

Mémoire présenté devant l'Université de Paris-Dauphine
pour l'obtention du Certificat d'Actuaire de Paris-Dauphine
et l'admission à l'Institut des Actuaraires

le

Par : Nicolas BLAIN

Titre : Optimisation de la valorisation du Best Estimate dans un contexte de taux élevé

Confidentialité : Non Oui (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité ci-dessus

*Membres présents du jury de l'Institut
des Actuaraires :*

Entreprise : Prepar VIE

Nom :

Signature :

PREPAR VIE

*Membres présents du Jury du Certificat
d'Actuaire de Paris-Dauphine :*

Directeur de Mémoire en entreprise :

Nom : Corentin LAROCHE

Signature :



*Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents
actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)*

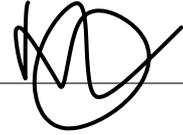
Secrétariat :

Signature du responsable entreprise



Bibliothèque :

Signature du candidat



Résumé

Dans le contexte actuel de hausse des taux d'intérêt, les résultats clés des compagnies d'assurance sous Solvabilité 2 ont évolué de manière significative. Cette évolution a donc impacté les indicateurs de contrôle, ayant des seuils imposés par l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR), qui dans certaines compagnies a mené à une perte de précision de ces indicateurs. Plus spécifiquement, cette perte de précision peut être constatée dans l'écart de convergence, couramment désigné sous le terme de "fuite de modèle", calculé comme la différence entre la valeur de marché de l'actif initial et l'espérance des flux de trésorerie actualisés.

L'objectif de ce mémoire est d'explorer deux méthodes distinctes visant à obtenir une convergence des résultats plus rapides concernant la valeur du Best Estimate, afin de se conformer aux exigences réglementaires, tout en conservant un temps de calculs comparable. La première méthode traite des générateurs de nombres aléatoires au sein du Générateur de Scénarios Economiques (GSE), et met l'accent sur une nouvelle approche combinant l'utilisation de pseudo-aléatoires et quasi-aléatoires. La seconde méthode, plus simple dans sa conception, utile dans un contexte ORSA, consiste à regrouper les faisceaux de trajectoires du processus initialement générés par le GSE.

Ainsi ce mémoire cherche à évaluer l'impact de ces deux méthodes sur le Best Estimate, en vue d'améliorer la précision des calculs sous Solvabilité 2.

Mots-clés : Écart de Convergence, GSE, G2++, Quasi-Monte-Carlo

Abstract

In the current context of rising interest rates, the key results of insurance companies under Solvency 2 have changed significantly. This evolution has therefore impacted control indicators, with thresholds imposed by the Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR), which in some companies has led to a loss of precision in these indicators. More specifically, this loss of precision can be seen in the convergence gap, commonly referred to as "model leakage", calculated as the difference between the market value of the initial asset and the discounted cash flow expectation.

The aim of this thesis is to explore two distinct methods aimed at achieving faster convergence of Best Estimate results, in order to comply with regulatory requirements, while maintaining comparable computation times,

The first method deals with random number generators within the Economic Scenario Generator (ESG), and focuses on a new approach combining the use of pseudo-random and quasi-random numbers.

The second method, simpler in design and useful in an ORSA context, consists in grouping together the bundles of process trajectories initially generated by the ESG.

Thus, the goal of this paper is to assess the impact of these two methods on the Best Estimate, with a view to improving the accuracy of calculations under Solvency 2.

Keywords : Leakage; ESG; Life Best Estimate; G2++; Quasi-Monte-Carlo; ESG .

Note de Synthèse

Depuis la mise en vigueur de Solvabilité 2 en 2016, les organismes d'assurances et de réassurance ont comme obligation une nouvelle valorisation du bilan. Afin de répondre à ce besoin une modélisation stochastique est nécessaire, reposant sur un modèle actif-passif ainsi qu'un Générateur de Scénarios Économiques (GSE). Le GSE permet la projection dans un horizon futur des taux d'intérêts, du rendement action, du rendement de la gestion alternative et du rendement immobilier. Ceux-ci permettent de valoriser le portefeuille d'actifs de l'assureur mais aussi la valeurs de ses engagements futurs.

L'année 2022 est marqué par une forte remontée des taux, cette forte variation a eu un impact direct sur les résultats clés sous Solvabilité 2 de Prepar VIE. En effet l'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) exige certain seuils sur les indicateurs obtenues. Les principaux indicateurs étudiés sont l'écart de convergence ou "fuite de modèle" calculé de la manière suivante (1)

$$EC = \frac{(BE + VIF)}{VM_0} - 1, \quad (1)$$

et l'intervalle de confiance à 95% sur le *Best Estimate*. Les résultats obtenues à Décembre 2022 présentent des valeurs trop imprécises comme on peut l'observer sur le tableau 1.

Année	2020	2021	2022
Intervalle de confiance à 95%	0.4%	0.5%	1.0%
Fuite de Modèle	0.4%	0.3%	- 0.6%

TABLE 1 : Indicateurs sur le BE € (en%)

Ce tableau montre une forte évolution des résultats sur l'année 2022 avec des valeurs qui ont doublé en une année. L'intérêt du mémoire est donc de trouver des approches permettant de conserver un temps de calcul similaire tout en respectant l'ensemble des seuils réglementaires. Une première étape consiste à étudier le GSE et vérifier l'ensemble des test de validité.

Le modèle de taux étudié au sein du mémoire est le modèle gaussien à deux facteurs (G2++), reproduisant la structure de la courbe des taux de manière précise et possédant des formules fermées. Le taux court $r(t)$ peut s'écrire de la manière décrite en (2)

$$r(t) = x(t) + y(t) + \phi(t), r(0) = r_0, \quad (2)$$

avec x et y des processus d'Ornstein-Uhlenbeck tel que (3).

$$\begin{cases} dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), & x(0) = 0, \\ dy(t) = -bx(t)dt + \eta dW_2(t), & y(0) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

Avec :

- x et y jouant des rôles symétriques dans la dynamique de r
- ϕ une fonction déterministe tel que $\phi(0) = r_0$ permettant la reproduction exacte des zéro-coupons initiales
- a, b des constantes positives représentant les coefficients de retour à la moyenne de x et y
- σ, η des constantes positives représentant respectivement la volatilité de x et y
- $\rho \in [-1, 1]$ la corrélation instantanée des deux browniens W_1 et W_2 tel que $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$

L'ensemble des test de validités ont été effectué sur le modèle de taux.

De plus Prepar VIE a un modèle permettant la représentation du risque de défaut pour chaque groupe d'émetteur. Le modèle employé est un modèle LMN en cascade, reposant sur un processus d'intensité de défaut. Celui ci se base sur le fait que d'une date t à une date $t + \delta$ un émetteur ne peut avoir que deux états, la survie dans la même notation ou le défaut. Cet intensité de défaut est représenté par un processus CIR (4).

$$d\lambda(t) = k(\theta - \lambda(t))dt + \sigma\sqrt{\lambda(t)}dW(t), \quad (4)$$

Les test de calibration et de martingalité ont aussi été effectué sur le modèle de crédit et ont pu être validé. Le GSE de Prepar VIE ne présente donc pas de problème. Suite à cela une vérification sur la convergence du modèle est effectué. En effet, la modélisation stochastique repose sur 1000 simulations, on peut se questionner sur la précision à l'aide de ce nombre de simulation. On étudie donc l'impact du changement du nombre de simulation et l'impact de la graine avec la figure 1.

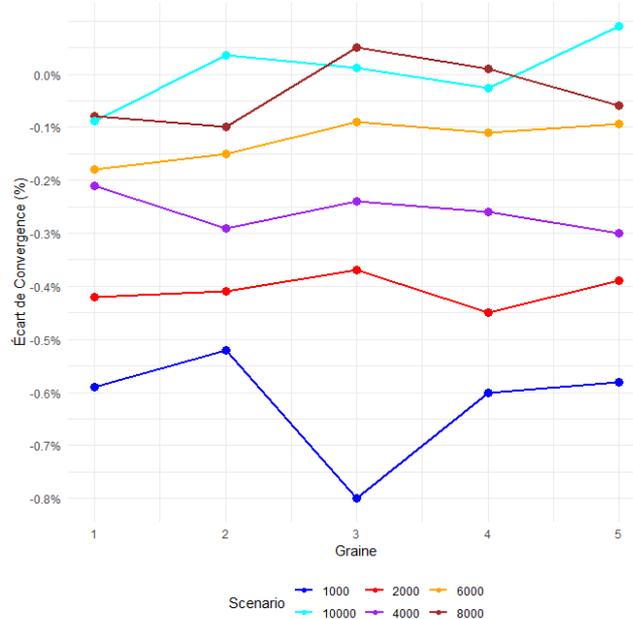


FIGURE 1 : Impact du nombre de scénarios sur la fuite de modèle

L'augmentation du niveau des taux a donc mené à une détérioration de la qualité du Best Estimate, en partie du aux approximations au sein du modèle. En effet en période de taux bas les

approximations avaient un impact moindre sur la précision, cependant avec ce contexte changeant les imprécisions ont augmenté de manière significative pour un nombre de scénario équivalent. Or une problématique de temps de calcul est aussi omniprésente dans les compagnies d'assurances. Il est donc impossible d'augmenter le nombre de simulation pour les rapports narratifs, par la suite on va donc se pencher sur des méthodes permettant l'amélioration de la convergence du modèle. Une première approche concerne les générateurs de nombre aléatoire et l'implémentation d'un générateur hybride et par la suite on se focalisera sur une approche spécifique au pilier 2 de Solvabilité 2 pour l'ORSA qui est basé sur l'agrégation de trajectoire à l'actif. Afin de pouvoir comparer les résultats, des valeurs cibles sont générées sur la base de 5 000 simulations.

Une première étude a été réalisée sur l'impact du générateur de nombre aléatoire sur la qualité du Best Estimate. Dans le modèle de production est utilisée un générateur pseudo-aléatoire, plus précisément un générateur congruentiel multiplicatif. Les résultats présentés par la suite correspondent aux résultats moyens calculés pour 5 graines différentes. Dans un premier temps est comparé l'utilisation de pseudo-aléatoire et de quasi-aléatoire dans le tableau 2.

Générateur	Best Estimate (en Millions d'€)	Écart de Convergence	Incertitude sur le BE
Valeur Cible	4 203	-0.18 %	0.323 %
Congruentiel Multiplicatif	4 214	-0.64 %	1.05 %
Mersenne Twister	4 224	-0.62 %	1.03 %
Suite de Sobol	4 213	-0.35 %	0.704 %
Suite de Halton	4 222	-0.37 %	0.71 %

TABLE 2 : Comparaison quasi-aléatoires et pseudo-aléatoires

On observe une nette amélioration de la convergence en passant à des suites à discrécances faibles. Cependant, en se plaçant dans des dimensions trop importantes, l'utilisation de suites quasi-aléatoires peut mener à une mauvaise convergence. La suite de l'étude va donc traiter d'un générateur de nombre aléatoire hybride pour palier à ce problème.

Le principe de la méthode est la suivante :

- Tout d'abord un générateur de nombres quasi-aléatoires est utilisé dans une dimension acceptable pour conserver la propriété de convergence. Pour cela il est utilisé des générateurs quasi aléatoires avec un pas de temps plus faible que le pas de temps finale requis pour le modèle ALM.
- Une étape de randomisation est ajoutée, cette approche a pour but de perturber la séquence avec une transformation aléatoire pour obtenir de meilleures propriétés de convergence.
- Puis l'ensemble des pas de temps est reconstruit en recomposant les mouvements browniens aux pas de temps non calculés avec le quasi-aléatoire en utilisant la méthode des ponts browniens. Cette méthode repose sur l'utilisation de nombres pseudo-aléatoires afin de ne pas rencontrer le problème de dimension lié au générateur quasi-aléatoire.

Le tableau 3 récapitule l'ensemble des résultats pour les différents générateurs.

Générateur	Best Estimate (en Millions d'€)	Écart de Convergence	Incertitude sur le BE
Congruentiel Multiplicatif	4 235	-0.64 %	1.05 %
Mersenne Twister	4 229	-0.62 %	1.03 %
Suite de Sobol	4 213	-0.35 %	0.704 %
RNG Hybride	4 209	-0.29 %	0.728 %

TABLE 3 : Tableau Comparatif Générateur

Le générateur hybride permet l'obtention de résultats similaire à ceux obtenues en utilisant du quasi-Monte-Carlo, cela peut-être lié au pas de temps annuel de la compagnie dans le modèle permettant de conserver une dimension assez faible.

Dans un second temps une approche applicable dans un contexte ORSA est étudiée, permettant un gain de temps lors de l'exercice. La méthode repose sur l'agrégation des trajectoires à l'actif. Pour chacun de ces actifs les faisceaux des trajectoires sont regroupés en fonction des quantiles de $S(t)$. Le processus est construit de la manière suivante (PLANCHET et NTEUKAM (2010)) :

- On fixe une partition de Ω à l'instant t , $\{[s_{t,j-1}, s_{t,j}], 1 \leq j \leq p\}$;
- Soit $\xi_j(t) = \mathbf{E}(S(t) \mid S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}])$;
- $\xi(t)$ est défini en sélectionnant une trajectoire de $\xi_j(t)$, les p trajectoires sont pondérées par la probabilité suivante $\pi_{t,j} = \Pr(S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}])$. Par défaut il est choisi de prendre $\pi_{t,j} = \frac{1}{p}$.

Dans le cadre de l'étude, le nombre de scénarios générés est de N et deux méthodes M1 et M2 sont issues de ces travaux. M1 correspond aux regroupements faits en fonction des quantiles de $S(T)$ et M2 correspond aux regroupements faits pour chaque pas de temps t en fonction des quantiles de $S(t)$. Les deux sous-méthodes sont comparées et la plus pertinente sera retenue à la fin de l'étude. Il faut utiliser la moyenne empirique de $\mathbf{E}(S(t) \mid S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}])$ conduisant à la formule (5)

$$\tilde{\xi}_j(t) = \frac{1}{N_j} \sum_{i \in \Omega_j} S_i(t) \text{ avec } \Omega_j = \{i/S_i(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}]\} \text{ et } N_j = |\Omega_j|. \quad (5)$$

Dans un premier temps les taux zéro-coupon sont représentés en utilisant M1 et M2 avec un pas de discrétisation p variant et sont comparés à la répartition initiale des trajectoires en figure (en bleu sur les graphiques) 2.

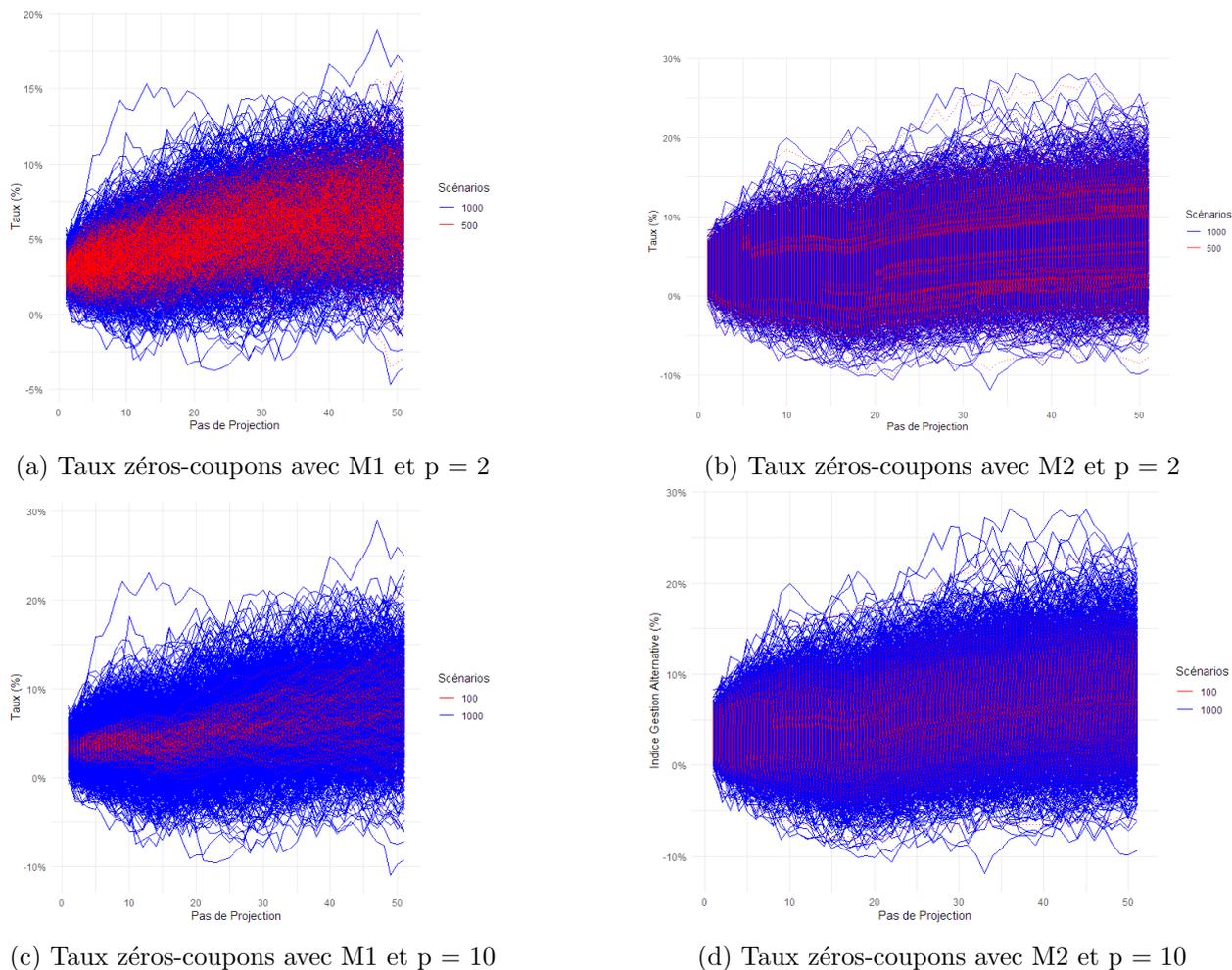


FIGURE 2 : Projection des taux zéro-coupons avec M1 et M2

Cette méthode permet de conserver l'allure générale des trajectoires cependant il apparaît un lissage des scénarios extrêmes, plus marqué avec la sous-méthode M1. De plus une étude a été réalisée pour trouver le pas de discrétisation permettant une précision acceptable avec le temps de calcul le plus faible possible. Le pas final pour les deux sous-méthodes est identiques et est $p = 5$. Par la suite il est comparé les résultats obtenues avec les deux sous-méthodes et le scénario de référence discrétisée en tableau 4.

Méthode	Nombre de Scénario	Ecart Relatif (en % du BE Scénario Ini)	Incertitude sur le BE
Référence	1000	0 %	1.05 %
M1	200	- 1.29 %	0.69 %
M2	200	3.5 %	1.89 %

TABLE 4 : Comparaison des méthodes de regroupement de trajectoire

La méthode M1 semble être plus précise pour le calcul du Best Estimate, de plus la seconde méthode M2 mène à une forte incertitude sur le Best Estimate. On retient donc la sous-méthode M1 pour le reste de l'étude.

Méthode	Nombre de Scénario	BE (en Millions d'€)	BE/VM	Ecart de (Convergence en %)	Incertitude sur le BE
Cible	5 000	4 203	0.9822	- 0.18 %	0.323 %
M1	1 000	4 136	0.9803	- 0.22%	0.421 %

TABLE 5 : Conclusion impact M1 et M2

Pour conclure sur cette approche on obtient des résultats satisfaisants dans une logique de calcul de Best Estimate, cependant dans le cadre de calcul de ratio de solvabilité et de SCR le lissage des scénarios extrêmes peut conduire à des résultats biaisés.

Pour conclure cette étude des sensibilités sont réalisées sur le générateur hybride ainsi que sur la méthode M1 d'agrégation de trajectoire. Dans un premier temps on peut comparer les deux méthodes implémentés aux valeurs cibles comme représenté sur la figure 3.

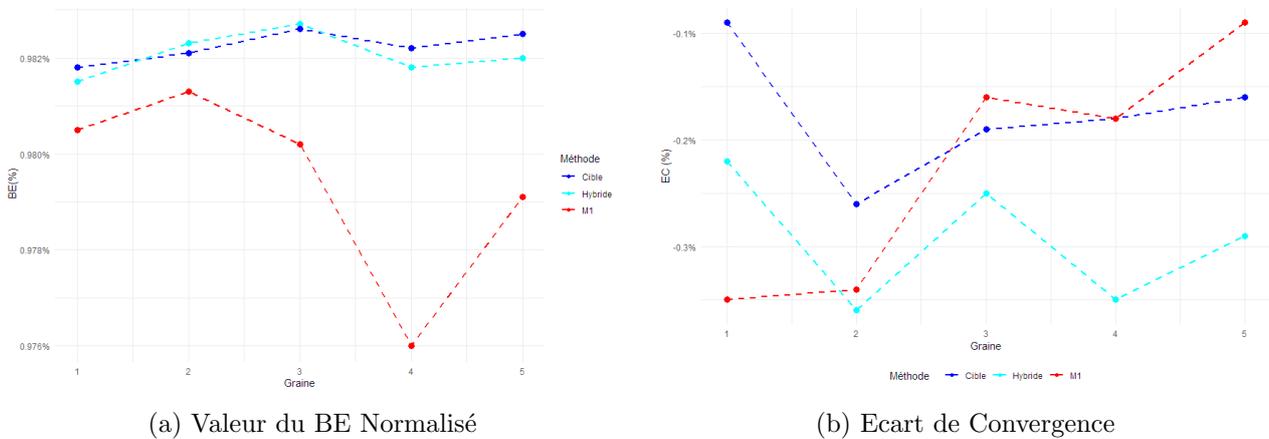


FIGURE 3 : Comparaison des deux méthodes implémentées

Cette première comparaison témoigne de la performance du générateur hybride, et comme observé précédemment la méthode d'agrégation de trajectoire permet elle un gain de temps mais ne peut pas être utilisé dans une optique de pilier 1.

Pour conclure, dans un contexte de taux élevés, la qualité du Best Estimate au sein de la compagnie a décliné, nécessitant une amélioration des outils de calcul pour respecter les normes réglementaires. Ce mémoire vise à perfectionner les méthodes de calcul du Best Estimate de Prepar VIE, en optimisant la précision sans compromettre le temps de calcul initial. Des approches visant à accélérer la convergence ont été testées, avec succès pour certaines. Les résultats ont souligné l'efficacité d'une approche de quasi Monte-Carlo par rapport aux générateurs pseudo-aléatoires, mais ont également identifié des limitations dans une méthode de regroupement de scénarios. Des sensibilités sur les taux ont été examinées, révélant des solutions potentielles pour améliorer la précision du Best Estimate, mais impliquant une augmentation du temps de calcul. Les limites de calcul disponibles et certains choix de modélisation ont été des obstacles à une analyse plus approfondie. En conclusion, ce mémoire ouvre des perspectives pour évaluer ces méthodes sur d'autres modèles de taux et pour mesurer leur impact sur le ratio de couverture de la société.

Synthesis note

Since Solvency 2 came into force in 2016, insurance and reinsurance organisations have been required to carry out a new balance sheet valuation. To meet this requirement, stochastic modelling is needed, based on an asset-liability model and an Economic Scenario Generator (ESG). The ESG is used to project interest rates, equity returns, alternative investment returns and property returns into the future. These are used to value the insurer’s asset portfolio and also the value of its future commitments.

The year 2022 is marked by a sharp rise in interest rates, and this sharp change has had a direct impact on Prepar VIE’s key results under Solvency 2. The Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) requires certain thresholds on the indicators obtained. The main indicators studied are the convergence gap or ”model leakage” calculated as follows (6)

$$EC = \frac{(BE + VIF)}{VM_0} - 1, \quad (6)$$

and the 95% confidence interval on the Best Estimate. The results for December 2022 are too imprecise, as can be seen from the table 6.

Year	2020	2021	2022
Confidence Intervall (95%)	0.4%	0.5%	1.0%
Leakage	0.4%	0.3%	- 0.6%

Table 6: BE Indicator € (en%)

This table shows a sharp change in the results for the year 2022, with values that have doubled in one year. The aim of this report is therefore to find approaches that will enable similar calculation times to be maintained while complying with all the regulatory thresholds. The first step is to study the ESG and check all the validity tests.

The rate model studied in this thesis is the two-factor Gaussian model (G2++), which reproduces the structure of the yield curve accurately and has closed formulae. The short rate $r(t)$ can be written as (7)

$$r(t) = x(t) + y(t) + \phi(t), r(0) = r_0, \quad (7)$$

with x and y being Ornstein-Uhlenbeck processes such that (8).

$$\begin{cases} dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), & x(0) = 0, \\ dy(t) = -bx(t)dt + \eta dW_2(t), & y(0) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

With :

- where x and y play symmetrical roles in the dynamics of r
- ϕ a deterministic function such that $\phi(0) = r_0$ allowing the exact reproduction of the initial zero-coupons
- a, b positive constants representing the mean-reversion coefficients of x and y
- σ, η positive constants representing respectively the volatility of x and y
- $\rho \in [-1, 1]$ the instantaneous correlation of the two Brownians W_1 and W_2 such that $dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt$

All the validation tests were carried out on the rate model. In addition, Prepar VIE has a model for representing default risk for each group of issuers. The model used is a cascade LMN model, based on a default intensity process. This is based on the fact that from a date t to a date $t + \text{delta}$ an issuer can only have two states, survival in the same rating or default. This default intensity is represented by a CIR process (9)

$$d\lambda(t) = k(\theta - \lambda(t))dt + \sigma\sqrt{\lambda(t)}dW(t). \quad (9)$$

Calibration and martingality tests have also been carried out on the credit model and have been validated. Prepar VIE's ESG therefore presents no problems. Following this, the convergence of the model was verified. The stochastic modelling is based on 1,000 simulations, so the accuracy of this number of simulations is questionable. We then study the impact of changing the number of simulations and the impact of the seed with the figure 4.

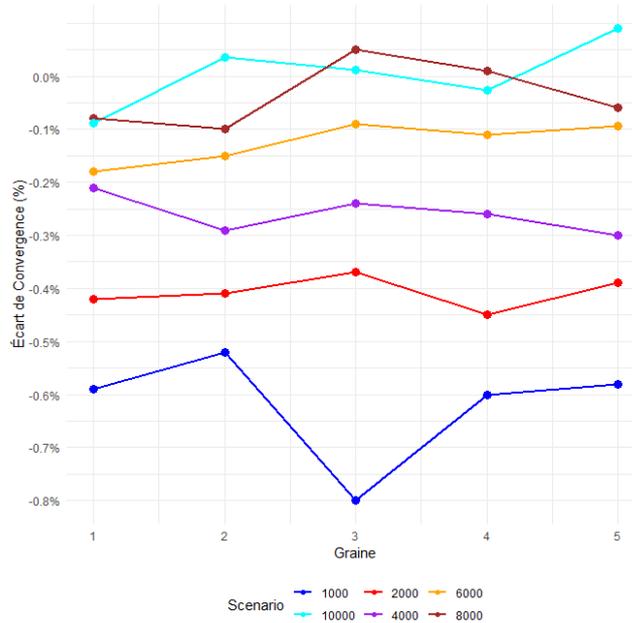


Figure 4: Impact of the number of scenarios on model leakage

The increase in interest rates has therefore led to a deterioration in the quality of the Best Estimate, partly due to approximations within the model. In periods of low rates, approximations had a lesser impact on accuracy, but with this changing context, inaccuracies have increased significantly for

an equivalent number of scenarios. The problem of calculation time is also omnipresent in insurance companies. It is therefore impossible to increase the number of simulations for narrative reports, so we will now look at methods for improving model convergence. A first approach will focus on random number generators and the implementation of a hybrid generator, followed by an approach specific to Pillar 2 of Solvency 2 for ORSA, which is based on the aggregation of asset trajectories. In order to be able to compare the results, target values are generated on the basis of 5,000 simulations.

An initial study was carried out on the impact of the random number generator on the quality of the Best Estimate. The production model uses a pseudo-random generator, more precisely a multiplicative congruent generator. The results presented below correspond to the average results calculated for 5 different seeds. The first step is to compare the use of pseudo-random and quasi-random generators in the table 7

Generator	Best Estimate	Leakage	Confidence Interval
Target Value	4 203	-0.18 %	0.323 %
Multiplicative congruent	4 214	-0.64 %	1.05 %
Mersenne Twister	4 224	-0.62 %	1.03 %
Sobol sequence	4 213	-0.35 %	0.704 %
Halton sequence	4 222	-0.37 %	0.71 %

Table 7: Comparison of pseudo and quasi random

There is a clear improvement in convergence when moving to sequences with low discrepancies. However, if the dimensions are too large, the use of quasi-random sequences can lead to poor convergence. The rest of the study will therefore deal with a hybrid random number generator to overcome this problem.

The principle of the method is as follows:

- First of all, a quasi-random number generator is used in an acceptable dimension in order to preserve the convergence property. Quasi-random generators with a time step smaller than the final time step required for the ALM model are used.
- Arandomisation step is added, the aim of this approach being to perturb the sequence with a random transformation in order to obtain better convergence properties.
- Then the set of time steps is reconstructed by recomposing the Brownian motions at the time steps not calculated with quasi-randomisation using the Brownian bridge method. This method is based on the use of pseudo-random numbers in order to avoid the dimensional problem associated with the quasi-random generator.

The table 8 summarises all the results for the different generators.

Generator	Best Estimate	Model Leakage	Confidence Interval
Multiplicative congruent	4 235	-0.64 %	1.05 %
Mersenne Twister	4 229	-0.62 %	1.03 %
Sobol sequence	4 213	-0.35 %	0.704 %
RNG Hybride	4 209	-0.29 %	0.728 %

Table 8: Final comparative generator table

The hybrid generator produces results similar to those obtained using quasi-Monte-Carlo, which may be linked to the company's annual time step in the model, allowing a fairly low dimension to be maintained.

Secondly, an approach that can be applied in an ORSA context is studied, to save time during the exercise. The method is based on the aggregation of trajectories by asset. For each of these assets, the trajectory clusters are grouped according to the quantiles of $S(t)$. The process is constructed as follows (Planchet and Nteukam (2010)):

- We fix a partition of Ω at time t , $\{[s_{t,j-1}, s_{t,j}[, 1 \leq j \leq p\}$;
- Let $\xi_j(t) = \mathbf{E}^Q(S(t) | S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[)$;
- $\xi(t)$ is defined by selecting a trajectory of $\xi_j(t)$, the p trajectories are weighted by the following probability $\pi_{t,j} = \Pr(S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[)$. By default it is chosen to take $\pi_{t,j} = \frac{1}{p}$.

For the purposes of this study, the number of scenarios generated is N and two methods M1 and M2 are derived from this work. M1 corresponds to the groupings made according to the quantiles of $S(T)$ and M2 corresponds to the groupings made for each time step t according to the quantiles of $S(t)$. The two sub-methods are compared and the most appropriate will be chosen at the end of the study. We must use the empirical mean of $\mathbf{E}(S(t) | S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[)$ leading to the formula (10)

$$\tilde{\xi}_j(t) = \frac{1}{N_j} \sum_{i \in \Omega_j} S_i(t) \text{ avec } \Omega_j = \{i/S_i(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}[\} \text{ et } N_j = |\Omega_j|. \quad (10)$$

First, the zero-coupon rates are plotted using M1 and M2 with a varying discretisation step p and compared with the initial distribution of trajectories in the figure (in blue on the graphs) 5.

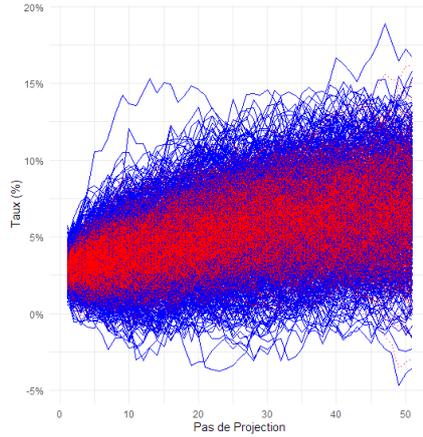
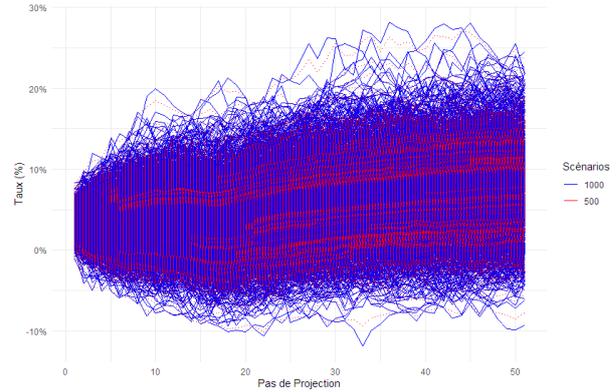
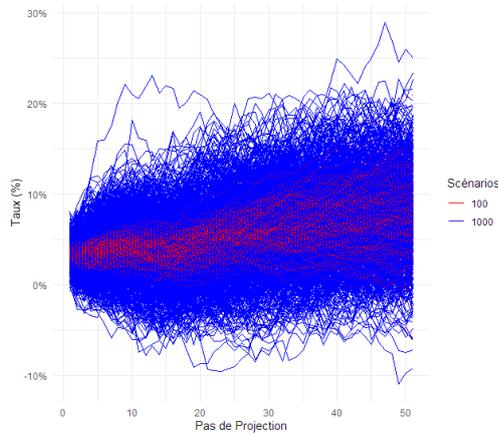
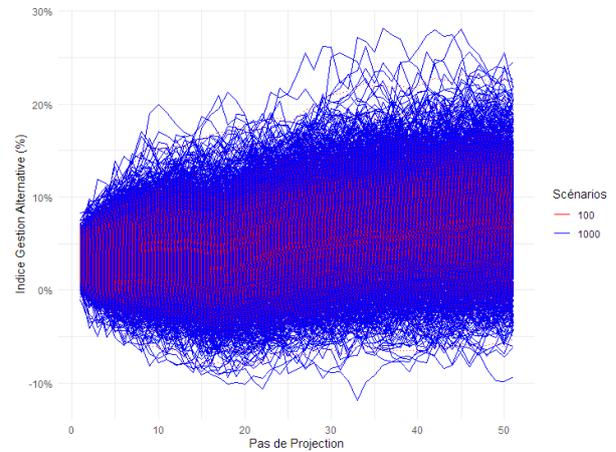
(a) Zero-coupon rates with M1 and $p = 2$ (b) Zero-coupon rates with M2 and $p = 2$ (c) Zero-coupon rates with M1 and $p = 10$ (d) Zero-coupon rates with M2 and $p = 10$

Figure 5: Projection des taux zéros-coupons avec M1 et M2

This method preserves the general appearance of the trajectories, but the extreme scenarios appear to be smoothed, to a greater extent with the M1 submethod. In addition, a study was carried out to find the discretisation step that would give acceptable accuracy with the lowest possible calculation time. The final step size for the two sub-methods is identical and is $p = 5$. The results obtained with the two sub-methods and the reference scenario discretised in table 9 form are then compared.

Method	Simulation	Relative Gap	Confidence interval with Initial simulation (in %)
Initial	1000	0 %	1.05 %
M1	200	- 1.29 %	0.69 %
M2	200	3.5 %	1.89 %

Table 9: Comparison of Agregation methods

Method M1 appears to be more accurate for calculating the Best Estimate, while the second method M2 leads to a high level of uncertainty in the Best Estimate. Sub-method M1 will therefore be used for the remainder of the study.

Method	Simulation Scénario	BE (Millions)	BE/VM	Leakage (%)	Confidence Interval
Target	5 000	4 203	0.9822	- 0.18 %	0.323 %
M1	1 000	4 136	0.9803	- 0.22%	0.421 %

Table 10: Comparison Target value with M1 method

In conclusion, this approach produces satisfactory results for Best Estimate calculations, but for solvency ratio and SCR calculations, the smoothing of extreme scenarios can lead to biased results.

To conclude this study, sensitivities are performed on the hybrid generator as well as on the M1 trajectory aggregation method. Firstly, we can compare the two methods implemented with the target values as shown in Figure 6.

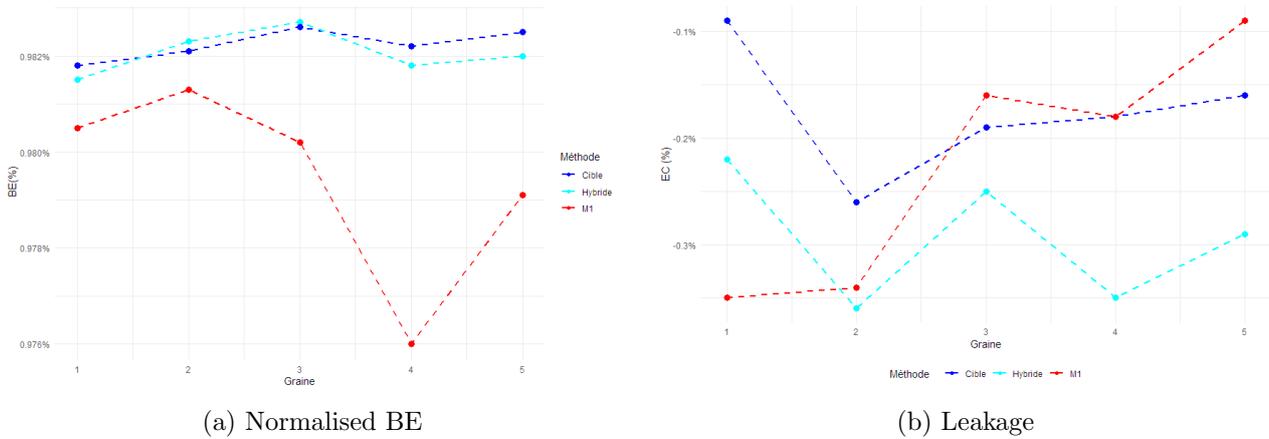


Figure 6: Comparison of the methods

This initial comparison demonstrates the performance of the hybrid generator, and as previously observed, the trajectory aggregation method saves time but cannot be used for Pillar 1 purposes.

To conclude, in a context of high interest rates, the quality of Best Estimate within the company has declined, requiring an improvement in the calculation tools to comply with regulatory standards. The aim of this report is to improve the methods used to calculate Prepar VIE's best estimate, optimising accuracy without compromising the initial calculation time. Approaches aimed at accelerating convergence were tested, some of them successfully. The results highlighted the effectiveness of a quasi Monte-Carlo approach compared with pseudo-random generators, but also identified limitations in a scenario grouping method. Rate sensitivities were examined, revealing potential solutions for improving the accuracy of the Best Estimate, but implying an increase in calculation time. The available calculation limits and certain modelling choices were obstacles to a more in-depth analysis. In conclusion, this report opens up the possibility of evaluating these methods on other interest rate models and measuring their impact on the company's coverage ratio.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon tuteur universitaire Quentin GUIBERT pour sa supervision tout au long de cette période et son avis critique.

