



**Mémoire présenté le :
pour l'obtention du diplôme
de Statisticien Mention Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuaires**

Par : _____

Sujet : _____

Confidentialité : NON OUI (Durée : 1 an 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus.

*Membre présents du jury de
l'Institut des Actuaires*

*Membres présents du jury de la
filière*

Entreprise :

Nom :

Signature :

*Directeur de mémoire en
entreprise :*

Nom :

Signature :

Invité :

Nom :

Signature :

***Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels
(après expiration de l'éventuel
délai de confidentialité)***

Signature du responsable entreprise

Secrétariat

Signature du candidat

Bibliothèque :

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier toute ma famille sans qui je n'aurais opté un jour pour le milieu tant redouté de l'actuariat.

Les professeurs de l'ISUP qui ont su m'apporter tout leur savoir-faire ainsi que les professionnels du milieu actuariel ou financier dont les conseils ont su m'éclairer .

Et enfin une mention spéciale à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la relecture de ce mémoire.

RESUME

Les Banques ont aujourd'hui la possibilité de mettre en place un modèle interne de mesure du risque de marché. L'une des composantes indispensables de ce modèle est la création d'un programme de stress test.

Les Stress Tests constituent un élément majeur de l'arsenal utilisé par les établissements financiers pour gérer leurs risques. C'est particulièrement vrai pour les banques car le régulateur leur impose ces exercices à intervalles réguliers, pour leurs portefeuilles de négociation, d'investissement et de placement. L'objectif de tels tests est d'attirer l'attention des dirigeants et des business managers sur des sources de risques cachées susceptibles d'impacter de manière importante l'activité de l'entreprise. Traditionnellement un stress test consiste à évaluer la variation de position d'un établissement financier lorsqu'un évènement exceptionnel mais plausible survient.

La mise en œuvre de modélisations normales pour les variations de données de marché ne reflète pas de façon réaliste les comportements des rendements financiers. Cela s'explique par la présence de faits stylisés observée sur les historiques (Hétéroscédasticité, Cluster de Volatilité, Asymétrie, etc...) ainsi que la présence de valeurs extrêmes. Une des alternatives à ces modèles est l'utilisation de la Théorie des valeurs extrêmes qui présente non seulement l'avantage d'avoir une modélisation plus fine des différents facteurs de risque et la possibilité de probabiliser des évènements à l'aide de mesures quantitatives.

Après avoir rappelé la réglementation propre au stress testing et les principaux résultats de la théorie des valeurs extrêmes, nous montrons comment les utiliser pour la construction de scénarii historiques, hypothétiques auxquels s'exposent le trading book d'une banque d'investissement.

ABSTRACT

Banks now have the opportunity to implement an internal model for measuring market risk. One of the essential components of this model is the creation of a stress test program. Stress tests are an important part of the arsenal used by financial institutions to manage their risks. It is particularly true for banks because the regulator imposes these exercises regularly, for their trading books and investments portfolios. The aim of such tests is to attract the attention of business leaders and managers on hidden sources of risks that may affect significantly the company's activity.

Traditionally a stress test is to assess the position variation of a financial institution when an exceptional but plausible event occurs. The normal modeling implementation of market data fluctuations do not reflect realistically the behavior of financial returns. This is explained by the presence of stylized facts observed in historical data (Heteroscedasticity, Clustered volatility, Asymmetry, etc . . .) and the presence of extreme values.

An alternative to these models is the use of Extreme value theory that has not only the advantage of a finer modeling of various risk factors but also the possibility to assess events probabilities using quantitative measures.

After recalling regulations specific to stress tests and the main results of extreme value theory, we show how to use them for the construction of historical and hypothetical scenarios which the trading book of an investment bank is exposed to.

Contents

1	Le Stress Test et les différentes Réglementations	3
2	Théorie des valeurs extrêmes	5
2.1	Motivations de l'utilisation des valeurs extrêmes	5
2.1.1	Données de l'étude	6
2.1.2	Statistiques descriptives	6
2.2	Statistique d'ordre, estimation des quantiles	8
2.3	Approche Block Maxima	9
2.3.1	Théorie de Fisher-Tippet	10
2.4	Méthode POT (Peak over Threshold)	12
2.4.1	Propriété de stabilité	13
2.4.2	Théorème de Balkema-Pickands-de Haan	14
2.4.3	Analyse des paramètres	14
2.5	Estimations d'un quantile d'une Pareto généralisée	15
2.6	Estimations des paramètres de la distribution de Pareto généralisée	16
2.6.1	Méthode du Maximum de vraisemblance	16
2.6.2	Méthode des Moments	17
2.6.3	Méthode des Moments pondérés	18
2.7	Intervalles de confiance pour les quantiles extrêmes	18
2.7.1	Intervalles obtenus pour les estimateurs du maximum de vraisemblance	19
2.7.2	Intervalles obtenus pour les estimateurs des moments pondérés	19
2.8	Recherche du Seuil u	20
2.8.1	Estimateur de Hill	20
2.8.2	Utilisation de la fonction moyenne des excès	23
2.9	Analyse de conformité entre distribution empirique et théorique	25
2.9.1	Le QQ-Plot	25
2.9.2	Test de Kolmogorov-Smirnov	26
2.9.3	GPD Test	26
2.9.4	Exemple d'ajustements	27
2.10	Modélisation de la volatilité conditionnelle	32
2.10.1	Modèle GARCH-GJR	33
2.10.2	Estimation des paramètres des modèles ARMA-GJR	34
2.10.3	Prévisions de la moyenne et de la variance conditionnelles	36
2.10.4	Estimation à l'aide de résidus Standardisés	37
2.11	Conclusion	39
3	Les Stress Tests et autres mesures de Risques	41
3.1	Mesure de risque et mesure de risque cohérent	41
3.2	La Value at Risk	42

3.3	L'Expected Shortfall	43
3.4	Notions de Temps de Retour	43
3.5	Les Stress Tests	44
3.5.1	Les Stress Tests univariés	47
3.5.2	Les Stress Tests multivariés	47
3.5.3	Mesure du risque sur le long terme	47
3.5.4	Prévision du risque à long terme dans le modèle POT	48
3.6	Mesure de risque par la distribution de Pareto généralisée	49
3.6.1	Modélisation conditionnelle des mesures de risque de marché	52
3.7	Backtesting du modèle GPD	55
3.8	Conclusion	60
4	Copules et Dépendances	61
4.1	Mesure de dépendance par les copules	62
4.1.1	Théorème de Sklar	62
4.1.2	Bornes de Fréchet	63
4.1.3	Théorème d'invariance	63
4.1.4	Dépendance de queue	64
4.1.5	Méthode d'estimation des copules	66
4.2	Estimation des pertes potentielles sur le portefeuille	67
4.2.1	Série de rentabilités du portefeuille	67
4.2.2	Matrice de corrélation	68
4.2.3	Paramètre estimé du modèle	72
4.3	Value at Risk et Expected Shortfall	73
4.4	Backtesting du portefeuille	74
4.5	Conclusion	77
5	Méthodologie Stress Tests Historique	79
5.1	Période d'évènement	80
5.2	Scénario historique: La chute de Lehman Brothers de 2008	81
5.3	Spécification des paramètres de chocs	85
5.3.1	Stress de la volatilité conditionnelle	86
5.3.2	Stress de la matrice de corrélation	87
5.3.3	Estimation des pertes extrêmes sur le portefeuille	90
5.3.4	Pertes extrêmes déterminées par le stress de la volatilité	90
5.4	Pertes extrêmes déterminées par le stress de la matrice de corrélation	92
5.5	Conclusion	93
6	Méthodologie Stress Tests Hypothétique	95
6.1	Hypothèses des scénarios	96
6.2	Scénario hypothétique : Baisse des marchés européens, sortie de la Grèce de la zone Euro	96
6.3	Stress de la volatilité	97
6.3.1	Construction des chocs	98
6.3.2	Intégration des chocs dans la volatilité	98
6.3.3	Pertes potentielles extrêmes estimées sur les actifs du portefeuille	99
6.4	Stress de la matrice de corrélation	100
6.4.1	Matrice de corrélation historique	100
6.4.2	Matrice de corrélation hypothétique	102

6.5	Pertes potentielles extrêmes estimés sur le portefeuille	106
6.6	Conclusion	107
7	Conclusion	109
A	Caractéristique des actifs du portefeuille	111
B	Modèle internes de mesure de risque de marché	119
B.1	Méthode de la Simulation Historique	119
B.2	Methode Filtered Historical Simulation	119
B.3	Méthode Variance-Covariance	119
B.4	Méthode GARCH de la loi normale	120
B.5	Contrôle ex post des modèles de mesure de risque	120
B.6	Méthodes statistiques de contrôle ex post	120
B.6.1	Test de couverture inconditionnelle des violations	120
B.6.2	Test d'indépendance des violations	121
B.6.3	Backtesting de l'Expected Shortfall	122
C	Copules	125
C.1	Copule de Student multivariée	125
C.2	Copule normale multivariée	125
C.3	Méthode IFM (Inference Functions for Margins)	126
D	Validation de la matrice de corrélation modifiée	129

Introduction Générale

La solidité des banques est fondamentale pour la stabilité du système financier et de l'économie dans son ensemble.

