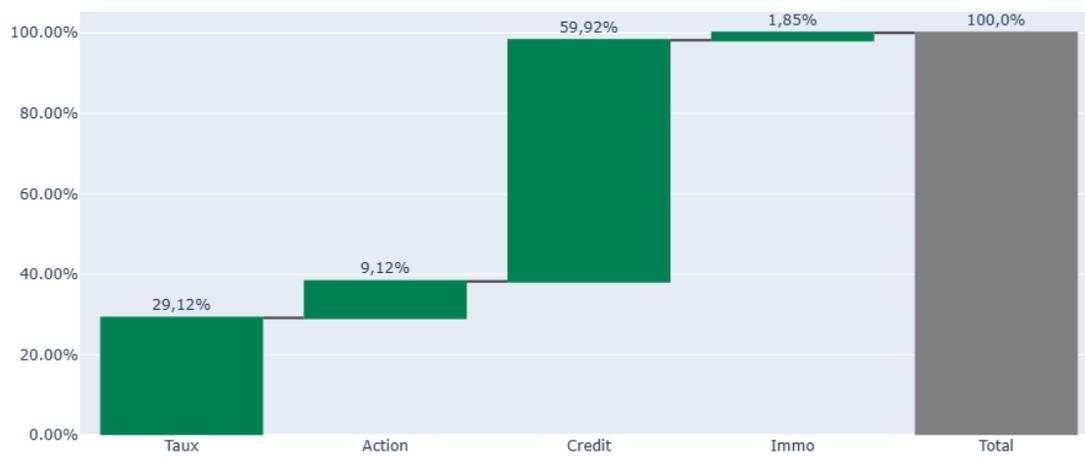


Figure 4.16: Allocation de la fuite avec la méthode marginale avant moment matching en utilisant que les obligations de rating AAA