Également je souhaite remercier Marine ASSATRIAN ainsi que Corentin LAROCHE pour le suivi de mes travaux, leurs conseils avisés et leur relecture.

Pour finir je remercie mes proches pour leurs encouragements et leur relecture tout au long de ce mémoire.

Table des matières

Résumé	3
Abstract	4
Note de Synthèse	5
Synthesis note	11
Remerciements	17
Table des matières	19
Introduction	21
1 Cadre de l'étude	23
1.1 Assurance Vie en France	23
1.2 Solvabilité 2	27
1.3 Principe de Calcul du Best Estimate en Assurance Vie	33
1.4 Gouvernance sur la qualité du Best Estimate	39
2 Modélisation ALM et Calcul du Best Estimate	47
2.1 Hypothèses de modélisation	47
2.2 Modèle de Taux et Indices	53
2.3 Modélisation du crédit	64
3 Impact et Résultat sur la qualité du Best Estimate	73
3.1 Générateur de Nombres Aléatoires Hybrides	74
3.2 Regroupement de scénarios	83

3.3 Résultats et Sensibilités	91
Conclusion	99
Bibliographie	101
A Méthodes de réduction de variances dans un contexte assurantiel	103
A.1 Variable antithétique	103
A.2 Variable de contrôle	104
A.3 Méthode par conditionnement	104
A.4 Méthode de quasi-Monte-Carlo	105

Introduction

Depuis la mise en vigueur de Solvabilité 2 en janvier 2016, les organismes d'assurance et de réassurance ont comme obligation une nouvelle valorisation du bilan. Sous cette nouvelle directive européenne le calcul des provisions techniques est nécessaire à l'évaluation du passif, en particulier le Best Estimate étant la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs (Article R351-2 du Code des Assurances). L'Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution (ACPR) vérifie la qualité des résultats et les méthodes de calcul des organismes pour la valorisation du bilan.

Pour les organismes d'assurance-vie, disposant d'options et garanties sur leurs contrats, une approche stochastique est nécessaire à la valorisation des provisions. Pour répondre à cette exigence, des modèles de gestion actif-passif ont été mis en place. Ceux-ci permettent la projection de l'actif et du passif de l'organisme en prenant en compte les interactions entre les deux, les hypothèses formulées par la société ainsi que les indicateurs financiers. Afin d'estimer au mieux l'évolution de ces indicateurs, l'utilisation d'un Générateur de Scénarios Economiques (GSE) est nécessaire. Cet outil permet de projeter dans un horizon futur, à l'aide de modèles stochastiques, l'évolution d'indicateurs financiers tels que les taux d'intérêts, le rendement action, le rendement immobilier ou encore le spread de crédit. Il est important de noter que l'approche stochastique ne permet pas une représentation exacte du bilan car elle implique l'évaluation des provisions à l'aide de la méthode de Monte-Carlo basée sur un nombre fini de scénarios. L'ACPR (2020) définit les seuils réglementaires acceptables dans ce cadre.

L'année 2022 est marquée par une remontée des taux, due à une combinaison de facteur, notamment l'inflation croissante et un resserrement de la politique monétaire de la Banque Centrale Européenne. L'augmentation significative des taux joue un rôle direct sur la la représentation des indicateurs financiers au sein du GSE et la précision des résultats obtenus pour la modélisation actif-passif.

Face à la volatilité du contexte économique, les résultats obtenus sur les chiffres clés de Solvabilité 2 ont évolué, soulevant des interrogations sur la pertinence des indicateurs actuels en terme d'exigences réglementaires, sachant que ceux-ci ont été calculés sur la base de modèles conçus dans un contexte de taux bas. Dans le but d'accroître la précision des résultats, une approche simple consiste à augmenter le nombre de scénarios. Cependant, les entreprises d'assurance et de réassurance se trouvent également confrontées à une contrainte de temps en raison de la nécessité de respecter des échéances serrées pour la production des rapports narratifs.

Ce mémoire étudie deux méthodes distinctes ayant comme objectif d'améliorer la qualité du Best Estimate en conservant un temps de calculs similaire dans un contexte de taux élevés, ce qui revient à traiter une problématique de convergence des méthodes sur le Best Estimate.

L'objectif des travaux au sein de Prepar VIE, est de quantifier l'impact de ces deux méthodes sur la valeur du Best Estimate en s'appuyant sur le modèle de taux (modèle gaussien à deux facteurs (G2++)) et sur le modèle de crédit (LMN en cascade).

Pour répondre à la problématique, la première méthode étudie l'effet de l'intégration d'un générateur

de nombres aléatoires hybrides au sein du GSE, inspiré d'un White Paper de ANDRÈS et al. (2022). Dans un premier temps, l'étude quantifie l'impact des différents générateurs aléatoires existants sur la précision du Best Estimate, en passant de générateurs pseudo-aléatoires comme celui de Mersenne-Twister, à l'utilisation de suites à discrétance faible (quasi-aléatoires) telles que la suite de Sobol. Dans un second temps, elle évalue et compare la précision du générateur hybride par rapport aux générateurs précédents.

La seconde méthode se base sur les travaux de PLANCHET et NTEUKAM (2010), elle permet l'optimisation du temps de calcul sur les contrats d'assurance-vie dans le cadre des simulations Monte-Carlo. Cette méthode repose sur le regroupement des trajectoires du processus initial généré par le GSE. L'étude aborde les avantages et inconvénients associés à l'utilisation d'une méthode permettant d'accélérer le temps de calcul.

L'étude se termine en évaluant les variations du Best Estimate par des chocs de taux, à la hausse et à la baisse, sur les deux méthodes, dans le but de mesurer leur robustesse globale.

Chapitre 1

Cadre de l'étude

1.1 Assurance Vie en France

1.1.1 Contexte actuel

L'assurance vie est depuis de nombreuses années l'un des placements que les français préfèrent. L'encours de ce secteur représente 33% du patrimoine financier des Français s'élevant à la somme de 1 885 milliards d'euros à fin 2022 (AZZOPARDI et al. (2023)). Le secteur est porté par six organismes représentant à eux seuls 58% des provisions mathématiques totales tous supports confondus. Cette concentration s'explique par le développement de bancassureurs qui ont porté la collecte nette durant ces dernières années comme on peut le voir dans la figure 1.1.

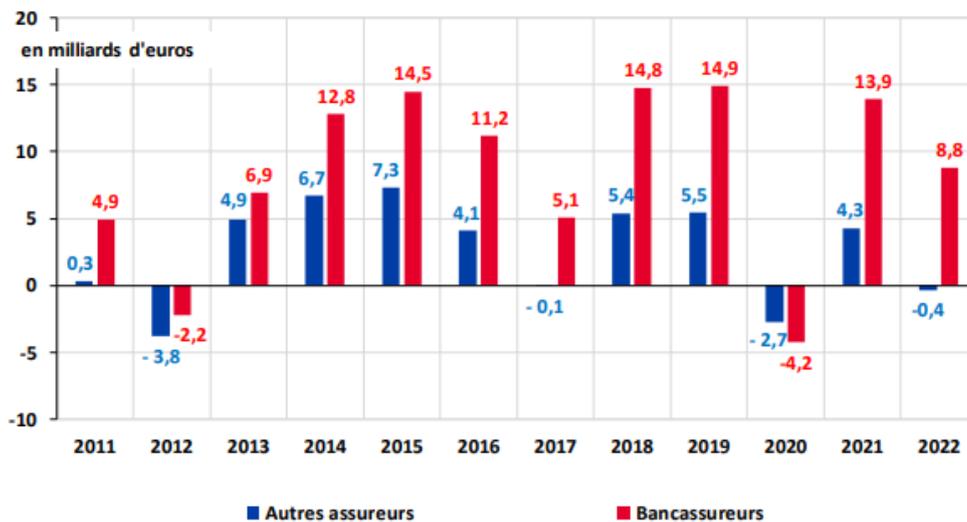


FIGURE 1.1 : Collecte nette annuelles tous supports des organismes d'assurance AZZOPARDI et al. (2023)

Les principaux avantages qui font de l'assurance vie un des secteurs d'épargne majeurs sont la fiscalité qui est intéressante sur le long terme pour les clients, la disponibilité des fonds placés qui laissent l'assuré libre d'investir au rythme qui lui convient mais aussi lui permettant une certaine disponibilité selon les supports et enfin le côté sécurisant et garanti permettant un confort chez l'assuré.

De manière générale l'assurance est un contrat entre deux parties, l'assureur et l'assuré : d'une part

l'assureur s'engage à verser une rente ou un capital à une ou des personnes déterminées (bénéficiaires), d'autre part l'assuré s'engage au versement de primes. Les trois principaux types de contrats sont les suivants : l'assurance en cas de décès, l'assurance en cas de vie et un contrat mixte vie et décès regroupant les deux garanties présentes dans les contrats.

1.1.2 Le contrat d'épargne

Le contrat d'épargne est basé sur la capitalisation des primes versées par les souscripteurs. Il constitue des droits différés qui sont sous la forme de rente viagère et/ou de capital. Durant le contrat, le souscripteur ne touche aucun revenus autre que éventuellement le versement des intérêts.

Au cours de l'année 2022, la collecte nette du marché de l'assurance vie a été de 8,4 milliards d'euros, ce qui représente moins de la moitié de la collecte de 2021 (18,4 milliards). Cette situation masque des tendances contrastées :

- les supports en euros ont connu une forte décollecte (-29.8 milliards)
- les supports en unités de compte ont eux connu une collecte nette très importante (+38.2 milliards)

Par la suite, nous allons détailler les spécificités de ces deux types de contrats qui sont les plus populaires actuellement.

Les contrats sur les fonds euros représentent la majorité des encours des Français sur des contrats d'assurance vie. En effet, ils permettent aux assurés une sécurité dans leur investissement à moyen ou long terme. Ils sont majoritairement investies dans des obligations avec une petite part de valeurs immobilières et d'actions. Dans ce support, le capital de l'assuré est garanti, les intérêts annuels sont définitivement acquis et le capital est disponible si l'assuré souhaite effectuer des retraits. Cependant le rendement des fonds euros reste faible. De plus, depuis les années 2000, le rendement n'a fait que baisser ce qui est une cause principale de la décollecte. Les chiffres (BRUNET (2011)) présentés sur la figure 1.2 témoignent de cette tendance jusqu'à 2022 où les rendements augmentent de nouveau. En outre, on peut observer que sur l'année 2023 le rendement est estimé à la hausse pour éviter une hausse des rachats.

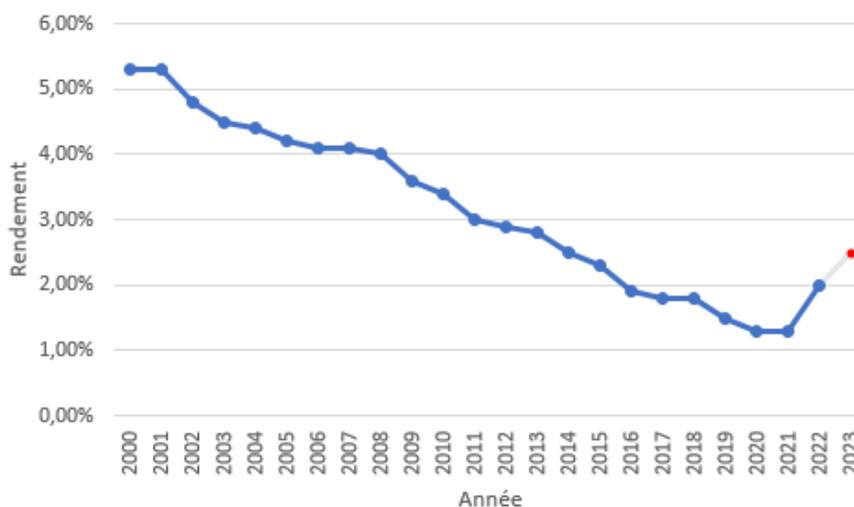


FIGURE 1.2 : Rendement des supports EURO depuis 2000

D'autre part, les supports en Unités de Compte (UC), investis dans des actifs financiers (ETF, actions, SICAV, OPCVM,...) permettent des investissements diversifiés. Contrairement au fonds en euros, ce support est sensible aux variations de prix à la hausse et à la baisse, il présente donc un risque de perte en capital. En revanche cela a pour avantage des gains potentiels bien plus élevés que les fonds en euros. Ces supports deviennent de plus en plus populaires avec une collecte nette record liée à l'attrait de performance des assurés mais aussi aux taux faibles délivrés au cours des dernières années sur les fonds euros.

Chacun de ces deux supports a ses propres avantages et inconvénients, les assurés vont ensuite choisir le contrat qui correspond le mieux à leur profil et à leur aversion au risque. Il existe d'autres types de support tels que les contrats multisupports, correspondant à un mélange des deux supports expliqués précédemment, permettant aux assurés une sécurité relative tout en ayant une certaine perspective de performance.

1.1.3 Contexte économique

Depuis la crise économique de 2008, les banques centrales ont pris des mesures drastiques afin d'ajuster leurs politiques monétaires. Le but étant de refinancer l'économie et plus spécifiquement les banques commerciales. La Banque Centrale Européenne (BCE) a donc baissé son taux principal de refinancement à plusieurs reprises jusqu'à atteindre 0% en 2016. De ce fait, le taux d'emprunt des banques commerciales auprès des banques centrales était utilisé pour réguler l'économie en apportant de la liquidité. De plus, les taux de dépôts permettant la rémunération des dépôts des banques commerciales auprès des banques centrales ont significativement baissé et sont même devenus négatifs. Les banques commerciales ont donc du placer leurs liquidités dans l'économie et non dans les banques centrales. Additionnellement, l'achat massif d'actifs financiers (*quantitative easing*), majoritairement de dettes publiques, avait pour objectif la baisse des taux des obligations pour relancer l'économie. Le décalage entre l'offre et la demande sur les titres obligataires souverains a mené à une baisse considérable des taux d'intérêts. Par conséquent, en Europe, l'ensemble des mesures mises en place a entraîné le marché obligataire vers le bas avec des taux d'intérêts négatifs jusqu'en 2021.

Suite à cette longue période de baisse, l'année 2022 est marquée par une forte remontée des taux bouleversant totalement les enjeux pour les organismes d'assurance vie. La raison majeure de ce changement est la forte augmentation des taux d'inflation que l'on peut observer sur la figure 1.3.

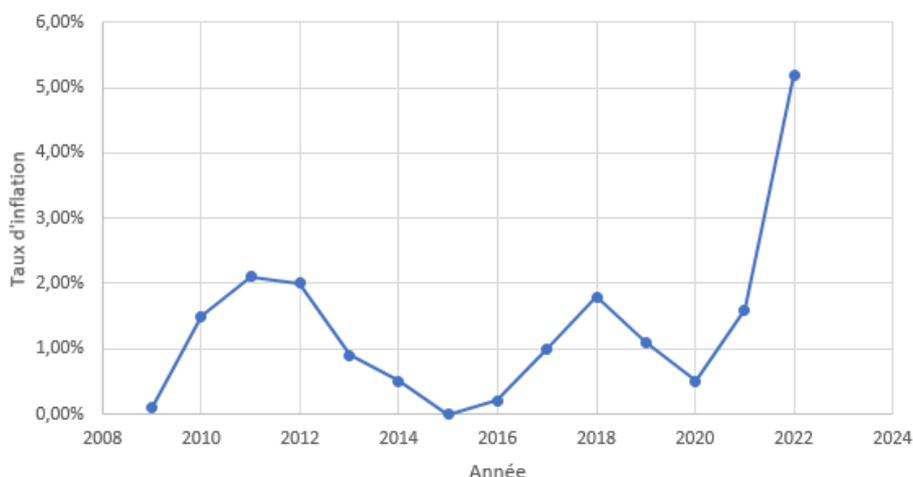


FIGURE 1.3 : Taux d'inflation en France depuis 2009, INSEE (2023)

Cette remontée des taux est directement observable sur les taux d'emprunts des Obligations Assimilables du Trésor français (OAT) 10 ans 1.4, correspondant au taux fixe auquel l'Etat français va emprunter sur une durée de 10 ans. Ce taux est utilisé comme référence. On peut observer que les taux d'emprunts ont baissé jusqu'à passer à des valeurs négatives en 2020 pour ensuite lors de la hausse des taux atteindre en janvier 2023 un taux de près de 3%. La remontée rapide de l'inflation en est la cause directe.

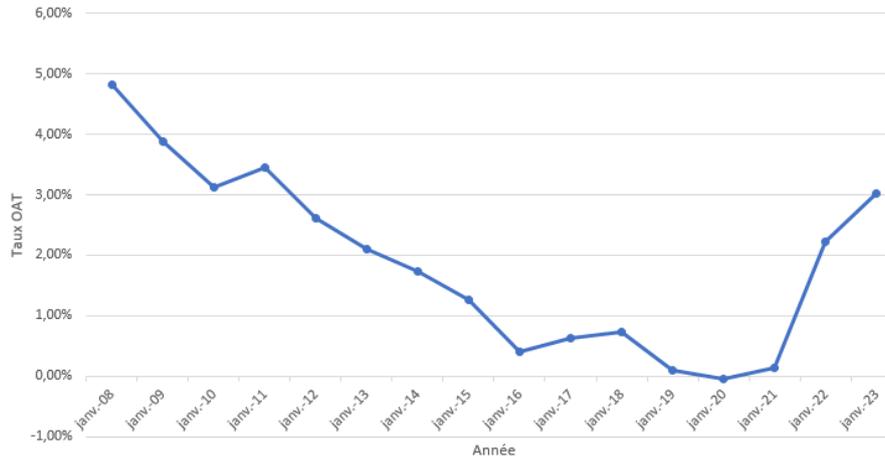


FIGURE 1.4 : Taux OAT 10 ans depuis 2008, BANQUE DE FRANCE (2023)

La courbe des taux sans risque est fournie mensuellement par l'EIOPA (*European Insurance and Occupational Pensions Authority*), elle est particulièrement utilisée par les sociétés d'assurance vie et non-vie afin d'effectuer les calculs réglementaires. La figure 1.5 représente l'évolution de cette courbe au 31 janvier depuis 2018 jusqu'à 2023. On remarque que l'ensemble des courbes réalisées avant 2023 commençait avec des taux négatifs puis convergeait vers l'UFR (*Ultimate Forward Rate*) sur les plus longues maturités. Or au 31 janvier 2023, les taux sans risque sur des faibles maturités étaient très élevés correspondant au contexte actuel de taux entraînant une hausse de la courbe des taux sans risque puis convergeaient aussi vers l'UFR. Le contexte économique a aussi eu un net impact sur la courbe réalisée par l'EIOPA dans le cadre des calculs réglementaires.

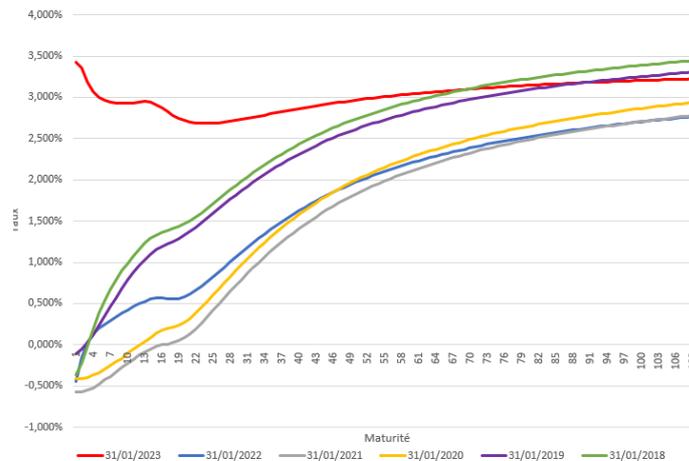


FIGURE 1.5 : Historique de la courbe des taux sans risques, EIOPA (2023)

L'ensemble des phénomènes récents a incité les assureurs à augmenter les taux servis aux clients. En effet, la hausse des taux d'intérêts est favorable aux nouveaux investissements et permet un meilleur rendement sur les actifs financiers. Cependant les portefeuilles des assureurs étant de maturité longue, les assureurs ne peuvent pas suivre rapidement la hausse des taux sur leurs produits ce qui peut les rendre moins attractifs que d'autres produits tels que les Livrets A. Cela peut donc aussi être une cause de la décollecte sur les fonds euros.

Pour conclure, le brusque changement économique a introduit une augmentation de la volatilité sur l'ensemble du marché actions et taux ainsi qu'un changement net de la courbe des taux sans risque. Cette évolution de contexte a pu mener à l'accentuation du défaut de certaines méthodologies utilisées par les compagnies d'assurances et ainsi entraîner un dépassement du seuil sur certains calculs réglementaires. Nous allons par la suite détailler le cadre réglementaire à respecter pour l'ensemble des compagnies d'assurance et de réassurance.

1.2 Solvabilité 2

Solvabilité 2 (S2) est une directive européenne (PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2009)) entrée en vigueur en janvier 2016 applicable aux entreprises d'assurance et de réassurance dans l'Union Européenne. La directive a pour but une harmonisation au niveau européen des règles de solvabilité applicables aux entreprises d'assurance pour garantir une protection adéquate des assurés et des bénéficiaires, une incitation pour les entreprises à améliorer leur gestion des risques et une transparence sur leur communication financière. Solvabilité 2 se base sur une approche quantitative et qualitative du risque supportée par chaque compagnie d'assurance. Ce nouveau régime est construit autour de 3 piliers fondamentaux :

- Le pilier I fixant les exigences quantitatives, c'est-à-dire l'évaluation des actifs et des passifs et les exigences en matière de capital.
- Le pilier II fixant les exigences qualitatives, comprenant la gestion de risque des entreprises, la gouvernance et l'évaluation du risque propre et de la solvabilité.
- Le pilier III fixant les exigences en terme de surveillance et d'information du public.

1.2.1 Focus sur le Pilier I de Solvabilité II

Le pilier I de Solvabilité 2 se concentre sur la mise en place d'un nouveau référentiel prudentiel à l'aide de multiples concepts, conventions et méthodes variées. Ce pilier développe les principes de prudence, consistance et cohérence par rapport aux marchés boursiers et à l'activité d'assurance. On peut dégager quatre grands principes de celui-ci :

- La construction d'un bilan prudentiel avec des actifs et des passifs en valeur de marché pour représenter de manière fidèle la situation économique de la compagnie
- Le développement de norme sur l'allocation et l'exigibilité des actifs pour assurer des investissements raisonnables
- Un calcul des provisions techniques à l'aide du Best Estimate et d'une Marge pour Risque
- La mise en place de deux exigences de capital, le minimum de capital requis (*Minimum Capital Requirement*) MCR et le capital de solvabilité requis (*Solvency Capital Requirement*) SCR, afin de garantir la fiabilité des engagements des entreprises d'assurance

Valorisation du Bilan

L'article 75 de la directive Solvabilité 2 (PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2009)) permet de définir le cadre de valorisation des actifs et des passifs en assurance. Ce cadre impose l'utilisation d'une approche économique en cohérence avec les données de marché.

Selon cet article les sociétés d'assurance et de réassurance doivent valoriser leurs actifs à leur valeur de marché, c'est-à-dire à un montant pour lequel l'actif pourrait être échangé dans une transaction entre des parties informées et consentantes dans des conditions de concurrence normales.

Les passifs, de la même manière, doivent être évalués conformément à une valeur pour laquelle ils seraient transférés ou réglés entre deux acteurs avec une transparence totale.

Le bilan 1.6 sous Solvabilité 2 permet donc une représentation plus précise de la situation des compagnies d'assurance, elle permet un meilleur suivi global du risque mais aussi une meilleure comparabilité entre les différentes entreprises.

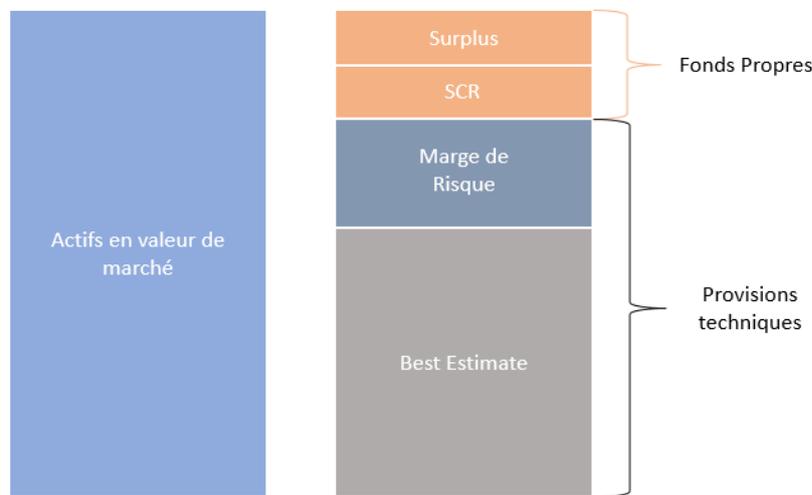


FIGURE 1.6 : Bilan sous S2

Provisions Techniques

Selon la directive Solvabilité 2 « les provisions techniques (PT) sont évaluées de façon cohérente avec le marché et correspondent au montant d'actifs qu'un tiers exigerait pour reprendre les engagements de l'assureur (ce résultat correspond donc à une valeur de transfert). Les provisions sont donc calculées comme la somme de la meilleure estimation des flux futurs (« Best Estimate ») (BE) et d'une marge pour risque (RM), sauf si l'engagement est totalement répliquable par des instruments financiers. Dans ce cas, les provisions sont calculées comme un tout (« as a whole ») sans marge pour risque. »

$$PT = BE + RM. \quad (1.1)$$

Best Estimate

Selon l'Article R351-2 du Code des Assurances, le Best Estimate « correspond à la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs compte tenu de la valeur temporelle de l'argent estimée sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente, soit la valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs »

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P} \otimes \mathbb{Q}} \left[\sum_{t \geq 1} \delta_t \times F_t \right]. \quad (1.2)$$

\mathbb{P} : Probabilité réelle

\mathbb{Q} : Probabilité risque neutre

$\delta_t = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$: déflateur stochastique en date t

F_t : Flux de trésorerie du passif (prestations, primes, etc...)

Marge pour Risque

La Marge pour Risque (*Risk Margin*) est une partie intégrante de la logique prudentielle de la réglementation. Elle permet en complément du Best Estimate la valorisation des provisions techniques d'une manière à s'assurer que leur montant soit équivalent à celui dont l'assureur doit disposer pour honorer ses engagements. Cet élément représente le coût engendré par la mobilisation de fonds propres dans le cas où le portefeuille client est transféré à un autre organisme. Le calcul de la marge s'effectue donc de la manière suivante(1.3) selon l'article 37 du règlement délégué

$$RM = CoC \sum_{t \geq 0} \frac{SCR(t)}{(1 + r(t + 1))^{t+1}}. \quad (1.3)$$

CoC : coût du capital

SCR(t) : Capital de Solvabilité Requis en date t

$r(t + 1)$: le taux d'intérêt sans risque de base pour l'échéance de t + 1 ans.

SCR

Selon la directive, "Le capital de solvabilité requis correspond à la valeur en risque (Value-at-Risk) des fonds propres de base de l'entreprise d'assurance ou de réassurance, avec un niveau de confiance de 99,5 % à l'horizon d'un an." Pour mettre en place cette mesure du risque de ruine, les compagnies d'assurance européennes peuvent passer par deux approches, la première approche est le calcul par Formule Standard qui correspond à une approche modulaire. Elle est basée sur des règles uniformes au sein de l'Union Européenne où les assureurs vont calculer des chocs par catégorie de risque. Les différents modules de risques sont les suivants :

- risque de marché : il mesure la sensibilité des actifs et des passifs à la variation des prix de marché des instruments financiers.
- risque de contrepartie : il mesure le risque qu'une contrepartie ne puisse plus respecter ses engagements.
- risque de souscription en vie : il représente reflète le risque provenant des engagements d'assurance vie.
- risque de souscription en non vie : il reflète le risque provenant des engagements d'assurance non-vie.

- risque de souscription en santé : il reflète le risque provenant des engagements d'assurance santé.

Les trois risques de souscriptions sont donc liés à la distribution de contrats d'assurance. En effet, les assureurs n'ont pas connaissance avec certitude de l'ensemble des caractéristiques des assurés ou des objets assurés ce qui peut mener à la mise en place d'hypothèses erronées et donc d'une mauvaise tarification. Ces modules de risques sont déclinés en risque intra-modulaires comme on peut le voir sur la pieuvre du SCR 1.7. Pour chacun de ces risques est calculé le capital nécessaire à l'aide de chocs sur les facteurs de risques, correspondant à des scénarios économiques impactant le bilan de la compagnie de manière négative. Les différents résultats sont ensuite agrégés à l'aide de matrice de corrélation. Une agrégation au niveau des sous modules a lieu puis une seconde agrégation a lieu au niveau des six modules présentés qui permet d'obtenir le BSCR (*Basic Solvency Capital Requirement*).

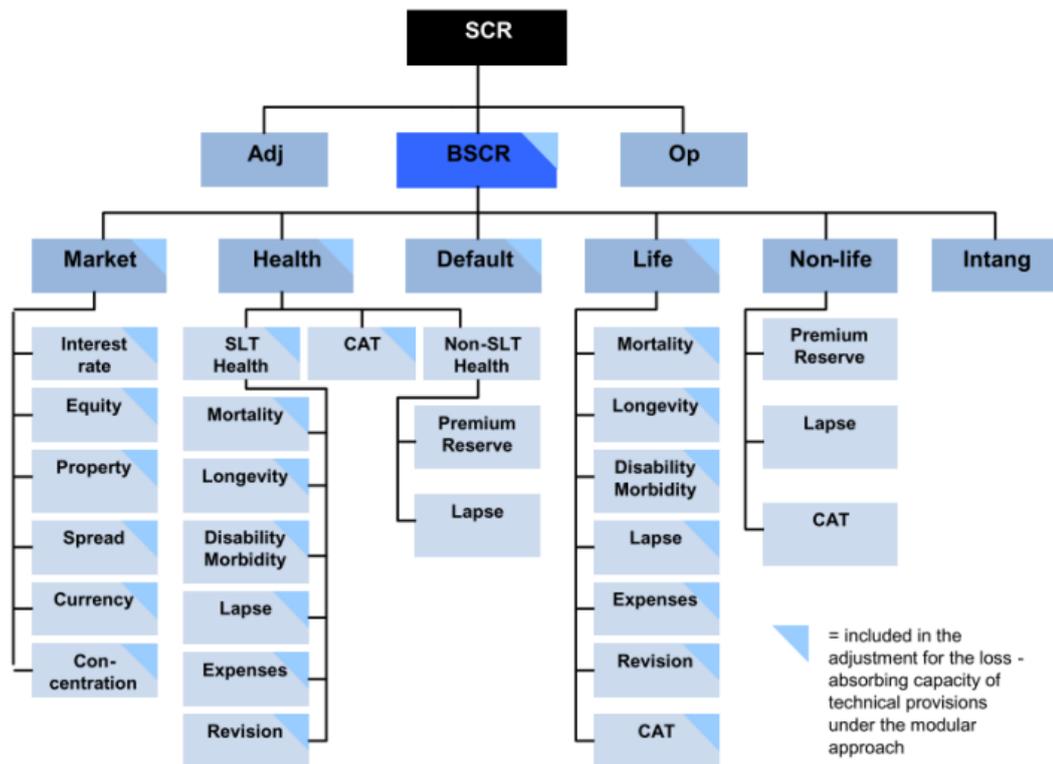


FIGURE 1.7 : Pieuvre SCR Source : QIS 5

Le SCR se calcule finalement à l'aide de la formule (1.4).

$$SCR = BSCR + Ajustement + SCR_{OP}, \quad (1.4)$$

SCR_{OP} : SCR quantifiant le risque opérationnel

Ajustement : Couverture de pertes potentielles non anticipées

Le SCR peut aussi être calculé à l'aide d'un modèle interne complet ou partiel. Cette méthode passe des techniques de simulations et de modélisation stochastique afin de représenter plus fidèlement la réalité des risques de la compagnie d'assurance. Elle nécessite une meilleure connaissance des risques de la société et la définition de la distribution de la consommation des fonds propres à horizon d'un an. Cette approche demeure plus complexe et nécessite la validation du superviseur. Par la suite on s'intéressera uniquement à la Formule Standard.

1.2.2 Pilier II

Le Pilier II définit les exigences en matière de gestion des risques et de gouvernance, ainsi que les détails du processus de surveillance avec les autorités compétentes; cela garantira que le cadre réglementaire est combiné avec le système de gestion des risques de chaque entreprise. De plus, il a comme objectif de garantir la mise en place des différents éléments du Pilier I. Il est imposé à chaque compagnie d'assurance d'avoir quatre fonctions clés : la gestion des risques, l'actuariat, l'audit interne et la conformité. Les entreprises doivent aussi former des organes d'administration de contrôle et de gestion honorables et compétents. Enfin, il exige un processus d'évaluation des risques interne pour vérifier la cohérence entre la stratégie, le profil de risque et les fonds propres de l'entreprise appelé l'Own Risk And Solvency Assessment (ORSA). Ce processus est un outil stratégique de premier plan au sein des compagnies car il permet le pilotage de l'activité en fonction des différents risques auxquels est confrontée la société. La figure 1.8 représente les différentes fonctions et leurs principales missions.

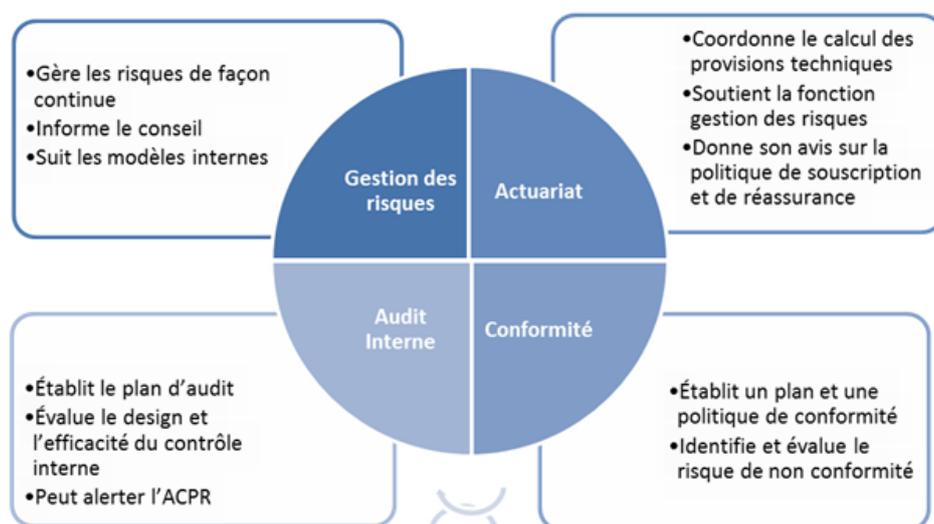


FIGURE 1.8 : Rôle des fonctions clé au sein du Piler 2, ACPR (2022)

La Fonction Clé Actuariat

La Fonction Actuarielle fait partie des quatre fonctions clé du système de gouvernance qui est organisé autour du Conseil d'administration et du directeur général. Elle est introduite à l'article 48 de la Directive. A travers l'ensemble de ses missions la fonction actuariat touche à la tarification, au provisionnement, à la souscription et à la réassurance. Jusqu'à présent le rapport de la Fonction Actuarielle (RFA) n'est pas régi par des normes professionnelles spécifiques obligatoires. La fonction actuariat dispose d'un document de référence, la norme ESAP 2 (European Standard of Actuarial Practice) qui énumère une liste de bonnes pratiques sans définir avec précision ses activités. La notice de l'ACPR apporte toutefois quelques précisions : «La fonction actuarielle doit permettre d'analyser la cohérence, les forces, faiblesses et points d'incertitude du pilotage technique de l'organisme ou du groupe dans toutes ses dimensions (tarification, souscription, provisionnement, réassurance). Ces analyses sont communiquées au moins annuellement au Conseil sous la forme d'un ou plusieurs rapports actuariels.».

Positionnement dans la structure organisationnelle

La Fonction Actuarielle doit avoir une position au sein de l'organigramme de la société lui permettant une indépendance comme il est précisé dans l'article 268 du Règlement Délégué :

« Les entreprises d'assurance et de réassurance intègrent à leur structure organisationnelle les fonctions et les lignes de reporting qui leur sont liées d'une manière qui garantisse que chaque fonction est exempte d'influences pouvant compromettre sa capacité à s'acquitter de façon objective, loyale et indépendante des tâches qui lui incombent. Chaque fonction opère sous la responsabilité ultime de l'organe d'administration, de gestion ou de contrôle, auquel elle rend compte, et, s'il y a lieu, coopère avec les autres fonctions dans l'exercice de leurs rôles respectifs. »

De plus, il est imposé aux organismes d'assurance la désignation d'un responsable par fonction clé, dans le cas de la fonction clé actuariat selon l'article 48 de la Directive il n'est pas obligatoire que le responsable soit un actuariaire, il faut uniquement justifié d'une connaissance des mathématiques actuarielles et financières permettant une compréhension des enjeux et des risques d'une société d'assurance ou réassurance.

Missions de la Fonction Actuarielle

Pour mener ses missions à bien, la fonction clé doit pouvoir disposer des ressources suffisantes, ainsi son interaction avec les différents services lui permet de récupérer les données et travaux nécessaires à la réalisation de ses travaux. L'ensemble de ses missions est défini selon l'article 48 de la Directive : « Les entreprises d'assurance et de réassurance mettent en place une fonction actuarielle efficace afin de :

- coordonner le calcul des provisions techniques ;
- garantir le caractère approprié des méthodologies, des modèles sous-jacents et des hypothèses utilisés pour le calcul des provisions techniques ;
- apprécier la suffisance et la qualité des données utilisées dans le calcul des provisions techniques ;
- comparer les meilleures estimations aux observations empiriques ;
- informer l'organe d'administration, de gestion ou de contrôle de la fiabilité et du caractère adéquat du calcul des provisions techniques ;
- superviser le calcul des provisions techniques dans les cas visés à l'article 82 ;
- émettre un avis sur la politique globale de souscription ;
- émettre un avis sur l'adéquation des dispositions prises en matière de réassurance ;
- contribuer à la mise en œuvre effective du système de gestion des risques visé à l'article 44, en particulier pour ce qui concerne la modélisation des risques sous-tendant le calcul des exigences de capital prévu au chapitre VI, sections 4 et 5, et pour ce qui concerne l'évaluation visée à l'article 45. »

La Fonction Actuarielle n'a pas de structure précise à suivre dans son rapport mais elle intervient dans le contrôle des provisions techniques et donc de la qualité du Best Estimate calculé par la compagnie, il faut donc apporter une méthodologie claire et logique ainsi que des résultats précis afin de satisfaire les exigences de la fonction clé.