Les crises financières de 1929, 1987, 2008 ont montré combien la mauvaise santé financière des banques a pu avoir des conséquences désastreuses sur l'économie réelle.

Suite à la faillite de Lehman Brothers, la crise de 2008 a montré que les distributions des facteurs de risques n'étaient pas normales, les pertes constatées avaient une probabilité d'occurrence très faible dans les mesures de risque de type normal.

Notions de Risque

La bonne santé des établissements financiers est indispensable pour protéger le système financier et garantir la stabilité financière. Pour assurer cette bonne santé financière, il convient de mesurer et de gérer les risques auxquels les établissements financiers sont exposés dans leurs activités. Les établissements financiers sont exposés à plusieurs risques dont les principaux sont:

-Le risque de crédit: Il est principalement le risque de défaut d'un emprunteur/émetteur, mais c'est aussi le risque que la valeur d'un actif financier varie en raison d'événements particuliers affectant la solvabilité potentiel de l'emprunteur.

-Le risque de contrepartie: Il se caractérise par le fait que la personne physique ou morale procédant à un prêt d'argent assume le risque de défaillance de l'emprunteur. Cette défaillance peut porter sur la totalité ou une partie de la somme prêtée. Le risque de contrepartie peut résulter d'une mauvaise volonté de la part du débiteur, ou encore d'une incapacité technique de ce dernier de procéder au remboursement de sa dette.

-Le risque de marché: Il s'agit du risque de variation de la valeur de marché d'une position suite à la variation de variables de marché. Ce risque comprend principalement le risque sur les sous-jacents actions, taux d'intérêts, taux de change et matières premières.

-Le risque opérationnel: Ce risque est défini comme le risque de pertes résultant de carences ou de défaillances attribuables à des procédures erronées, des défaillances humaines des systèmes internes ou à des événements extérieurs.

-Le risque de liquidité: Le risque d'adossement actif/passif, c'est à dire le risque d'éligibilité des passifs et le risque de liquidité des actifs, vu comme le risque de ne pouvoir les vendre facilement à échéance brève.

Parmi ces risques financiers, celui de marché attire plus particulièrement notre attention. Le risque

de marché est lié aux portefeuilles de négociation ou *trading book*. Selon la définition prudentielle¹, le portefeuille de négociation est composé des positions sur instruments financiers et produits de base² détenus à des fins de négociation. Ces instruments ne comportent pas de clauses qui restreignent leur négociabilité ou la mise en place de couverture.

Mesure du risque extrême

La mesure des risques extrêmes dus aux événements extrêmes pose de nombreux problèmes dans la gestion des risques financiers. Ces événements ont un coût très élevé quand ils se produisent. Ils comprennent entre autres les crises financières et économiques, la faillite de grandes institutions financières et les catastrophes naturelles.

Compte tenu du caractère systémique et du coût des risques extrêmes ainsi que leurs conséquences sur l'économie réelle, elle devient une problématique majeure pour les autorités de contrôle bancaire et les établissements financiers. Alan Greenspan ancien directeur de la banque fédérale des Etats-Unis lors de la conférence sur la mesure du risque et du risque systémique de Washington en novembre 1998 observe: " *Work that characterises the statistical distribution of extreme events would be useful as well*". Cette observation montre l'intérêt des autorités de contrôle bancaire à mesurer correctement les risques extrêmes.

L'un des objectifs du Comité de Bâle est d'assurer la stabilité financière internationale. Cette stabilité ne peut être assurée que si on sait évaluer et gérer les risques extrêmes. Cette évaluation et gestion des risques relèvent du rôle des intermédiaires financiers. Une mesure fiable du risque permet la compréhension du risque supporté par une banque, même dans des conditions extrêmes, la prise des décisions raisonnées, afin de gérer non seulement une diversification des expositions, mais aussi de garantir que le couple risque/rendement soit apprécié à sa juste valeur. Une mauvaise prévision et gestion des risques dans un établissement financier peut impacter les actionnaires au travers de lourdes pertes qui peuvent mener jusqu'à la faillite en cas de réalisation du risque.

Pour mesurer correctement les risques extrêmes, nous avons besoin d'une approche ou d'une méthodologie de mesure de risque qui tienne compte des caractéristiques propres aux événements extrêmes. Par définition, les événements extrêmes sont caractérisés par leur faible fréquence. Ils appartiennent à ce qu'on appelle la " queue de distribution ".

Ainsi, ils peuvent être modélisés par la théorie des valeurs extrêmes qui représente mieux les queues de distribution des données financières. Cela marque une différence notable avec les modèles internes de mesure du risques de marché qui sont basés sur toute la distribution des variables aléatoires, notamment à travers les mesures d'écart type.

C'est pourquoi dans ce mémoire nous faisons appel à la théorie des valeurs extrême et plus particulièrement à sa composante communément appelée méthode des excès ou *Peak Over Threshold* (POT). La méthode POT est basée sur la distribution de Pareto généralisés ou Generalized Pareto Distribution (GPD). Elle est la principale méthode que nous étudions dans ce travail de recherche. La plupart des travaux antérieurs sur la théorie des valeurs extrêmes ont tendance à la préconiser uniquement pour la mesure des événements extrêmes (Embrechts et al. (1997) et Longin (1998)). Un modèle fiable doit être capable de mesurer le risque dans les conditions normales et dans les conditions extrêmes.

Le constat et les propositions du comité de Bâle, lors de la crise financière de 2008 soulèvent principalement une question que nous traitons dans ce travail de recherche et qui constitue notre problé-

¹Définition donnée par le Comité de Bâle sur la supervision bancaire.

²Les produits de base sont des matières premières dont on exclut l'or. Ce dernier est ajouté à la catégories devises.

matique. **La question est de savoir comment évaluer et gérer correctement le risque d'un portefeuille de négociations dans les conditions normales (faible "volatilité") et dans les conditions extrêmes (forte "volatilité") des marchés ?**

Pour traiter notre problématique, nous utilisons un portefeuille de négociation composé d'indices actions, de taux de change, d'indices de CDS. Les risques sur ces actifs financiers sont évalués par des mesures de risques qui sont la Value at Risk (VaR) et l'Expected Shortfall (ES). Ces mesures donnent un sens probabiliste à nos stress tests.

"Some have said that standard risk management models could not capture a "black swan" event. Well, in some cases they could not capture a white swan either"

Gonzalez-Paramo,2011



Le Stress Test et les différentes Réglementations

Programme de simulation de crise

Le programme de simulation de crise ou stress test est une exigence qualitative pour les banques qui veulent utiliser les modèles internes. L'objectif du stress test est d'identifier les événements qui pourraient fortement impacter les portefeuilles des banques mais qui ne sont pas pris en compte dans la mesure de la *Value at risk*. Le principal but du stress test est d'évaluer la capacité des fonds propres de la banque à absorber les pertes potentielles suite à un événement extrême.

Pour les établissements financiers ayant une activité significative de marché, le stress test doit couvrir tous les facteurs de risques pouvant donner lieu à des pertes exceptionnelles. Ces facteurs de risques comprennent des événements à faible probabilité pour tous grands types de risques. Les scénarios de crise à élaborer doivent mesurer l'impact de ces événements sur les positions ayant des caractéristiques de prix à la fois linéaires et non linéaires (optionnel).

Le stress test doit être à la fois quantitatif et qualitatif, de manière à évaluer les impacts des perturbations importantes des marchés et à identifier des situations plausibles susceptibles de générer de grandes pertes potentielles. L'établissement financier doit également faire un inventaire des mesures à prendre pour réduire ces risques identifiés afin de préserver ses fonds propres.

Un premier type de scénario (historique) consiste à tester le portefeuille courant dans les situations passées de perturbations majeures. Un deuxième type de scénario (hypothétique) évalue la sensibilité des positions de marché à des modifications des données de marché non nécessairement constatées sur l'historique. Les scénarii doivent comprendre les situations que l'établissement financier identifie comme étant les plus défavorables, sur les base des caractéristiques de son portefeuille. Une description de la méthodologie utilisée pour construire les scénarios et la mesure de leur impact doit être communiquée aux autorités de contrôle bancaire.

En plus du stress test réalisé par les établissement financiers eux-mêmes, les autorités de contrôle peuvent leur demander d'évaluer l'impact de scénarii qu'elles ont définis et fournir l'ensemble des résultats et conclusions. Toutes ces formes de stress test seront détaillées dans le chapitre 3.

Par ailleurs un programme de simulation que nous qualifierons de "classique" est exposé dans la figure ci dessous. Le programme reprend les grandes lignes d'une procédure de mise en place de stress test dans la plupart des institutions financiers. Même si l'aspect quantitatif du stress test est ce dont principalement le mémoire fait l'objet, il est intéressant de constater sa complexité sur le plan de la

mise en œuvre.