1.2.3 Pilier III

Le pilier III comporte ce qui est relatif à la communication financière, l'information au public et à l'autorité de contrôle. L'objectif principal est l'harmonisation des informations publiées par l'ensemble des sociétés d'assurance européennes. Deux rapports narratifs doivent être rédigés tous les ans par les organismes, le *Regulatory Supervisory Reporting* (RSR) à destination de l'autorité de contrôle et le *Solvency and Financial Condition Report* (SFCR) à destination du public et des entreprises. Ces documents font une présentation de l'activité de la société et des résultats financiers et techniques, de la gouvernance et sa gestion des risques, des risques inhérents à la société, de la valorisation des actifs, provisions techniques et autre passif à des fins de solvabilité et de la gestion du capital. Ce pilier formalise à travers ce processus de reporting l'ensemble des travaux effectués sur la directive au sein d'une compagnie d'assurance.

1.3 Principe de Calcul du Best Estimate en Assurance Vie

Dans le cadre de l'assurance vie le calcul du Best Estimate nécessite généralement la mise en place de modélisations stochastiques des risques ainsi que des interactions entre l'Actif et le Passif de la société. De plus, il est nécessaire de posséder les caractéristiques du portefeuille d'assurés. Nous allons ici décrire les différents mécanismes permettant le calcul du Best Estimate.

1.3.1 Les Générateurs de Scénarios Économiques (GSE)

Un Générateur de Scénarios Économiques se décrit lui-même : il génère des scénarios économiques. Plus précisément, un GSE est un modèle mathématique qui fournit des scénarios d'évolution possibles des marchés financiers. L'ACPR (2020) le définit de la manière suivante : "Un générateur de scénarios économiques (GSE) est un ensemble de modèles (taux, actions, spreads de crédit, inflation, etc.) permettant de simuler aléatoirement des scénarios d'évolutions possibles des marchés financiers, qui ont une incidence sur la valeur et les performances de l'actif de l'organisme d'assurance."

Cet outil doit répondre aux exigences définies à l'article 22§3 a. à c. du règlement délégué :

- une cohérence entre le niveau de taux moyen simulé et la courbe de taux sans risque servi par l'EIOPA
- des scénarios respectant le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)
- un prix des actifs simulés cohérent avec les prix observables sur les marchés financiers (market-consistency)

La qualité d'un GSE réside dans sa capacité à simuler et à projeter des scénarios économiques qui sont précis et réalistes, ce n'est qu'en examinant un grand nombre de scénarios économiques futurs possibles que nous pouvons évaluer de manière adéquate l'ampleur et la probabilité relative de différents scénarios. Cet outil va donc permettre une appréciation des différents risques dans le futur pour les sociétés d'assurances.

Un GSE simule généralement toutes les variables économiques et financières pertinentes, mais une variable (modèle de taux généralement) tend à servir de moteur aux autres variables générées dans un scénario. Un aspect essentiel de la modélisation est la calibration des paramètres du Générateur de Scénarios Économiques ainsi que l'inclusion des relations de corrélation entre les variables que l'on simule. Les facteurs de risque peuvent être modélisés de deux principales manières :

- des modèles composites avec une spécification individuelle pour chacun des risques puis une agrégation

- des modèles intégrés où les différentes classes d'actifs sont simulées à partir d'une variable explicative de référence

Le Choix d'un univers de probabilité

Les GSE peuvent être structurés selon deux approches différentes dites "Univers Risque Neutre" ou "Univers Monde Réel".

D'une part, les générateurs de scénarios économiques "monde réel" sont liés à l'univers historique. Ils sont généralement utilisés dans une optique de pilotage stratégique. Ainsi, ils interviennent principalement dans le cadre du pilier II de la réglementation à travers l'ORSA. Ils reposent sur l'univers historique, construit à partir d'un échantillon d'événements passés. De ce fait, les scénarios reproduisent fidèlement la réalité conformément à l'historique initial et sont donc interprétables compte tenu de leur réalité physique. De plus, le rendement futur des actifs va intégrer une prime de risque variable avec le temps.

D'autre part, l'univers "risque neutre" est un cadre théorique de référence qui permet la valorisation des actifs et des passifs de la société d'assurance. Ce cadre a d'abord été utilisé en finance afin de valoriser des options, jusqu'à être utilisé pour la valorisation des passifs dans le domaine de l'assurance vie. Ce cadre repose sur une hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) qui est assez proche de la réalité sur un marché liquide, mais aussi sur une hypothèse de complétude des marchés. En effet, l'aversion au risque n'est pas prise en compte lorsque l'on utilise des scénarios stochastiques "risque neutre", ainsi le prix des différents actifs évolue en moyenne au taux sans risque. Ces scénarios permettent donc de capter la volatilité et d'avoir une estimation du prix des différents actifs et passifs. Cette approche est celle utilisée afin d'effectuer l'ensemble des calculs liés au premier pilier de Solvabilité 2.

Notion de market consistency

En assurance le prix du passif n'est généralement pas observable sur les marchés financiers, la notion de market consistency implique l'évaluation du prix en passant par des modèles où les hypothèses sont cohérentes avec les prix de marché (courbe de taux, prix/volatilité de produits financiers).

Dans un univers "risque neutre", le prix actuel est suffisant afin de valoriser l'ensemble des produits financiers non cotés, tandis que dans l'univers "monde réel", l'information sur la prime de risque est aussi nécessaire.

Test de Martingalité

Un test de martingalité a pour but de vérifier le caractère "risque neutre" des scénarios simulés par le GSE. Ce test permet de vérifier que le prix actualisé des actifs projetés est une martingale (1.5). C'est donc une étape essentielle de validation d'un GSE "risque neutre".

$$S_0 = E^Q[e^{-\int_0^t r_u du} S_t], \forall t \geq 0. \quad (1.5)$$

Le mécanisme d'un GSE

Afin de construire un Générateur de Scénarios Économiques performant et en adéquation avec les attentes de la compagnie, une étape préliminaire est nécessaire. Celle-ci peut être séparée en quatre grandes parties :

- le choix de l'univers de probabilité dans lequel travailler, dans le cadre de la valorisation du bilan d'une société d'assurance la modélisation risque neutre est retenue

- l'identification des risques auxquels la société est exposée et la sélection des variables économiques qu'elle va modéliser
- le choix du modèle, celui-ci dépendant à la fois des préférences de l'assureur (par exemple des modèles simples, rapides, mais en contrepartie moins précis) et du contexte économique actuel (dans un contexte de taux négatif l'assureur doit par exemple avoir un modèle qui peut prendre en compte ses données)
- définir une dépendance entre les facteurs de risque afin d'obtenir des simulations cohérentes

Un GSE s'articule autour de trois phases primordiales pour l'obtention de résultats cohérents avec les attentes de l'assureur. Dans un premier temps a lieu la calibration du modèle, à traiter en entrée des données afin que le modèle puisse calculer les paramètres optimaux. Ces paramètres d'entrées varient en fonction du contexte économique et des différents choix de l'assureur (par exemple le temps de calcul souhaité et donc la précision des résultats). Dans le cadre d'une valorisation en univers "Monde Réel" un historique de données est nécessaire pour travailler tandis qu'il faut fournir des données de marchés actuels si l'on souhaite se placer en univers risque neutre. Cette étape permet une bonne réplique des prix de marchés en respectant la notion de market-consistency.

L'étape suivante est la diffusion. Elle consiste à simuler l'évolution des facteurs de risque et à projeter des variables économiques choisies dans le temps avec une certaine précision grâce à la calibration préalable du modèle. La diffusion permet d'obtenir de nombreuses simulations indépendantes d'évolutions des variables financières retenues.

La dernière étape correspond à la validation. Elle assure la cohérence des résultats avec notamment la vérification de la propriété de martingalité des actifs et le caractère market-consistent. Cette étape permet d'effectuer un contrôle sur la qualité du GSE et de s'assurer de la fiabilité des résultats obtenus.

Sous Solvabilité 2, l'usage des générateurs de scénarios économiques est devenu indispensable, cet outil est utile dans différentes problématiques à l'actif et au passif. On l'utilise aussi dans une logique de pilotage de l'adéquation entre les deux parties du bilan.

On détaillera en 1.3.2 l'utilité de cet outil dans le cadre d'un modèle actif passif. Le but de cette partie étant de mieux comprendre l'intérêt des générateurs de scénarios économiques dans le cadre du pilier I de Solvabilité 2. On peut représenter le fonctionnement d'un GSE comme dans la figure 1.9.

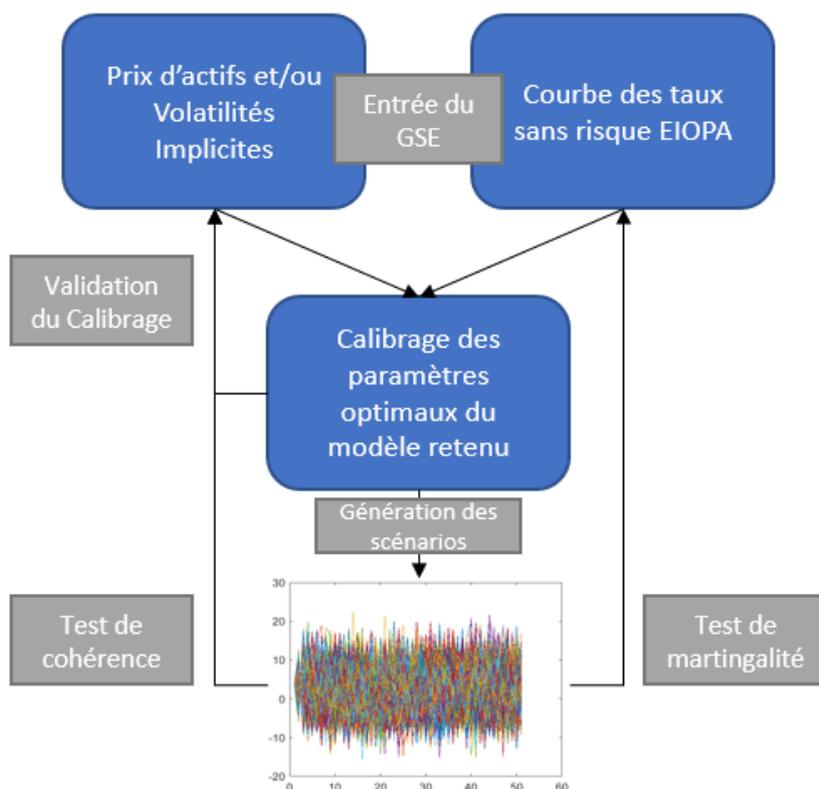


FIGURE 1.9 : Etapes de générations des scénarios économiques

1.3.2 Modélisation ALM

Du fait de l'inversion du cycle de production dans les compagnies d'assurance, l'utilisation de modèle ALM (*Asset Liabilities Management*) est devenu indispensable afin de prévoir l'évolution des flux de trésoreries futurs du passif. Pour les produits d'assurance, l'horizon de planification s'étend au-delà d'une décennie : par exemple, les fonds de pension ont un horizon de planification de plus de 30 ans. Ainsi, pour une compagnie d'assurance opérant dans le domaine de l'assurance vie, il est essentiel de construire un modèle pour prévoir l'évolution des entrées et des sorties de fonds. Le moteur ALM permet de répondre à ce besoin, c'est un outil central dans les compagnies d'assurance permettant notamment la construction de comptes de résultats et de bilans dans le cadre réglementaire (S2/IFRS17) et donc le calcul du Best Estimate. La "meilleure estimation" correspond à une estimation des flux futurs actualisés aux engagements d'une compagnie envers ses adhérents. De ce fait, les éléments comptables sont indispensables dans le modèle ALM car ils ont un effet direct sur la valeur des frais et des prestations futurs de l'assureur. De manière similaire il est nécessaire de posséder le rendement des actifs financiers car ils jouent aussi un rôle dans le passif de la compagnie.

Un moteur ALM possède deux principales sources permettant la projection des flux futurs. Afin d'obtenir des résultats précis il est nécessaire de fournir au modèle des tables de scénarios économiques, provenant du générateur de scénarios économiques que nous avons traité précédemment. Ces tables correspondent aux projections des différents facteurs de l'actif (rendement des actions, rendement de l'immobilier, taux ...) jusqu'à l'horizon déterminé par la compagnie. Ces données permettent la projection conjointe du passif à l'évolution de l'actif modélisé par le GSE. La seconde source d'information

correspond à un certain nombre d'hypothèses faites par la compagnie. Des regroupements sont faits à l'actif et au passif, appelés "model point", ces regroupements sont faits selon diverses caractéristiques afin de créer des groupes avec des portefeuilles semblables pour avoir des résultats cohérents au portefeuille d'assurés. Cette étape permet une réduction du nombre de simulations au sein de l'outil de modélisation et donc un gain en temps de calcul. La compagnie définit ses hypothèses sur la mortalité (table de mortalité), les loi de rachats, les frais, les chargements, l'allocation des actifs (condition de réinvestissement), etc. Les sources d'informations vont permettre la projection des flux et donc la réalisation de comptes de résultats et de bilans à un certain horizon de projection.

Sous Solvabilité 2 le moteur ALM combiné au GSE est devenu un outil central dans les compagnies d'assurance. En effet, la réglementation impose une gestion du bilan passant par l'anticipation à court terme mais aussi à long terme. Il est donc nécessaire de pouvoir projeter son bilan sur un horizon défini en prenant compte les interactions entre l'actif et le passif. De plus, il est indispensable dans la prise de décision à l'actif, afin d'avoir une allocation stratégique optimale et des stratégies de réinvestissement optimales compte tenu du portefeuille de l'assureur, de sa situation financière, des conditions de marché et de sa tolérance à différents risques. La figure 1.10 représente les étapes majeures d'un moteur ALM.

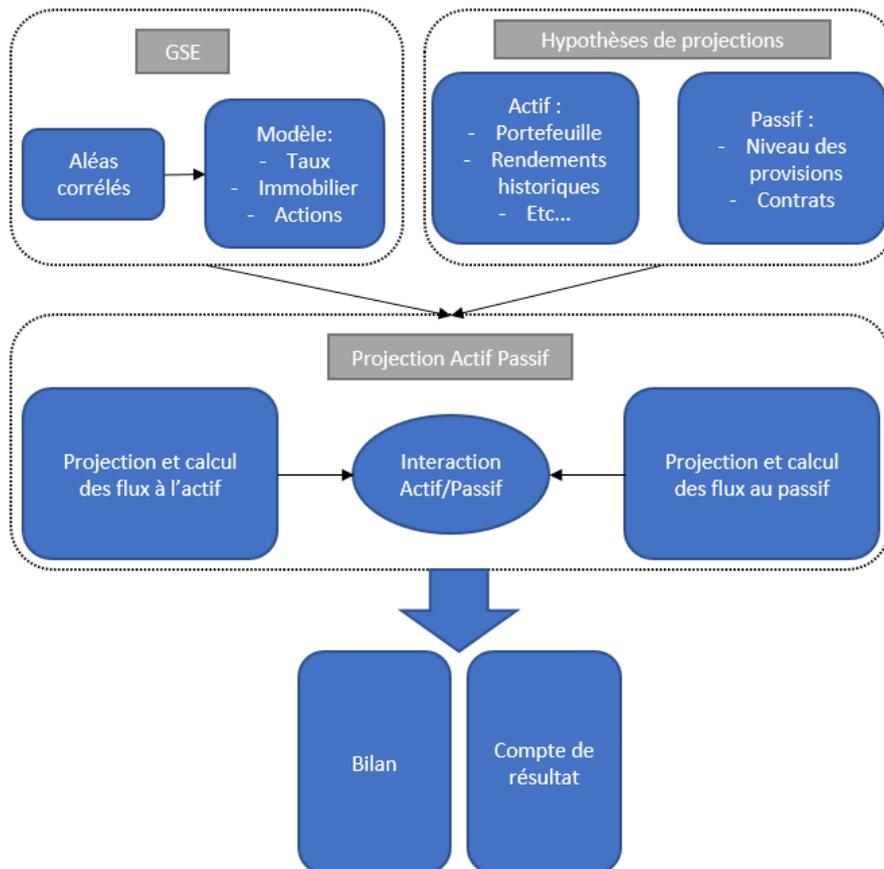


FIGURE 1.10 : Schéma Processus ALM

1.3.3 Importance de l'approche stochastique en Assurance vie

L'article 32 du Règlement Délégué impose la valorisation des options et garanties financières dans le calcul du Best Estimate « Lors du calcul de la meilleure estimation, les entreprises d'assurance et

de réassurance tiennent compte de l'ensemble des éléments suivants :

- toutes les garanties financières et options contractuelles incluses dans leurs contrats d'assurance et de réassurance ;
- tous les facteurs susceptibles d'influer sur la probabilité que les preneurs exerceront les options contractuelles ou réaliseront la valeur des garanties financières »

Afin de calculer le Best Estimate d'une compagnie d'assurance il est nécessaire de modéliser l'ensemble des hypothèses permettant la projection des flux actifs/passifs, cette modélisation peut être déterministe ou stochastique. Un modèle déterministe est défini par l'utilisation d'un scénario central unique permettant de simuler l'ensemble des variables et hypothèses jusqu'à l'horizon de temps défini tandis que la modélisation stochastique correspond à la simulation de multiples scénarios indépendants générés à partir de variables aléatoires indépendantes permettant de reproduire au mieux la réalité de la situation aux différents pas de temps. La revue de l'ACPR (2020) sur les GSE indique que le passage d'une modélisation déterministe à stochastique permet d'enrichir le Best Estimate d'en moyenne 2% 1.11, cette augmentation est due au fait que la différence entre l'approche stochastique et l'approche déterministe représente le coût des options et garanties financières (TVOG).

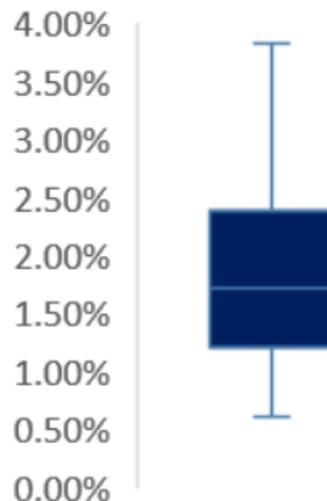


FIGURE 1.11 : TVOG en % du BE, ACPR (2020)

Au sein d'un contrat d'assurance vie en France les principales options/garanties rencontrées sont les taux minimums garantis, les droits à la participation aux bénéfices sur l'actif, les options de rachats et l'option de conversion en rente.

Pour une compagnie d'assurance-vie la modélisation stochastique est donc nécessaire dans le cadre du calcul du Best Estimate. La figure 1.12 représente le problème de modélisation des options et garanties financières, et plus particulièrement du taux minimum garanti lorsque l'on se place dans un calcul déterministe.

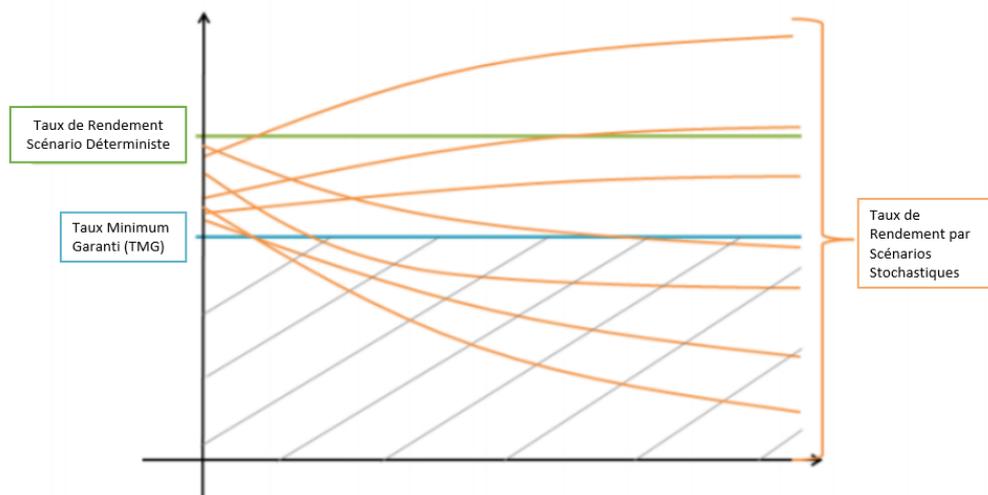


FIGURE 1.12 : Répartition possible du rendement de l'assureur entre un scénario déterministe et des scénarios stochastiques pour un taux technique donné

On observe que le rendement du scénario déterministe se situe au dessus du TMG, or une compagnie d'assurance vie peut rencontrer des problèmes lorsque son rendement est inférieur au TMG représenté par la zone hachuré dans notre schéma. En effet, l'assureur serait dans une situation défavorable car son rendement ne permettrait pas d'honorer ses engagements envers ses assurés. Dans un calcul déterministe ce scénario défavorable n'est pas représenté et la valeur du Best Estimate ne changerait pas tant que le rendement du scénario déterministe serait supérieur au TMG, ainsi on observe que ce scénario central ne permet pas la prise en compte des options et garanties financières. Dans le cadre stochastique, on remarque que 4 scénarios parmi les 7 simulés dans l'exemple se situe en dessous du TMG, or le Best Estimate est calculé comme la moyenne sur tous les scénarios des flux de passifs actualisés, la valeur du Best Estimate va donc augmenter du fait que l'assureur devra prendre en compte la possibilité de ces scénarios défavorables pour être capable de faire face à cette situation.

1.4 Gouvernance sur la qualité du Best Estimate

Dans le cadre des rapports narratifs remis à l'ACPR ainsi que de l'ORSA, les entreprises d'assurance doivent établir les comptes de la société ainsi que le bilan dans les années futures sous différentes conditions. Il est donc nécessaire de calculer de nombreux indicateurs de Solvabilité 2 et notamment le Best Estimate. Ainsi différents tests sont menés sur la qualité du Générateur de Scénarios Économiques et sur les résultats en sortie du moteur ALM notamment le Best Estimate. Afin de réaliser l'ensemble des travaux les compagnies doivent utiliser leur modèle stochastique pour fournir des résultats sur la projection de leur bilan dans le futur le plus réaliste possible, cela nécessite donc l'utilisation de l'ensemble des outils décrits dans la section précédente. L'ACPR dans son document sur les points d'attentions et bonnes pratiques liées au GSE exige un seuil d'erreur maximale 1.13 sur les tests de validation statistique (martingalité, market-consistency, qualité de l'aléa, etc..) afin de garantir la qualité des scénarios utilisés dans le cadre de l'actualisation des flux futurs et de la modélisation Actif/Passif.

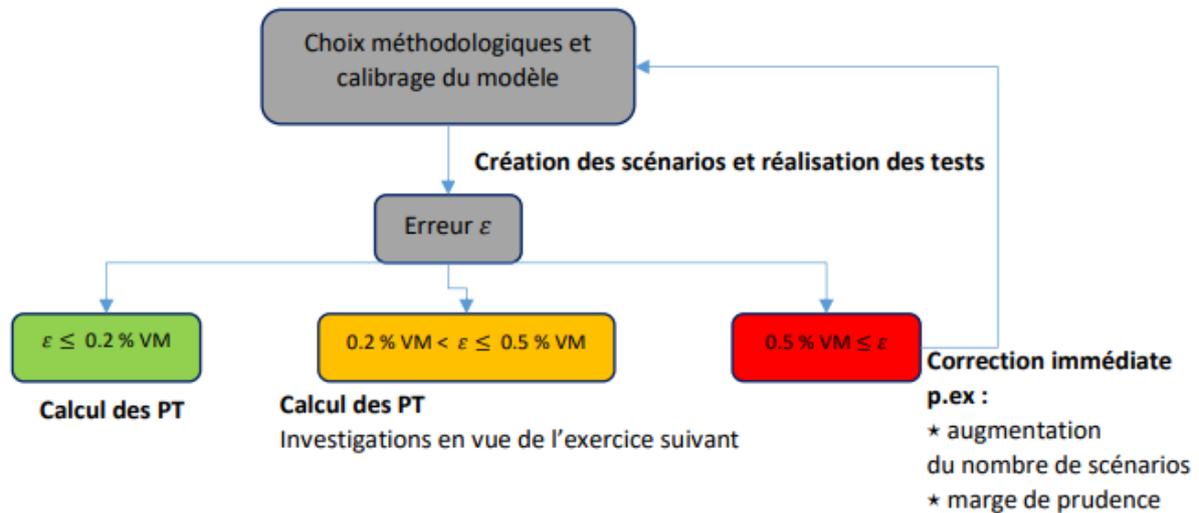


FIGURE 1.13 : Gouvernance attendue par l'ACPR sur les différents seuils Source : ACPR (2020)

De plus la Fonction Actuarielle va elle aussi exiger une rigueur dans la qualité des travaux effectués. Lors de la rédaction de son rapport le responsable de cette fonction va effectuer des recommandations avec des niveaux d'importances qui diffèrent selon le problème rencontré et devant être traité par les équipes directement liées au problème.

1.4.1 Convergence du BE

Afin de calculer le BE, les compagnies d'assurance utilisent une valorisation par Monte-Carlo. Le nombre de scénarios utilisé a donc un impact direct sur la précision du Best Estimate et son intervalle de confiance. En effet, afin d'obtenir une précision convenable un minimum de 1000 scénarios est conseillé (ACPR (2020)). La figure 1.14 nous montre l'évolution de l'intervalle de confiance en fonction du nombre de scénarios. On remarque l'importance d'un nombre minimal de 1000 scénarios car l'intervalle réduit de manière exponentielle entre 2 et 1200 scénarios puis celui-ci réduit de manière beaucoup plus lente pour converger vers une asymptote horizontale au bout de 10000 scénarios.

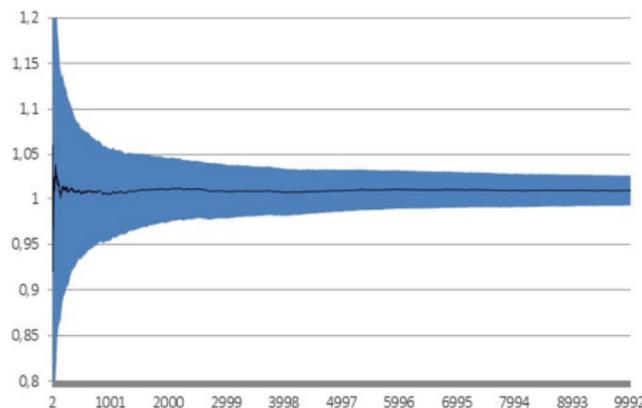


FIGURE 1.14 : Intervalle de confiance selon le nombre de scénarios Source : O. NTEUKAM (2012)

Revue des méthodes pour améliorer la convergence du Best Estimate

La grande majorité des compagnies d'assurance ont recours à des techniques permettant de calculer efficacement la valeur du Best Estimate. Dans cette section sont présentées différentes approches pour répondre à ce besoin, la première passe par l'amélioration de la convergence en utilisant des méthodes de réduction de variance et la seconde passe par des techniques d'approximation du Best Estimate.

Méthodes de réduction de variances

La majorité des compagnies d'assurances ont recours à des méthodes de réduction de variance courantes lors de valorisation Monte-Carlo afin d'améliorer la convergence du Best Estimate sans augmenter le nombre de scénarios. On peut retrouver l'ensemble de ces méthodes dans l'ouvrage de JÄCKEL (2002).

Variables antithétiques Une des méthodes les plus connues est la technique de variable antithétiques. En effet lors de l'utilisation de méthode de Monte Carlo, le principe consiste à générer des nombres aléatoires par paires, où le deuxième paquet est l'opposé du premier. Cette méthode permet un temps de simulation réduit, car uniquement, la moitié des nombres aléatoires est générée, cela permet notamment la réduction de la variance liée à l'estimateur de Monte-Carlo.

Utilisation de Quasi Aléatoire Une autre méthode de réduction de variance consiste à utiliser des générateurs quasi-aléatoires. Elle permet le passage à des simulations de quasi Monte Carlo qui permet une amélioration de la convergence dans certaines configurations. Cependant dans un contexte assurantiel ou l'horizon de projection et le pas de discrétisation varient selon les choix de la compagnie des problèmes liés à une dimension trop élevée peut rendre l'utilisation de quasi Monte Carlo moins efficace.

Les méthodes de réduction de variances sont des techniques couramment utilisées afin d'améliorer la convergence des modèles, cependant elles sont généralement couplés à d'autres méthodes ou entre elle afin d'améliorer la qualité des résultats. Il existe de plus des méthodes d'approximation du Best Estimate en passant par des proxy qui sont traités dans le paragraphe suivant.

Approximation du Best Estimate

Dans cette section, sont présentées les principales méthodes permettant une approche alternative au calcul complet du Best Estimate de la compagnie en fonction de ces hypothèses. Les assureurs ont donc développé des méthodes d'approximation du calcul de ces simulations dans simulations. les différentes méthodes présentés dans cette revue sont la méthode de *Curve Fitting*, la méthode de *Least Squared Monte Carlo* (LSMC) et des méthodes par machine learning.

Curve Fitting La méthode de Curve Fitting est une méthode dite par *proxy*, elle utilise une approche paramétrique. Le mémoire de MECHERGUI (2018) présente plus en détail la méthode et ses principaux résultats. Son principe consiste à calculer la valeur des éléments du bilan avec plusieurs scénarios de chocs sur les facteurs de risque du portefeuille, une fois cela réalisé une courbe est ajusté aux résultats obtenus avec l'utilisation d'une fonction d'interpolation. Cette courbe permet ensuite d'étendre les résultats à l'ensemble de la plage testée. On peut résumer les étapes d'implémentation de cette méthode de la manière suivante : on calcule le Best Estimate pour N simulations primaires, on réalise une interpolation des résultats, suite à cela, on dispose d'une fonction permettant de retrouver de manière rapide une estimation du Best Estimate en fonction des facteurs de risque. La figure 1.15 représente ces étapes.

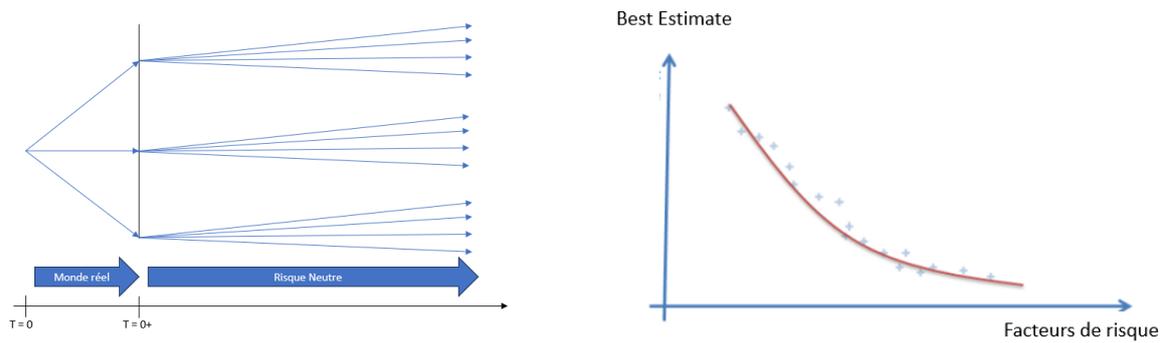


FIGURE 1.15 : Méthode de Curve Fitting

Les principales limitations de cette approche sont le nombre de facteurs de risque, si celui-ci est trop élevé un nombre de simulation élevé reste nécessaire. Une seconde limite à cette approximation est l'estimation d'une fonction paramétrique pouvant avoir des écart significatifs avec la distribution réelle.

LSMC Cette méthode est également dite de *proxy*, on peut retrouver une revue plus détaillée sur le mémoire de BOUCHARD (2017), elle repose sur un principe de régression via la méthode des moindres carrés. L'idée de cette méthode est de reproduire le comportement du Best Estimate en prenant tous les facteurs de risque ciblé par la compagnie. Contrairement à l'approche de Curve Fitting, l'assureur va dans ce cas effectuer un grand nombre de simulations primaires en univers monde réel, mais un nombre très restreint de simulations secondaires. Une interpolation des résultats est ensuite effectuée pour reconstruire une fonction permettant de trouver de manière rapide une approximation du Best Estimate. La figure 1.16 représente cette méthode.

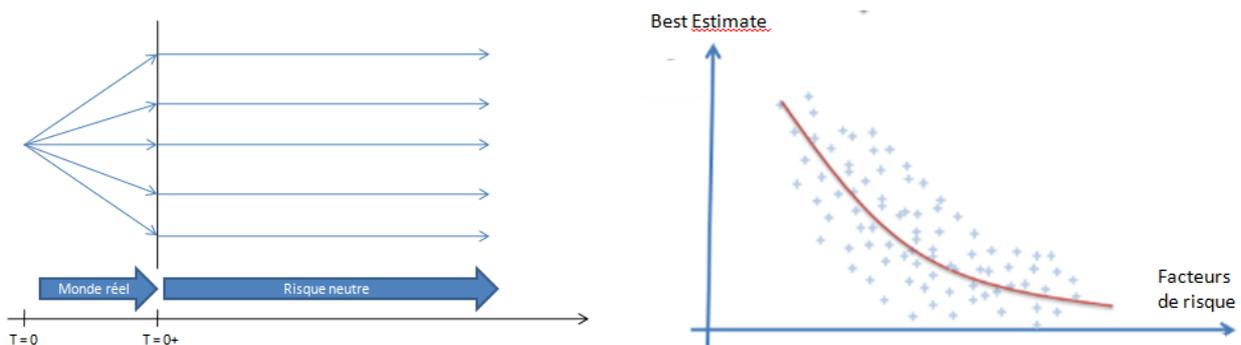


FIGURE 1.16 : Méthode de LSMC

Approche par méthode de Machine Learning Une autre méthode d'approximation passe par des méthodes de machine learning, on peut se référer au mémoire de CERISIER (2021) pour plus de détails sur les algorithmes utilisées et les principaux résultats. La stratégie d'apprentissage par machine learning se fractionne en différentes étapes. Il faut tout d'abord sélectionner les variables explicatives qui selon la compagnie ont un bon pouvoir prédictif sur la valeur du Best Estimate ainsi que leurs plages de variation, il faut ensuite créer une base de données en faisant varier les input du moteur

ALM selon les plages définies pour récupérer les valeurs du Best Estimate. Une phase d'exploration statistique est ensuite menée pour vérifier la corrélation des variables ainsi que l'ajout de variable potentiellement pertinente à l'étude. La dernière phase est l'apprentissage à l'aide de méthode de machine learning. Cette méthode repose donc sur la qualité des données et des variables explicatives choisies par l'entreprise qui permette de créer une base d'apprentissage pour le modèle.

Performances et Limitations

Les méthodes de réductions de variance présentées sont des moyens efficaces pour améliorer la convergence des simulations Monte-Carlo. En réduisant la variance de l'estimateur, elles permettent une convergence plus rapide vers la valeur du Best Estimate. Leur simplicité d'implémentation en fait des outils précieux pour les compagnies d'assurances, cependant leur efficacité reste limitée dans des contextes très complexes. De plus malgré la réduction de la variance, elles ne garantissent pas une amélioration significative en termes de temps de calcul. L'efficacité peut aussi dépendre de la nature du modèle de la compagnie. D'autre part, les méthodes d'approximations du Best Estimate offrent une alternative lorsque le calcul complet est trop coûteux en temps de calcul. En revanche, la qualité des résultats dépend fortement de la qualité des données utilisées dans le processus d'approximation. De plus, ces approximations sont plus simples que le calcul complet ce qui peut mener à une capture incomplète de l'ensemble des risques de la compagnie.

1.4.2 Fuite de modèle

On appelle écart de convergence ou "fuite de modèle" une perte ou une création de valeur non désirée au sein d'un portefeuille. Il y a une fuite lorsque la valeur initiale de marché des actifs est différente de l'espérance des flux de trésorerie actualisés.

$$EC = VM_0 - BE - VIF. \quad (1.6)$$

VM_0 : Valeur de Marché initiale des actifs

BE : Best Estimate

VIF : Value in Force

La Value In Force est un indicateur financier correspondant à la valeur actuelle des profits futurs du portefeuille d'une compagnie d'assurance en corrigeant les charges d'impôts et le coût du capital immobilisé. Mathématiquement la VIF est calculé de la manière décrite en (1.7)

$$VIF = PVFP - TVOG - FCRC - CCN \quad (1.7)$$

PVPF correspond à la projection des marges futures actualisées du scénario central ;

TVOG est le coût des options et garanties financières ;

FCRC est le coût de friction pour les actionnaires liés à l'immobilisation du capital ;

CCN est le coût des risques résiduels

Cet écart est un premier contrôle sur la qualité des résultats de la compagnie permettant de vérifier la précision du modèle utilisé. Sa valeur théorique dans un modèle de projection déterministe en univers risque neutre, est nulle. En revanche dans un modèle stochastique où le nombre de scénarios est fini, l'écart de convergence se réduit lorsque l'on augmente le nombre de scénarios. Lorsqu'il existe un écart incompressible cela résulte d'erreurs dans le modèle. Les principales sources d'erreurs sont liées à une mauvaise modélisation des flux à l'intérieur du modèle ALM, à des erreurs dans les formules utilisées, à des erreurs méthodologiques dans la mise en place du calcul et à des approximations s'accumulant lors de l'exécutions du modèle pouvant amener un écart conséquent.

Allocation de l'Écart de Convergence

L'écart de convergence est positif lorsque l'on se trouve dans le cas (1.8)

$$VM_0 > BE + VIF. \quad (1.8)$$



FIGURE 1.17 : Bilan Simplifié pour représenter un EC

Dans ce cas nous observons qu'il reste une part de la valeur de marché initiale à l'assureur ce qui veut dire qu'il n'a pas distribué toute sa richesse entre les assurés et les assureurs. Le modèle utilisé perd donc de la richesse lorsque l'on projette les flux sur un horizon.

L'écart de convergence est négatif lorsque l'on se trouve dans le cas (1.9)

$$VM_0 < BE + VIF, \quad (1.9)$$

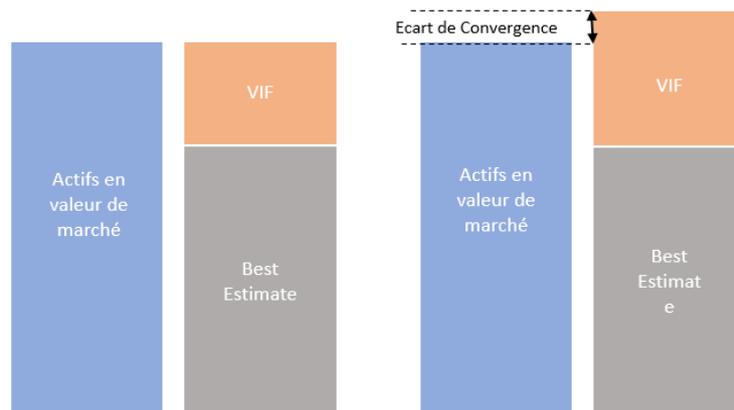


FIGURE 1.18 : Bilan Simplifié pour représenter un EC

Dans ce cas l'assureur a distribué plus de richesse que disponible, ce modèle crée donc de la richesse lors de la projection.