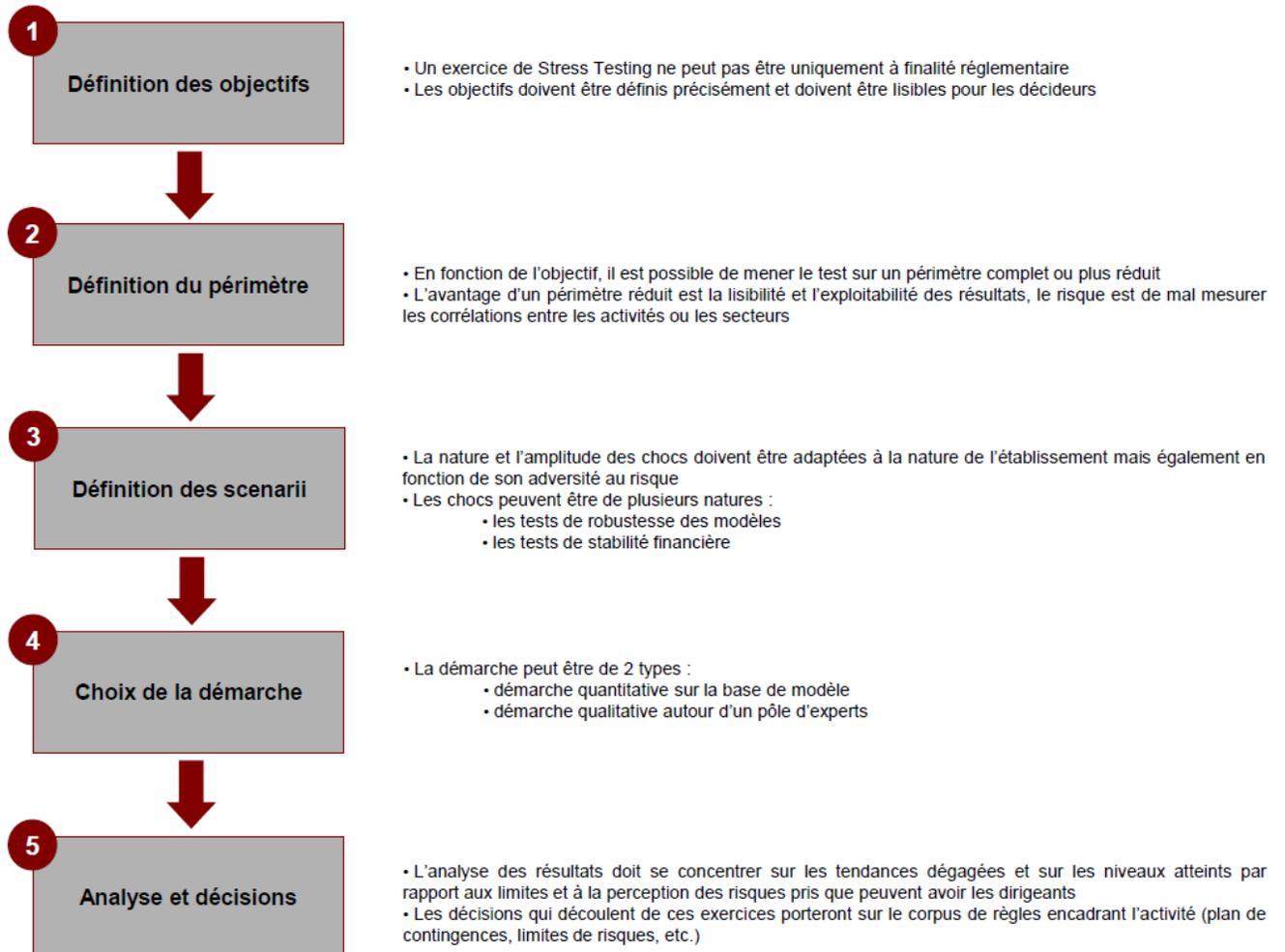


Figure 1.1: Procédure "classique" de mise en place de Stress Test

*Tous les modèles sont faux,
mais certains sont utiles*

George Box

2

Théorie des valeurs extrêmes

Le 1^{er} Février 1953, lors d'une forte tempête la mer passe par dessus plusieurs digues aux Pays-Bas, les détruit et inonde la région. Il s'agit d'un accident majeur. Un comité est mis en place pour étudier le phénomène et proposer des recommandations sur les hauteurs de digues. Il tient compte des facteurs économiques (coût de construction, coût des inondations,...), des facteurs physiques (rôle du vent sur les marées) et aussi des données enregistrées sur les hauteurs de marées. En fait il est plus judicieux de considérer les surcotes, c'est à dire la différence entre la hauteur réelle et la hauteur prévue de la marée, que les hauteurs des marées. En effet, on peut supposer, dans une première approximation, que les surcotes des marées lors des tempêtes sont des réalisations de variables aléatoires de même loi. Si on regarde les surcotes pour des marées de tempêtes séparées par quelques jours d'accalmie, on peut même supposer que les variables aléatoires sont indépendantes. L'étude statistique sur des surcotes a pour but de répondre aux questions suivantes :

- Soit $q \in]0, 1[$ fixé, trouver h tel que la probabilité pour que la surcote soit supérieur à h est q .
- Soit $q \in]0, 1[$ fixé, typiquement de l'ordre de 10^{-3} ou 10^{-4} , trouver h tel que la probabilité pour que la plus haute surcote annuelle soit supérieur à h est q .

Cet exemple illustre parfaitement la théorie des valeurs extrêmes. Nous verrons tout au long de ce chapitre que considérer uniquement les queues de distributions est en soit une façon de procéder plus fine que d'étudier uniquement l'ensemble de la loi lorsqu'il s'agit de gestion de risque.

Nous recommandons la lecture de l'article écrit par de Haan sur ce cas particulier.

2.1 Motivations de l'utilisation des valeurs extrêmes

Afin de bien comprendre l'enjeu et l'importance de l'utilisation de la théorie des valeurs extrêmes, il convient dans un premier temps de comprendre l'intérêt de son utilisation pour les modèles de risques de marchés. Nous présentons dans cette section les données de l'étude ainsi que les différentes caractéristiques statistiques qui nous incitent à l'utilisation de ces techniques.

2.1.1 Données de l'étude

Notre étude est basée sur les indices actions (*S&P500*, *CAC40*, *EUROSTOCK50*), les indices de Credit Default Swap (*Itraxxover*, *ItraxxEUR*, *Itraxxhighvol*), Spot de taux de change (*USD/EUR*, *USD/BRL*) où *BRL* représente le Réal Brésilienne. L'étude couvre la période de janvier 2000 à juin 2014. Toutes les données proviennent de **Bloomberg**.

- **Indices actions:** Les indices actions *CAC40*, *S&P500*, *EUROSTOCK50* sont des moyennes pondérées des cours des sous-jacents. Il représentent une grande partie des sous-jacents actions des portefeuilles de négociation.
- **Marge de Crédit Default Swap:** Les indices de crédit *Itraxxover*, *ItraxxEUR* et *Itraxxhighvol* sont des moyennes équipondérées de marges de CDS. *Itraxx* est calculé à partir d'un panier représentatif de CDS. Markit¹ publie trois indices *Itraxxover*, *ItraxxEUR*, *Itraxxhighvol*. *ItraxxEUR*, est un indice équipondéré à partir de 125 valeurs européennes les plus liquides sur le marché. *Itraxxhighvol* est un indice calculé à partir de 30 valeurs ayant le spread le plus élevé. *Itraxxover* permet d'évaluer le coût moyen de la protection sur les signatures les plus fragiles. Il est calculé à partir des 40 valeurs les plus liquides parmi les entités High yield².
- **Spot de change:** On appelle taux de change la valeur d'une monnaie nationale ou devise par rapport à celle d'un autre pays. Nous choisissons les taux de change *USD/EUR* (Dollar contre l'Euro) et *USD/BRL* (Dollar contre Réal Brésilien) où cette dernière attire particulièrement son attention sur le risque d'un portefeuille composé d'actifs de Pays émergents.

Modélisation des variations

Nous nous intéressons dans un premier temps à la modélisation de chaque facteur de risques. Pour les accroissements absolus la modélisation des variations est basée sur les accroissements absolus logarithmiques R_t .

$$R_t = \ln \left(\frac{C_t}{C_{t-1}} \right) \quad (2.1)$$

où C_t est la valeur du cours de l'actif à l'instant t .

Concernant les variations relatives où les chocs ne dépendent pas du niveau absolu du facteur, les valeurs négatives n'étant pas exclues la modélisation des accroissements est donnée par :

$$R_t = C_t - C_{t-1} \quad (2.2)$$

où C_t est la valeur du cours de l'actif à l'instant t .

2.1.2 Statistiques descriptives

La **volatilité historique** mesure l'amplitude des variations des rendements actifs financiers. Nous observons à première vue une volatilité élevée pour les indices de CDS ainsi que les indices actions.

¹Société indépendante d'envergure internationale, Markit Economics réalise des enquêtes de conjoncture figurant parmi les plus influentes au monde.

²Obligations dont leur notation financière par les agences de rating est inférieure à BBB-

	CAC40	S&P	EURStk	USD/EUR	USD/BRL	CDS1 ³	CDS2 ⁴	CDS3 ⁵
Minimum	-0.094	-0.095	-0.082	-0.039	-0.084	-0.182	-0.279	-0.227
Maximum	0.106	0.109	0.104	0.026	0.119	0.308	0.265	0.301
Moyenne	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Ecart-type	0.015	0.012	0.015	0.006	0.010	0.029	0.034	0.032
Skewness	0.029	-0.179	0.024	-0.130	-0.001	0.786	0.024	0.00
Excès-Kurtosis	4.876	8.306	4.596	2.113	11.13	8.488	7.697	7.468
J-B-test	3671(0.00)	10094 (0.00)	3049 (0.00)	681 (0.00)	18615(0.00)	7779(0.00)	6186(0.00)	5823(0.00)

Table 2.1: Statistique descriptive des accroissements des actifs

La volatilité est plus élevée (environ 3%) pour les indices de CDS. Elle est plus faible (environ 1%) pour les indices CAC 40, S&P, EUROSTOCK ainsi que pour les taux de change USD/EUR (0.6%) et USD/BRL (1%). Ce niveau de faible volatilité sur les indices actions et taux de changes montre les bénéfices de leur diversification pour les actions et l'instabilité de la volatilité des taux de change dans le temps, qui varie en fonction de la situation économique mondiale. Dans un climat sain, elle sera généralement faible mais en période crise elle pourrait atteindre des seuils élevés comme ce fut le cas en 2008.

Le **Kurtosis historique** ou coefficient d'aplatissement mesure la disposition des masses de probabilité autour de leur moyenne. Il est égale à 3 pour une distribution suivant une loi normale. En définition l'*excès de Kurtosis* n'est autre que le Kurtosis de la distribution moins 3.

Nous constatons que les six actifs exhibent un kurtosis supérieur à 3 et significatif au seuil de 5%. Cela montre que leur distribution est plus pointue que celle de la loi normale c'est à dire qu'elle possède plus de valeurs extrêmes. Cette caractéristique est plus marquée pour les indices de CDS signalant un risque extrême très élevé.

Le **test de Jarque Bera** (J-B test) confirme l'hypothèse selon laquelle les distributions de rentabilité journalières des actifs étudiés entre janvier 2000 et juin 2014 ne sont pas gaussiennes puisque les probabilités associées aux statistiques sont toutes inférieures au seuil d'erreur de 5%.

Ces résultats confirment les conclusions des études menées sur l'hypothèse de normalité de la majorité des actifs financiers. Les travaux pionniers de Mandelbrot (1963) et de Fama (1965) ont montré que les distributions de rentabilité des actifs financiers présentent des caractéristiques **d'asymétrie**, de **clustering de volatilité** (nous le verrons par la suite) et de **queues épaisses** (c'est l'objet de ce chapitre).

Face à ces observations sur le portefeuille d'étude, il apparaît particulièrement important d'analyser la distribution suivie par les rentabilités des actifs afin de mieux évaluer leurs risques. Dans cette perspective, la théorie des valeurs extrêmes devrait permettre d'appréhender le type de distribution des rentabilités et de mieux quantifier les pertes potentielles qui peuvent être enregistrées sur ces différents actifs financiers.

2.2 Statistique d'ordre, estimation des quantiles

La fonction caractéristique est un des outils fondamentaux pour démontrer la convergence de somme renormalisées de variables aléatoire indépendantes, comme dans les démonstrations classiques du théorème central limite. Pour l'analyse des statistiques d'ordre et des convergences en loi des maximums renormalisés, un des outils fondamentaux est la fonction de répartition.

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées de fonction de répartition F . ($F(x) = \mathbf{P}(X_n \leq x)$, pour $x \in \mathbf{R}$). Soit S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

Définition 2.1 (Statistique d'ordre) *La statistique d'ordre de l'échantillon X_1, \dots, X_n est le réarrangement croissant de X_1, \dots, X_n . On la note $(X_{(1,n)}, \dots, X_{(n,n)})$. On a $(X_{(1,n)} \leq \dots \leq X_{(n,n)})$, et il existe une permutation aléatoire $\sigma_n \in S_n$ telle que $(X_{(1,n)}, \dots, X_{(n,n)}) = (X_{\sigma_n(1)}, \dots, X_{\sigma_n(n)})$.*

En particulier on a $X_{(1,n)} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ et $X_{(n,n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. On note F^{-1} l'inverse généralisé de F . Le lemme suivant découle de la croissance de la fonction F .

Lemme 2.1 *Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et de fonction de répartition F . Soit U_1, \dots, U_n des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors $(F^{-1}(U_{(1,n)}), \dots, F^{-1}(U_{(n,n)}))$ à la même loi que $(X_{(1,n)}, \dots, X_{(n,n)})$.*

On suppose dorénavant que F est continue. On notera le minima et le maxima respectivement par $B_n(x)$ et $M_n(x)$

La théorie des valeurs extrêmes peut se résumer aux mathématiques des événements extrêmes. Comme nous le verrons à travers ce chapitre certains résultats ont un parallèle avec le théorème central Limite mais contrairement à ce dernier qui est une théorie qui traite de la moyenne d'un échantillon, elle s'intéresse uniquement à la modélisation des queues de distribution à partir des lois spécifiques propres. Cela marque une différence importante comparativement aux théories qui font une modélisation totale de la distribution. Elle est basée principalement sur deux approches : l'approche du Block Maxima et l'approche Peak Over Threshold (POT) encore appelée méthode des excès que nous utilisons dans cette étude.

L'approche POT basée sur la distribution de Pareto généralisée ou en anglais Generalized Pareto Distribution (GPD) fournit une méthode pour modéliser les excès au-delà d'un seuil relativement élevé. Contrairement à l'approche Block Maxima, la méthode POT exige moins de paramètres à estimer et est préférable quand on a affaire à peu de données historiques. Le mode de construction de la série des extremas dans la méthode POT permet d'obtenir des estimateurs plus efficaces que la méthode du Block Maxima, Fromon (2005). En effet certaines données sélectionnées par la méthode de sélection par les blocs peuvent ne pas représenter de véritables extrêmes puisqu'elles n'appartiennent

pas aux queues de la distribution. Inversement, certaines données appartenant aux queues de la distribution peuvent ne pas être prises en compte dans la méthode du Block Maxima.

2.3 Approche Block Maxima

L'utilisation de la théorie des valeurs extrêmes sur des problématiques de risque de marché date d'une dizaine d'années alors que dans le domaine assurantiel cela existe depuis plus de vingt ans. L'origine de la théorie et son application en gestion du risque est amplement discuté dans McNeil (1999), Bensalah(2000), Nystrom et Skoglund(2002b), Embrechts et al. (2003) et McNeil et al. (2005).

Considérons (X_1, X_2, \dots, X_n) une succession de variables aléatoires indépendamment et identiquement distribuées (i.i.d) dont la fonction de répartition F , donnée par l'expression suivante:

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (2.3)$$

Le minima et le maxima notés respectivement B_n et M_n constituent les extremas de ces variables aléatoires.

$$M_n(X) = \max(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.4)$$

$$B_n(X) = \min(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (2.5)$$

Le minima et le maxima sont reliés par l'expression suivante :

$$B_n(X) = M_n(-X) \quad (2.6)$$

Sous l'hypothèse de marche aléatoire des variables, la théorie établit que les fonction de répartition associées aux maxima et aux minima, respectivement F_{M_n} et F_{B_n} peuvent être estimés au point x à partir de la fonction parente F . La probabilité d'occurrence d'une valeur extrême est obtenue respectivement pour le maxima et le minimum par les expressions suivantes :

$$P(M_n \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x) = F_{M_n(x)} = [F(x)]^n \quad (2.7)$$

$$P(B_n \geq x) = P(X_1 \geq x, X_2 \geq x, \dots, X_n \geq x) = 1 - F_{B_n(x)} = [1 - F(x)]^n \quad (2.8)$$

Ces deux expressions montrent que la probabilité d'obtenir une variation extrême, supérieure (inférieure) à une valeur x , est égale à la probabilité d'observer une variation supérieur (inférieur) à x , sur l'ensemble de la période d'observation, à la puissance n .

Notons que l'influence de la loi parente sur la loi des extremas est fonction de la valeur prise par le seuil x .

2.3.1 Théorie de Fisher-Tippet

L'estimation de la loi des extremas à partir de la fonction parente F pose une difficulté majeure car, cette dernière n'est pas connue. Pour contourner cette limite, les chercheurs (Fisher-tippet(1928)) se sont intéressés au comportement asymptotique des variables aléatoires M_n, B_n . Il s'agit de déterminer la loi vers laquelle M_n , (respectivement B_n) converge quand n tend vers l'infini afin de remplacer F par cette dernière pour les plus grandes valeurs de n .

Le théorème de Fisher-Tippet (1928) a permis de caractériser la loi de la distribution des valeurs extrêmes sans que celle-ci soit conditionnée par la loi de la variable parente.