L'ACPR (2020) a défini une manière prudente d'allouer cet écart pour les compagnies d'assurances. En effet, il souhaite que les compagnies allouent cet écart au Best Estimate si l'écart est positif et aux fonds propres si celui-ci est négatif. De cette manière le Best Estimate ne peut pas diminuer et permet donc une approche prudente de ces fuites de modèles.

1.4.3 Enjeux sur la qualité du BE

Comme énoncé précédemment une des missions de la fonction actuarielle est le contrôle des provisions techniques et donc de l'intervalle de confiance du Best Estimate. Or la revue de l'ACPR (2020) indique "À titre indicatif, une incertitude à 95 % inférieure à 0,2 % du BE correspond à une pratique de marché généralement observée dont il est souhaitable de ne pas s'éloigner." Elle doit donc vérifier la qualité des résultats calculés par l'entreprise comme le BE et émettre un avis sur les points non conforme dans son rapport. Elle permet donc un contrôle sur l'ensemble des travaux effectués par l'entreprise. Le contexte de remontée des taux rapide durant cette dernière année a entraîné une hausse de la volatilité ce qui a pu entraîner une hausse des écarts de convergence et de l'incertitude sur le BE dans de nombreuses compagnies. En effet, la majorité des entreprises possédaient des modèles permettant l'obtention de résultats précis. Cependant le changement brusque de contexte a pu influencer sur le bon fonctionnement des méthodologies employées et donc amener à un dépassement des seuils préconisés par l'ACPR. Dans le cadre de la rédaction du RSR ainsi que de l'ORSA il est donc important pour les entreprises d'avoir des valeurs en cohérence avec le marché et en dessous des seuils recommandés par l'autorité de contrôle. De plus la fonction actuarielle a pu dans ce contexte observer de nouvelles incohérences, notamment sur l'incertitude du Best Estimate qui a fortement augmenté avec la remontée des taux. En effet, en conservant les mêmes modèles, la modification soudaine de la courbe des taux sans risque ainsi que la volatilité du marché a entraîné une hausse significative de cette incertitude. Additionnellement cette évolution du contexte économique peut accentuer certains biais méthodologiques qui jusqu'à présent restaient négligeable du à des taux très faibles. La hausse des taux entraîne donc la vérification des différents résultats publiés et l'adaptation pour certaines compagnies de méthodologie afin de répondre à l'ensemble des exigences réglementaires. L'étude porte sur les différents outils et leurs optimisation pour répondre à ce nouveau contexte.

Chapitre 2

Modélisation ALM et Calcul du Best Estimate

Le chapitre présente l'ensemble des outils utilisés au sein de la compagnie afin de calculer les indicateurs réglementaires. Il détaille les hypothèses et les différentes approches choisies afin de calculer le Best Estimate. Une partie importante de cette partie traite des méthodes utilisées au sein du Générateur de Scénarios Economiques afin de modéliser les actifs de Prepar VIE ainsi que les différentes approximations réalisées pouvant avoir un impact sur la qualité du Best Estimate.

2.1 Hypothèses de modélisation

2.1.1 Hypothèse générale sur le Générateur de Scénarios Économiques

Les hypothèses de modélisation sur le GSE sont les suivantes :

- Date de lancement du modèle : 31/12/2022
- Pas de projection annuel
- Horizon de projection : 50 ans

2.1.2 Hypothèses sur le passif

Le passif de l'assureur est divisé en trois cantons : le canton 529 représentant l'Actif général, le canton 467 représentant un canton contractuel, le canton PEUR/PERI représentant le canton réglementaire lié aux produits de retraite. Au sein du mémoire les contrats étudiés correspondent uniquement au canton 529. Les tableaux (2.1) présentent les principales caractéristiques du portefeuille.

PM (K€)	Canton 529		Canton 529
Euro	3 240 306	Age moyen	54
UC	1 156 776	Nombre contrat	203 594

TABLE 2.1 : Caractéristique du portefeuille de l'Actif Générale

La projection est réalisée avec des model-points de passif afin de réduire le temps de calcul, ceux-ci sont constitués en fonction de l'ancienneté des contrats (meilleure modélisation des rachats projetés) et des caractéristiques des produits (canton, gamme, taux de PB contractuel, TMG). A la fin de la projection, les provisions restantes sont liquidées et réparties entre l'assureur et les assurés. Cette

étape permet de solder la projection au dernier pas de calcul.

Le Best Estimate est calculé avec le modèle ALM de Prepar VIE développé sur la plate-forme de modélisation R^3S , à l'aide d'un générateur de scénarios économiques interne à la compagnie. Il est obtenu à l'aide de l'actualisation des cash flows de prestations et de frais avec la courbe de taux sans risque pour chacun des scénarios. Les cash flows pris en compte sont les suivants : décès, rachats, échéances, primes, arrérage de rentes, prélèvements sociaux et frais généraux.

Frais généraux et commissions

Les frais sont déterminés à partir des coûts unitaire moyens, pour le support en euros, ils sont ventilés entre les coûts d'administration, les coûts de gestion des rachats et les coûts de gestion des décès. Les commissions sont isolées des frais, ils font l'objet d'une projection en pourcentage des PM en fonction des ratios de commissions / PM constatées de l'exercice précédent.

Rachats

En effet selon les conditions du contrat, l'assuré a la possibilité de racheter de manière partielle ou totale son contrat. Dans la projection ALM deux types de rachats sont modélisés :

- les rachats structurels : la loi des rachats structurels se base sur un historique des rachats constatés.
- les rachats conjoncturels : la loi des rachats conjoncturels a pour but de représenter la réactivité des assurés aux taux servis et au contexte économique. Prepar VIE les modélise à l'aide d'une loi définie par les Orientations Nationales Complémentaires (ONC) publiées par l'ACPR (2013).

Arbitrages

Prepar VIE prend en compte les arbitrages en réalisant une étude statistique sur l'historique de donné, sur l'ensemble des cantons la moyenne des arbitrages observée entrant et sortant du support en euro se situe entre -1% et 1 %. L'hypothèse modélisée dans le modèle ALM est donc un taux d'arbitrage de 0%. Sur le support en euros les frais généraux sont calculés à partir des coûts unitaires moyens.

Politique de taux servis et taux cibles

Selon les règles contractuelles propre à chaque contrat et les dotations/reprise à la PPE définies en accord avec l'ASMB de Prepar VIE, l'ensemble des produits financiers est réparti entre les assureurs et les assurés à chaque fin d'exercice. Le taux garanti sur le support en Euros est de 0 % avant prélèvement des frais sur encours, de plus une garantie plancher en cas de décès est insérée pour tous les assurés âgés de moins de 70 ans à l'adhésion. Suite à la décision du Directoire en 2014, le taux de participation aux bénéfices de Prepar VIE est fixé après la clôture selon la garantie choisie. Deux références existent, correspondant à 60% du TME du dernier mois de l'exercice où à 65% de la moyenne des 2 derniers taux de rendement de l'actif. Le modèle ALM de la compagnie définit le taux cible, correspondant au taux souhaité par les assurés, à l'aide d'un modèle de régression linéaire. Le calcul du taux servi s'effectue en fonction du taux cible, IT les intérêts techniques, PB la participation au bénéfice, TS_n le taux servi en l'année n , TMG le taux minimum garanti et TC le taux cible. Le taux servi est calculé de la manière représenté en (2.2).

Configuration	Taux servi
$IT + PB \leq \min(TS_{n-1}, TC)$	TMG
$\min(TS_{n-1}, TC) < IT + PB \leq \min(TS_{n-1} + 0.5\%, \max(TS_{n-1}, TC))$	$IT + PB$
$\max(TS_{n-1}, \min(TS_{n-1} + 0.5\%, TC)) < IT + PB \leq \max(TS_{n-1} + 0.5\%, TC)$	$\max(TS_{n-1}, \min(TS_{n-1} + 0.5\%, TC))$
$IT + PB > \max(TS_{n-1} + 0.5\%, TC)$	$\min(TS_{n-1} + 0.5\%, TC)$

TABLE 2.2 : Calcul du taux servi dans le moteur ALM

Un sujet de notre mémoire est le contrôle de la fuite de modèle, celle-ci est calculée à chaque pas de temps par le modèle ALM, la valeur utilisée comme indicateur est celle du dernier pas de projection. Dans la suite de l'étude la formule de calcul de l'écart de convergence (2.1) correspond à l'écart relatif entre l'actif et le passif

$$EC = \frac{(BE + VIF)}{VM_0} - 1. \quad (2.1)$$

2.1.3 Hypothèses sur l'actif

Conformément à l'article 75 de la Directive Solvabilité II (PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2009)), Prepar VIE établit un bilan en normes prudentielles, dans lequel les actifs et les passifs sont valorisés en valeurs de marché. La valorisation totale de l'actif au 31/12/2022 est de 8 578,2 M€.

L'allocation, qui doit en permanence tenir compte des diverses contraintes assurantielles (d'adéquation de l'actif au passif, comptables, réglementaires, prudentielles, ...), implique de façon récurrente, le maintien d'une part prépondérante des actifs de taux dans le portefeuille, afin d'assurer à la fois stabilité du portefeuille et permanence du rendement. Une dynamisation modérée de l'actif est recherchée par une diversification des investissements en immobilier, actions et produits assimilés, afin d'offrir un surcroît de rémunération sur le moyen-long terme 2.1.

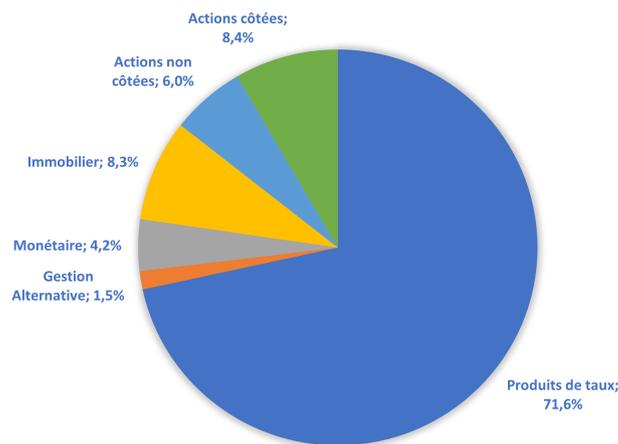


FIGURE 2.1 : Répartition de l'actif général à fin décembre 2022

La répartition des produits de taux par rating utilisée pour le calcul du moteur ALM est présentée en 2.2.

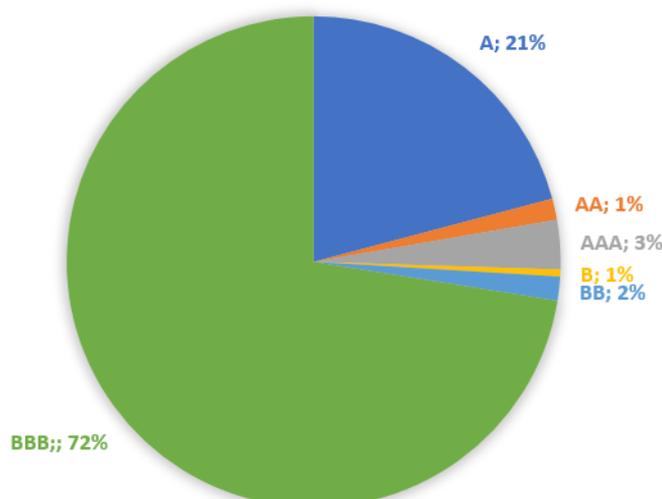


FIGURE 2.2 : Répartition des titres obligataires par Rating

De plus le contexte économique actuel a fait baisser la durée du portefeuille sur le Best Estimate du fond Euros. En effet la durée était supérieure à 6 ans en décembre 2021 et inférieure à 4 ans en décembre 2022.

2.1.4 Évolution des résultats de la compagnie

L'année 2022 est marquée par un changement significatif de contexte financier à travers la remontée des taux. De plus Prepar VIE a réalisé une année de collecte exceptionnelle s'établissant à +4,7 %. Au sein de ce mémoire nous portons notre attention sur le calcul des provisions techniques et plus spécifiquement du Best Estimate. Au 31 Décembre 2022 le montant total des provisions techniques publiées dans le SFCR est 7817,7 M€ réparti avec 7619,8 M€ de Best Estimate et 197,9 M€ de marge pour risque.

La valeur totale du Best Estimate au cours des 3 dernières années est présentée sur le tableau 2.3.

Année	Valeur du BE en M€
2020	7731.9
2021	8035.5
2022	7650.8

TABLE 2.3 : Évolution de la valeur du Best Estimate depuis 2020

On constate une diminution de 4.5% du Best Estimate sur l'année 2022, la remontée des taux ainsi que la collecte record en sont les deux principales causes. Par la suite, les travaux sont concentrés sur la valeur du Best Estimate du Fond Euro de l'actif général pour traiter des anomalies apparues durant l'année 2022. Le tableau 2.4 représente l'évolution des chiffres depuis 2020.

Année	2020	2021	2022
Participations aux bénéfices futurs (FDB)	8.7%	13%	20%
Valeur-temps des options et garanties (TVOG)	4.3%	3.2%	3.3%
Intervalle de confiance à 95%	0.4%	0.5%	1.0%
Fuite de Modèle	0.4%	0.3%	- 0.6%
Taux moyen servi dans les simulations	1.8%	2%	5%

TABLE 2.4 : Indicateurs sur le BE Fonds € (en % du BE)

Une première remarque est la nette évolution du taux moyen servi en 2022 qui est liée au niveau des taux à fin 2022, ce résultat induit aussi une hausse de la participation aux bénéfices. Cette hausse est censée impacter à la baisse la valeur des options et garanties, or on peut observer une légère hausse de son pourcentage sur l'année 2022 ce qui est contradictoire avec le contexte économique. De plus la trajectoire de la courbe des taux sans risque ayant augmenté à des faibles maturités, alors le nombre de trajectoires ayant des taux négatifs a diminué au cours de l'année 2022 ce qui est aussi censé provoquer une baisse de la TVOG.

Cette anomalie est liée à la hausse importante de l'intervalle de confiance et de la fuite de modèle générant une forte incertitude sur le montant du Best Estimate.

Lors de la production des chiffres pour l'année 2022, les principaux indicateurs de qualité du calcul du Best Estimate se retrouvaient au dessus des seuils réglementaires et nécessitaient donc des travaux pour obtenir des résultats satisfaisants pour l'ACPR et pour la fonction actuarielle. Une première vérification est effectuée en augmentant le nombre de scénarios pour s'assurer de la validité du modèle et le fait que l'origine des écarts de modèle n'est pas lié à une erreur de modélisation des flux au sein de l'outil de projection ou à des erreurs dans les formules de calcul. Les graphiques suivants 2.3 représentent la qualité du Best Estimate en prenant 5 graines différentes afin d'avoir un meilleur aperçu de la tendance générale des résultats.

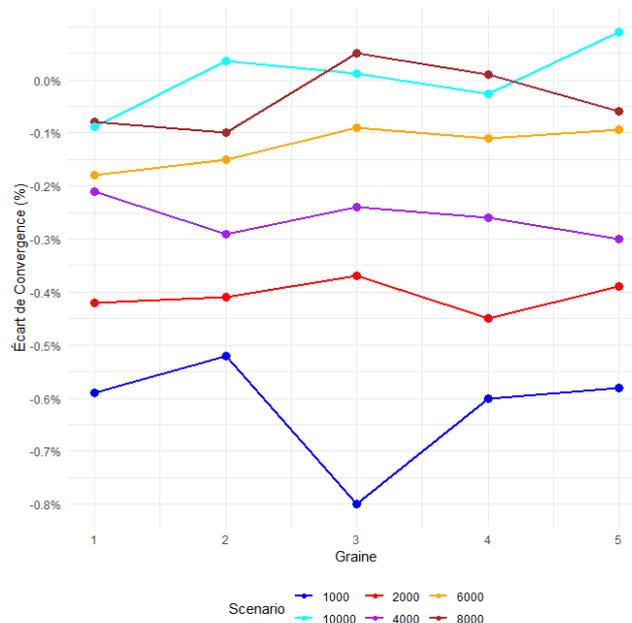


FIGURE 2.3 : Impact du nombre de scénarios sur la fuite de modèle

L'augmentation du nombre de scénarios permet une réduction significative de ces deux indicateurs, ce qui permet la validation de la modélisation stochastique. De plus pour un même nombre de scénarios il va être comparé la qualité du Best Estimate sur le portefeuille actuel en reprenant le contexte économique présent en Décembre 2021, soit la comparaison de la courbe des taux sans risque en 2021 et 2022 2.4.

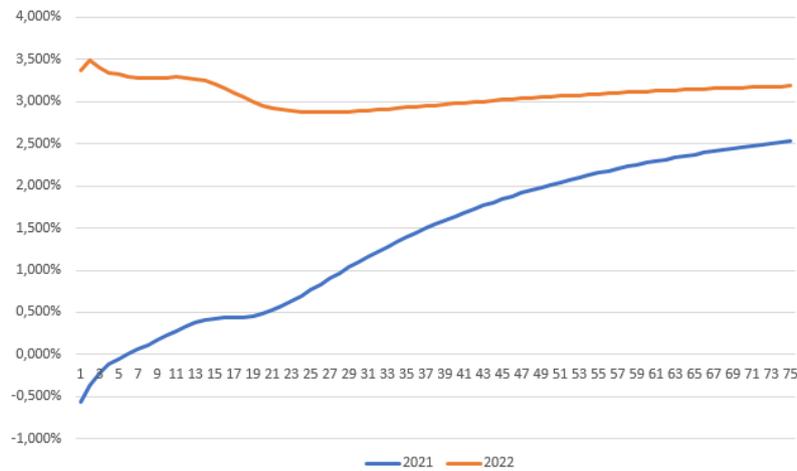
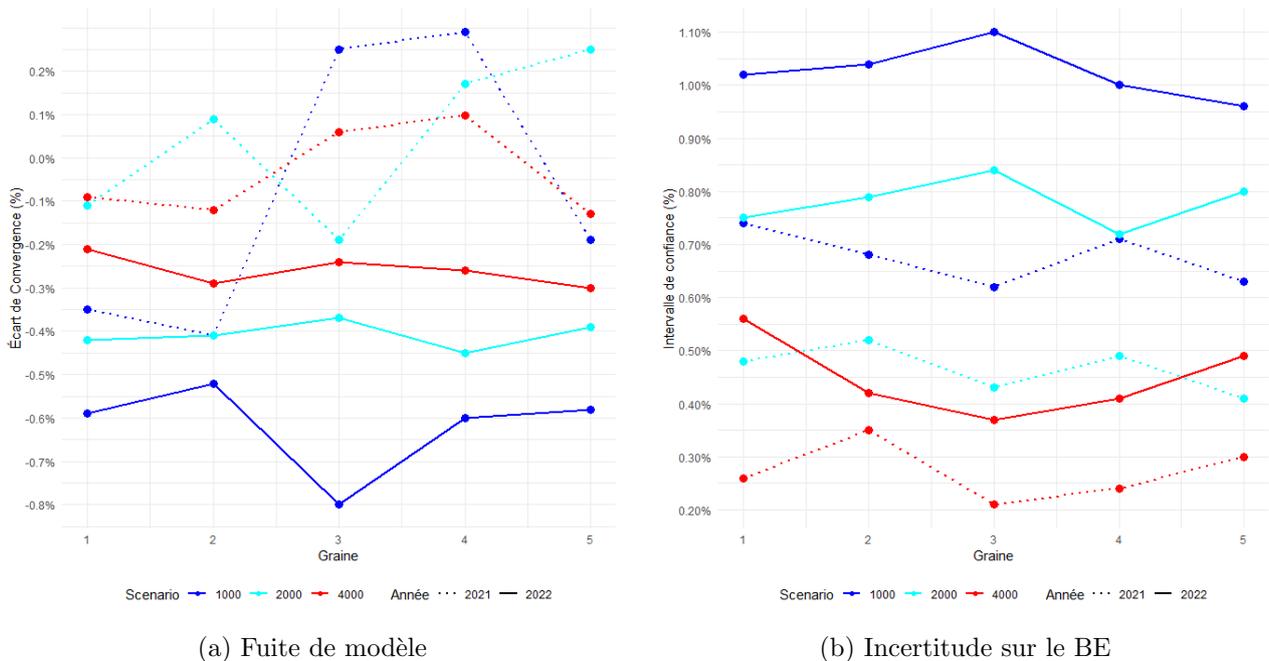


FIGURE 2.4 : Courbe des taux EIOPA en 2021 et 2022

Il est donc comparé pour 5 graines identiques l'écart de convergence ainsi que l'incertitude sur le Best Estimate en reprenant les taux à 2021 puis ceux à 2022. Les graphiques obtenus sont présentés en 2.5.



(a) Fuite de modèle

(b) Incertitude sur le BE

FIGURE 2.5 : Impact du contexte économique sur la qualité du BE

Les figures précédentes témoignent d'une détérioration de la qualité du Best Estimate suite à la remontée des taux, une cause est l'impact des approximations au sein des modèles. En effet en période

de taux bas, voir négatif, la présence d'approximation avait un impact moindre sur la qualité des résultats cependant l'augmentation des taux a une répercussion directe sur les approximations faites dans le modèle et donc sur la qualité du Best Estimate pour un nombre de scénarios équivalent. Le contexte économique a donc eu un impact sur la convergence du modèle utilisé au sein de Prepar VIE. Cependant l'augmentation du nombre de scénarios permet de palier ce problème, or pour 1000 scénarios le temps de calcul d'un bilan complet s'élève à 300 minutes. Dans l'objectif de la production des rapports narratifs il n'est donc pas possible d'augmenter le nombre de scénarios car cela demanderait un temps de calcul trop élevé. La suite des travaux a donc pour but de comprendre quels sont les facteurs ayant été impactés par la remontée des taux ainsi que les différents changements méthodologiques permettant d'améliorer la convergence du modèle. Il sera donc intéressant de traiter d'une problématique de précision sur le Best Estimate couplé à des exigences en terme de complexité de calcul.

2.2 Modèle de Taux et Indices

Au sein de Prepar VIE le modèle est développé en interne, le modèle retenu est le G2++ étudié par BRIGO et MERCURIO (2006). Pour une revue plus complète du modèle et des démonstrations mathématiques vous pouvez lire le mémoire de HECART (2016).

Le GSE de Prepar VIE est basé sur quatre facteurs aléatoires :

- le taux d'intérêt r ,
- le niveau des actions S ,
- le niveau de l'immobilier I ,
- le niveau de la gestion alternative G .

Dans l'univers risque neutre, ces quatre facteurs suivront le processus de dimension cinq régi par cinq browniens standards W_1, W_2, W_S, W_I, W_G tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} r(t) = x(t) + y(t) + \phi(t) \\ dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t) \\ dy(t) = -bx(t)dt + \eta dW_2(t) \\ dS(t) = r(t)S(t)dt + \sigma_S S(t)dW_S \\ dG(t) = r(t)G(t)dt + \sigma_G G(t)dW_G \\ dI(t) = (r(t) - c)I(t)dt + \sigma_I I(t)dW_I \end{array} \right. \quad (2.2)$$

avec :

- W_1 et W_2 de corrélation ρ
- W_1 et W_S de corrélation ρ_1
- W_2 et W_S de corrélation ρ_2
- c un dividende pour l'immobilier

2.2.1 Modèle de Taux court

Le modèle Gaussien à Deux Facteurs est un modèle de taux d'intérêt dans lequel le processus instantané du taux court est donné par la somme de deux facteurs gaussiens corrélés plus une fonction déterministe qui est correctement choisie de manière à s'adapter exactement à la structure actuelle

des facteurs d'actualisation. Le modèle est assez pratique car il possède des formules fermées pour les zéros-coupons, des caps et des floors. De plus ce modèle permet la génération de taux négatifs, ce qui était essentiel jusqu'à ces dernières années. Une autre conséquence de la présence de deux facteurs est que la fluctuation des taux de marché est représentée de manière plus réaliste. Un désavantage de ce modèle est le fait que les facteurs n'ont pas de représentation économique claire, ce qui les rend plus difficilement interprétables.

On se place dans l'univers risque neutre, le taux court $r(t)$ peut s'écrire de la manière décrite en (2.3)

$$r(t) = x(t) + y(t) + \phi(t), r(0) = r_0, \quad (2.3)$$

avec x et y des processus d'Ornstein-Uhlenbeck tel que (2.4).

$$\begin{cases} dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1(t), & x(0) = 0, \\ dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2(t), & y(0) = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

Les mouvements browniens W_1 et W_2 sont liés par la relation (2.5).

$$\begin{cases} \forall t, dW_1(t)dW_2(t) = \rho dt, \\ \forall t \neq s, dW_1(t)dW_2(s) = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

Avec :

- x et y jouant des rôles symétriques dans la dynamique de r
- ϕ une fonction déterministe tel que $\phi(0) = r_0$ permettant la reproduction exacte des zéros-coupons initiales
- a, b des constantes positives représentant les coefficients de retour à la moyenne de x et y
- σ, η des constantes positives représentant respectivement la volatilité de x et y
- $\rho \in [-1, 1]$ la corrélation instantanée des deux browniens

Diffusion du taux court

Dans le cadre de la diffusion du taux court, l'intégration des équations 2.4 sous la mesure de probabilité risque-neutre Q , implique $\forall s < t$ (2.6).

$$r(t) = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \eta \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) + \phi(t), \quad (2.6)$$

Soit $(F_t)_{t \geq 0}$ la filtration du couple $(x(t), y(t))$. Pour $s < t$ conditionnellement à F_s , $r(t)$ est normalement distribué, d'espérance (2.7) et de variance (2.8).

$$E[r(t)|F_s] = x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \phi(t), \quad (2.7)$$

$$V[r(t)|F_s] = \frac{\sigma^2}{2a}[1 - e^{-2a(t-s)}] + \frac{\eta^2}{2b}[1 - e^{-2b(t-s)}] + 2\rho \frac{\sigma\eta}{a+b}[1 - e^{-(a+b)(t-s)}], \quad (2.8)$$

On obtient après développement les relations de récurrence permettant la discrétisation exacte des trajectoires avec un pas annuel sous la forme (2.9)

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k)e^{-at} + \epsilon_1(k)\sqrt{\frac{\sigma^2(1-e^{-2a})}{2a}}, \\ y(k+1) = y(k)e^{-bt} + (\epsilon_1(k)\rho + \epsilon(k)\sqrt{1-\rho^2})\sqrt{\frac{\eta^2(1-e^{-2b})}{2b}}, \end{cases} \quad (2.9)$$

ou $\epsilon_1(k)$ et $\epsilon(k)$ sont indépendants et suivent des lois normales centrées réduites.

Finalement en repartant de (2.3) on peut simuler le taux court avec (2.10).

$$\begin{aligned} r(k+1) = & x(k)e^{-a} + y(k)e^{-b} + \epsilon_1(k)\sqrt{\frac{\sigma^2(1-e^{-2a})}{2a}} + (\epsilon_1(k)\rho + \epsilon(k)\sqrt{1-\rho^2})\sqrt{\frac{\eta^2(1-e^{-2b})}{2b}} + \\ & - f(0, k+1) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-a(k+1)})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{-b(k+1)})^2 \\ & + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} (1 - e^{-a(k+1)}) (1 - e^{-b(k+1)}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

Avec $f(0, k+1) = \frac{\partial \ln P_M(0, k+1)}{\partial t}$ le taux forward.

Prix d'un zéro-coupon

Le modèle gaussien à deux facteurs possède une formule fermée pour la valorisation des obligations zéros-coupons. On note $P(t, T)$ le prix au temps t d'une obligation zéro-coupon de maturité T .

$$P(t, T) = E^Q[\exp(-\int_t^T r_s ds) | \mathcal{F}_t], \quad (2.11)$$

La loi de r étant connue, après calcul de l'espérance (BRIGO et MERCURIO (2006)), il vient la formule du prix d'une obligation zéro-coupon (2.12).

$$P(t, T) = \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} \exp(A(t, T)), \quad (2.12)$$

Avec :

$P^M(t, T)$: le prix de marché à t et de maturité T

$$\begin{aligned} A(t, T) = & \frac{1}{2}[V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)] - \frac{1 - \exp(-a(T-t))}{a}x(t) - \frac{1 - \exp(-b(T-t))}{b}y(t) \\ V(t, T) = & \frac{\sigma^2}{a^2}[T-t + \frac{2}{a}\exp(-a(T-t)) - \frac{1}{2a}\exp(-2a(T-t)) - \frac{3}{2a}] \\ & + \frac{\eta^2}{b^2}[T-t + \frac{2}{b}\exp(-b(T-t)) - \frac{1}{2b}\exp(-2b(T-t)) - \frac{3}{2b}] \\ & + 2\rho\frac{\sigma\eta}{ab}[T-t + \frac{\exp(-a(T-t)) - 1}{a} - \frac{\exp(-b(T-t)) - 1}{b} - \frac{\exp(-(a+b)(T-t)) - 1}{a+b}], \end{aligned}$$

Prix d'une swaption

Le modèle peut nécessiter l'utilisation de swaption, aucune formule fermée n'existe pour en calculer le prix. BRIGO et MERCURIO (2006) établit la formule de calcul du prix d'une swaption. Soit une swaption européenne de taux de strike X , de maturité T et de nominal N , donnant le droit au détenteur d'entrer à l'instant $t_0 = T$ dans un swap de taux d'intérêt avec des dates de paiement $\mathcal{T} = \{t_1, \dots, t_n\}$, $t_1 > T$, où il paie (reçoit) au taux fixe X et reçoit (paie) le Libor fixé à terme échu.

On désigne par τ_i la fraction de l'année t_{i-1} à t_i , $i = 1, \dots, n$ et on pose $c_i := X\tau_i$ pour $i = 1, \dots, n$ et $c_n := 1 + X\tau_n$.

Le prix sans arbitrage au temps $t = 0$ de la swaption européenne ci-dessus est donnée par la formule suivante (2.13).

$$\mathbf{PS}^{G2++}(0, T, \mathcal{T}, N, X, \omega) = N\omega P(0, T) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2}}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \left[\Phi(-\omega h_1(x)) - \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) e^{\kappa_i(x)} \Phi(-\omega h_2(x)) \right] dx, \quad (2.13)$$

$\omega = 1$ ($\omega = -1$) pour une swaption payeuse (receveuse),

$$\begin{aligned} h_1(x) &:= \frac{\bar{y} - \mu_y}{\sigma_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}} - \frac{\rho_{xy}(x - \mu_x)}{\sigma_x \sqrt{1 - \rho_{xy}^2}} \\ h_2(x) &:= h_1(x) + B(b, T, t_i) \sigma_y \sqrt{1 - \rho_{xy}^2} \\ \lambda_i(x) &:= c_i A(T, t_i) e^{-B(a, T, t_i)x} \\ \kappa_i(x) &:= -B(b, T, t_i) \left[\mu_y - \frac{1}{2} (1 - \rho_{xy}^2) \sigma_y^2 B(b, T, t_i) + \rho_{xy} \sigma_y \frac{x - \mu_x}{\sigma_x} \right], \end{aligned}$$

$\bar{y} = \bar{y}(x)$ est l'unique solution de l'équation suivante

$$\sum_{i=1}^n c_i A(T, t_i) e^{-B(a, T, t_i)x - B(b, T, t_i)\bar{y}} = 1,$$

et

$$\begin{aligned} \mu_x &:= - \left(\frac{\sigma^2}{a^2} + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} \right) [1 - e^{-aT\alpha}] + \frac{\sigma^2}{2a^2} [1 - e^{-2aT\alpha}] + \frac{\rho\sigma\eta}{b(a+b)} [1 - e^{-(a+b)T\alpha}], \\ \mu_y &:= - \left(\frac{\eta^2}{b^2} + \rho \frac{\sigma\eta}{ab} \right) [1 - e^{-bT\alpha}] + \frac{\eta^2}{2b^2} [1 - e^{-2bT\alpha}] + \frac{\rho\sigma\eta}{a(a+b)} [1 - e^{-(a+b)T\alpha}], \\ \sigma_x &:= \sigma \sqrt{\frac{1 - e^{-2aT}}{2a}}, \\ \sigma_y &:= \eta \sqrt{\frac{1 - e^{-2bT}}{2b}}, \\ \rho_{xy} &:= \frac{\rho\sigma\eta}{(a+b)\sigma_x\sigma_y} [1 - e^{-(a+b)T}]. \end{aligned}$$

Le calcul du prix d'une swaption peut notamment être nécessaire dans le calibrage du modèle s'il est choisi d'utiliser cet actif. Afin de réaliser ce calcul il est donc nécessaire de passer par des méthodes d'intégrations numériques ou par des algorithmes permettant la résolution d'équations non-linéaires.

2.2.2 Modèle Action

Le niveau des actions S_t est modélisé à l'aide du modèle de BLACK et SCHOLES (1973), c'est une généralisation du modèle de Black-Scholes avec un taux d'intérêt aléatoire qui est dans notre cas le modèle G2++. Le processus de diffusion est donné par l'équation (2.14)

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r(t)dt + \sigma_S dW_S(t). \quad (2.14)$$

Or comme précisé dans l'équation (2.2) il existe une corrélation entre les taux et les actions tel que $\rho_1 \in [-1, 1]$ et $\rho_2 \in [-1, 1]$.

Afin d'obtenir une expression du processus $(S(t))_t$, une étape nécessaire est un changement de variable tel que $X(t) = \ln(S(t))$ puis en appliquant ensuite la formule de Ito on obtient (2.15).

$$dX(t) = (r(t) - \frac{\sigma_S^2}{2})dt + \sigma_S dW_S(t), \quad (2.15)$$

Ce qui nous permet d'en déduire (2.16).

$$X(t) = X(0) + \int_0^t r(u) du - \frac{\sigma_S^2}{2}t + \sigma_S W_S(t), \quad (2.16)$$

En repassant à $S(t)$

$$S(t) = S(0)e^{\int_0^t r(u) du - \frac{\sigma_S^2}{2}t + \sigma_S W_S(t)}, \quad (2.17)$$

Afin d'implémenter une formule de récurrence, on approxime le taux court par le taux zéro coupon 1 an $R(t, t+1)$. On peut en déduire les équations de diffusions des indices dans le Générateur de Scénarios Economiques, la dynamique du modèle action (2.18) suivant un modèle de Black Scholes Merton sans dividende. Au sein du modèle l'indice action est calibrée sur un call à la monnaie avec comme sous-jacent l'EuroStoxx 50.

$$S(t+1) = S(t)e^{R(t,t+1) - \frac{\sigma_S^2}{2} + \sigma_S(\rho_2 \epsilon_1(t) + \sqrt{1-\rho_2^2} \epsilon_S(t))}, \quad (2.18)$$

R : Le taux généré par le G2++
 σ_S : Volatilité Action
 ρ_2 : coefficient de corrélation action et taux
 ϵ_S : Loi Normale Centrée Réduite

La diffusion du modèle de Gestion Alternative (2.19) est issue du même modèle que l'indice Action, cependant la calibration est effectuée sur un ensemble de données historiques car il n'existe pas de produit dérivé assez liquide, profond et transparent sur les marchés. L'indice retenu est le HFRS Global Hedge Fund.

$$G(t+1) = G(t)e^{R(t,t+1) - \frac{\sigma_G^2}{2} + \sigma_G \epsilon_G(t)}, \quad (2.19)$$

R : Le taux généré par le G2++
 σ_G : Volatilité Gestion Alternative
 ϵ_G : Loi Normale Centrée Réduite

Afin de modéliser l'indice immobilier, le modèle utilisé est le modèle de Black Scholes Merton avec dividendes (2.20). L'équation comporte donc un terme supplémentaire (c correspondant au taux de loyer), pour les mêmes motifs que l'indice de gestion alternative l'indice est calibré sur des données historiques.

$$I(t+1) = I(t)e^{R(t,t+1) - c - \frac{\sigma_I^2}{2} + \sigma_I \epsilon_I(t)}, \quad (2.20)$$

R : Le taux généré par le G2++
 σ_I : Volatilité Immobilier
 ϵ_I : Loi Normale Centrée Réduite
 c : Loyer sur une période $[t, t+1]$

2.2.3 Calibration du G2++

La calibration a un impact sur l'ensemble du processus du calcul du Best Estimate ainsi que sur la qualité des résultats, il est donc primordial d'avoir une calibration cohérente et précise du modèle.

Les étapes de calibration

Dans un premier temps l'entreprise doit choisir des produits de taux à utiliser comme référence. Les deux principaux produits utilisés sont les caps et les swaptions car ce sont les instruments financiers les plus liquides sur le marché. Ces instruments sont cotés en volatilité, ceux-ci sont récupérés à la monnaie (ATM) sur le marché car ce sont les produits les plus liquides et que les prix associés représentent des quantités d'équilibre. Le panier choisi afin de calibrer le modèle doit essayer de reproduire au mieux l'optionalité du passif de l'entreprise afin d'avoir un calibrage réaliste.

Lors de la deuxième étape, la volatilité des caps ou swaptions est convertie en prix suite à l'utilisation de formules théoriques détaillées par la suite.

La dernière étape correspond à un problème de minimisation, une recherche sur les paramètres optimaux est effectuée en minimisant la distance quadratique entre les prix de marchés de l'actif et les prix théoriques du modèle du taux utilisé par la compagnie (2.21). Dans le cas du G2++ on cherche les 5 paramètres optimaux afin d'obtenir un minimum global du problème.

$$(a^*, b^*, \sigma^*, \eta^*, \rho^*) = \underset{a, b, \sigma, \eta, \rho}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^N w_i (P_{\text{marche}}(i) - P_{G2++, (a, b, \sigma, \eta, \rho)}(i))^2 \quad (2.21)$$

N : Le nombre de swaptions utilisé pour la calibration

$P_{\text{marche}}(i)$: Prix associé à la swaption i

$P_{G2++, (a, b, \sigma, \eta, \rho)}(i)$: Prix associé au modèle théorique du G2++ (2.13)

w_i : poids alloué à la swaption i . (Généralement $w_i = 1$)

Afin de résoudre ce problème d'optimisation, plusieurs méthodes sont possibles. Le but étant de trouver le minimum global. Les algorithmes d'optimisation utilisés afin d'observer la qualité des résultats sont détaillés en (2.2.3). Le modèle du G2++ nécessite certaines contraintes afin d'avoir un calibrage cohérent :

- les paramètres (a, b, σ, η) sont positifs
- sachant que x et y (2.3) jouent des rôles symétriques, les couples (a, σ) et (b, η) doivent avoir des bornes différentes
- $\rho \in [-1, 1]$

La validation de la calibration passe par le calcul de l'écart relatif entre le prix modèle du G2++ (2.13) et le prix de marché de l'instrument utilisé pour le calibrage (2.22).

$$\frac{|P_{\text{Swaption}_i}^{G2++} - P_{\text{Swaption}_i}^{\text{Marche}}|}{P_{\text{Swaption}_i}^{\text{Marche}}}, \quad (2.22)$$

Conversion des volatilités en prix

Comme décrit précédemment, les principaux instruments financiers utilisés pour la calibration du G2++ sont cotés en volatilité sur le marché. Or afin de résoudre le problème d'optimisation (2.21) il est nécessaire de convertir leurs valeurs en prix. Il existe deux principales conventions de calculs : la volatilité normale et la volatilité log-normale. Pour une démonstration plus complète des formules de conversion on se réfère au mémoire de POUTCOU (2022).

Volatilité Log-Normale La volatilité log-normale repose sur le modèle de Black, la date $t = 0$ correspond à la date de calibrage, le prix de la swaption est cherché à cette date. Afin de trouver le prix il est calculé sous la probabilité risque neutre l'espérance du *payoff* d'une swaption actualisée en date 0. Les caractéristiques de l'option sont les suivantes : nominal N , maturité T_α , ténor $T_\beta - T_\alpha$ et un calendrier de paiements $\mathcal{T} = T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$. La formule (2.23) est donnée par BRIGO et MERCURIO (2006)

$$PS^{\text{Black}} \left(0, \mathcal{T}, \tau, N, K, \sigma_{\text{Bl}}^{\alpha, \beta} \right) = N \text{Bl} \left(K, S_{\alpha, \beta}(0), \sigma_{\text{Bl}}^{\alpha, \beta} \sqrt{T_{i-1}}, 1 \right) \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(0, T_i), \quad (2.23)$$

Avec :

- $\sigma_{\text{Bl}}^{\alpha, \beta}$ représente la volatilité de Black cotée sur le marché
- $P(0, T_i)$ représente la courbe des taux EIOPA
- $\text{Bl}(K, F, v, w) = Fw\Phi(wd_1(K, F, v)) - Kw\Phi(wd_2(K, F, v))$
- $w = 1$ (resp. -1) pour une swaption payeuse (resp. receveuse)
- $d_1(K, F, v) = \frac{\ln(F/K) + v^2/2}{v}$
- $d_2(K, F, v) = \frac{\ln(F/K) - v^2/2}{v}$
- Φ la fonction de répartition d'une loi normale standard

Volatilité Normale La volatilité normale repose sur les travaux de BACHELIER (1900). Afin de trouver le prix il est calculé sous la probabilité risque neutre l'espérance du *payoff* d'une swaption actualisée en date 0. Les caractéristiques de l'option sont les suivantes : nominal N , maturité T_α , ténor $T_\beta - T_\alpha$ et un calendrier de paiements $\mathcal{T} = T_{\alpha+1}, \dots, T_\beta$. Il vient de BRIGO et MERCURIO (2006) (2.24).

$$ND(0, T_\alpha) (S_{\alpha, \beta}(T_\alpha) - K)^+ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P(T_\alpha, T_i). \quad (2.24)$$

Il vient après calcul de cette espérance 2.25.

$$PS^{\text{Bach}} \left(0, \mathcal{T}, \tau, N, K, \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha, \beta} \right) = N \text{Bachelier} \left(K, S_{\alpha, \beta}(0), \sigma_{\text{Bach}}^{\alpha, \beta} \sqrt{T_\alpha}, 1 \right) \sum_{\alpha+1}^{\beta} P(0, T_i) \tau_i, \quad (2.25)$$

Avec :

- $\sigma_{\text{Bach}}^{\alpha, \beta}$ représente la volatilité de bachelier cotée sur le marché

- $P(0, T_i)$ représente la courbe des taux EIOPA
- Bachelier(F, K, v, w) = $w(F - K)\Phi\left(w\frac{F-K}{v}\right) + v\phi\left(w\frac{F-K}{v}\right)$,
- $w = 1$ (resp. -1) pour une swaption payeuse (resp. receveuse)
- Φ la fonction de répartition de la loi normale standard
- ϕ la densité de la loi normale standard

Algorithme d'optimisation

Afin d'évaluer les paramètres optimaux du G2++ une optimisation numérique de la fonction d'erreur est nécessaire. Un algorithme d'optimisation est donc nécessaire, il existe de nombreux algorithmes différents permettant de minimiser la fonction. Le choix de l'algorithme est délicat car il a une influence sur l'ensemble du processus. Une étude sera menée sur l'impact de ces algorithmes sur la sensibilité des paramètres ainsi que sur les résultats du Best Estimate qui en découlent.

La première approche utilisée est une méthode d'Optimisation Quadratique Successive (*Sequential Quadratic Programming*) SQP permettant de résoudre des problèmes non-linéaires multidimensionnels avec contraintes, méthode par défaut de la fonction d'optimisation "fmincon" issue des travaux de WALTZ et ORBAN (2006). C'est un algorithme newtonien bénéficiant d'une vitesse de convergence locale rapide.

La seconde approche est une méthode de Nelder-Mead, cet algorithme est une adaptation de la méthode du simplexe pour les problèmes d'optimisations non-linéaires. La méthode est facile à mettre en place et à interpréter, de plus elle est assez rapide mais présente des inconvénients tels que la forte dépendance aux valeurs initiales qui peut causer des problèmes de convergence ou encore le fait que cette méthode s'applique à des problèmes sans borne. La fonction Matlab utilisé est "fminsearch" issue des travaux de LAGARIAS et WRIGHT (1998).

Des approches par méthode d'optimisation globale sont aussi traitées, la première est la méthode du recuit simulé, c'est une méthode empirique d'optimisation. Cette méthode est inspirée du processus de recuit utilisé en métallurgie. La fonction utilisé sur Matlab est "simulannealbnd" issue des travaux de DIXON et SZEGO (1978b).

La dernière approche testé est l'algorithme génétique, c'est un processus d'optimisation s'inspirant du processus d'évolution des êtres vivants. Cette approche utilise la méthode de sélection naturelle afin de l'appliquer à une population de solutions potentielles. La fonction Matlab utilisé est "ga" issue des travaux de DIXON et SZEGO (1978a).

2.2.4 Test de validité du modèle

L'ensemble des résultats est basé sur les données utilisées pour la production au 31 Décembre 2022. Il est tout d'abord important de vérifier que le GSE vérifie le calibrage et les conditions de martingalité et de market-consistency, primordial à la construction d'un modèle ALM.

Calibration du modèle initial Afin de réaliser la production, Prepar VIE a décidé d'utiliser un panier de swaption 2.6, car comme expliqué dans le BRIGO et MERCURIO (2006) les swaptions permettent une meilleure précision que les caps. En effet en utilisant des caps la calibration du paramètre ρ est souvent très proche de -1 , ce qui implique que le modèle Gaussien à Deux Facteurs tend à dégénérer en un processus à un facteur. En effet, le prix des caps ne dépend pas de la corrélation des taux forward afin qu'un modèle à un facteur impliquant des taux parfaitement corrélés, puissent s'adapter aux données de caps.

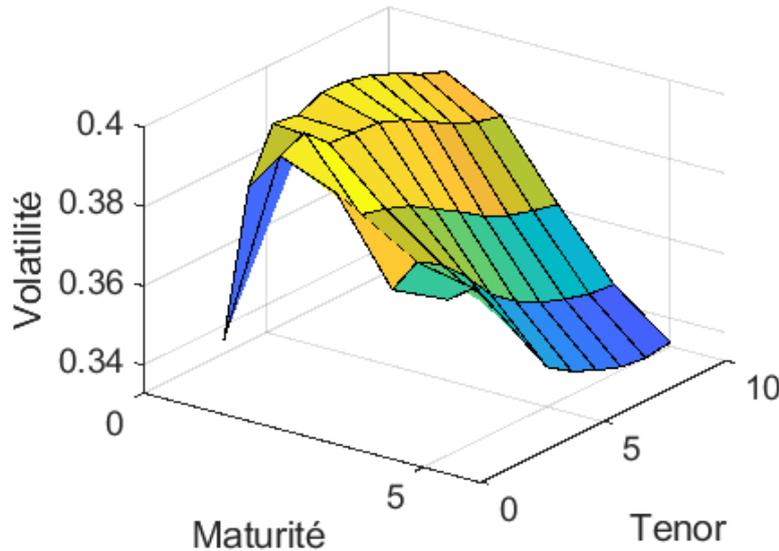


FIGURE 2.6 : Nappe de Volatilité du Panier de Swaption

Suite au choix de l'instrument financier, il faut calibrer les paramètres du modèle. Pour cela il faut tout d'abord choisir l'algorithme d'optimisation à utiliser ainsi que le type de volatilité. Le choix d'algorithme d'optimisation a été réalisé suite à des tests empiriques sur la précision de la calibration en fonction de l'algorithme utilisé. Afin d'obtenir un minimum global Prepar VIE a obtenu les meilleurs résultats en utilisant 100 fois la méthode de Nelder-Mead en changeant le point de départ à chaque itération afin de trouver un minimum global au problème. Le nombre de départs choisi est de 100. Le type de volatilité choisi par Prepar VIE est la volatilité de Black car elle permet l'obtention de résultats plus précis sur la calibration. Enfin sachant que la formule théorique du prix d'une swaption n'est pas une formule fermée, il est nécessaire de faire une approximation de la formule afin de calculer une valeur, la méthode de Newton Raphson est employée ici. Suite au calibrage on obtient les résultats suivants 2.7.

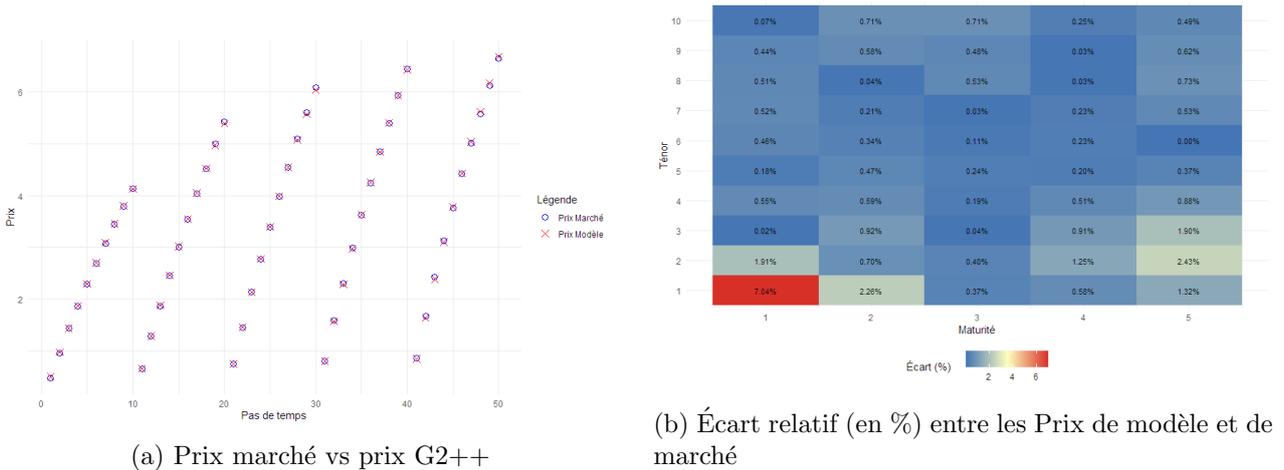


FIGURE 2.7 : Validation de la calibration

Il est important de noter que chacun des choix effectués précédemment a un impact sur le temps de calcul mais aussi sur la précision du Best Estimate. Il sera par la suite discuté de l'impact de ces paramètres sur la qualité du Best Estimate.

Calibration des corrélations du modèle Au sein du modèle de Prepar VIE la calibration des corrélations est réalisée de manière historique. Afin de calibrer la corrélation action taux, Prepar VIE se base sur l'Eurostoxx 50. Au 31 Décembre 2022 celle ci était de - 0,59. De plus la compagnie a choisi une corrélation nulle entre les indices actions, gestions alternatives et immobiliers. Les corrélations entre les aléas sont ensuite implémentées à l'aide de la relation de Cholesky.

Test de Martingalité Le but du test de martingalité est de vérifier que les scénarios générés sont bien risque-neutre. Une fois les zéros coupons générés, ils doivent vérifier la relation (2.26).

$$P(0, T) = E^Q[e^{-\int_0^T r_s ds}] = E^Q[P(u, T)e^{-\int_0^u r_s ds}], \quad (2.26)$$

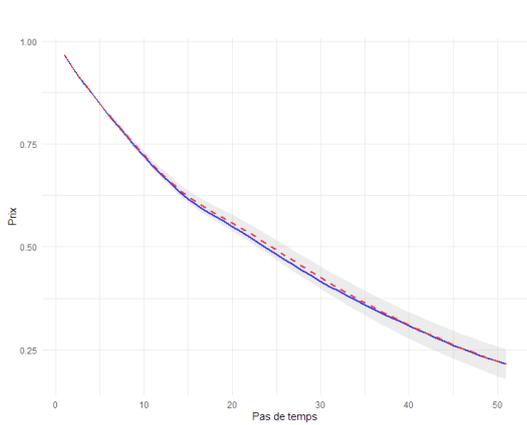
Le membre de droite est calculé suite à la génération des 1000 scénarios à l'aide de la méthode de Monte-Carlo. Afin de valider le modèle, on vérifie que les simulations valident le test statistique suivant (2.27).

$$\mathbb{P}\left(\bar{X} - \mu \geq \alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \quad (2.27)$$

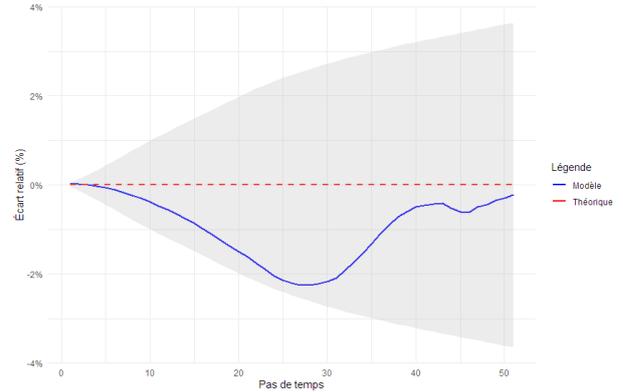
avec :

- \bar{X} l'espérance calculée à l'aide de Monte Carlo
- μ, σ la moyenne et la volatilité théorique
- n le nombre de scénarios
- α le quantile d'ordre 0.95 de la loi normale

Ci-dessous la représentation graphique du test 2.8.



(a) Prix marché et Monte-Carlo



(b) Ecart relatif (en %) entre les Prix Monte-Carlo et marché

FIGURE 2.8 : Test de Martingalité sur les Discount Factor

L'ensemble des valeurs simulées est dans l'intervalle de confiance, ce qui nous permet de vérifier la martingalité des facteurs d'actualisation générés par le G2++. De plus ce test est vérifié pour l'ensemble des 51*16 couples de dates de projection et maturités. Les tests de martingalité ont aussi été réalisés sur l'ensemble des indices générés dans le modèle, ci-dessous celui sur le modèle action 2.9.

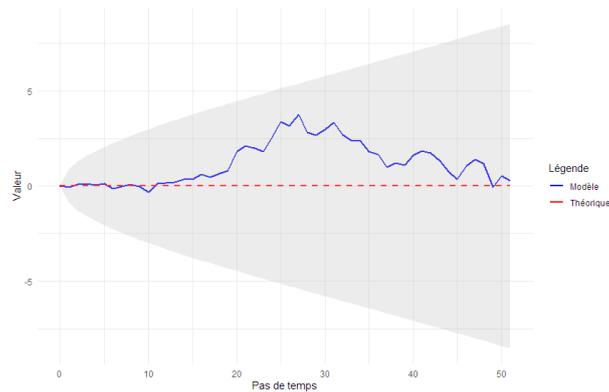


FIGURE 2.9 : Test de Martingalité sur l'indice Action

L'indice action vérifie bien la propriété de martingalité, les deux autres indices vérifient eux aussi cette propriété. On en conclut que le modèle de taux est bien martingale ce qui vérifie la condition de simulation sous la probabilité risque neutre.

Test de Market-Consistency Le test de *market-consistency* a pour but de comparer le prix des instruments financiers calculés empiriquement à l'aide du modèle et les prix de marchés. Afin de comparer le prix des swaptions en sortie du GSE les prix des swaptions peuvent être estimés par la méthode de Monte-Carlo avec les taux simulés. D'après BRIGO et MERCURIO (2006) le prix actualisé en 0 d'une swaption à la monnaie est donné par la formule (2.28),

$$PS_{\text{simu}}(0, \tau, \mathcal{T}, N, K^{ATM}) = ND_{\text{simu}}(0, T_\alpha) (S_{\alpha, \beta}(T_\alpha) - S_{\alpha, \beta}(0))^+ \sum_{i=\alpha+1}^{\beta} \tau_i P_{\text{simu}}(T_\alpha, T_i). \quad (2.28)$$

L'ensemble des tests de market-consistency est aussi validé dans le modèle, l'ensemble des test effectués ainsi que les résultats sont présentés dans le tableau 2.5.

Test	Type de Test	Résultat	Seuil	Validation du test
Calibration	Calcul Ecart Relatif	0.86 %	5 %	Validé
Martingalité	Test Statistique	Figure 2.9 et 2.8	2.27	Validé
Market-Consistency	Écart Relatif	6.63 %	10%	Validé

TABLE 2.5 : Tableau récapitulatif des tests sur le G2++

2.3 Modélisation du crédit

L'intégration du risque de crédit (BOTREL (2021)) au Générateur de Scénarios Economiques permet une représentation plus précise des risques de la société. Il est dans cette partie traité du modèle de crédit implémenté chez Prepar Vie.

Introduction au risque de crédit

Le risque de crédit est défini comme étant la perte potentielle d'un agent suite au non-respect des obligations contractuelles le liant à une contrepartie. Ce risque de part sa nature concerne les titres obligataires. Il peut se décomposer en trois sous-risques :

- Risque de variation des spreads : Risque d'une hausse du spread de crédit (écart entre le taux actuariel et le taux sans risque d'une obligation).
- Risque de défaut : Risque que l'émetteur d'une dette ou obligation ne puisse pas la rembourser totalement ou partiellement. Ce risque est en fonction de la notation donnée par les agences au titre 2.10
- Risque de changement de notation : Risque qu'une obligation change de notation et devienne plus risquée

	Standard &			
	MOODY'S	Poors	Fitch Ratings	
1	Aaa	AAA	AAA	SÉCURITÉ OPTIMALE
2	Aa1	AA+	AA+	QUALITÉ HAUTE OU BONNE
3	Aa2	AA	AA	
4	Aa3	AA-	AA-	
5	A1	A+	A+	QUALITÉ MOYENNE
6	A2	A	A	
7	A3	A-	A-	
8	Baa1	BBB+	BBB+	QUALITÉ MOYENNE INFÉRIEURE
9	Baa2	BBB	BBB	
10	Baa3	BBB-	BBB-	
11	Ba1	BB+	BB+	SPÉCULATIF
12	Ba2	BB	BB	
13	Ba3	BB-	BB-	
14	B1	B+	B+	HAUTEMENT SPÉCULATIF
15	B2	B	B	
16	B3	B-	B-	
17	Caa	CCC	CCC	RISQUE SUBSTANCIEL
18	Ca	CC	CC	EXTREMEMENT SPÉCULATIF
19	C	C	C	PEUT ETRE EN DÉFAUT
20		D	DDD	DÉFAUT
21			DD	
22			D	

FIGURE 2.10 : Signification du Rating d'un titre obligataire, Source : PANORABANQUES (2017)

Au sein de Prepar Vie les obligations sont réparties de la manière décrite en 2.2.

En univers risque neutre il existe trois grandes familles de modèles de diffusion des spread de crédit :

- Modèle de notation de crédit
- Modèle structurel
- Modèle à intensité

La suite traite des modèles à intensité et plus précisément du modèle de LONGSTAFF et al. (2005) (LMN) et des modèles à surplus d'intensité. Le principe de cette approche est d'établir un lien entre la probabilité de défaut et le spread du titre.

2.3.1 Présentation du LMN

Le modèle LMN permet la modélisation du risque de défaut pour chaque groupe d'émetteurs à l'aide d'un processus d'intensité de défaut. En revanche ce modèle n'explique pas les causes de défauts. Dans ce modèle l'hypothèse est faite que les taux d'intérêt et le processus d'intensité de défaut sont indépendants.

Il est supposé que pour le passage d'une date t à une date $t + \delta$, deux états sont possibles pour le groupe émetteur avec une certaine probabilité variant au cours du temps : la survie dans la même notation ou le défaut. Le défaut est considéré comme un événement pouvant survenir à n'importe quel instant. La figure 2.11 représente les changements d'états possibles d'une obligation à chaque pas de temps.

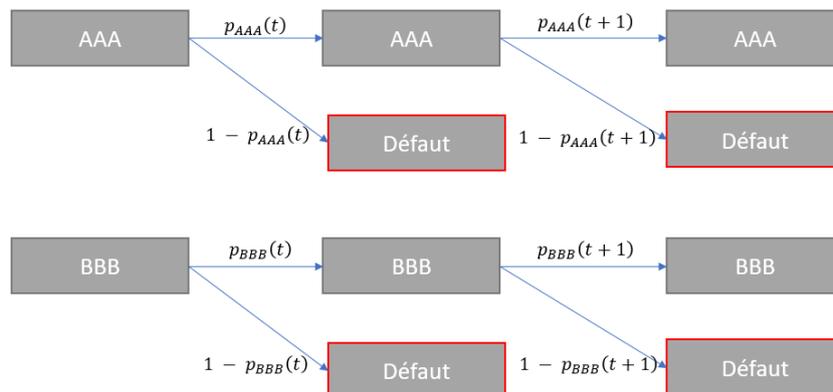


FIGURE 2.11 : Changement d'état dans le modèle LMN

Modèle d'intensité de défaut : CIR

Le modèle LMN modélise le processus d'intensité de défaut par un processus CIR, généralisant le modèle de Vasicek et introduisant un terme en racine carrée dans la dynamique permettant de produire des valeurs positives. On obtient une équation différentielle du modèle sous la mesure risque-neutre Q (2.29).

$$d\lambda(t) = k(\theta - \lambda(t))dt + \sigma\sqrt{\lambda(t)}dW(t), \quad (2.29)$$

Avec $\lambda(0) = \lambda_0$ et k, θ et σ des constantes positives.

La condition de Feller (2.30) doit être respectée afin que l'intensité de défaut reste strictement positive.

$$2k\theta > \sigma^2, \quad (2.30)$$

Probabilité de survie

La probabilité de survie (Λ) est la probabilité que le groupe d'émetteurs ne fasse pas défaut à la date T sachant qu'il est en vie à la date t (2.31). Dans la suite de l'étude τ représente l'instant de défaut de l'entreprise de référence.

$$\begin{aligned} \Lambda(t, T) &= Q(\tau > T | \tau > t | F_t) = E\left(\exp\left(-\int_t^T \lambda_u du\right) \mid F_t\right), \\ \Lambda(t, T) &= A(t, T)e^{-B(t, T)\lambda(t)}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

où

$$\begin{aligned} A(t, T) &= \left[\frac{2h \exp\left\{\frac{(k+h)(T-t)}{2}\right\}}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)} \right]^{\frac{2k\theta}{\sigma^2}} \\ B(t, T) &= \frac{2(\exp\{(T-t)h\} - 1)}{2h + (k+h)(\exp\{(T-t)h\} - 1)} \\ h &= \sqrt{k^2 + 2\sigma^2} \end{aligned}$$

Le prix d'une obligation risquée

Soit $P(t, T)$ le prix à l'instant t d'une obligation zéro coupon sans risque de maturité T et $P_{corp}(t, T)$ la valeur, vue à l'instant t , d'une obligation émise par une contrepartie et promettant le paiement d'une unité monétaire en cas de survie à l'instant T et $= 1 - LGD$ en cas de défaut avec *Loss Given Default* (LGD) représentant la perte en cas de défaut. La distribution de l'instant de défaut τ est caractérisée par la fonction de hasard et par un processus de loi exponentielle. Soit la valeur d'une obligation zéro-coupon risquée 2.32.

$$P_{corp}(t, T) = P(t, T)(\alpha + 1_{\tau > t} LGD \times Q(\tau > T | \tau > t | F_t)), \quad (2.32)$$

Il est possible d'en déduire la valeur d'une obligation zéro-coupon risquée avec recouvrement (2.33) grâce à l'équation 2.31.

$$P_{corp}(t, T) = P(t, T)(\alpha + 1_{\tau > t} LGD \times A(t, T)e^{-B(t, T)\lambda(t)}), \quad (2.33)$$

La diffusion des prix des obligations risquées est donc déduite des prix des obligations sans risque, de la diffusion des instants de défaut et de la diffusion de l'intensité de défaut. Il est aussi possible d'écrire le prix d'une obligation zéro-coupon risquée avec un recouvrement nul (ie $LGD = 1$) (2.34).

$$P_d(t, T) = P(t, T)1_{\tau > t} A(t, T)e^{-B(t, T)\lambda(t)}, \quad (2.34)$$

Il est supposé que les obligations d'un même groupe de rating possèdent les mêmes caractéristiques ainsi que les mêmes intensités de défaut mais des instants de défaut (τ_i) indépendants le prix moyen du zéro-coupon sur un groupe de N obligations s'écrit 2.35

$$P_{corp}^{mean}(t, T) = P(t, T) \left(\alpha + LGD A(t, T)e^{-B(t, T)\lambda(t)} \sum_i^N 1_{\tau_i > t} / N \right). \quad (2.35)$$

Avec N suffisamment grand il vient 2.36

$$\sum_i^N 1_{\tau_i > t} / N = E(1_{\tau > t} | F_t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_u du\right). \quad (2.36)$$

On peut remplacer « $1_{\tau > t}$ » par la fonction de hasard (2.37) dans (2.33) et (2.34) pour modéliser le défaut. On peut ensuite évaluer cette fonction à l'aide d'une intégration de Riemann.

$$H(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_u du\right), \quad (2.37)$$

On obtient donc le prix d'une obligation risquée avec recouvrement (2.38) et sans recouvrement (2.39).

$$P_{corp}(t, T) = P(t, T)(\alpha + \exp\left(-\int_0^t \lambda_u du\right) LGD) \times A(t, T) e^{-B(t, T)\lambda(t)}, \quad (2.38)$$

$$P_d(t, T) = P(t, T) \exp\left(-\int_0^t \lambda_u du\right) A(t, T) e^{-B(t, T)\lambda(t)}, \quad (2.39)$$

Le spread de crédit

Le spread observé en $t < \tau$ pour une maturité T de la contrepartie au taux sans risque composé observé en t pour la maturité T s'écrit 2.41.

$$S_{corp}(t, T) = -\frac{\ln(1 - LGD(1 - Q(\tau > T/\tau > t | F_t)))}{T - t}, \quad (2.40)$$

Donc d'après 2.31,

$$S_{corp}(t, T) = -\frac{\ln(1 - LGD(1 - A(t, T)e^{-B(t, T)\lambda(t)}))}{T - t}, \quad (2.41)$$

2.3.2 Le modèle LMN en cascade

La section précédente traite du cas où les notations sont modélisées de manière indépendante, cependant cette représentation peut mener à une incohérence dans la génération de certains scénarios. Le modèle LMN en cascade permet de s'assurer que l'intensité de défaut d'une notation plus risquée est supérieure à la valeur de l'intensité de défaut de toutes les notations moins risquées. Cette approche consiste à additionner les intensités de défaut des notations inférieures (moins risquées) à la notation considérée. Ce modèle permet donc :

- d'introduire une dépendance entre les différentes lignes obligataires
- d'éviter les croisements des spreads de notations différentes

L'ensemble des démonstrations sur le modèle en cascade peut-être retrouvé dans le mémoire de SABOURIN (2019). L'intensité de défaut de la ligne i correspondant à chaque rating s'écrit (2.42) dans le modèle en cascade, cela assure que les intensités sont ordonnées selon leur risque et aussi une interdépendance des intensités de défaut.

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^i \lambda_j = \gamma_{i-1} + \lambda_i, \quad (2.42)$$

Processus CIR en cascade

Dans le cas du modèle en cascade il y a $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq d}$ d processus CIR indépendant. Sous la mesure risque neutre Q l'équation différentielle s'écrit (2.43).

$$d\lambda_i(t) = k_i(\theta_i - \lambda_i(t))dt + \sigma_i\sqrt{\lambda_i(t)}dW(t), \quad (2.43)$$

$\lambda_i(0)$, k_i , θ_i et σ_i sont des constantes positives,
Le modèle doit respecter la condition de Feller (2.44).

$$2k_i\theta_i > \sigma_i^2. \quad (2.44)$$

Probabilité de Survie

Dans ce modèle spécifique l'écriture de la probabilité de survie est la suivante 2.45.

$$\Lambda_i(t, T) = Q(\tau_i > T | \tau_i > t | F_t) = E\left(\exp\left(-\int_t^T \gamma_i(u)du\right) \mid F_t\right), \quad (2.45)$$

Or d'après l'hypothèse d'indépendance des λ_i , on peut réécrire la probabilité de survie (2.46).

$$\Lambda_i(t, T) = \prod_{j=1}^i E\left(\exp\left(-\int_t^T \lambda_j(u)du\right) \mid F_t\right), \quad (2.46)$$

En utilisant les propriétés analytiques des processus CIR on obtient (2.47).

$$\Lambda_i(t, T) = \prod_{j=1}^i A(t, T, k_j, \theta_j, \sigma_j)e^{-B(t, T, k_j, \theta_j, \sigma_j)\lambda_j(t)}, \quad (2.47)$$

Prix d'une obligation risquée

Les résultats sont semblables aux résultats du modèle LMN (2.3.1).

$$P_{corp}^{(i)}(t, T) = P(t, T)\left(\alpha_i + 1_{\tau_i > t}LGD_i \times Q(\tau_i > T / \tau_i > t \mid F_t)\right), \quad (2.48)$$

On retrouve le prix d'une obligation risquée avec recouvrement (2.49) et sans recouvrement (2.50).

$$P_{corp}^{(i)}(t, T) = P(t, T)\left(\alpha_i + \exp\left(-\int_0^t \lambda_i(u) du\right)LGD_i \times \prod_{j=1}^i A(t, T, k_j, \theta_j, \sigma_j)e^{-B(t, T, k_j, \theta_j, \sigma_j)\lambda_j(t)}\right), \quad (2.49)$$

$$P_d^{(i)}(t, T) = P(t, T)\left(\exp\left(-\int_0^t \lambda_i(u) du\right) \prod_{j=1}^i A(t, T, k_j, \theta_j, \sigma_j)e^{-B(t, T, k_j, \theta_j, \sigma_j)\lambda_j(t)}\right), \quad (2.50)$$

Le Spread de crédit

$$S_{corp}^{(i)}(t, T) = -\frac{\ln(1 - LGD_i(1 - \prod_{j=1}^i A(t, T, k_j, \theta_j, \sigma_j)e^{-B(t, T, k_j, \theta_j, \sigma_j)\lambda_j(t)})}{T - t}, \quad (2.51)$$

Calibration du modèle

Le calibrage consiste à déterminer les paramètres minimisant les écarts entre un vecteur de spreads observés sur le marché et un vecteur de spreads théoriques du modèle à la date initiale $t = 0$, pour un ensemble de maturités.

Le processus de calibrage du modèle LMN à cascade est itératif, il faut calibrer les paramètres de la ligne $i - 1$ avant d'envisager le calibrage de la ligne i . Supposons que les paramètres $(\lambda_j(0))_{j < i}$, $(k_j)_{j < i}$, $(\theta_j)_{j < i}$ et $(\sigma_j)_{j < i}$ sont calibrés. Notons :

- $\beta^{(i)} = (\lambda_i(0), k_i, \theta_i, \sigma_i)$: les paramètres du processus λ_i ,
- S^{marche_i} : le spread de la maturité t observé sur le marché pour la notation i ,
- $S^{theorique_i}$: le spread théorique de la maturité t évalué par le modèle LMN en cascade pour la notation i ,

Les paramètres du modèle CIR, λ_i , sont calculés successivement pour chaque i par l'optimisation sur l'ensemble des spreads de la ligne i retenu pour le calibrage (d est une distance).

$$\hat{\beta}_i = \operatorname{argmin}_{\beta^{(i)}} (d((S_t^{marche_i})_t, (S_t^{theorique_i})_t)), \quad (2.52)$$

Les paramètres $(k_i, \theta_i, \sigma_i)$ doivent respecter la condition de Feller (2.44).

L'algorithme utilisé initialement pour l'optimisation est la méthode du recuit simulé, cependant il sera aussi intéressant de quantifier l'impact des algorithmes d'optimisation employés afin de calibrer sur la précision des résultats.

Données de marché Afin de calibrer le modèle, il est nécessaire de posséder un vecteur de spread observé sur le marché. Au sein de la compagnie il est retenu l'indice Bloomberg barclays, composé d'obligations sénior émises dans la zone euro. On obtient ainsi les taux risqués des obligations par rating sur la figure 2.12.

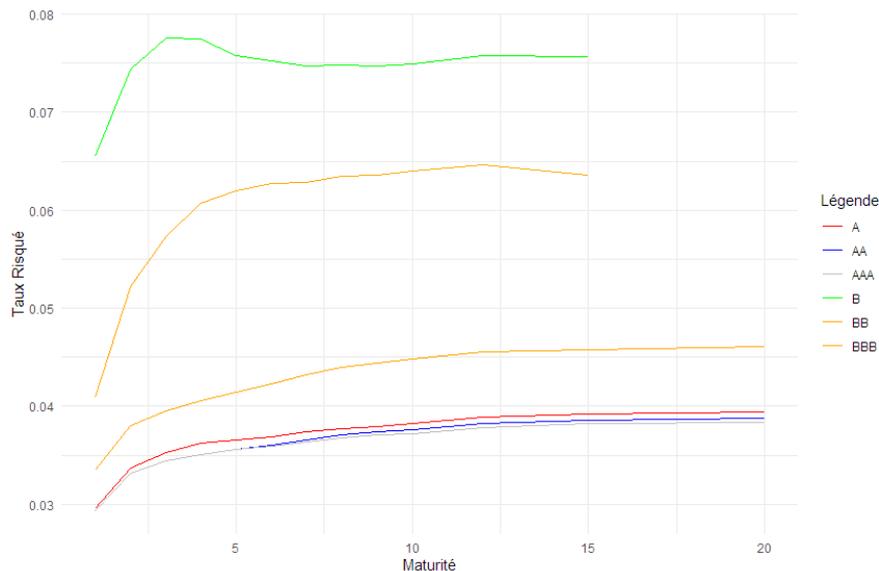


FIGURE 2.12 : Taux Risqué par Rating

Il faut ensuite retraiter les taux de rendement actuariel issus de Bloomberg afin de calibrer le modèle. Pour cela il faut d'abord transformer les taux de rendements (TR^{Marche}) en zéro coupon. La procédure de découpage (2.53) est donc appliquée aux données de marché.

$$P_{\text{Marche}}(0, T) = \frac{1}{1 + TR_{\text{Marche}}(0, T)} \cdot \left(1 - TR_{\text{Marche}}(0, T) \cdot \sum_{k=1}^{T-1} P_{\text{Marche}}(0, k) \right), \quad (2.53)$$

Afin d'obtenir le spread il faut ensuite appliquer la formule 2.54.

$$\text{Spread}_{\text{Marche}}(0, T) = P_{\text{Marche}}(0, T)^{\frac{-1}{T}} - 1 - T_{EIOPA}(0, T), \quad (2.54)$$

avec T_{EIOPA} le taux sans risque issu de la courbe EIOPA.

Vérification calibrage Suite à la calibration du modèle, il est nécessaire de vérifier si les paramètres sont cohérents et permettent une bonne reproduction des spreads de marchés. Ceux ci sont donc comparés aux spreads de modèle pour chaque rating. Sachant que les obligations du portefeuille de la société sont en moyenne représentées par des obligations notées "BBB", il est ici représenté le spread de marché ainsi que le spread de modèle sur le "BBB" 2.13. L'ensemble des ratings est vérifié dans la construction du modèle. Le processus utilisé est un processus CIR ce qui peut expliquer la non reproductibilité parfaite des spreads de marché. Une évolution permettant une meilleure reproduction pourrait être le passage à un modèle à deux facteurs tel que le CIR2++ (BRIGO et MERCURIO (2006)).

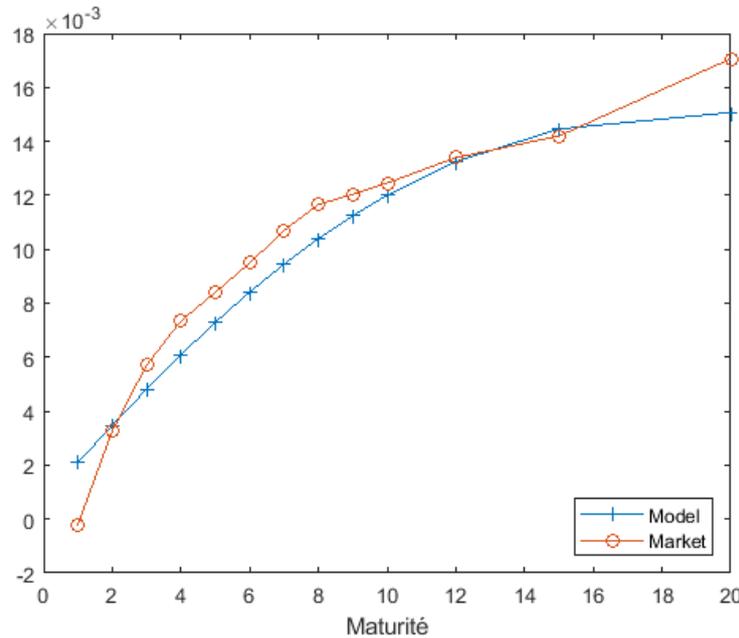


FIGURE 2.13 : Validation du calibrage sur le BBB

Discrétisation du processus d'intensité de défaut

Discrétisation d'Euler Ce type de discrétisation est étudiée dans BRIGO et MERCURIO (2006) et CHENG et PLANCHET (2019). Ceux ci proposent de retenir une discrétisation non exacte des équations différentielles stochastiques par la méthode d'Euler et la méthode de Milstein. Le processus λ_i (2.55)

peut donc être simulé par des discrétisations d'Euler à partir de lois normales centrées réduites et indépendantes $(\epsilon_t)_t$.

$$\lambda_i(t + \delta) - \lambda_i(t) = k_i(\theta_i - \lambda_i(t))\delta + \sigma_i\sqrt{\lambda_i(t)}\sqrt{\delta}\epsilon_t, \quad (2.55)$$

Ces méthodes sont assez lourdes à mettre en place et peuvent quand elles sont utilisées en assurance vie, compte tenu de l'horizon long terme, mener à des résultats imprécis avec un écart de convergence important sur la valeur du Best Estimate.