Considérons une suite de k extremas, $M_{n1}, M_{n2}, \dots, M_{nk}$, sélectionnées dans k périodes de n observations X_1, X_2, \dots, X_n indépendante et identiquement distribuées. Pour trouver la limite d'intérêt, la variable aléatoire M_n doit être ajustée à l'aide de deux paramètres μ_n et β_n représentant respectivement un paramètre de localisation et un paramètre d'échelle. Le paramètre de localisation indique la taille moyenne des extrêmes dans la distribution parente et le paramètre d'échelle caractérise leur dispersion.

Théorème 2.1 (Théorème de Fisher-Tippet) Soit X_n des variables aléatoires identiquement et indépendamment distribuées. S'il existe un ensemble de paramètres $\mu_n \in \mathbb{R}$, $\beta_n > 0$ et une fonction de densité non-dégénérée H (i.e. n'ayant pas toute sa masse de probabilité sur un unique point) tel que :

$$\left(\frac{M_n - \mu_n}{\beta_n}\right) \longrightarrow H$$

alors H appartient à l'un des trois domaines d'attractions suivants:

$$\text{Gumbel } H(x) = \exp(-e^{-x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Weibull } \begin{cases} H(x) = \exp(-(-x)^{-\alpha}) & \text{si } x \leq 0 \quad \text{et } \alpha > 0 \\ H(x) = 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\text{Fréchet } \begin{cases} H(x) = \exp(-x^{-\alpha}) & \text{si } x > 0 \quad \text{et } \alpha > 0 \\ H(x) = 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Le paramètre α mesure le poids des queues dans la distribution parente. Une faible valeur de ce paramètre indique une dispersion à queue épaisse. Le théorème de Fisher-Tippet indique que si le nombre d'observations extrêmes est élevé, la distribution des valeurs extrêmes converge vers la distribution généralisée des valeurs extrêmes ou Generalized Extreme Value (GEV) distribution.

Les distributions de Gumbel, Weibull et Fréchet correspondent aux trois domaines d'attraction de la théorie des valeurs extrêmes. L'expression la plus générale de la loi limite $H(x)$ des valeurs extrêmes développée par Gnedenko (1943), Von Mises (1954) et Jenkison (1955) est définie par :

$$H_{\xi,\mu,\beta}(x) = \begin{cases} \exp[-(1 + \xi \frac{x - \mu}{\beta})^{\frac{-1}{\xi}}] & \text{si } \xi \neq 0 \\ \exp[-\exp(-\frac{x - \mu}{\beta})] & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Cette distribution possède trois paramètres :

- μ le paramètre de localisation , qui est un indicateur de la taille moyenne des extrêmes dans la distribution parente.
- β le paramètre d'échelle qui caractérise la dispersion
- ξ l'indice de queue qui donne une indication de la forme (ou le poids des queues) de la distribution limite. Plus ce paramètre de queue diminue plus la distribution considérée est à queue épaisse .

L'indice de queue ξ peut être relié au paramètre α de la GEV par les expressions suivantes :

$$\text{Frechet} : \xi = 1/\alpha > 0$$

$$\text{Weibull} : \xi = -1/\alpha < 0$$

$$\text{Gumbel} : \xi = 0$$

Le choix de l'une des trois distribution du domaine d'attraction de la théorie des valeurs extrêmes dépend de la valeur de l'indice de queue ξ .

-Si $\xi > 0$, la GEV devient la distribution de Fréchet caractérisée par des queues de distribution épaisses et décroissantes à l'image d'une fonction puissance (loi de Student ou loi de Pareto).

-Si $\xi = 0$, la GEV suit la loi de Gumbel avec des queues qui décroissent de manière exponentielle comme des lois normale et log-normale.

-Pour $\xi < 0$, nous avons la distribution de Weibull dont les queues de distribution sont bornées comme celles de la distribution uniforme et Bêta .

En pratique un grand nombre de distributions vérifient le théorème. Les lois usuelles peuvent être classées selon leur domaine d'attraction :

WEIBULL	GUMBEL	FRECHET
$\xi < 0$	$\xi = 0$	$\xi > 0$
Uniforme, Bêta	Normale, Gamma, Exponentielle	Chauchy, Student, Pareto

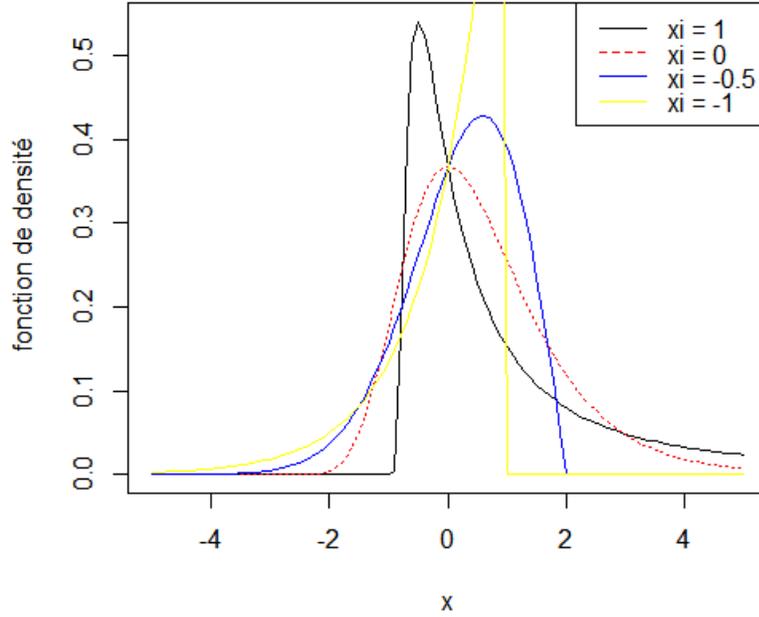


Figure 2.1: **Densité de la loi des valeurs extrêmes pour différentes valeurs du paramètre de forme ξ**

2.4 Méthode POT (Peak other Threshold)

Supposons X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires iid ayant pour distribution $F(x)$ et un seuil u relativement élevé au delà duquel sont déterminés les excès. Considérons Y_1, Y_2, \dots, Y_n , les excès à valeurs positives définis par l'expression $Y_i = X_i - u$ avec $i = 1, 2, \dots, n$. Ainsi, nous pouvons définir la fonction de répartition des excès de pertes au-delà du seuil u , notée $F_u(y)$, par l'expression :

$$F_u(y) = P(X - u \leq y | X > u) \quad (2.10)$$

$$F_u(y) = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (2.11)$$

Le résultat de (2.9) nous permet d'écrire :

$$[F(x)]^n \approx \exp\left[-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\beta}\right)^{-1/\xi}\right] \quad (2.12)$$

d'où :

$$\log(F(x)) \approx -\frac{1}{n} \left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\beta}\right)^{-1/\xi} \quad (2.13)$$

Comme nous nous intéressons à des valeurs élevées de x , nous avons l'approximation suivante : $\log(F(x)) \approx -(1 - F(x))$. D'où:

$$1 - F(x) \approx -\frac{1}{n} \left(\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\beta} \right)^{-1/\xi} \right) \quad (2.14)$$

Nous pouvons alors en déduire une approximation de $F_u(y)$. L'équation (2.11) nous permet d'écrire:

$$F_u(y) = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad (2.15)$$

$$= 1 - \frac{1 - F(y + u)}{1 - F(u)} \quad (2.16)$$

$$\approx 1 - \left(\frac{1 + \xi \frac{u + y - \mu}{\beta}}{1 + \xi \frac{u - \mu}{\beta}} \right)^{-1/\xi} \quad (2.17)$$

$$\approx 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\phi} y \right)^{-1/\xi} \quad (2.18)$$

avec $\phi = \beta + \xi(u - \nu)$. Cette dernière expression est la fonction caractéristique de la loi de Pareto généralisée (GPD).

2.4.1 Propriété de stabilité

Comme nous l'avons constaté au paragraphe précédent, dans le cadre des méthodes par dépassement de seuil le paramètre de forme ξ de la GPD est théoriquement indépendant du seuil choisi. Nous avons ainsi la propriété suivante.

Proposition 2.1 *Si une variable aléatoire X suit une loi GPD(ξ, β), alors pour tout seuil $u > 0$, la variable aléatoire conditionnelle $X - u$ sachant $X > u$, et notée $[X - u | X > u]$, suit une loi GPD($\xi, \beta + \xi u$)*

Cette formule donne la probabilité des excès de pertes sachant que les valeurs de X sont au delà du seuil u . La distribution de X est inconnue et peut suivre n'importe quel type de distributions (Normale, Lognormale, Student ou Bêta). L'estimation de la loi des valeurs extrême à partir de la fonction parente F pose une difficulté majeure, car cette dernière n'est pas connue. Pour contourner cette limite, les chercheurs (Fisher-Tippet (1928)) se sont intéressés au comportement asymptotique de la variable aléatoire y . Il s'agit de déterminer la loi vers laquelle les valeurs extrêmes convergent quand n tend vers l'infini afin de remplacer F par cette dernière pour les plus grandes valeurs de n .