Discrétisation Exacte Il est ici présenté une méthode de ARMEL et PLANCHET (2020) de simulation du processus d'intensité de défaut du modèle CIR sans avoir recours à des méthodes de discrétisation telles que la méthode d'Euler ou la méthode de Milstein. En effet, si λ suit un processus CIR, alors $\lambda(t + \delta)$ conditionnellement à $\lambda(t)$ à la même loi qu'une variable $\chi^2(u, v_{t+\delta,t})/c_1$ où $\chi^2(u, v_{t+\delta,t})$ suit une loi du Khi-deux non-centrée de paramètres $(u, v_{t+\delta,t})$ avec :

$$\begin{aligned} c_\delta &= \frac{4k}{\sigma^2(1 - \exp(-k\delta))}; \\ u &= 4k\theta/\sigma^2; \\ v_{t+\delta,t} &= c_\delta\lambda_t \exp(-k\delta). \end{aligned}$$

Cette méthode permet d'éviter des problématiques de convergence au sein du modèle. Cependant ce processus peut être assez coûteux en temps de calcul. Suite à des tests réalisés sur l'utilisation des deux discrétisations présentées ci-dessus, les écarts obtenus entre les deux méthodes ne sont pas significatifs dans ce nouveau contexte de taux élevé. De plus le temps de traitement de la discrétisation exacte est près de 10 fois supérieure à celui avec une discrétisation d'Euler. Pour la suite le schéma numérique d'Euler est donc privilégié. .

Test de martingalité

Il est important d'effectuer le test de martingalité au sein du crédit pour vérifier le caractère risque neutre des trajectoires simulées. De part la formule (2.56),

$$P_{\text{corp}}(t, T) = \alpha P(t, T) + LGD P_d(t, T), \quad (2.56)$$

et (2.57),

$$P_d(t, T) = E(D(t, T)1_{\tau > T} | G_t), \quad (2.57)$$

$G_t = F_t V \sigma(\{\tau < u\}, u \leq t)$ représente les flux d'informations disponibles à l'instant t sur :

- $\sigma(\{\tau < u\}, u \leq t)$, L'instant de défaut, si il se produit avant t
- F_t , sur les variables du marché jusqu'à t

On peut en déduire (2.58).

$$E(D(t)P_{\text{corp}}(t, T)) = E(D(t)\alpha P(t, T) + LGD \times D(t)P_d(t, T)), \quad (2.58)$$

Or (2.59),

$$E(D(t)\alpha \times P(t, T)) = \alpha P(0, T), \quad (2.59)$$

on a $D(t, T) = \frac{D(T)}{D(t)}$ on en déduit (2.60),

$$E(D(t)P_d(t, T)) = E(E(D(t)D(t, T)1_{\tau > T} | G_t)) = E(D(T)1_{\tau > T}) = P_d(0, T), \quad (2.60)$$

donc 2.61,

$$E(D(t)P_{\text{corp}}(t, T)) = P_{\text{corp}}(0, T), \quad (2.61)$$

L'expression 2.61 permet donc de vérifier les trajectoires générées par le modèle LMN en cascade.

Dans le cas d'un modèle de crédit il faut ensuite vérifier pour chaque rating et pour chaque couple de maturité et tenor la martingalité du prix des zéros-coupons. La figure 2.14 représente le test de martingalité sur une obligation de rating BBB.

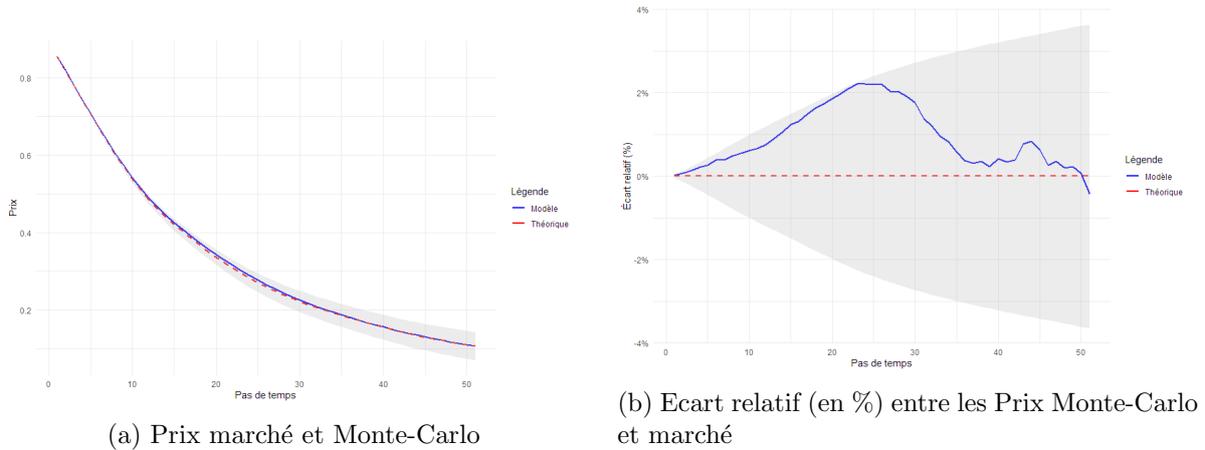


FIGURE 2.14 : Test de Martingalité sur les facteurs d'actualisation du rating BBB

On constate le caractère martingale du prix des zéros-coupons risqués avec recouvrement pour l'ensemble des 51*16 couples de pas de projections et maturités. Les tests effectués sur l'intégration du risque de crédit sont résumés dans le tableau 2.6. Les résultats obtenues sur la calibration du modèle de crédit sont assez élevés, ce qui peut être lié au choix de l'instrument de calibration.

Test	Type de Test	Résultat	Seuil	Validation du test
Calibration	Calcul Ecart Relatif sur le BBB	16.46 %	25%	Validé
Martingalité	Test Statistique	Figure 2.14	2.27	Validé

TABLE 2.6 : Tableau récapitulatif des tests sur le crédit

L'ensemble des études menées précédemment montre la validité des modèles employés au sein de la compagnie. Les résultats obtenus sur le test de calibration possèdent des écarts relatifs assez importants, ceux-ci sont principalement liés à l'utilisation d'un processus CIR qui ne permet pas une bonne reproduction des vecteurs de spreads de marchés. Cependant les processus mis en place ne permettent pas une qualité et une rapidité suffisante dans le contexte économique actuel. La dernière partie va donc traiter des différentes améliorations possibles et des facteurs permettant de conserver des processus de durée similaire avec des résultats permettant de satisfaire les seuils exigibles par les autorités de contrôle.

Chapitre 3

Impact et Résultat sur la qualité du Best Estimate

Au cours de ce chapitre l'intérêt va être porté sur l'impact du contexte économique dans la modélisation ALM et les résultats des compagnies d'assurance-vie notamment le Best Estimate. Les méthodes implémentées ont pour but d'améliorer la convergence du modèle sans augmenter le temps de calcul. Dans la pratique la convergence des scénarios économiques nécessite la mise en place de techniques permettant l'obtention de la valeur "réelle" avec un faible écart de convergence. Le temps de calcul est de plus une problématique essentielle pour la plupart des sociétés d'assurance, l'intérêt des travaux réalisés par la suite est de trouver les techniques les plus adaptées au contexte de taux permettant une convergence acceptable dans le cadre de Solvabilité 2. En effet au cours des exercices réglementaires imposés par les autorités réglementaires tel que l'ORSA, les compagnies ont comme obligation de produire un grand nombre de simulations ALM ce qui les contraint à un temps de calcul acceptable pour respecter les délais imposés.

Tout au long de l'étude, les résultats obtenus sont comparés à un modèle cible où le calcul est exécuté avec 5 000 scénarios. Durant l'ensemble de l'étude les résultats analysés et comparés sont les indicateurs suivants :

- Best Estimate : Afin d'obtenir une meilleure comparaison des résultats la valeur du BE est normalisée par la valeur de marché totale de l'actif. Lors des différentes méthodes testées, l'objectif est de trouver des résultats en moyenne proches des valeurs cibles décrites par la suite.
- Fuite de Modèle, cette variable de contrôle permet de vérifier la cohérence du bilan, afin de valider l'utilisation de différents paramètres, une première exigence est d'avoir une valeur inférieure à 0.5% comme exigée par l'ACPR, de plus il est nécessaire d'avoir une valeur en dessous de 0.2% pour arrêter les travaux.
- Incertitude sur le BE : Seuil de confiance de la valeur du BE, $\text{Incertitude} = \frac{\sigma}{BE_{Moyen} \sqrt{N}}$ avec σ l'écart type du BE et N le nombre de scénarios. Le calcul de l'intervalle de confiance à 95% sur le Best Estimate permet une quantification de la précision des résultats, au sein du bilan de Prepar VIE, la fonction actuarielle demande une incertitude inférieure à 0.5% car cela représente 10% des fonds propres de la société.

Les valeurs obtenues 3.1 sont donc considérées comme les valeurs cibles de Prepar VIE. Une problématique soulevée lors de ce mémoire est le temps de calculs nécessaire à l'ensemble du moteur ALM, qui varie en fonction du nombre de simulation choisie. En effet comme discutée dans le Chapitre 2, une augmentation du nombre de scénarios permet une amélioration de la qualité du Best Estimate. Cependant, la contrainte en temps de calcul ne permet pas une forte augmentation de ce nombre.

Par la suite, le temps de calcul sera utilisé comme métrique avec un arbitrage effectué au sein de la compagnie imposant un nombre de scénarios maximal inférieure ou égale à 2500 simulations. Il est important de noter que dans un contexte ORSA traité dans une seconde partie de ce chapitre le nombre de scénario ne pourra pas excéder 1 000. Les parties suivantes ont ainsi pour but de se rapprocher au plus près des valeurs présentées ci-dessous tout en réduisant le temps de calcul.

Best Estimate (en Millions d'€)	Écart de Convergence	BE/Valeur de Marché	Incertitude sur le BE	Temps de Calcul
4 203	- 0.18%	0.9822	0.323%	118 minutes

TABLE 3.1 : Valeurs cibles

L'ensemble des méthodes expérimentées est testé sur 5 graines différentes dans le but d'évaluer de manière plus générale l'impact des différentes approches sur le Best Estimate. De plus durant la suite de l'étude le temps de calcul ne sera traité uniquement lorsque le nombre de trajectoire varie, en effet le changement de méthode en conservant le même nombre de scénario a un impact minime sur le temps de calcul totale. La principale raison est que la partie chronophage correspond à la modélisation des interactions actif-passif ainsi qu'à la projection.

3.1 Générateur de Nombres Aléatoires Hybrides

Cette partie s'intéresse à l'impact de l'aléa sur la convergence des modèles ALM, l'intérêt est porté sur l'implémentation d'un générateur de nombres aléatoires hybrides. Prepar VIE utilise des générateurs pseudo-aléatoires, plus précisément un générateur congruentiel multiplicatif, afin de réaliser l'ensemble de leurs calculs réglementaires. L'ensemble des résultats de cette section correspond aux résultats moyens des 5 graines effectuées. Par la suite le lecteur peut se référer à l'ouvrage de R. KORN et KROISANDT (2010). De plus, les principales méthodes de réduction de variance peuvent être trouvées dans l'ouvrage de JÄCKEL (2002). Leur présentation et utilisation dans un contexte assurantiel sont décrites en Annexe A. Dans l'étude présentée, il a été choisi de se concentrer sur la génération de l'aléa, car l'implémentation dans le moteur ALM de la compagnie était moins contraignante. D'autres pistes concernant les schémas numériques dans la modélisation ont également été testées, avec notamment le passage d'une discrétisation exacte à une discrétisation d'Euler qui a donné des résultats similaires.

3.1.1 Pseudo-Aléatoire

Dans un premier temps il a été choisi de réaliser les calculs sur deux générateurs pseudo-aléatoires : le générateur congruentiel multiplicatif et le Mersenne Twister. Ces deux méthodes permettent la génération de lois uniformes, puis afin de construire les scénarios les lois sont converties en lois normales à l'aide de l'algorithme de Box-Muller. Le générateur congruentiel multiplicatif est construit avec l'Algorithme 1.

Algorithm 1 Générateur de lois uniformes avec un générateur Congruentiel Multiplicatif

Soit s_0 la graine choisie, $a = 1132489760$ le mutiplieur et $m = 2^{31} - 1$ la période du générateur, les différentes étapes réalisées sont :

1. Initialiser $u_0 = \frac{s_0 \cdot \text{mod}(m)}{m}$
 2. Itérer $s_{n+1} = s_n * a \text{ mod}(m)$
 3. Calculer $u_n = \frac{s_n}{m}$
-

Le générateur de Mersenne-Twister est issu du générateur de nombres aléatoires. Une fois les lois uniformes générées l'algorithme de Box-Muller (*cf Algorithme 2*) permet de les transformer en lois normales centrées réduites. Les graphes 3.1 représentent la distribution de 1000 points suivant des lois

Algorithm 2 Algorithme de Box-Muller

1. Générer U_1 et U_2 deux variables uniformes indépendantes sur $[0, 1]$
2. Calculer

$$N_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2)$$
 et
$$N_2 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2)$$

Il est obtenu N_1 et N_2 deux variables normales centrées réduites.

uniformes dans $[0,1]$ générées par les deux méthodes citées précédemment.

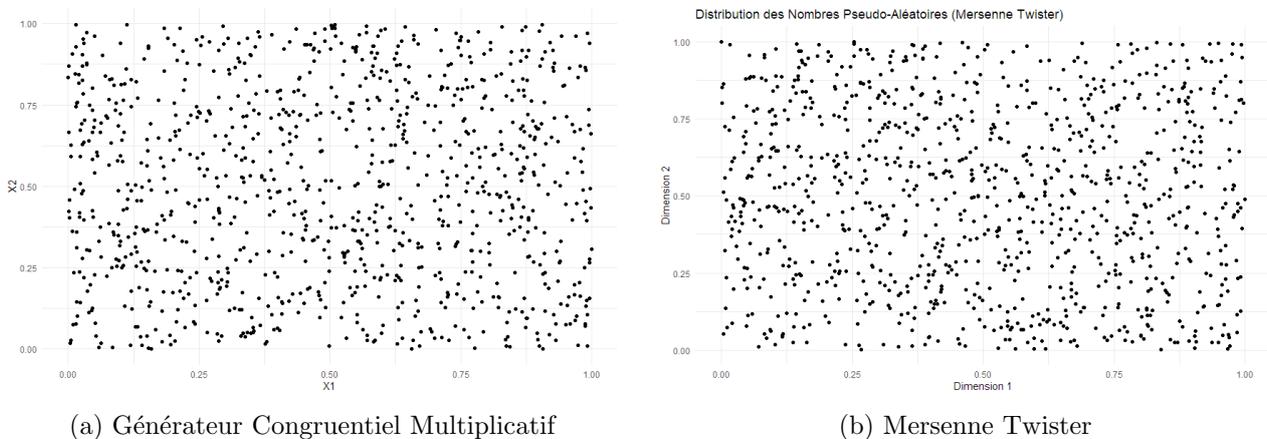


FIGURE 3.1 : Distribution de lois uniformes pseudo-aléatoires

Une étude a été réalisée sur les résultats obtenus en prenant 5 graines identiques pour les deux générateurs, le tableau 3.2 donne les résultats pour la moyenne des graines calculées.

Générateur	Best Estimate (en Millions d'€)	Écart de Convergence	Incertitude sur le BE
Valeur Cible	4203	-0.18 %	0.323 %
Congruentiel Multiplicatif	4 220	-0.64 %	1.05 %
Mersenne Twister	4 216	-0.62 %	1.03 %

TABLE 3.2 : Comparaison qualité pseudo-aléatoire

Les résultats obtenus sont très proches de ceux réalisés pour le rapport annuel de 2022 et on observe que la différence entre les deux générateurs est négligeable.

3.1.2 Passage au Quasi-Aléatoire

Les résultats obtenues à l'aide de générateurs pseudo-aléatoires ne sont pas satisfaisants en utilisant 1000 scénarios selon les contraintes indiquées par l'autorité réglementaires, le passage à des générateurs quasi-aléatoires (JÄCKEL (2002)) permet l'amélioration de la convergence des modèles, en effet l'utilisation de suites à discrétion faible telles que les suites de Sobol ou Halton permet une meilleure répartition de l'aléa qui amène donc une convergence plus rapide. Les résultats de convergence théoriques sont présentés en Annexe A. Les suites sont implémentées à l'aide des fonctions

Haltonset (R2023b) et *Sobolset* (R2023b), les lois générées sont ensuite transformées en lois normales avec l'algorithme de Box-Muller décrit auparavant. La figure 3.2 représente la distribution de 1000 points générée avec la suite de Sobol dans $[0,1]$.

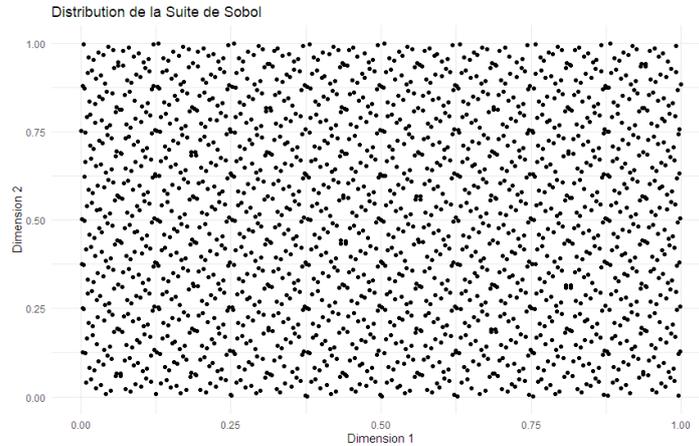


FIGURE 3.2 : Répartition d'une loi Uniforme avec Sobol

Il est clair que l'espace est mieux rempli que dans lorsque l'on simule des lois uniformes avec des générateurs pseudo-aléatoires (3.1). De plus comme l'explique HOK et KUCHERENKO (2022) et L'ECUYER (2016) des méthodes de RQMC (*Randomized Quasi Monte Carlo*) existent. Elles consistent à l'utilisation de séquences de points quasi-aléatoires, auxquels est rajoutée une perturbation aléatoire. La perturbation aléatoire peut être effectuée avec une méthode de scrambling permettant une amélioration des résultats. Issue des travaux de OWEN (1995), la méthode consiste à décomposer dans une base la séquence puis à permuter de manière aléatoire en suivant des conditions afin de conserver les propriétés de la séquence. La figure 3.3 illustre ce concept pour une image en 2D.



FIGURE 3.3 : Illustration de la méthode de scrambling en base 2 KUO et NUYENS (2016)

Ci dessous les étapes effectués sur la figure 3.3 :

- (a) Image original ;
- (b) échanger les moitiés gauche et droite ;
- (c) échanger les 3e et 4e quarts verticaux ;
- (d) échanger les 3e et 4e, 7e et derniers huitièmes verticaux ;
- (e) échanger les 3e et 4e, 7e et 8e, 9e et 10e, 15e et derniers seizièmes ;
- (f) échanger les 1er et 2e quarts horizontaux ;
- (g) échanger les 1er et 2e, 5e et 6e, 7e et derniers huitièmes horizontaux ;
- (h) échanger les 3e et 4e, 7e et 8e, 9e et 10e, 15e et derniers seizièmes horizontaux.

Par la suite on utilisera du RQMC, le tableau 3.3 montre les résultats obtenus en utilisant des suites de Sobol et de Halton et les compare aux deux résultats précédents.

Générateur	Best Estimate (en Millions d'€)	Écart de Convergence	Incertitude sur le BE
Valeur Cible	4203	-0.18 %	0.323 %
Congruentiel Multiplicatif	4 214	-0.64 %	1.05 %
Mersenne Twister	4 224	-0.62 %	1.03 %
Suite de Sobol	4 213	-0.35 %	0.704 %
Suite de Halton	4 222	-0.37 %	0.71 %

TABLE 3.3 : Comparaison quasi-aléatoires et pseudo-aléatoires

On observe une nette amélioration de la convergence en passant à des suites à discrédance faible. Cependant, en se plaçant dans des dimensions trop importantes, l'utilisation de suites quasi-aléatoires peut mener à une mauvaise convergence. En effet certaines dimensions peuvent avoir une très mauvaise répartition dans le cube unitaire comme représenté en 3.4.

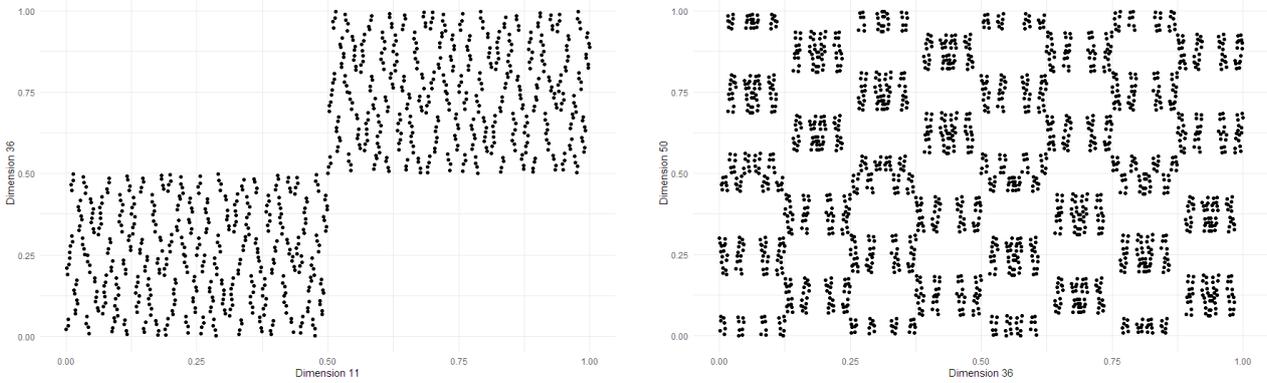


FIGURE 3.4 : Problème de la Dimension

Lorsque l'on travaille sur des GSE, le nombre de dimension (pas de temps, facteurs de risques) peut très rapidement devenir assez important ce qui a impact sur la convergence du modèle.

3.1.3 Implémentation du générateur hybride

Afin de pallier le problème de la dimension des suites à discrédance faible, l'implémentation d'un générateur hybride a été mis en place. Le modèle se base sur JÄCKEL (2002) ainsi qu'un papier de Milliman de ANDRÈS et al. (2022) expliquant la méthode en détail. Le principe de la méthode est la suivante :

- Tout d'abord un générateur de nombres quasi-aléatoires est utilisé dans une dimension acceptable pour conserver la propriété de convergence. Pour cela il est utilisé des générateurs quasi aléatoires avec une fréquence de pas de temps plus faible que la fréquence finale requis pour le modèle ALM.
- Une étape de randomisation est ajoutée, cette approche a pour but de perturber la séquence avec une transformation aléatoire pour obtenir de meilleures propriétés de convergence.
- Puis l'ensemble des pas de temps est reconstruit en recomposant les mouvements browniens aux pas de temps non calculés avec le quasi-aléatoire en utilisant la méthode des ponts browniens. Cette méthode repose sur l'utilisation de nombres pseudo-aléatoires afin de ne pas rencontrer le problème de dimension lié au générateur quasi-aléatoire.

Construction d'un pont brownien

Il est possible de retrouver plus de détails sur les ponts browniens dans l'ouvrage de JÄCKEL (2002). Un pont brownien est une manière de construire un processus de Wiener discret en utilisant la première variable d'un vecteur gaussien. Elle est utilisée pour déterminer la réalisation du chemin de Wiener au dernier pas de temps t_n . Soit $W_{t_n} = \sqrt{t_n}z_1$ avec z_1 la première variable du vecteur gaussien. Un pont brownien est caractérisé par sa moyenne (3.1) et sa variance (3.2) sachant W_{t_k} et W_{t_i} , établis avec $t_i < t_j < t_k$.

$$E[W_{t_j}] = \frac{(t_k - t_j) W_{t_i} + (t_j - t_i) W_{t_k}}{t_k - t_i}, \quad (3.1)$$

$$V[W_{t_j}] = \frac{(t_j - t_i)(t_k - t_j)}{t_k - t_i}, \tag{3.2}$$

Cette approche est très connue pour simuler le chemin de mouvements browniens. Au lieu de simuler de manière itérative comme dans des schémas d'Euler, cette méthode permet la simulation de brownien conditionnellement au passé et au futur. Elle repose sur l'équation (3.3), soit W_{s_1}, \dots, W_{s_m} la valeur du brownien à une fréquence plus faible que la fréquence requise pour le moteur ALM avec les pas de temps s_1, \dots, s_m alors la distribution de W à un pas de temps que l'on cherche à générer $s \in [s_i, s_{i+1}]$ pour obtenir l'ensemble des pas de temps est

$$W_s = \frac{(s_{i+1} - s) x_i + (s - s_i) x_{i+1}}{s_{i+1} - s_i} + \sqrt{\frac{(s_{i+1} - s)(s - s_i)}{s_{i+1} - s_i}} G, \tag{3.3}$$

Avec $G \sim \mathcal{N}(0, 1)$ indépendant de W_{s_1}, \dots, W_{s_m}

La formule est ensuite appliquée récursivement sur l'intervalle pour générer l'ensemble des browniens. Les étapes peuvent être représentées dans la figure 3.5.

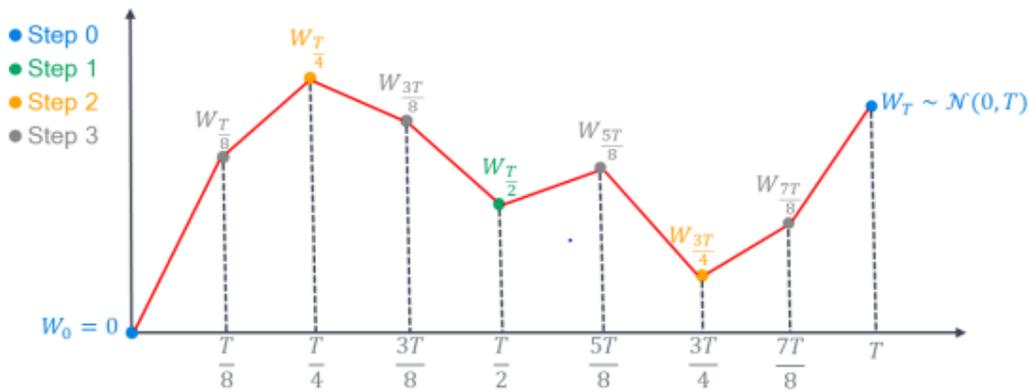


FIGURE 3.5 : Pont Brownien ANDRÈS et al. (2022)

Caractéristique de l'aléa généré

Il est important de vérifier que l'aléa généré dans le GSE respecte l'ensemble des propriétés de normalité. La figure 3.6 représente la densité de la loi modélisée.

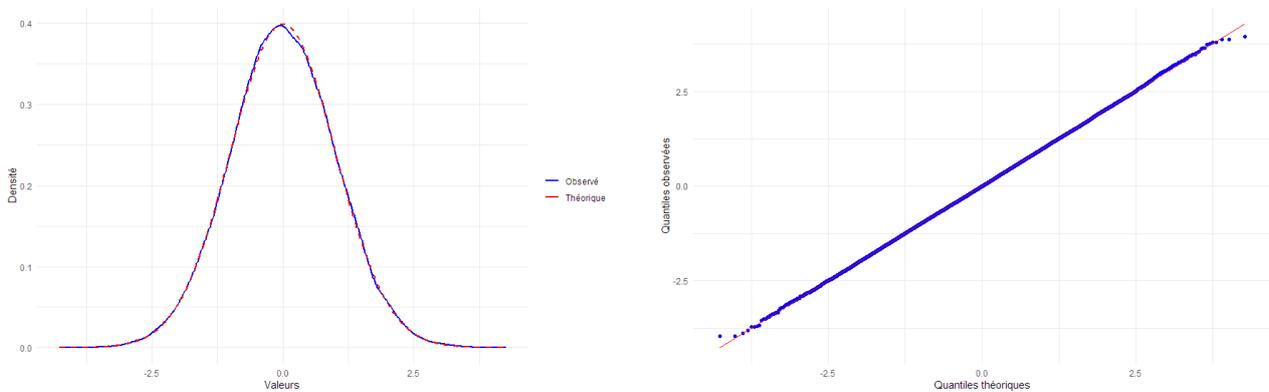


FIGURE 3.6 : Caractéristique de l'aléa

Il est observé que la densité de la loi générée correspond à celle d'une loi normale (0,1), de plus il est possible de tester la distribution avec un diagramme quantile-quantile comme tracé en 3.6. L'ensemble des propriétés de normalité est de plus vérifié à travers l'utilisation de tests statistiques.

3.1.4 Résultats et Limites

Afin de générer l'aléa on utilise donc l'algorithme suivant (*cf algorithme 3*).

Algorithm 3 Générateur de loi normale avec un générateur hybride

1. Générer de l'aléa avec du QMC à un pas de temps intermédiaire
 2. Appliquer une méthode de scrambling pour obtenir du RQMC
 3. En se basant sur la méthode du pont brownien reconstruire le chemin des browniens à l'ensemble des pas de temps en utilisant du pseudo-aléatoire
-

Comparaison des générateurs

Dans un premiers temps, les générateurs utilisés sont comparés, la figure 3.7 représente la valeur du Best Estimate sur les 5 graines selon le générateur choisi.

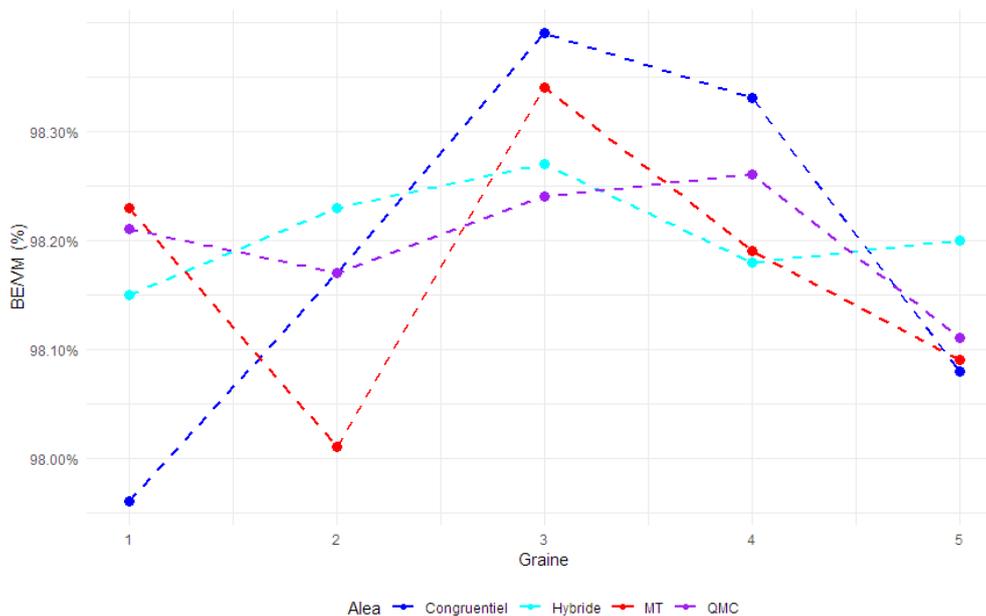


FIGURE 3.7 : BE/VM en fonction du générateur de nombre aléatoire

L'utilisation du générateur hybride et du générateur de quasi-aléatoire (QMC) donnent des résultats plus précis que les deux générateurs pseudo-aléatoires. De plus la figure 3.8 représente pour les 5 graines testées la valeur de l'écart de convergence.

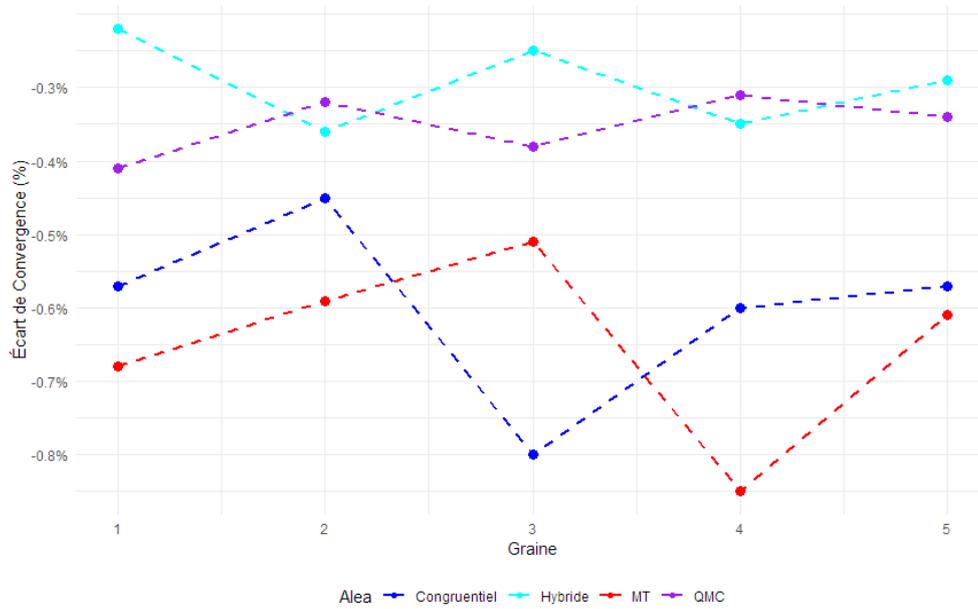


FIGURE 3.8 : Fuite de Modèle en fonction du générateur de nombres aléatoires

Le graphique représentant l'écart de convergence permet d'arriver à une conclusion similaire sur les générateurs. En effet l'utilisation de la suite de Sobol et le générateur hybride semblent avoir des résultats assez similaires avec une légère amélioration lors de l'utilisation du générateur hybride. De plus l'ensemble des résultats est affiché dans le tableau 3.4, les valeurs correspondent aux résultats moyens des 5 grains testées.

Générateur	Best Estimate (en Millions d'€)	Écart de Convergence	Incertitude sur le BE
Congruentiel Multiplicatif	4 235	-0.64 %	1.05 %
Mersenne Twister	4 229	-0.62 %	1.03 %
Suite de Sobol	4 213	-0.35 %	0.704 %
RNG Hybride	4 209	-0.29 %	0.728 %

TABLE 3.4 : Tableau Comparatif Générateur

Les résultats observés entre les suites de Sobol et le générateur hybride semblent assez similaires, cela peut être lié au pas de projection de la compagnie qui est annuel, rendant le problème de la dimension des suites quasi-aléatoires moins impactant. Cette méthode est plus intéressante avec l'utilisation d'un pas mensuel qui permet d'exploiter au mieux les caractéristiques de la méthode implémentée et qui permet aussi une meilleure convergence, toutefois la contrainte de temps de calcul ne permet pas ce changement.

Conclusion et Limite

La partie précédente permet d'observer que le générateur implémenté conduit aux résultats les plus performants. De ce fait, la précision du générateur hybride est quantifié en prenant un nombre de graine plus importants ainsi qu'un nombre de scénario variant. Les résultats sur la fuite de modèles sont représentées avec la figure 3.9.

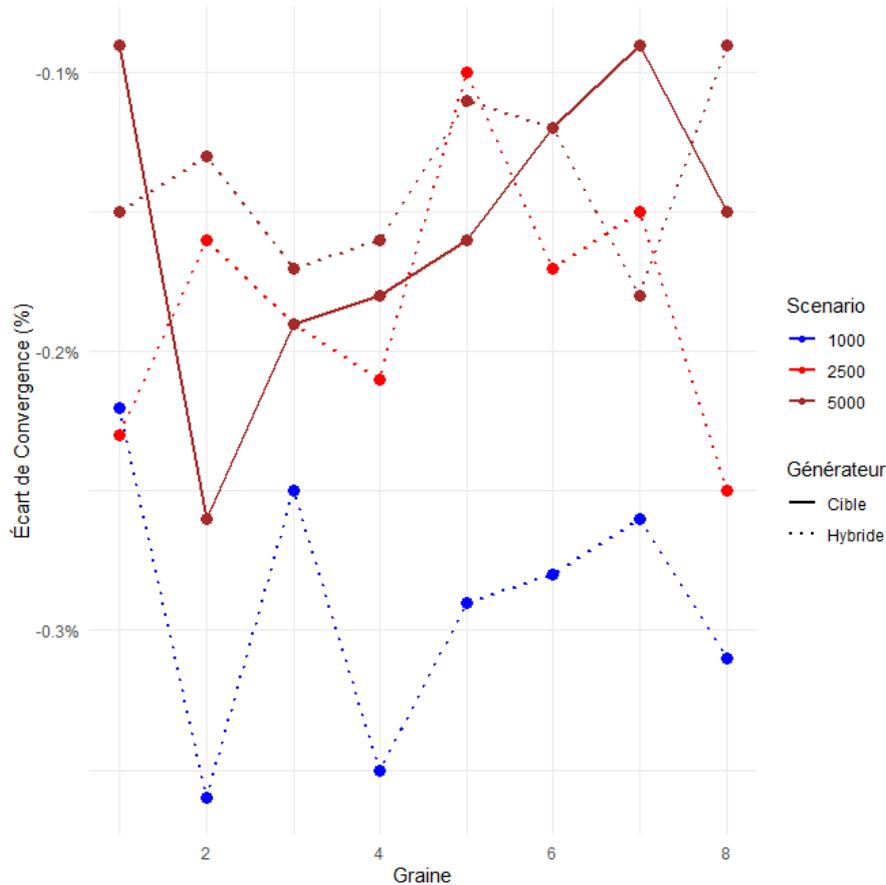


FIGURE 3.9 : Comparaison de la fuite de modèle entre le générateur hybride et la méthode initiale

Les valeurs présentées sur 8 graines différentes montrent une convergence plus rapide de la méthode implémentée, en effet au passage à 2500 scénarios les résultats sont similaires aux valeurs cibles, de plus le passage à 5000 scénarios témoignent d'une amélioration minime sur les résultats lié à la convergence plus rapide du générateur hybride. Le tableau 3.5 présente les résultats du générateur hybride (moyennes des 8 graines) pour 1000 scénarios, les valeurs cibles ainsi que les chiffres publiés dans le rapport annuel de 2022 (production).

Méthode	Best Estimate (en Millions d'€)	Écart de Convergence	BE (Normalisé)	Incertitude sur le BE (en %)
Production	4 226	- 0.6%	0.986	1.05%
Cible	4 203	- 0.18%	0.9822	0.323%
Générateur Hybride (1000)	4 209	- 0.29%	0.9821	0.728%
Générateur Hybride (2500)	4 198	- 0.1756%	0.9824	0.415%

TABLE 3.5 : Tableau récapitulatif

La méthode permet de se rapprocher des résultats cibles, toutefois la valeur de l'incertitude sur le Best Estimate reste plus importante car la valeur dépend du nombre de scénarios utilisés. Afin de remplir les contraintes de l'ACPR l'utilisation d'un générateur hybride avec 2 500 scénarios est donc nécessaire, la valeur de l'incertitude obtenue est de 0.415 %. De plus une étude sur l'impact du contexte économique a été réalisée pour le générateur hybride afin de tester la robustesse du modèle avec cette méthode, les hypothèses ainsi que le contexte économique de 2021 pour la société ont été

utilisé afin de générer la valeur du Best Estimate et de la comparer aux valeurs de production à cette date. Le tableau 3.6 représente les valeurs obtenues à Décembre 2021.