Les théorèmes de Fisher-Tippet, de Balkema and Haan (1974) et Pickands (1975) ont permis de caractériser la loi de la distribution des valeurs extrêmes sans que celle-ci soit conditionnée par la loi parente. Pour en déduire la loi asymptotique dans la méthode des excès, on applique le théorème de Balkema-Pickands-de-Haan.

2.4.2 Théorème de Balkema-Pickands-de Haan

Théorème 2.2 (Théorème de Balkema-Pickands-de Haan) $F_u(y)$ appartient au domaine d'attraction de la théorie des valeurs extrêmes s'il existe un seuil u relativement élevé tel que :

$$\lim_{x \rightarrow X_F} \sup_{0 \leq y < X_F - u} |F_u(y) - G_{\xi, \beta}(y)| = 0 \quad (2.19)$$

En d'autres termes, ce théorème énonce que pour un seuil relativement élevé, la distribution $F_u(y)$ converge vers une distribution de Pareto généralisée ou Generalized Pareto Distribution (GPD) dont la fonction de répartition $G_{\xi, \beta}(y)$ de paramètres (ξ, β) est donnée par :

$$G_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right)^{\frac{-1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(\frac{y}{\beta}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

où $y \geq 0$ si $\xi \geq 0$ et $0 \leq y \leq -\beta/\xi$ pour $\xi < 0$.

L'équation 2.20 dérive de la fonction de densité $g_{\xi, \beta}(y)$ définie par :

$$g_{\xi, \beta}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} \left(1 + \xi \frac{y}{\beta}\right)^{\frac{-1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\beta} \exp\left(\frac{y}{\beta}\right) & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

2.4.3 Analyse des paramètres

Cette distribution a seulement deux paramètres à estimer, un paramètre de dispersion β et un paramètre de forme ou indice de queue ξ :

- Si $\xi < 0$, les queues de la distribution sont bornées.
- Si $\xi = 0$, elles décroissent de manière exponentielle
- Si $\xi > 0$, les queues de distribution sont épaisses.

Les cas généralement rencontrés sur les données financières sont les deux derniers et plus particulièrement le dernier cas ($\xi > 0$) car il correspond aux données ayant une distribution à queue épaisse (Cf 2.1).

L'indice de queue ξ informe sur le poids des queues dans la distribution parente. En effet, un indice de queue supérieur à zéro signifie que la probabilité d'occurrence de pertes extrêmes (dans le cas de la queue gauche) est plus importante que ce que prévoit la loi normale. Selon Longin (1996) et McNeil (1999), le risque extrême d'un investissement est d'autant plus important que l'indice de queue estimé sur la queue gauche de la distribution est élevé.

La loi asymptotique étant définie, nous pouvons estimer les paramètres de la distribution de Pareto généralisée. Ces paramètres permettent de déterminer les quantiles qui traduisent les pertes potentielles maximales d'un investissement pour un niveau de confiance donné et sous certaines conditions de marché (normale ou extrême).

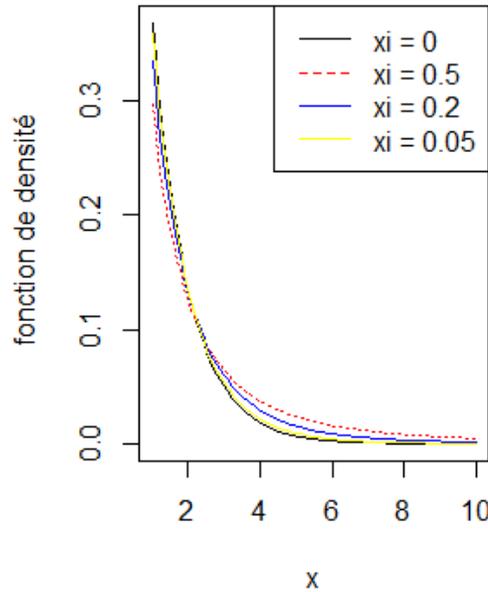


Figure 2.2: **Densité de la loi des excès pour différentes valeurs du paramètre de forme ξ**

La figure 2.2 montre les densités de probabilité de la GPD pour différentes valeurs du paramètre de forme , dans le cas où $\xi \geq 0$. On peut observer que plus ce paramètre est grand, plus la queue de la distribution résultante est épaisse.

2.5 Estimations d'un quantile d'une Pareto généralisée

L'objectif de cette section est de trouver l'expression du quantile associé à une distribution de Pareto généralisée. On suppose qu'on ait trouvé un seuil u "assez élevé" (nous définirons cette notion ultérieurement), nous pouvons approcher la quantité $\frac{F(y)-F(u)}{1-F(u)}$ par $G_{\hat{\xi},\hat{\beta}}(y)$, où $\hat{\xi}$ et $\hat{\beta}$ sont estimés par une estimation statistique de type maximum de vraisemblance, sur ces données. en posant $x = y + u$, nous avons:

$$\frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)} \approx G_{\hat{\xi},\hat{\beta}}(x - u) \quad (2.22)$$

Notre objectif est de trouver x tel que $F(x) = p$, avec p fixé. Lorsque $\xi > 0$ la relation précédente conduit à :

$$x \approx u + G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}^{-1} \left(\frac{p - F(u)}{1 - F(u)} \right) \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow x \approx u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(1 - \frac{p - F(u)}{1 - F(u)} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \quad (2.24)$$

$$\Rightarrow x \approx u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{1 - p}{1 - F(u)} \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \quad (2.25)$$

Nous pouvons donc estimer x via cette formule en estimant $1 - F(u)$ par $\frac{N_u}{N}$ qui est la proportion d'observation au dessus du seuil u :

$$x \approx u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{N}{N_u} (1 - p) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right) \quad (2.26)$$

De même lorsque $\xi = 0$:

$$x \approx u + G_{\hat{\xi}, \hat{\beta}}^{-1} \left(\frac{p - F(u)}{1 - F(u)} \right) \quad (2.27)$$

$$\Rightarrow x \approx u - \hat{\beta} \ln \left(1 - \frac{p - F(u)}{1 - F(u)} \right) \quad (2.28)$$

$$\Rightarrow x \approx u - \hat{\beta} \ln \left(\frac{1 - p}{1 - F(u)} \right) \quad (2.29)$$

Ce qui conduit à :

$$x \approx u - \hat{\beta} \ln \left(\frac{N}{N_u} (1 - p) \right) \quad (2.30)$$

2.6 Estimations des paramètres de la distribution de Pareto généralisée

Les paramètres ξ et β sont généralement estimés par les méthodes de maximum de vraisemblance et semi-paramétrique. Dans cette étude, nous utilisons la première méthode réputée plus fiable comparativement à la méthode semi-paramétrique (cf.Dowd (2005),p.197).

Nous présentons cependant les autres méthodes communément utilisées.

2.6.1 Méthode du Maximum de vraisemblance

La méthode de maximum de vraisemblance sélectionne les estimateurs $\hat{\xi}$ et $\hat{\beta}$ qui maximisent la fonction de vraisemblance.

$$L(\hat{\xi}, \hat{\beta}/y) = \max L(\xi, \beta/y) = \max \prod_{i=1}^n g_{\xi, \beta}(y_i) \quad (2.31)$$

où $g_{\xi, \beta}(y_i)$ est la fonction de densité et $y = y_1, \dots, y_n$ des variables aléatoire (pertes journalières) positives. Nous maximisons la fonction log vraisemblance de la distribution de Pareto généralisée:

$$L(\hat{\xi}, \hat{\beta}/y) = \max L(\xi, \beta/y) = \max \sum_{i=1}^n g_{\xi, \beta}(y_i) \quad (2.32)$$

la fonction log vraisemblance $L(\xi, \beta/y)$ est le logarithme de la densité jointe $g_{\xi, \beta}$ des n observations. Utilisant les propriétés du logarithme, $L(\xi, \beta/y)$ se simplifie en donnant :

$$L(\hat{\xi}, \hat{\beta}/y) = \begin{cases} -n \log \beta - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right) \sum_{i=1}^n \log\left(1 + \xi \frac{y_i}{\beta}\right) & \xi \neq 0 \\ -n \log \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n y_i & \xi = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

2.6.2 Méthode des Moments

La méthode des moments est une technique les plus simples pour ajuster une loi paramétrique. En général, les estimateurs calculés par cette méthode ne sont pas optimaux, mais ont l'avantage d'être rapides à implémenter et ne demandent pas beaucoup de temps de calcul.

Soit une variable aléatoire X . Pour $j \in \mathbb{N}^*$, le j^e moment de la distribution de X est défini par :

$$m_j = \mathbb{E}[X^j] \quad (2.34)$$

Si X suit une loi paramétrique, on peut alors exprimer les moments m_j en fonction des paramètres de la loi. à partir d'observations $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de X , on peut calculer l'estimateur empirique \hat{m}_j du j^e moment m_j de la façon suivante:

$$\hat{m}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^j \quad (2.35)$$

La méthode des moments consiste à déterminer les estimateurs des paramètres de la loi en faisant coïncider les moments m_j de la loi avec leurs estimateurs empiriques. Pour estimer ξ et β dans le cas de la loi de Pareto généralisée, on utilise les deux premiers moments de la loi pour disposer de deux équations. Ces deux moments s'expriment ainsi en fonction des paramètres de la loi :

$$\begin{aligned} m_1 = \mathbb{E}[X] &= \frac{\beta}{1 - \xi} \\ m_2 = \mathbb{E}[X^2] &= \frac{2\beta^2}{(1 - \xi)(1 - 2\xi)} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ces deux quantités existent uniquement si $\xi < 1/2$. Leurs estimateurs empiriques sont égaux:

$$\begin{aligned} \hat{m}_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X} \\ \hat{m}_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = s^2 + \bar{X}^2 \end{aligned}$$

où \bar{X} et s sont la moyenne et l'écart type des données $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$. En utilisant les équations :

$$\begin{aligned} m_1 &= \hat{m}_1 \\ m_2 &= \hat{m}_2 \end{aligned}$$

on en déduit les estimateurs de la méthode des moments, sous l'hypothèse $\xi < 1/2$:

$$\hat{\xi} = (1 - \bar{X}^2/s^2)/2 \quad (2.37)$$

$$\hat{\beta} = \bar{X}(\bar{X}^2/s^2 + 1)/2 \quad (2.38)$$

2.6.3 Méthode des Moments pondérés

Définition 2.2 soit une variable aléatoire X , de fonction de répartition $F(x)$. Le moment pondéré $M(p, r, s)$ est défini par:

$$M(p, r, s) = \mathbb{E}[X^p F(X)^r 1 - F(X)^s] \quad (2.39)$$

avec p, r et s des entiers positifs.

Les quantités $\{M_{p,0,0}; p = 1, 2, 3, \dots\}$ représentent les moments usuels de X définis par 2.34. Dans le cadre de la méthode d'estimation par moments pondérés, on va estimer les paramètres de la distribution de X en utilisant les quantités $\{M_{1,0,s}; s = 0, 1, \dots\}$, que l'on note communément α_s , ou de manière équivalente à l'aide des quantités $\{M_{1,0,r}; r = 0, 1, \dots\}$ que l'on note β_r . Nous utilisons ces quantités car elles ont l'avantage d'exister pour $\xi < 1$.

Le principe d'estimation est similaire à celui de la méthode des moments: on va correspondre l'expression analytique des moments pondérés avec leur estimateur empirique. Supposons que l'on dispose de n réalisations de la variable aléatoire X , classées par ordre croissant $x_{1:n} \leq x_{2:n} \cdots \leq x_{n:n}$.

Les estimateurs empiriques non-biaisés de α_s et de β_r sont donnés par Greenwood et al.(1979):

$$\hat{\alpha}_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\binom{n-i}{r}}{\binom{n-1}{r}} x_{i:n} \quad (2.40)$$

$$\hat{\beta}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\binom{i-1}{r}}{\binom{n-1}{r}} x_{i:n} \quad (2.41)$$

On en déduit les deux estimateurs des paramètres de la GPD par la méthode des moments pondérés par Gehin (2011):

$$\hat{\xi} = \frac{\hat{\alpha}_0 - 4\hat{\alpha}_1}{\hat{\alpha}_0 - 2\hat{\alpha}_1} \quad (2.42)$$

$$\hat{\beta} = \frac{2\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_0}{\hat{\alpha}_0 - 2\hat{\alpha}_1} \quad (2.43)$$

2.7 Intervalles de confiance pour les quantiles extrêmes

Pour chaque méthode d'estimation, nous construisons des intervalles de confiance afin de mesurer la précision des estimateurs du quantile à un degré de confiance donné.

2.7.1 Intervalles obtenus pour les estimateurs du maximum de vraisemblance

SMITH à montré dans "Threshold methods for sample extremes". *Statistical Extremes and Applications, 1984*. que pour $\xi > -\frac{1}{2}$, les estimateurs du maximum de vraisemblance étaient asymptotiquement normaux de variance asymptotique:

$$\mathbb{V}_{as} \begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\xi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\beta^2(1+\xi) & -\beta(1+\xi) \\ -\beta(1+\xi) & (1+\xi)^2 \end{pmatrix}$$

où \mathbb{V}_{as} est l'inverse de l'information de Fisher. Autrement dit, nous avons la convergence en loi suivante:

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \hat{\beta} - \beta \\ \hat{\xi} - \xi \end{pmatrix} \rightarrow N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{V}_{as} \begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\xi} \end{pmatrix} \right)$$

Rappelons que l'expression de l'estimation du quantile :

$$x \approx u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\left(\frac{N}{N_u}(1-p) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right)$$

Posons $a = \frac{N}{N_u}(1-p)$ afin d'alléger les notations, et dérivons \hat{q} par rapport à $\hat{\xi}$ et $\hat{\beta}$ pour appliquer la delta méthode:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{\xi}} &= -\frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left(\frac{a^{-\hat{\xi}} - 1}{\hat{\xi}} + \ln(a)a^{-\hat{\xi}} \right) \\ \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{\beta}} &= \frac{a^{-\hat{\xi}} - 1}{\hat{\xi}} \end{aligned}$$

Nous déduisons de la delta méthode que \hat{q} est asymptotiquement normal, et nous pouvons estimer sa matrice de variance asymptotique :

$$\mathbb{V}_{as}(\hat{q}) = \left(\frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{\xi}} \right)^2 (1+\hat{\xi})^2 + 2 \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{\beta}} \hat{\beta}^2 (1+\hat{\xi}) - 2 \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{\xi}} \frac{\partial \hat{q}}{\partial \hat{\beta}} \hat{\beta} (1+\hat{\xi})$$

Un intervalle de confiance asymptotique de niveau α (par exemple $\alpha = 95\%$) pour q est donc $\left[\hat{q} \pm \frac{\sqrt{\mathbb{V}_{as}(\hat{q})}}{\sqrt{N}} z_{\frac{1+\alpha}{2}} \right]$, où $z_{\frac{1+\alpha}{2}}$ est le quantile d'ordre $\frac{1+\alpha}{2}$ d'une loi normale centrée réduite.

2.7.2 Intervalles obtenus pour les estimateurs des moments pondérés

HOSKING a montré dans (référence) que dans le cas des estimateurs des moments pondérés, nous avons aussi une normalité asymptotique, de variance asymptotique s'écrivant:

$$\mathbb{V}_{as} \begin{pmatrix} \hat{\beta} \\ \hat{\xi} \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-2\xi)(3-2\xi)} \begin{pmatrix} \beta^2(7-18\xi+11\xi^2-2\xi^3) & -\beta(2-\xi)(2-6\xi+7\xi^2-2\xi^3) \\ -\beta(2-\xi)(2-6\xi+7\xi^2-2\xi^3) & (1-\xi)(2-\xi)^2(1-\xi+2\xi^3) \end{pmatrix}$$

Il nous suffit d'appliquer une nouvelle fois la delta méthode pour en déduire l'intervalle de confiance.

2.8 Recherche du Seuil u

Une bonne détermination de u est primordiale si nous voulons appliquer la théorie des valeurs extrêmes. En effet, un seuil trop faible conduit à une mauvaise adéquation entre la fonction de répartition et la loi GPD et les estimateurs sont biaisés. Inversement un seuil trop élevé entraîne une faible taille d'échantillon de dépassements et donc des estimateurs volatiles. Nous allons voir dans la suite diverses méthodes que nous utiliserons ultérieurement pour estimer ce seuil.

2.8.1 Estimateur de Hill

La méthode généralement utilisée pour estimer l'indice de queue ξ , et la plus populaire est l'estimateur de Hill. Cet estimateur est directement appliqué aux pertes ordonnées de la plus grande valeur à la plus petite. En considérant X_1, X_2, \dots, X_n ces pertes ordonnées, l'estimateur de Hill $\hat{\xi}_{n,k}^{(H)}$ est donné par l'expression suivante:

$$\hat{\xi}_{n,N_u}^{(H)} = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} \log X_i - \log X_{N_u+1} \quad (2.44)$$

où N_u représente le nombre d'extrêmes dans la queue, utilisé pour estimer l'estimateur de Hill. Il doit être choisi d'une manière appropriée.

L'estimateur de Hill est une moyenne des k observations extrêmes moins la $N_u + 1$ ième observation. Il est consistant et asymptotiquement convergent, mais ces propriétés pour des petits échantillons ne sont pas bien connues. Cet estimateur est par ailleurs très sensible en choix de N_u . Cependant, malgré ces réserves, l'estimateur de Hill est considéré comme un bon estimateur de l'indice de queue, comme le montre les différents travaux de (McNeil (2005)). Le principal problème reste sur le nombre de N_u à choisir. Nous savons que l'indice de queue peut être très sensible au choix de la valeur N_u et la théorie donne peu de moyens pour choisir N_u de façon optimale. Une des suggestions est de choisir l'indice de queue graphiquement en le représentant en fonction de différentes valeurs de N_u dont la méthodologie est connu sous le nom de *Hill plot*

Hill Plot

Le graphique de Hill ou *Hill plot* se construit à la fois sur le nombre d'observations et l'estimation de l'indice de queue communément appelé l'estimateur de Hill. Il permet de déterminer le nombre d'observations à partir duquel se forment les valeurs extrêmes. La valeur de l'observation correspondante à ce nombre constitue le seuil. L'estimateur de Hill est basé sur la différence entre la moyenne des N_u excès situés au-delà du seuil u marquant le début de la zone des extrêmes et le N_u ième plus grand excès. Le graphique de Hill se définit par:

$$\{(N_u, \xi_{N_u, N}^H), 1 \leq N_u \leq N - 1\}$$

où N_u est le nombre d'observations au delà du seuil u et $\xi_{N_u, N}^H$, l'estimateur de Hill de l'indice de queue de la loi GPD tel que:

$$\xi_{N_u, N}^H = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} \log\left(\frac{Y_{i, N}}{Y_{N_u, N}}\right) \quad (2.45)$$

où $Y_{i, N}$ représente les excès au delà du seuil u .