Méthode	Écart de Convergence	Incertitude sur le BE (en %)
Production	0.3%	0.5%
RNG Hybride	0.16%	0.36%

TABLE 3.6 : Tableau Comparatif à Décembre 2021 pour 1000 scénarios

On observe une amélioration des résultats sur l'année 2021 à nombre de scénario égale. Pour conclure sur cette partie, l'implémentation d'un générateur hybride permet l'amélioration de la convergence du moteur ALM et peut donc être utilisée en compagnie d'assurance dans les calculs réglementaires liés à Solvabilité 2.

3.2 Regroupement de scénarios

La première partie présente une méthode de réduction de variance permettant d'améliorer la convergence du Best Estimate de Prepar VIE. Dans cette seconde partie afin de réduire le temps de calcul du moteur ALM, s'inscrivant dans une problématique de pilier 2, une méthode simple de discrétisation proposée par PLANCHET et NTEUKAM (2010) est étudiée, une seconde méthode découlant de celle-ci traitée dans le mémoire de ASSAM (2011) va être implémentée et comparée à la première méthode. Les deux méthodes présentées sont des méthodes permettant un gain de temps significatif mais avec des résultats moins précis. Elles sont particulièrement utile dans le cadre du Pilier 2 de Solvabilité 2 et notamment l'ORSA, en effet durant cet exercice les entreprises d'assurance doivent évaluer leurs propres risques et leurs capacités à couvrir ceux-ci. Afin d'estimer les risques de l'entreprise au cours des prochaines années et dans des conditions économiques qui varient, il faut alors utiliser le modèle ALM un grand nombre de fois pour dresser le bilan de l'entreprise dans les différents cas. En effet il peut donc être nécessaire d'avoir recours à des méthodes de discrétisation des scénarios. Le but de cette partie est d'évaluer l'impact de ces deux méthodes sur la qualité et le temps de calcul du Best Estimate. La première méthode est notée M1 et la seconde est notée M2 tout au long du chapitre.

3.2.1 Description de la première méthode (M1)

Définition

Soit un processus $S(t)$ à valeur dans $\Omega = \mathbb{R}$ observable sur $[0, T]$ avec $T = 51$ au dernier pas de projection. Au sein du modèle développé, le processus représente le cours de différents actifs (taux, action, immobilier et gestion alternative) ou rendements modélisés dans le générateur de Scénarios Économiques. Pour chacun de ces actifs les faisceaux des trajectoires sont regroupés en fonction des quantiles de $S(t)$. Le processus est construit de la manière suivante (PLANCHET et NTEUKAM (2010)) :

- On fixe une partition de Ω à l'instant t , $\{[s_{t,j-1}, s_{t,j}], 1 \leq j \leq p\}$;
- Soit $\xi_j(t) = \mathbf{E}^Q(S(t) | S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}])$;
- $\xi(t)$ est défini en sélectionnant une trajectoire de $\xi_j(t)$, les p trajectoires sont pondérées par la probabilité suivante $\pi_{t,j} = \Pr(S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}])$. Par défaut il est choisi de prendre $\pi_{t,j} = \frac{1}{p}$.

Dans le cadre de l'étude, le nombre de scénarios générés est de N et les regroupements sont faits en fonction des quantiles de $S(T)$.

Il faut donc utiliser la moyenne empirique de $\mathbf{E}(S(t) | S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}])$ conduisant à la formule (3.4)

$$\tilde{\xi}_j(t) = \frac{1}{N_j} \sum_{i \in \Omega_j} S_i(t) \text{ avec } \Omega_j = \{i/S_i(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}]\} \text{ et } N_j = |\Omega_j|. \quad (3.4)$$

Application

Le but du mémoire étant d'améliorer la convergence du Best Estimate sans impacter le temps de calcul il sera intéressant d'étudier l'impact du choix de la discrétisation sur la précision des résultats. Il sera ensuite choisi un nombre initial de scénarios permettant suite à la discrétisation d'obtenir un jeu de 1000 scénarios avec une meilleure convergence. Pour une première étude sur l'impact de la discrétisation (p représentant le pas de discrétisation) il est choisi de prendre 1000 scénarios initiaux. Afin d'estimer la précision des résultats obtenus, les résultats seront comparés au scénario de référence introduit en début de partie (3.1). Dans un premier temps il est choisi de discrétiser pour une valeur de $p = 2$, la figure 3.10 représente la diffusion des faisceaux originaux ainsi que la diffusion des scénarios discrétisés.

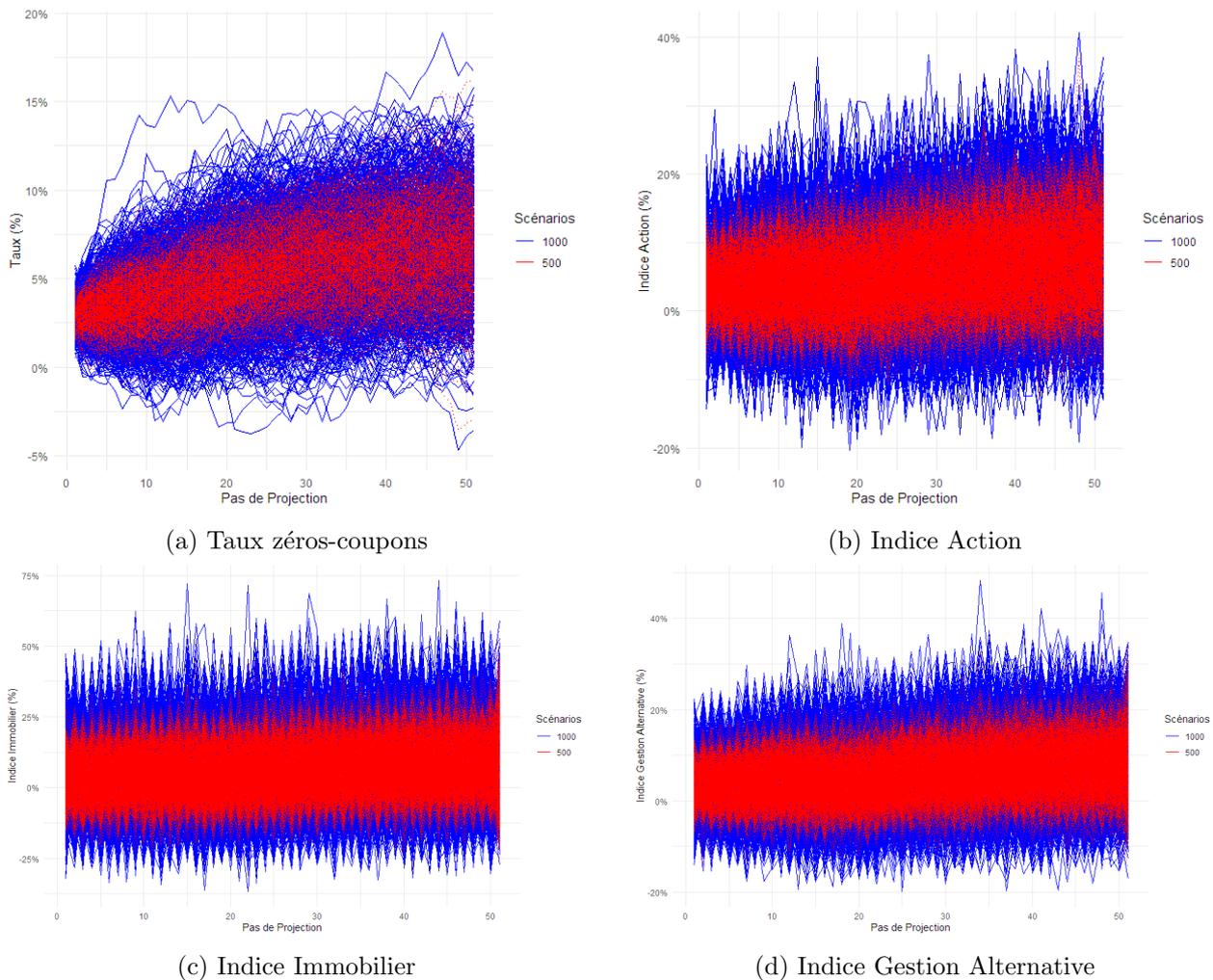


FIGURE 3.10 : Représentation des scénarios initiaux et discrétisée (M1) pour les classes actifs

Dans la suite de l'étude il est uniquement représenté les taux zéro-coupon ainsi que l'indice action car comme le témoigne la figure 3.10 l'indice immobilier et l'indice de gestion alternative ont les mêmes caractéristiques que l'indice action. La figure 3.10 montre la distribution des taux zéro-coupon ainsi

que celle de l'indice action, cela montre que l'utilisation de cette méthode permet la conservation de l'allure générale de la distribution. Cependant il apparaît une tendance à lisser les trajectoires. Afin de vérifier les caractéristiques de cette méthode, la diffusion des indices est représentée 3.11 en prenant un pas de discrétisation $p = 10$.

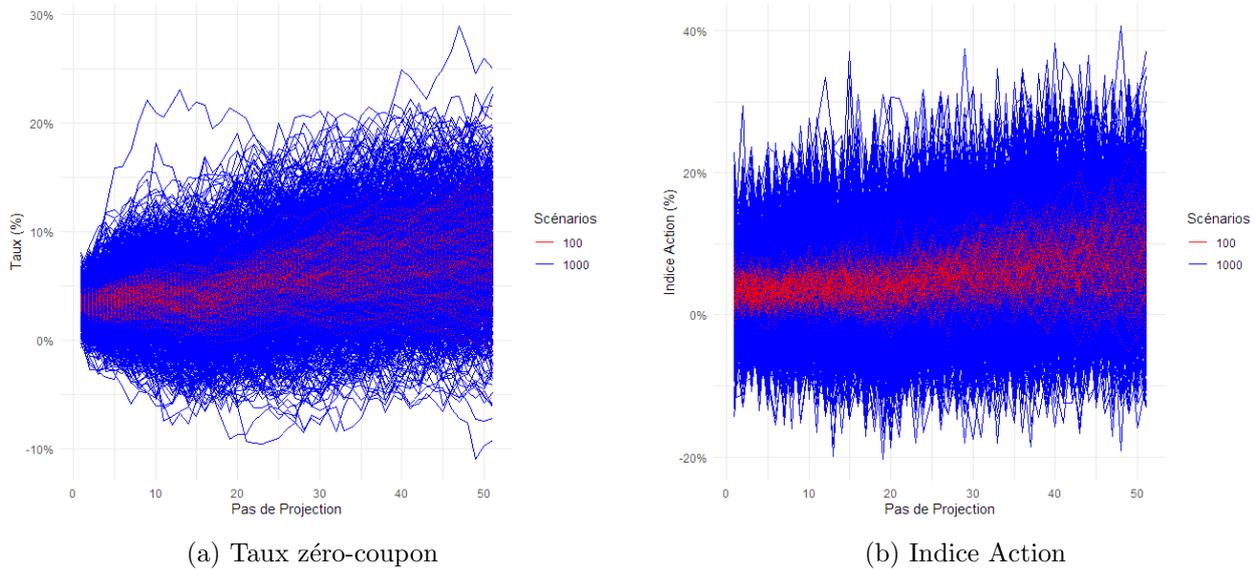


FIGURE 3.11 : Utilisation de la méthode 1 (M1) avec $p = 10$

Les deux graphiques précédents 3.11 montrent que lorsque le pas de discrétisation est supérieur, l'ensemble des scénarios extrêmes n'est plus représenté. Il sera intéressant de discuter de l'impact de cette propriété sur le calcul du Best Estimate lors de l'analyse des résultats. En effet cette caractéristique peut permettre la réduction de l'incertitude sur le Best Estimate. Cependant la question de la pertinence des résultats peut se poser pour des calculs assurantiels.

Les résultats observés 3.7 ont pour but de comparer l'impact de la discrétisation choisie sur le calcul du Best Estimate afin de choisir le pas permettant une précision optimale tout en ayant le temps de calcul le moins élevé possible.

Discrétisation (p)	Valeur du BE en Millions d'€	Écart Relatif (en % du BE de référence)	Temps de Calcul (en minutes)
1 (Référence)	4 182	0%	19
2	4 123	-1.4%	10
5	4 128	-1.29%	6
10	4 119	- 1.5 %	4
20	4 110	-1.7 %	3
50	4 108	-1.73 %	2
100	4 086	-2.3 %	1

TABLE 3.7 : Impact Discrétisation (M1)

Il semble qu'un écart incompressible soit présent dès le premier pas de discrétisation (ie $p = 2$), la précision semble se détériorer au fur et à mesure du temps. Pour la suite de l'étude le pas $p = 5$ est choisi afin d'avoir une précision acceptable sur les résultats. De plus il a été comparé les valeurs obtenues sur le Best Estimate lorsque l'on compare à nombre de scénario égale, dans notre cas 1000,

un jeu de scénario initiale et un jeu de scénario issue d'un jeu de 2000 scénarios avec un pas de discrétisation égale à 2 en 3.8.

Nombre de Scénario (Initiale)	Nombre de Scénario (Finale)	Valeur du BE en Millions d'€	Écart-type en Millions d'€
1 000	1 000	4 226	3.7
2 000	1 000	4 136	5.6

TABLE 3.8 : Comparaison valeur BE initiale vs valeur BE avec M1

On observe un écart-type légèrement plus important en utilisant la méthode d'agrégation des trajectoires signifiant une plus grosse dispersion des valeurs autour de la moyenne sur les 8 graines. De plus, à nombre de scénarios équivalent, il est clair que la valeur du Best Estimate baisse en utilisant la première méthode et conduit à une sous-estimation du Best Estimate de la compagnie.

3.2.2 Description de la seconde méthode (M2)

La première méthode utilisée 3.2.1 se base sur les regroupements de trajectoires selon $S(T)$. Or dans le mémoire de ASSAM (2011) une seconde approche est utilisée afin de calculer le Best Estimate. Celle-ci paraît plus performante et adaptée dans le contexte assurantiel, cette méthode est donc implémentée et comparée à la méthode initiale.

Définition

La méthode est semblable à la méthode M1, à partir de trajectoires simulées $S(t)$, il est déterminé des sous groupes de trajectoires. Pour chaque pas de temps $t \in [1, T]$, on dispose de N trajectoires du processus $S(t)$ puis on utilise l'approximation pour le calcul de $\mathbf{E}(S(t) \mid S(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}])$ (3.5)

$$\tilde{\xi}_j(t) = \frac{1}{N_j} \sum_{i \in \Omega_j} S_i(t) \text{ avec } \Omega_j = \{i / S_i(t) \in [s_{t,j-1}, s_{t,j}]\} \text{ et } N_j = |\Omega_j| \text{ et } t = t_d. \quad (3.5)$$

Application

Afin de pouvoir obtenir des résultats comparables à la première méthode, les mêmes scénarios de référence sont conservés (1000 scénarios). Une étude sur l'impact du pas de discrétisation est aussi menée afin de déterminer la valeur seuil pouvant être utilisée pour un calcul du Best Estimate optimal. La figure 3.12 représente la diffusion des différents actifs modélisés dans le GSE de Prepar VIE en prenant $p = 2$.

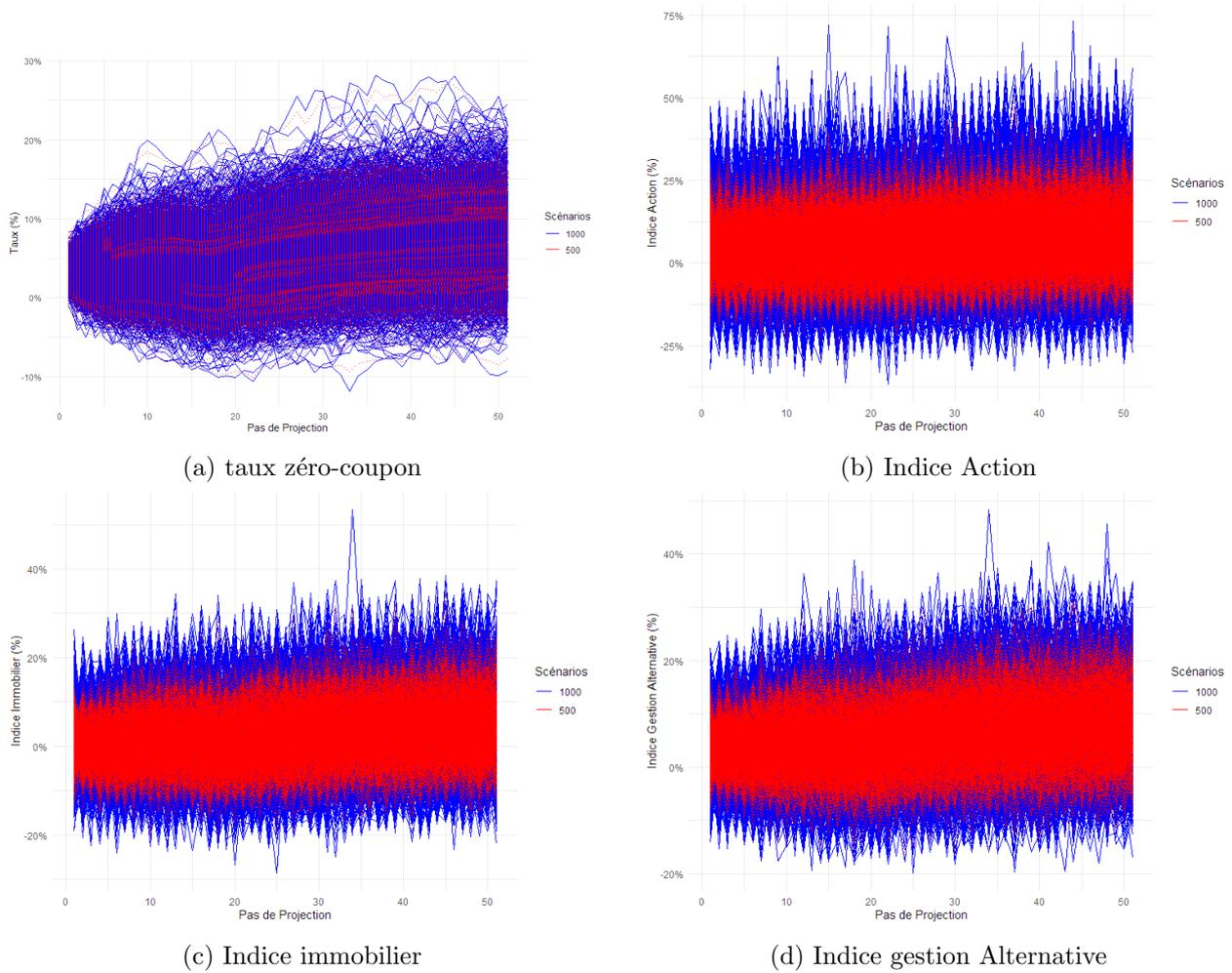
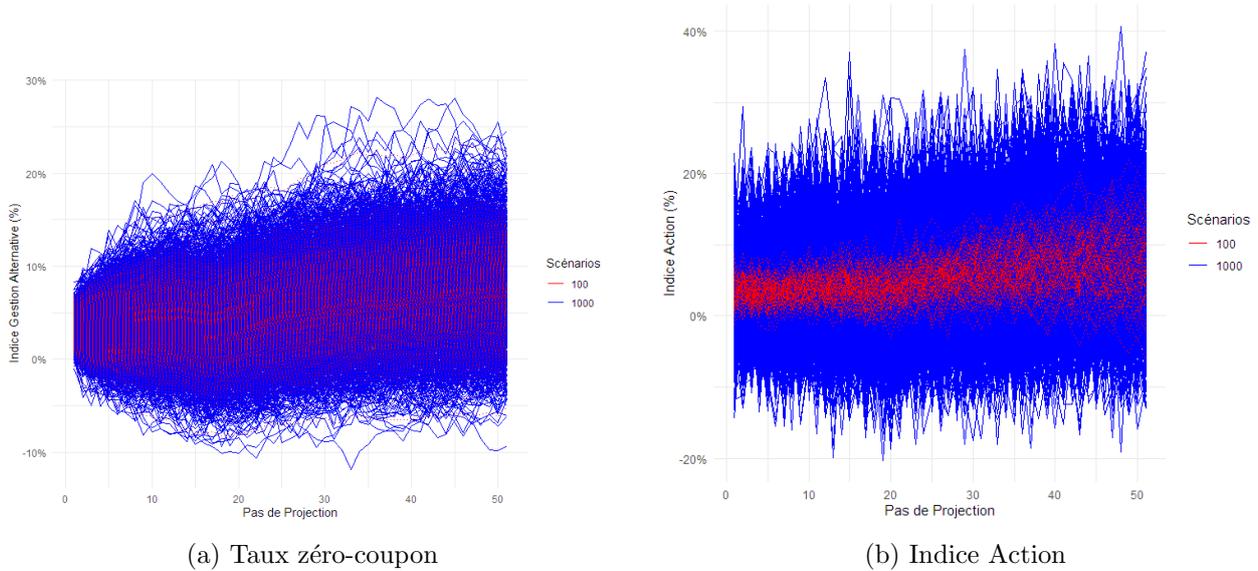


FIGURE 3.12 : Représentation des scénarios initiaux et discrétisés (M2) pour les classes actifs

Les nouveaux faisceaux de trajectoires générés par la méthode M2 ne semble pas différer de la méthode M1. Ceux-ci semblent conserver la distribution générale des scénarios de référence. De la même manière que pour M1, par la suite uniquement les graphiques reliés aux taux zéro-coupon ainsi que l'indice action seront représentés sur les graphiques. Afin d'observer l'impact de cette méthode, on utilise à nouveau la méthode avec $p = 10$. Les graphiques 3.13 sont obtenus.

FIGURE 3.13 : M2 avec $p = 10$

Les graphiques témoignent que lorsqu'on choisit un pas plus grand, les trajectoires générées n'ont pas tendance à se lisser ce qui s'explique par la méthodologie qui permet la reconstruction de trajectoire prenant mieux en compte les scénarios extrêmes. Un tableau 3.9 est généré afin de choisir le pas p optimal afin de comparer les deux modèles entre eux et au modèle de référence.

Discrétisation (p)	Valeur du BE en Millions d'€	Ecart Relatif (en % du BE de référence)	Temps de Calcul (en minutes)
1 (Référence)	4 182	0%	19
2	4 308	3%	10
5	4 315	3.15%	6
10	4 329	3.5 %	4
20	4 340	3.8 %	3
50	4 336	3.7 %	2
100	4 372	4.5 %	1

TABLE 3.9 : Impact Discrétisation (M2)

Un pas de $p = 5$ est également retenu pour la méthode M2, de la même manière que précédemment il est comparé l'impact de l'utilisation de cette méthode sur la valeur du BE à nombre de scénario équivalent. On obtient le tableau 3.10.

Nombre de Scénario (Initiale)	Nombre de Scénario (Finale)	Valeur du BE en Millions d'€
1 000	1 000	4 226
2 000	1 000	4 324

TABLE 3.10 : Comparaison valeur BE initiale vs valeur BE avec M2

A nombre de scénario équivalent il est clair que le valeur du Best Estimate augmente en utilisant la seconde méthode et conduit à une surestimation du Best Estimate de la compagnie.

3.2.3 Comparaison des résultats

Dans cette partie les deux méthodes implémentées précédemment sont comparées et une discussion est faite sur la pertinence de leur utilisation au sein d'une compagnie d'assurance vie. Les trajectoires générées par les méthodes sont comparées 3.14 avec $p = 2$.

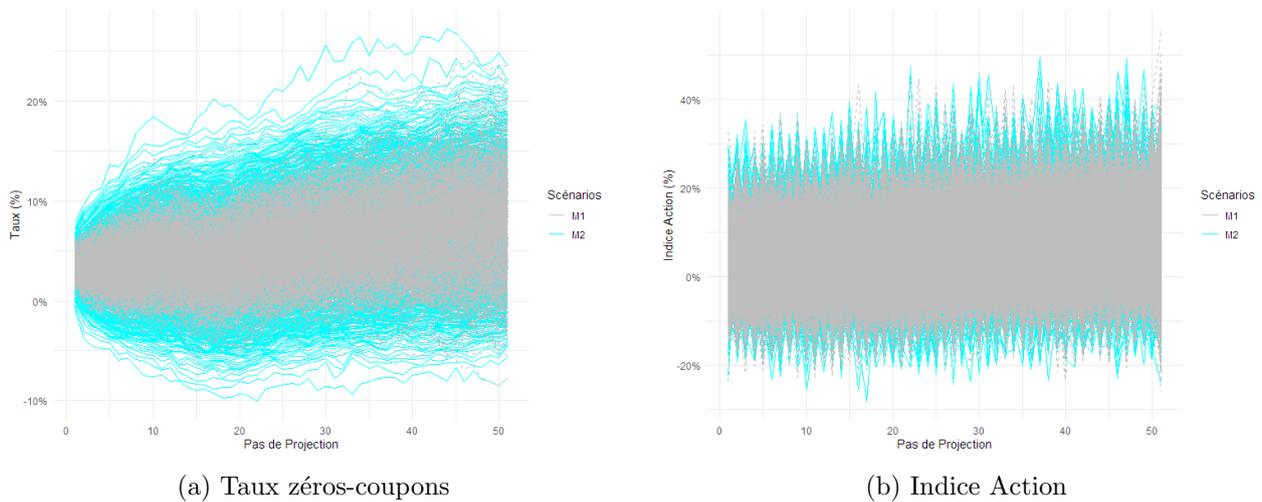


FIGURE 3.14 : Comparaison M1 et M2 avec $p = 2$

Il est observable que la méthode (M2) va produire des résultats qui sont plus dispersés avec des valeurs extrêmes plus importantes. La figure 3.15 représente les taux zéro-coupon avec un pas $p = 10$ pour les deux méthodes.

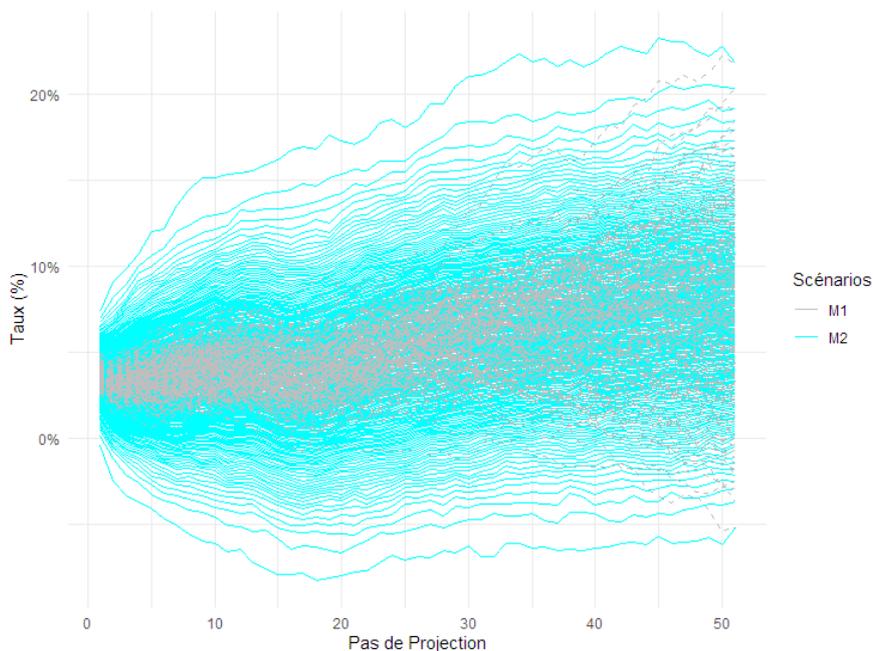


FIGURE 3.15 : Comparaison M1 et M2 avec $p = 10$

En prenant un pas supérieur, la différence entre les trajectoires générées par M1 et M2 est clairement identifiable. La reproduction des scénarios en utilisant la deuxième méthode paraît donc plus

adéquate pour avoir des résultats cohérents tout au long de la projection dans le moteur ALM. Un tableau 3.11 permet la comparaison des indicateurs clé en prenant le pas de référence choisi ($p = 5$).

Méthode	Nombre de Scénario	Ecart Relatif (en % du BE Scénario Ini)	Incertitude sur le BE
Référence	1000	0 %	1.05 %
M1	200	- 1.29 %	0.69 %
M2	200	3.5 %	1.89 %

TABLE 3.11 : Comparaison méthode de regroupement de trajectoire

La méthode M1 semble être plus précise pour le calcul du Best Estimate, de plus la seconde méthode M2 mène à une forte incertitude sur le Best Estimate. Afin de représenter ce problème la figure 3.16 montre la valeur du Best Estimate pour chaque scénario simulé dans le moteur ALM.

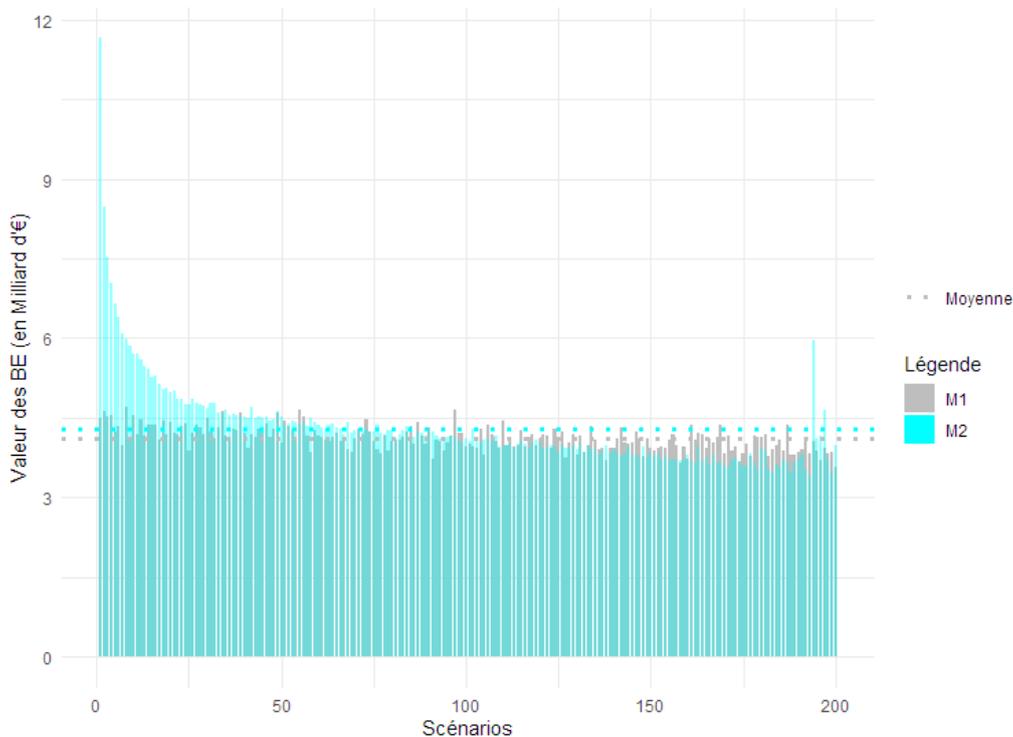


FIGURE 3.16 : Valeur du BE en fonction du scénario

Il est observable que pour les premiers scénarios avec M2 la valeur du Best Estimate est très élevée (près de trois fois supérieure au scénario de référence), ces valeurs sont liées aux scénarios extrêmes représentés avec M2. La présence de scénarios extrêmes mène donc à un écart-type très important qui conduit à une incertitude élevée. Pour la suite de l'étude, on traitera donc uniquement la méthode M1.

3.2.4 Impact de cette méthode sur la valorisations des options et garanties financières (TVOG)

Afin d'étudier la pertinence de ces méthodes au sein d'une compagnie d'assurance-vie, l'impact de la discrétisation des trajectoires sur la valorisation de la TVOG est étudié. En effet, le lissage des trajectoires joue un rôle direct dans la valeur de la TVOG de la compagnie. On retrouve les résultats

obtenus dans le tableau 3.12 pour la méthode M1 avec un pas de discrétisation $p = 5$.

Méthode	TVOG (en % du BE)
Production	3.3%
M1	2.9%

TABLE 3.12 : Impact de M1 sur la TVOG

Le lissage des scénarios extrêmes diminue donc la valeur de la TVOG. Le choix du pas de discrétisation a un impact direct sur cette valeur, car plus on augmente le pas, plus le lissage va être important et plus on va se rapprocher d'un modèle déterministe ou la TVOG est nulle.

3.2.5 Résultats et Limites

Les deux méthodes implémentées posent toutes deux des problèmes dans la modélisation de l'actif de la compagnie. Dans cette partie les deux méthodes sont utilisées avec un un nombre initial de 5 000 scénarios. Les faisceaux de trajectoires vont être discrétisés avec un pas de discrétisation $p = 5$ afin d'obtenir 1 000 scénarios discrétisés. Cela permet d'avoir un temps de calcul similaire aux temps de calcul original. Le tableau 3.13 donne les résultats obtenus en utilisant les deux méthodes.

Méthode	Nombre de Scénario	BE (en Millions d'€)	BE/VM	Ecart de (Convergence en %)	Incertitude sur le BE
Cible	5 000	4 203	0.9822	- 0.18 %	0.323 %
M1	1 000	4 136	0.9803	- 0.22%	0.421 %
M2	1 000	4 301	0.9798	-0.51 %	1.84 %

TABLE 3.13 : Conclusion impact M1 et M2

La méthode M2 donne des résultats moins performants que M1 dans le calcul du Best Estimate. De plus l'écart de convergence obtenu avec M1 est similaire à la valeur cible. En outre malgré le nombre de scénarios divisé par 5 l'incertitude trouvée par M1 sur le BE reste faible et inférieure à 0.5 %. Cela est dû au lissage des trajectoires menant à un faible écart-type. En conclusion dans une logique de calcul de Best Estimate, M1 donne des résultats satisfaisants. Par la suite il est donc choisi de réaliser les chocs sur cette méthode. Néanmoins dans le cadre d'estimation des valeurs extrêmes la méthode M1 peut conduire à des résultats biaisés notamment sur la valeur de la TVOG et du ratio de solvabilité.

3.3 Résultats et Sensibilités

Le cadre de l'étude s'inscrit dans le contexte économique et son impact sur les indicateurs réglementaires. Les deux parties précédentes présentent des méthodes afin d'améliorer la convergence du Best Estimate de la compagnie. Il est ici comparé les méthodes implémentées afin de choisir quelle modification apporter au modèle initial pour répondre aux exigences de l'ACPR. De plus des sensibilités sont réalisées afin de tester la résistance des modèles à des chocs de taux. Cette partie cherche donc à définir les avantages des méthodes utilisées ainsi que leurs limites sous Solvabilité 2.

3.3.1 Comparaison des méthodes

Le but de l'étude étant d'améliorer la convergence du Best Estimate, une comparaison des méthodes suivantes est faite :

- l'utilisation d'un générateur hybride défini en 3.1 ;
- l'utilisation de la méthode M1 de regroupement des trajectoires définies en 3.2.1.

Les résultats obtenus sont comparés sur 5 graines différentes entre eux et aux valeurs cibles. La figure 3.17 représente la valeur du Best Estimate normalisé.

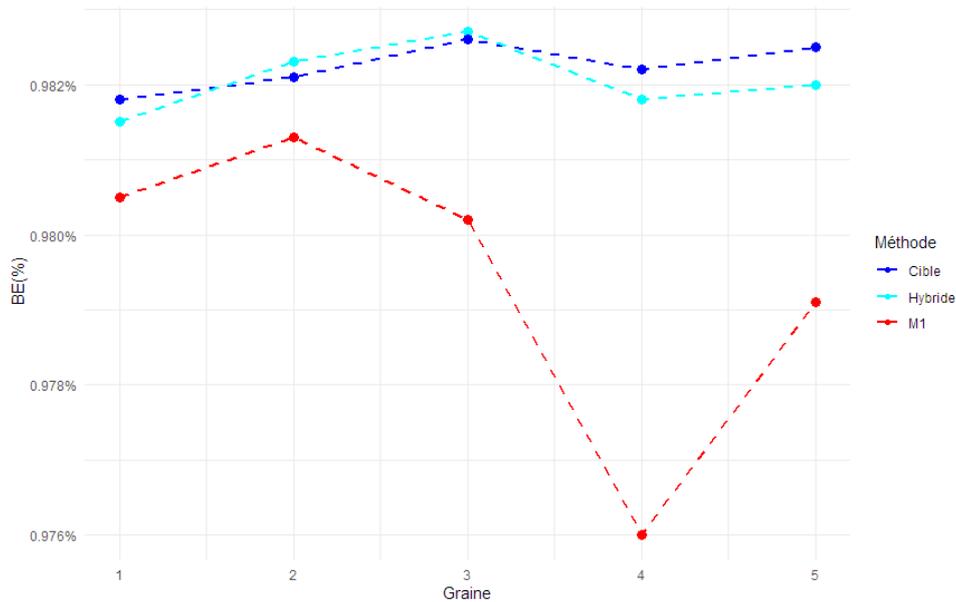


FIGURE 3.17 : Valeur du BE pour les méthodes implémentées

Il est observé que les résultats en utilisant le générateur hybride sont très proches des valeurs cibles souhaitées tandis que le passage par le regroupement paraît moins performant. En effet un écart incompressible est lié à cette méthode. La figure 3.18 représente l'écart de convergence pour chaque méthode.

Les fuites de modèles observées sont les plus importantes pour la méthode de réduction de variance en utilisant le générateur hybride. Les fuites observées entre la modélisation cible et la modélisation avec M1 semblent avoir des résultats assez similaires. La performance de M1 sur la fuite de modèle est expliquée par la méthode générant des trajectoires lisses assez proches de la moyenne. En effet la modélisation se rapproche d'une modélisation déterministe qui n'est pas censée induire de fuite de modèle. De plus l'incertitude sur le Best Estimate est tracée 3.19.

Les résultats montrent que l'incertitude obtenue à l'aide du générateur hybride est supérieure aux exigences de l'ACPR. Néanmoins ceux-ci améliorent déjà l'incertitude par rapport au modèle utilisé en production (3.5) en décembre 2022. De plus les résultats des trois méthodes pour l'incertitude ne sont pas réellement comparables car le nombre de scénarios différent, ce qui impacte le calcul de l'incertitude. Le tableau 3.14 résume les résultats en calculant la moyenne des valeurs présentées ci-dessous.

Méthode	BE (Normalisé)	EC	IC
Cible	0.9822	- 0.18 %	0.323 %
Hybride	0.9821	- 0.29 %	0.728 %
M1	0.980	- 0.22 %	0.421 %

TABLE 3.14 : Comparaison des méthodes utilisées

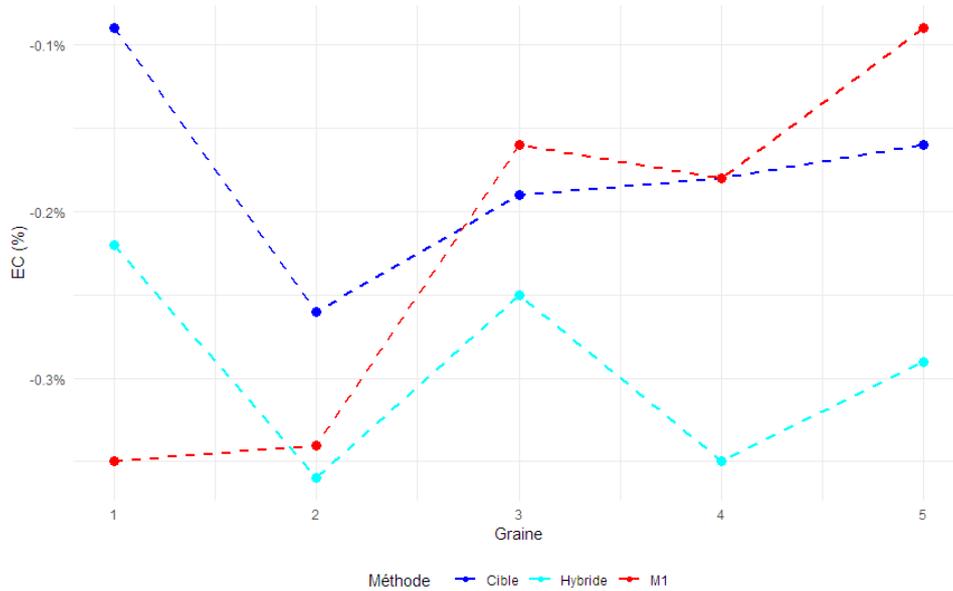


FIGURE 3.18 : Fuite de Modèle en fonction de la méthode utilisé

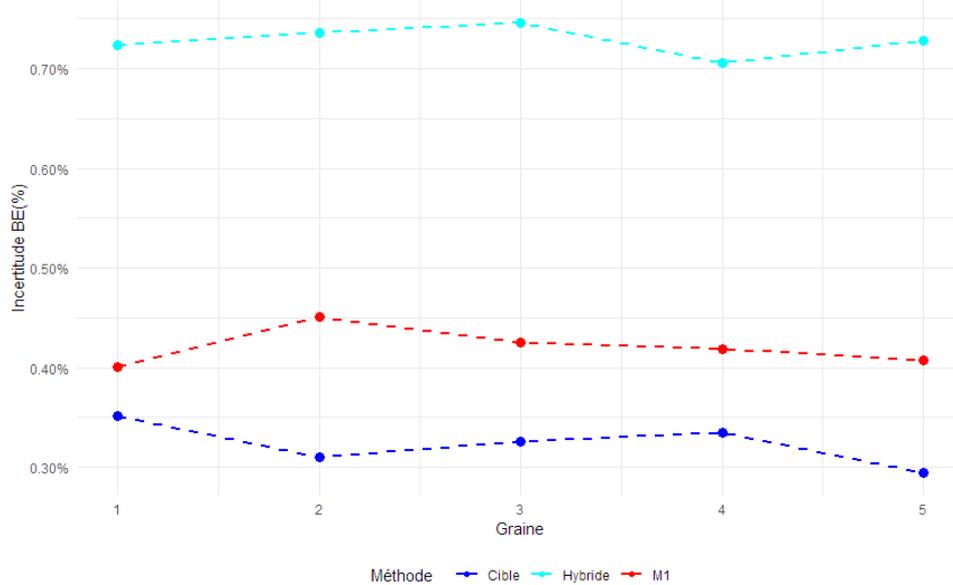


FIGURE 3.19 : Incertitude sur le BE en fonction de la méthode

Comme évoqué ci-dessus la méthode M1 de regroupement des scénarios donne des meilleurs résultats pour la convergence du BE. Toutefois cette méthode a comme défaut majeur de supprimer les valeurs extrêmes dans la modélisation de l'actif. Cette contrainte ne pose pas de problème dans le cadre du calcul du BE mais elle ne permet pas un bon calcul du SCR car les valeurs choquées ne seront pas représentatives de la réalité. Par ailleurs l'utilisation d'un générateur hybride permet d'obtenir des résultats satisfaisants mais il est nécessaire d'augmenter le nombre de scénarios pour avoir une incertitude sur le BE acceptable.

3.3.2 Sensibilités

Cette partie traite de la robustesse des différents modèles à des chocs de taux. Cette section permet de quantifier l'impact d'un changement brusque de contexte de taux sur les résultats présentés. Les sensibilités sont réalisées sur le modèle de production (1 000 scénarios), le modèle M1 et le modèle avec le générateur hybride. Les différents chocs sont :

- Choc Up1 : Choc à la hausse sur la courbe des taux sans risque à +100 bps
- Choc Up2 : Choc à la hausse sur la courbe des taux sans risque à +200 bps
- Choc Down : Choc à la baisse issu des chocs recommandés par l'EIOPA à Décembre 2022

La figure 3.20 représente la courbe des taux sans risque selon les chocs effectués.

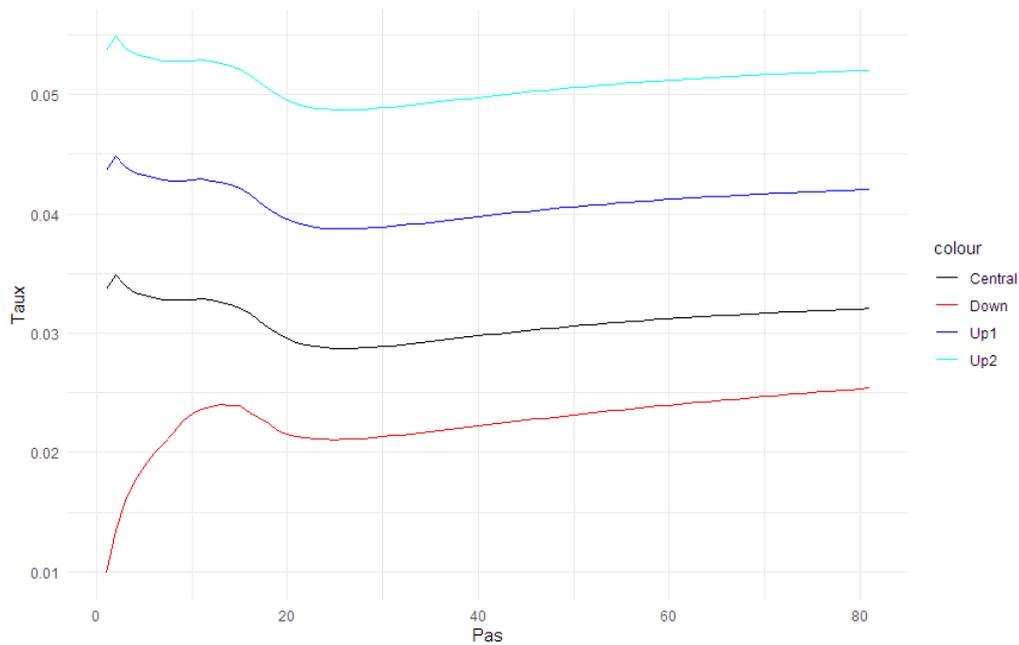


FIGURE 3.20 : Chocs réalisés sur la courbe des taux sans risque

Choc à la hausse

Tout d'abord l'intérêt est porté sur les chocs réalisés à la hausse, la figure 3.21 représente les fuites de modèles pour les chocs effectués à la hausse avec 5 graines différentes.

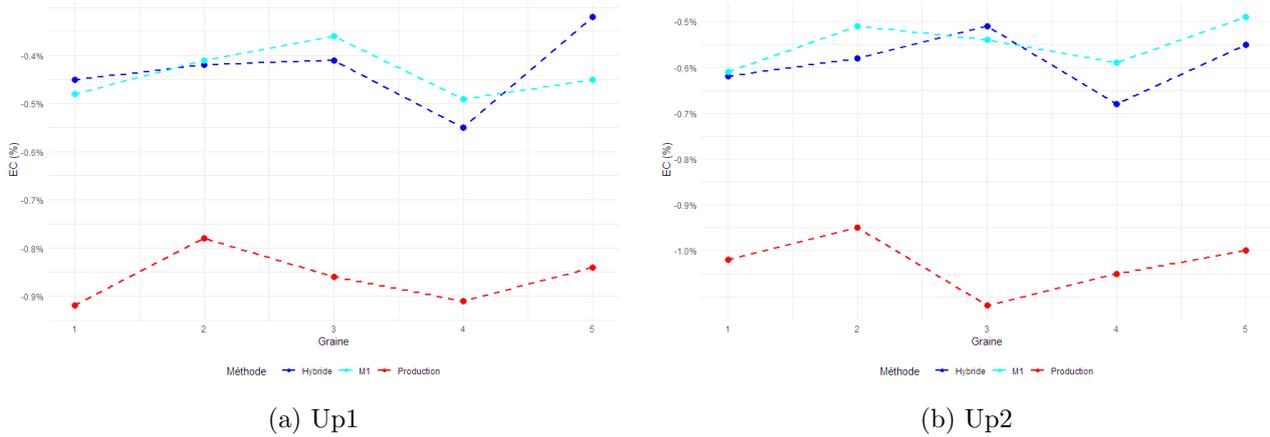


FIGURE 3.21 : Représentation de la fuite de modèle avec des chocs de taux à la hausse

Les graphiques montrent que la fuite de modèle augmente lorsque l'on réalise des chocs à la hausse, néanmoins il est clair que les deux méthodes implémentées permettent l'obtention de résultats plus précis qu'en utilisant le modèle actuel malgré une forte hausse des taux. L'incertitude sur la valeur du Best Estimate est représentée en 3.22.

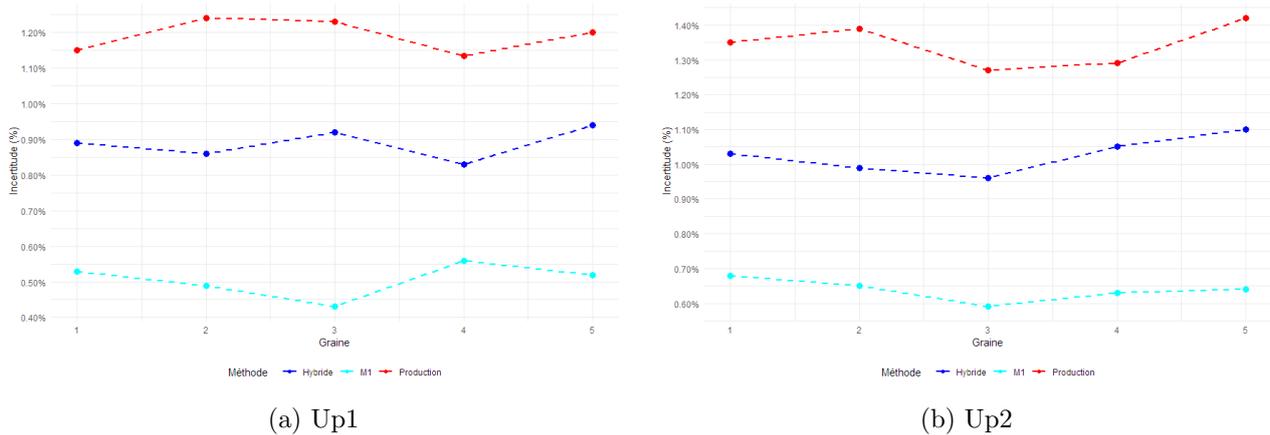


FIGURE 3.22 : Représentation de l'incertitude sur le BE avec des chocs de taux à la hausse

De manière similaire à la fuite de modèle, l'incertitude sur le BE augmente pour chacun des modèles, toutefois les deux modèles permettent une représentation plus précise du BE. L'ensemble des résultats est présenté sous forme de tableau 3.15 en calculant la moyenne des différentes graines.

Méthode	BE (M€)		EC		IC	
	Up1	Up2	Up1	Up2	Up1	Up2
Production	4 153	4 084	-0.86 %	-1.03 %	1.19 %	1.34 %
Hybride	4 140	4 118	-0.43 %	-0.57 %	0.94 %	1.03 %
M1	4 095	4 094	-0.44 %	-0.55 %	0.51 %	0.64 %

TABLE 3.15 : Résultat sensibilité à une hausse des taux

Les résultats trouvés lors de chocs de taux à la hausse montrent que le niveau de taux et le contexte économique a un impact direct sur la qualité des résultats. Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes permettant l'amélioration de la convergence pour avoir des résultats acceptables. Les méthodes présentées permettent de résoudre ce problème partiellement selon les chocs appliqués.

Chocs à la baisse

L'intérêt est maintenant porté sur des chocs de taux à la baisse, la figure 3.23 représente les fuites de modèle.

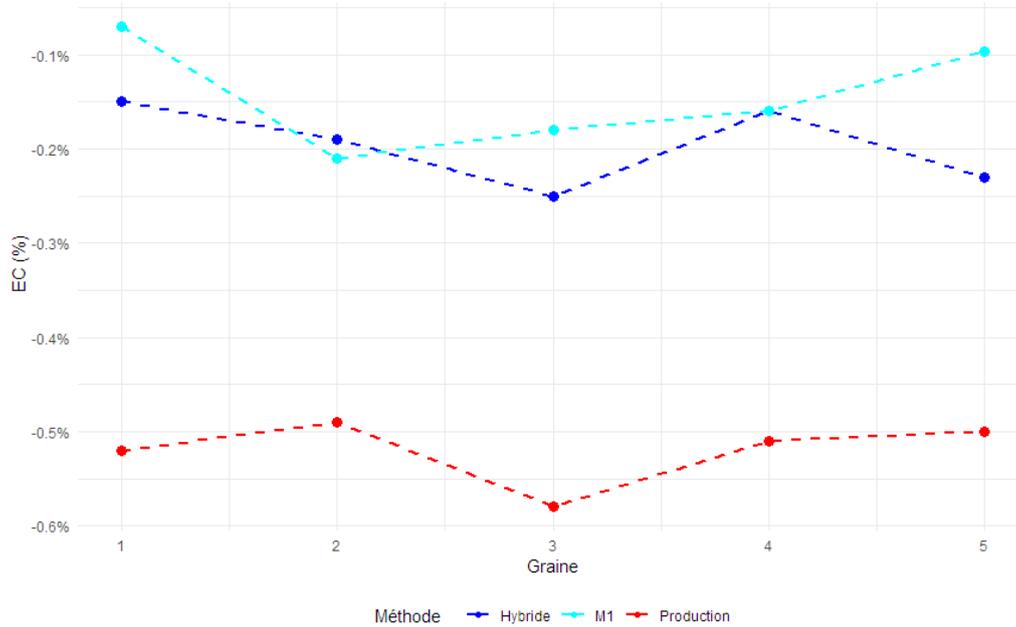


FIGURE 3.23 : Chocs réalisés sur la courbe des taux sans risque

Les fuites observées baissent de manière significative par rapport au scénario central. L'incertitude sur le BE est de même représentée en figure 3.24.

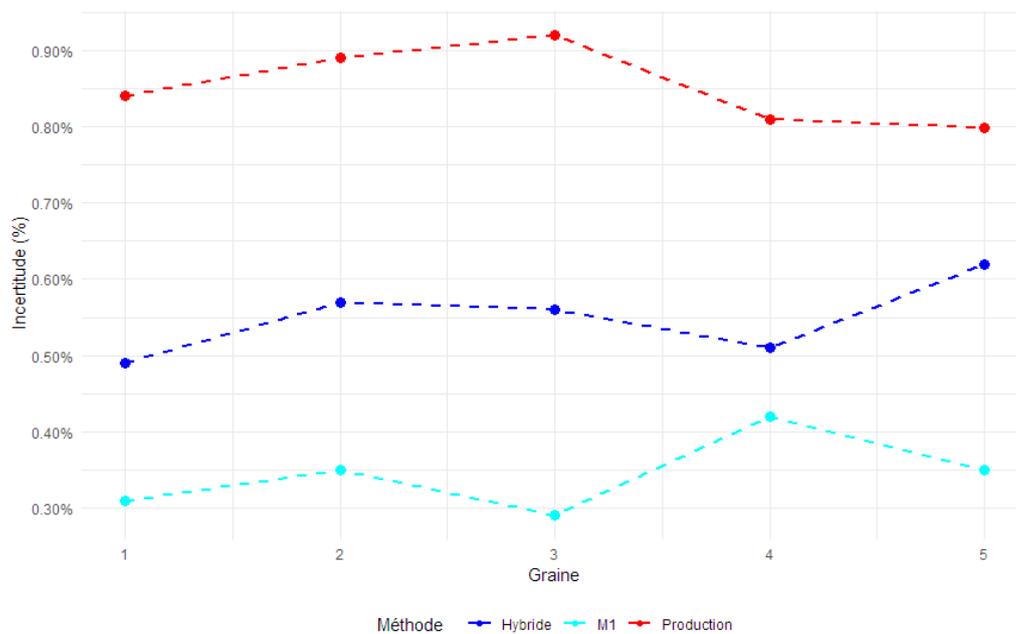


FIGURE 3.24 : Chocs réalisés sur la courbe des taux sans risque

De manière similaire à la fuite de modèle, l'incertitude baisse dans ce contexte, permettant au modèle avec un générateur hybride de valider le seuil exigé par l'ACPR en gardant 1 000 scénarios. Le tableau 3.16 représente les résultats moyens.

Méthode	BE (M€)	EC	IC
Production	4 385	- 0.52 %	0.85 %
Hybride	4 368	- 0.2 %	0.55 %
M1	4 308	-0.15 %	0.34 %

TABLE 3.16 : Tableau Choc à la baisse

Les résultats montrent que la baisse des taux a un impact bénéfique sur la convergence du modèle de la compagnie.

3.3.3 Conclusion

Lors de cette partie, deux méthodes ont été comparées, la première correspondant au changement du générateur de nombres aléatoires en passant à un générateur hybride. Cette méthode permet une nette amélioration de la convergence. Elle peut de plus être couplée à d'autres techniques afin de respecter les seuils réglementaires dans un contexte économique où les taux sont élevés. La seconde méthode retenue consistant à effectuer un regroupement de scénarios permet l'obtention de résultats rapides mais ayant un écart relatif avec la valeur cible non négligeable. De plus cette méthode est uniquement valable dans le cadre du calcul du Best Estimate. En effet comme expliqué précédemment le lissage des valeurs extrêmes est un défaut très contraignant qui ne permet pas le calcul précis du ratio de solvabilité pour une compagnie d'assurance. Afin de réaliser les calculs réglementaires il a donc été retenu l'implémentation d'un générateur hybride.

3.3.4 Limites

Au sein de l'étude sont abordées différentes méthodes impactant la valorisation des valeurs clés des sociétés d'assurance-vie et plus précisément la valeur du Best Estimate. Les principaux points étudiés concernent la robustesse et l'efficacité de celles-ci dans un contexte assurantiel. Cependant, un certain nombre de limites ont été rencontrées, il est important de les souligner afin d'avoir une bonne interprétation des résultats et des conclusions en découlant.

La première limite traite du choix du modèle et des hypothèses faites par la compagnie. En effet, le Générateur de Scénarios Economiques repose sur un modèle de taux Gaussien à deux facteurs et un modèle de crédit reposant sur des intensités de défaut (LMN). Durant le processus de calibration du modèle de crédit, un écart relatif assez important entre les vecteurs de spreads théoriques et de marchés est apparu tout en restant sous le seuil de validité. Ce point peut avoir un impact sur la convergence du modèle et donc la performance des méthodes implémentées, plusieurs pistes telles que le changement de l'instrument de calibration, passage à des *Credit Default Swap* peut être une solution pour réduire cet écart ou le changement du processus d'intensité de défaut peut aussi réduire cet écart. De plus, l'ensemble des résultats sont générés à partir d'un seul modèle de taux, une étude sur l'impact du modèle de taux choisi peut permettre une comparaison plus approfondie de l'impact de nos travaux sur la robustesse du modèle de la compagnie dans un contexte de taux élevés.

De plus, les différentes méthodes de réduction de variance constituent un point clé dans la modélisation financière et l'analyse des risques, car elles permettent la production d'estimations plus précises. Une étude plus approfondie des différentes méthodes utilisables dans le modèle peut aussi enrichir l'étude. Cela permettrait d'enrichir le mémoire et de comprendre les problématiques inhérentes aux différentes

techniques de réduction de variance et donc de conclure sur la plus adaptée au modèle et au contexte économique actuel.

Une limite majeure du mémoire est la contrainte en temps de calcul, omniprésente tout au long de la réalisation des travaux. En effet, l'ensemble des résultats ont été calculés sur 8 graines différentes, Or la performance de la graine peut varier en fonction du contexte économique ainsi que des hypothèses réalisées et donc avoir un impact direct sur les résultats clés de la compagnie. En outre, le processus demande une puissance de calcul assez importante dans le but d'obtenir des résultats pour chaque méthode et pour chaque graine. En investissant davantage de temps de calcul et donc en calculant les indicateurs selon un nombre de graine plus important, il aurait été possible d'accroître la précision des résultats et de renforcer la pertinence des conclusions trouvées. Il est également à souligner que la variation de la graine a eu pour certains résultats un impact assez important, ce qui peut témoigner de la sensibilité du modèle à la configuration initiale.

Une limite liée à la méthode d'agrégation des trajectoires est aussi apparue. Bien que l'objectif principal de notre mémoire est la valorisation du Best Estimate, un indicateur clé utilisé par les sociétés est le ratio de solvabilité. Néanmoins celui-ci est mal représenté lors de l'utilisation de cette technique à cause du lissage des trajectoires extrêmes engendrées. Cela a donc constitué un frein à l'étude des SCR durant le mémoire.

Afin de conclure, le mémoire met en évidence des limites contraignantes liées aux choix de modèles, des hypothèses et des approximations faites au sein des compagnies d'assurance-vie. De plus, la durée de calcul demeure un défi pour répondre aux exigences réglementaires sans avoir recours à des approximations excessives. L'exploration des méthodes de réduction de variance aurait aussi pu permettre l'obtention de résultats et de conclusions plus exhaustifs. Toutefois, l'étude apporte une contribution à l'évaluation du Best Estimate avec différentes méthodes, soulignant la nécessité d'une approche plus exhaustive pour renforcer la validité des conclusions.

Conclusion

Dans un contexte de taux élevés, la qualité du Best Estimate s'est considérablement dégradé au sein de la compagnie. Ce mémoire a pour objectif principal d'améliorer les outils de calcul du Best Estimate de Prepar VIE, afin de respecter les seuils réglementaires exigibles par l'ACPR. L'étude repose sur l'utilisation de méthodes visant à améliorer la qualité des résultats en conservant un temps de calcul similaire au modèle initiale. Des méthodes visant à augmenter la vitesse de convergence ont donc été testées.

Tout d'abord avant l'intégration des méthodes, une étape de vérification du GSE de Prepar VIE a été effectuée. En effet le modèle de taux (G2++) et le modèle de crédit (LMN en cascade) ont validé l'ensemble des tests (test de martingalité, test de calibrage et test de market-consistency). De plus un test sur la convergence du modèle ALM a été réalisé, permettant de conclure que celui-ci tend vers des résultats de plus en plus précis en augmentant le nombre de scénarios. Cependant la contrainte de durée de calcul ne permet pas d'accroître ce nombre. Cette étape permet de valider de la modélisation stochastique. Ainsi pour la suite de l'étude des valeurs cibles du modèle ALM ont été définies en multipliant le nombre de scénarios par 5 par rapport au modèle de production.

En réponse à la problématique, des travaux ont permis de quantifier l'impact du choix du générateur de nombres aléatoires dans le GSE. Cette étude a mis en lumière l'efficacité de l'approche de quasi Monte-Carlo par rapport à l'utilisation de générateurs pseudo-aléatoires. De plus, le générateur hybride implémenté a permis d'obtenir la meilleure précision sur les valeurs du Best Estimate et ainsi de passer en dessous des seuils exigés.

De plus l'implémentation de la seconde méthode, qui repose sur le regroupement de scénarios, s'est avérée moins concluante. Son objectif principal est la réduction du temps de calcul et s'inscrit donc plus dans une problématique ORSA. Bien que le temps de calcul ait été effectivement réduit, cette approche a entraîné une dégradation de la qualité du Best Estimate. Les deux sous-méthodes testées ont mené à des valeurs de Best Estimate pouvant présenter un écart relatif avec la valeur cible de $|3\%$.

Une dernière étape a consisté à vérifier la robustesse des méthodologies utilisées. Ainsi des sensibilités sur le niveau des taux ont été réalisées. Celles-ci ont montré que le générateur hybride permet une convergence plus rapide et répond partiellement à la problématique de précision sur le Best Estimate. En effet l'incertitude sur le Best Estimate reste au dessus des seuils acceptables, cependant l'écart de convergence est conforme aux normes et l'écart relatif par rapport à la valeur cible est faible. Deux solutions peuvent permettre de résoudre le problème de l'incertitude, mais en contrepartie dégrade le temps de calcul : la première est de réduire le pas de projection du GSE et la seconde est l'augmentation du nombre de scénarios. De plus afin d'améliorer la qualité du Best Estimate des pistes d'améliorations reposent sur des travaux sur les schémas de discrétisation utilisés ou encore sur le pas de discrétisation choisi et l'utilisation de différentes méthodes de réduction de variance, une amélioration de la performance du modèle de crédit en passant à un processus CIR++ peut aussi être une piste. Une

revue du modèle ALM pourrait aussi être réalisé afin de diagnostiquer les approximations qui peuvent mener à des fuites. De plus dans un cadre ORSA des test en passant par des proxy peuvent être réalisés.

La première limite rencontrée sur les travaux est la puissance de calcul disponible. En effet, afin de perfectionner l'étude il aurait été intéressant de générer des résultats sur un nombre de graine plus important pour conclure sur la convergence du modèle. De plus le pas de projection fixe utilisé par la compagnie n'a pas permis de mettre en lumière de manière significative la différence entre l'utilisation de suites de Sobol et le générateur de nombres aléatoires hybrides.

Ainsi ce mémoire met en évidence diverses questions relatives à la convergence du GSE. Une perspective d'ouverture serait de quantifier l'impact des méthodes implémentées sur des modèles de taux différents tels que le modèle LMM+. Une autre suite possible de l'étude pourrait être de quantifier l'impact des deux méthodes présentées sur le ratio de couverture de la société.

Bibliographie

- ACPR (2013). Orientations Nationales Complémentaires aux Spécifications Techniques. *Revue Banque de France*.
- ACPR (2020). Générateurs de scénarios économiques : points d'attention et bonnes pratiques. *Revue Banque de France*.
- ACPR (2022). Gouvernance dans Solvabilité II. URL : <https://acpr.banque-france.fr/europe-et-international/assurances/reglementation-europeenne/solvabilite-ii/gouvernance-dans-solvabilite-ii>.
- ANDRÈS, H., ARROUY, P.-E., BONNEFOY, P. et BOUMEZOUED, A. (2022). White Paper : A new hybrid Random Number Generator for more accurate valuation of insurance liabilities. Rapp. tech. URL : <https://www.milliman.com/-/media/milliman/pdfs/2022-articles/12-12-22-random-number-generator-insurance-liabilities.ashx>.
- ARMEL, K. et PLANCHET, F. (2020). Utilisation de modèles de taux de type CIR pour évaluer la valeur économique des contrats d'épargne participatifs. Rapp. tech. Laboratoire Sciences Actuarielles et Financières.
- ASSAM, K. (2011). Discrétisation de la distribution des trajectoires de l'actif - Application au calcul du best Estimate d'un contrat d'épargne. Mémoire d'actuariat. Conservatoire Nationale des Arts et Métiers.
- AZZOPARDI, V., CARREIRA, M., DUMAS, N. et JARRIJON, S. (2023). Le marché de l'assurance-vie en 2022. URL : https://acpr.banque-france.fr/sites/default/files/medias/documents/20230320_as146_av_2022_vf.pdf.
- BACHELIER, L. (1900). Théorie de la spéculation.
- BANQUE DE FRANCE (2023). Taux indicatifs des bons du Trésor et OAT. URL : <https://www.banque-france.fr/statistiques/taux-et-cours/taux-indicatifs-des-bons-du-tresor-et-oat>.
- BLACK, F. et SCHOLES, M. (1973). The Pricing of options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, p. 637-654.
- BOTREL, T. (2021). Modélisation risque-neutre du risque de crédit. Mémoire d'actuariat. ISFA.
- BOUCHARD, A. C. (2017). Utilisation de la technique du Least Squares Monte-Carlo : paramètres d'allocation et facteurs financiers. Mémoire d'actuariat. CEA.
- BRIGO, D. et MERCURIO, F. (2006). Interest Rate Models - Theory and Practice. Second Edition. Springer.
- BRUNET, O. (jan. 2011). Assurance vie : tableau comparatif des taux depuis 2000 à 2023. URL : <https://www.toutsurmesfinances.com/placements/assurance-vie-historique-des-taux-de-rendements-des-fonds-en-euros-depuis-2000.html>.
- CERISIER, V. (2021). ORSA : Application de méthodes de machine learning dans le calcul de la solvabilité infraannuelle. Mémoire d'actuariat. Université Paris-Dauphine.
- CHENG, P.-K. et PLANCHET, F. (2019). Stochastic Deflator for an Economic Scenario Generator with Five Factors. *Laboratoire Sciences Actuarielles et Financières*.
- DIXON, L. C. W. et SZEGO, G. P. (1978a). Constrained Minimization Using the Genetic Algorithm. URL : <https://fr.mathworks.com/help/gads/constrained-minimization-using-ga.html>.

- DIXON, L. C. W. et SZEGO, G. P. (1978b). Minimization Using Simulated Annealing Algorithm. URL : <https://fr.mathworks.com/help/gads/simulated-annealing-examples.html>.
- EIOPA (2023). Risk-free interest rate term structures. URL : https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures_en.
- Haltonset (R2023b). URL : <https://fr.mathworks.com/help/stats/haltonset.html>.
- HECART, J. (2016). La place du générateur de scénarios économiques dans les calculs de solvabilité en assurance-vie. Mémoire d'actuariat. CNAM.
- HOK, J. et KUCHERENKO, S. (2022). The importance of being scrambled: supercharged Quasi Monte Carlo. *Research Gate*.
- INSEE (2023). Taux d'inflation. URL : <https://www.insee.fr/fr/statistiques/2122401#tableau-figure1>.
- JÄCKEL, P. (2002). Monte carlo methods in finance. Wiley Finance.
- KUO, F. Y. et NUYENS, D. (2016). A Practical Guide to Quasi-Monte Carlo Methods. *Research Gate*.
- LAGARIAS J. C., J. A. R. M. H. W. et WRIGHT, P. E. (1998). fminsearch Algorithm. URL : https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/fminsearch.html?s_tid=doc_ta.
- L'ECUYER, P. (2016). Randomized Quasi-Monte Carlo: An Introduction for Practitioners. fhal-01561550f. Stanford, United States.
- LONGSTAFF, F., MITHAL, S. et NEIS, E. (2005). Corporate Yield Spreads: Default Risk or Liquidity? New Evidence from the Credit Default Swap Market. *The Journal Of Finance*.
- MECHERGUI (2018). Evaluation du capital économique sous Solvabilité 2 : Mise en place de l'approche Curve Fitting. Mémoire d'actuariat. Université Paris Dauphine.
- O. NTEUKAM (2012). Convergence des scenarios et écarts de valorisation. URL : [http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/fp-isfa.nsf/0/0b9df464e9543283c1256f130067b2f9/\\$FILE/ONT1.pdf](http://www.ressources-actuarielles.net/EXT/ISFA/fp-isfa.nsf/0/0b9df464e9543283c1256f130067b2f9/$FILE/ONT1.pdf).
- OWEN, A. B. (1995). Randomly Permuted (t, m, s) -Nets and (t, s) -Sequences. Springer, p. 299-317.
- PANORABANQUES (2017). Comparer les notations des banques. URL : <https://billetdebanque.panorabanques.com/actualites/comparer-les-notations-des-banques/>.
- PARLEMENT EUROPÉEN et CONSEIL DE L'UNION EUROPÉENNE (2009). Directive 2009/138/CE du 25 novembre 2009 sur l'accès aux activités de l'assurance et de la réassurance et leur exercice (solvabilité II). OJ L. 335/I.
- PLANCHET, F. et NTEUKAM, O. (2010). Evaluation stochastique des contrats d'épargne : agrégation des trajectoires de l'actif et mesure de l'erreur liée à l'agrégation.
- POUTCOU, V. (2022). Calibrage et impacts du modèle G2++ sur le bilan d'une société d'assurance vie. Mémoire d'actuariat. DUAS.
- R. KORN, E. K. et KROISANDT, G. (2010). Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance. Boca Raton.
- SABOURIN, E. (2019). Intégration du spread de crédit stochastique dans la modélisation ALM d'un assureur Vie. Mémoire d'actuariat. ISUP.
- Sobolset (R2023b). URL : <https://fr.mathworks.com/help/stats/sobolset.html>.
- WALTZ R. A., J. L. M. J. N. et ORBAN, D. (2006). fmincon. URL : <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html>.

Annexe A

Méthodes de réduction de variances dans un contexte assurantiel

Les méthodes de Monte-Carlo consiste à approcher l'espérance suivante (A.1)

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) f_X(x) dx, \quad (\text{A.1})$$

avec X un vecteur aléatoire de dimension d et φ une fonction mesurable, à l'aide de la moyenne empirique (A.2)

$$\bar{\varphi}_n(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X_i). \quad (\text{A.2})$$

Lors de l'estimation issue de simulations Monte-Carlo, le nombre de scénarios et le jeu de nombre aléatoire ont un impact sur les résultats. De plus, le nombre fini de scénarios mène à une erreur d'échantillonnage, c'est-à-dire à une approximation de la valeur "réelle" obtenue avec un nombre de simulations infini. Dans les compagnies d'assurances, le nombre de scénarios a un impact sur le temps de calcul, il est donc impossible de prendre des valeurs très importantes pour réduire cette erreur. Les principales méthodes de réduction de variances liées à l'utilisation de méthodes de Monte-Carlo sont décrites dans cette annexe.

En effet, il est possible d'estimer l'erreur autour de l'estimateur de la moyenne à l'aide du théorème central limite. L'intervalle obtenu est de la forme suivante (A.3)

$$\left[\varphi_n(X) - q_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \varphi_n(X) + q_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]. \quad (\text{A.3})$$

La taille de l'intervalle de confiance peut être réduite de deux manières, la première consiste à jouer sur le nombre de scénarios n . La taille de l'intervalle se réduit lorsque le nombre de simulations n augmente. La seconde manière consiste à jouer sur la racine de la variance σ en utilisant des méthodes de réduction de variance. Cela consiste à construire des estimateurs alternatifs de variance plus faible. Par la suite, sont traités les principales méthodes de réduction de variance ainsi que leurs estimateurs.

A.1 Variable antithétique

Une méthode courante utilisée pour améliorer la précision des résultats est l'utilisation de variables antithétiques. Elle consiste à générer les nombres aléatoires par paire, le second paquet correspondant à l'opposé du premier. Cela permet la réduction de la variance de l'estimateur de Monte-Carlo. Si l'on

veut estimer une quantité X par un estimateur de Monte-Carlo \hat{X} . L'idée est de construire un nouvel estimateur en prenant la moyenne des deux estimateurs. On part de l'estimateur suivant A.4

$$\bar{\varphi}_{\text{anti}}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi(X_{1,i}) + \varphi(X_{2,i})}{2}. \quad (\text{A.4})$$

Soit $N \sim N(0, 1)$, le couple $(N, -N)$ est un couple de variable antithétique et ϕ une fonction mesurable. Soit L'algorithme 4 présente la méthode d'implémentation de cette méthode.

Algorithm 4 Méthode par variables antithétiques

1. Simuler N_i i.i.d. $\sim N(0, 1)$ pour $i = 1, \dots, n$.
 2. Calculer $X_i = F^{-1}(N_i)$ et $X'_i = F^{-1}(-N_i)$.
 3. Calculer $F_i = \varphi(X_i)$ et $F'_i = \varphi(X'_i)$
 4. En déduire $\bar{\varphi}_{\text{anti}}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{F_i + F'_i}{2}$.
-

Cette méthode est fréquemment utilisée dans un contexte assurantiel du part de sa facilité d'implémentation au sein du code.

A.2 Variable de contrôle

Les méthodes utilisant des variables de contrôle décomposent l'espérance à calculer en une partie connue et une seconde à évaluer par Monte-Carlo, mais avec une variance moindre. Pour estimer une quantité \hat{X} on considère une variable W tel que $E(W)$ est connue, on obtient alors A.5

$$\mathbb{E}[\varphi(X) + W - W] = \mathbb{E}[\varphi(X) - W] + \mathbb{E}[W]. \quad (\text{A.5})$$

Cette méthode permet une réduction de variance lorsque $\text{Var}(X - W) \leq \text{Var}(X)$. On obtient alors l'estimateur A.6

$$\bar{\varphi}_{n,W}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varphi(X_i) \cdot W_i + \mathbb{E}[W]). \quad (\text{A.6})$$

Dans le but de réduire la variance, il est nécessaire de prendre un coefficient optimal $\hat{\beta} = \frac{\text{Cov}(\phi(X), W)}{\text{Var}(W)}$, on obtient alors l'estimateur suivant A.7

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(X_i) \cdot \hat{\beta} \cdot (W_i - \mathbb{E}[W]). \quad (\text{A.7})$$

L'utilisation de cette méthode peut conduire à des mauvais résultats compte tenu du temps d'implémentation pour déterminer les coefficients β optimaux.

A.3 Méthode par conditionnement

La méthode par conditionnement utilise le fait que pour une variable W , la propriété suivante s'applique (A.8)

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X) | W]] = \mathbb{E}[\varphi(X)]. \quad (\text{A.8})$$

L'estimateur observé est alors (A.9)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\varphi(X) | W_i] \quad (\text{A.9})$$

Afin d'adopter une approche par conditionnement, il faut passer par l'algorithme 5.

Algorithm 5 Méthode par conditionnement

1. Générer W_1, \dots, W_n selon W .
 2. Calculer $Z_i = \mathbb{E}[\varphi(X) | W_i]$.
 3. Calculer $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$.
-

Cette méthode peut être utilisée lorsque la variable W peut être générée facilement et lorsque l'espérance de $\varphi(X) | W$ est explicite.

A.4 Méthode de quasi-Monte-Carlo

Les méthodes de quasi-Monte-Carlo sont une approche alternative visant à accélérer la convergence des méthodes de Monte-Carlo. Elles reposent sur l'utilisation de générateurs quasi-aléatoires. Contrairement à des générateurs classiques, ces générateurs ne cherchent pas à reproduire du hasard, les points sont répartis dans l'espace de manière déterministe afin de remplir au mieux l'espace. JÄCKEL (2002) développe plus en détail les différentes suites permettant de générer du quasi-aléatoires. De plus, il est considéré que la discrédance de ces suites pour n points est $O(\frac{\log(n)^d}{n})$ où d est la dimension. On note que pour des dimensions élevées la convergence n'est pas forcément plus rapide.