Il faut noter que l'estimateur de Hill ne s'applique qu'aux distributions à queues épaisses c'est à dire les distributions ayant un indice de queue positif. Cela constitue une limite d'application du

graphique de Hill si nous avons à faire à distributions normales ou des distributions à queues fines ayant un indice queue inférieur à zéro. En utilisant cette méthodologie, le choix du seuil se fait en observant la stabilité de la valeur de l'indice de queue. Par conséquent, la stabilité de l'estimateur de Hill est d'une grande importance pour déterminer un seuil optimal. En effet, le nombre d'excès correspondant au seuil est déterminé par l'observation sur le graphique de la zone de stabilité (zone où la valeur de l'indice de queue ne varie pas assez) de la valeur de l'indice de queue. Le nombre d'observations à retenir correspond au début de la zone de stabilité.

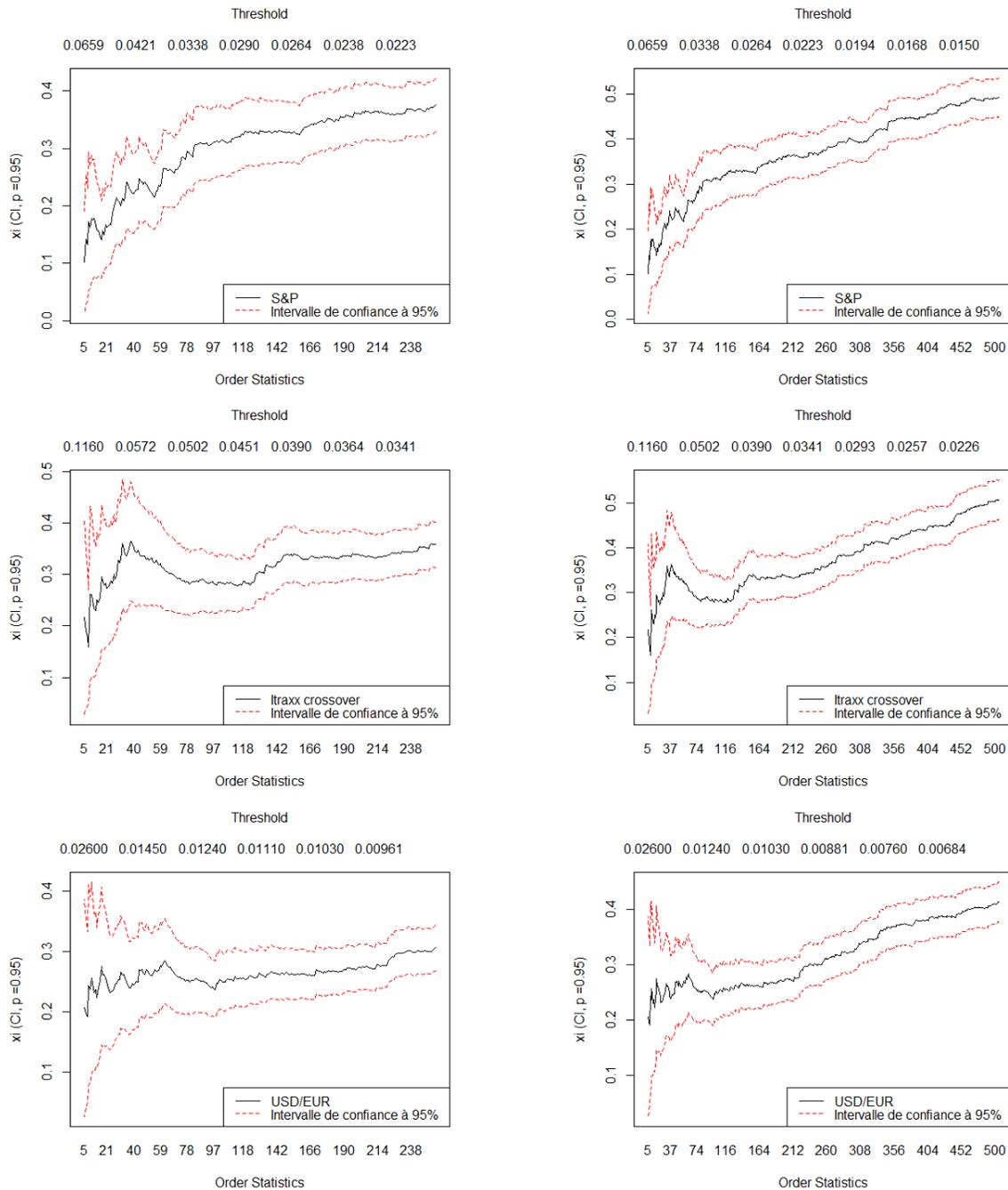


Figure 2.3: **Graphique de Hill**

La sélection du nombre de rentabilité se fait à partir du point où la valeur de l'estimateur de Hill commence à être stable

En appliquant la méthode *Hill plot* sur le portefeuille d'étude, nous rencontrons un problème de choix du nombre d'observations à partir duquel nous pourrions estimer stable l'indice de queue. Par exemple sur le graphique 2.3 concernant l'indice USD/EUR, le graphique ne donne aucune idée sur le nombre de rentabilités extrêmes à retenir, car la stabilité de l'estimateur est difficile à établir. Cela est valable pour les indices actions CAC 40, S&P et Eurostock, les indices de CDS ainsi que USD/BRL. Ce choix difficile du seuil par le *Hill plot* a été illustré par Embrechts et al. (1997) et Dowd(2005)

qu'ils qualifient de *Hill horror plot*. Ils démontrent que la stabilité de l'estimateur de Hill en faisant varier le nombre d'observations n'est pas toujours acquise. Cette instabilité visible sur le graphique précédent est bien vérifiée sur les actifs du portefeuille d'étude. Nous observons sur l'indices S&P, l'indice Itraxx crossover et l'indice USD/EUR qu'en passant de 250 observations extrêmes à 500 observations que l'estimateur augmente en instabilité au point de plus pouvoir choisir le seuil optimal recherché.

2.8.2 Utilisation de la fonction moyenne des excès

Supposons X_1, X_2, \dots, X_n des variables aléatoires indépendamment et identiquement distribués, de fonction de répartition F et introduisons la statistique d'ordre $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq X_{(3)} \dots \geq X_{(n)}$. La fonction de la moyenne des excès est par définition la somme des excès dépassant un certain seuil élevé divisé par le nombre d'observations qui dépassent ce seuil. L'estimateur empirique de la fonction de la moyenne des excès $e_n(u)$ est défini par l'expression suivante:

$$e_n(u) = \frac{1}{N_u} \sum (X_i - u), \quad u > 0 \quad (2.46)$$

Nous rappelons que pour une variables aléatoire X suivant une distribution de Pareto généralisée, l'estimateur de la moyenne des excès de la GPD est donné par :

$$e_n(u) = E(X - u | x > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi} \quad (2.47)$$

où $0 \leq u < \infty < 1$ et $0 \leq X - u \leq -\beta/\xi$ si $\xi < 0$.

La courbe de la moyenne des excès est définie comme suit:

$$((u, e_n(u)), X_{(n,n)} < u < X_{(1:n)}) \quad (2.48)$$

où $X_{(1:n)}$ et $X_{(n,n)}$ sont respectivement le maximum et le minimum de l'échantillon.

Le choix du seuil se fait par rapport au comportement de la courbe moyenne des excès. En effet, si le *Mean Excess plot* semble avoir un comportement linéaire au dessus d'une certaine valeur positive de u , cela signifie que l'excès au-delà de ce seuil suivent une distribution de Pareto généralisée. En pratique, il s'agit de repérer les valeurs de u à partir desquelles $e_u(n)$ est approximativement linéaire. Graphiquement, cela se traduit par un changement de la pente de la courbe qui reste stable.

Nous rappelons que, comme il a été indiqué par Longin(1998) et Gavin(2000), le choix du seuil peut être subjectif mais sa valeur doit nécessairement respecter l'équilibre entre variance et biais pour permettre la convergence de l'estimateur de la GPD. Ainsi nous testons la conformité de la distribution empirique des observations extrêmes et la distribution théorique par les méthodes Quantile-Quantile plot, Test de Kolomogorov-Smirnov et GPD test.

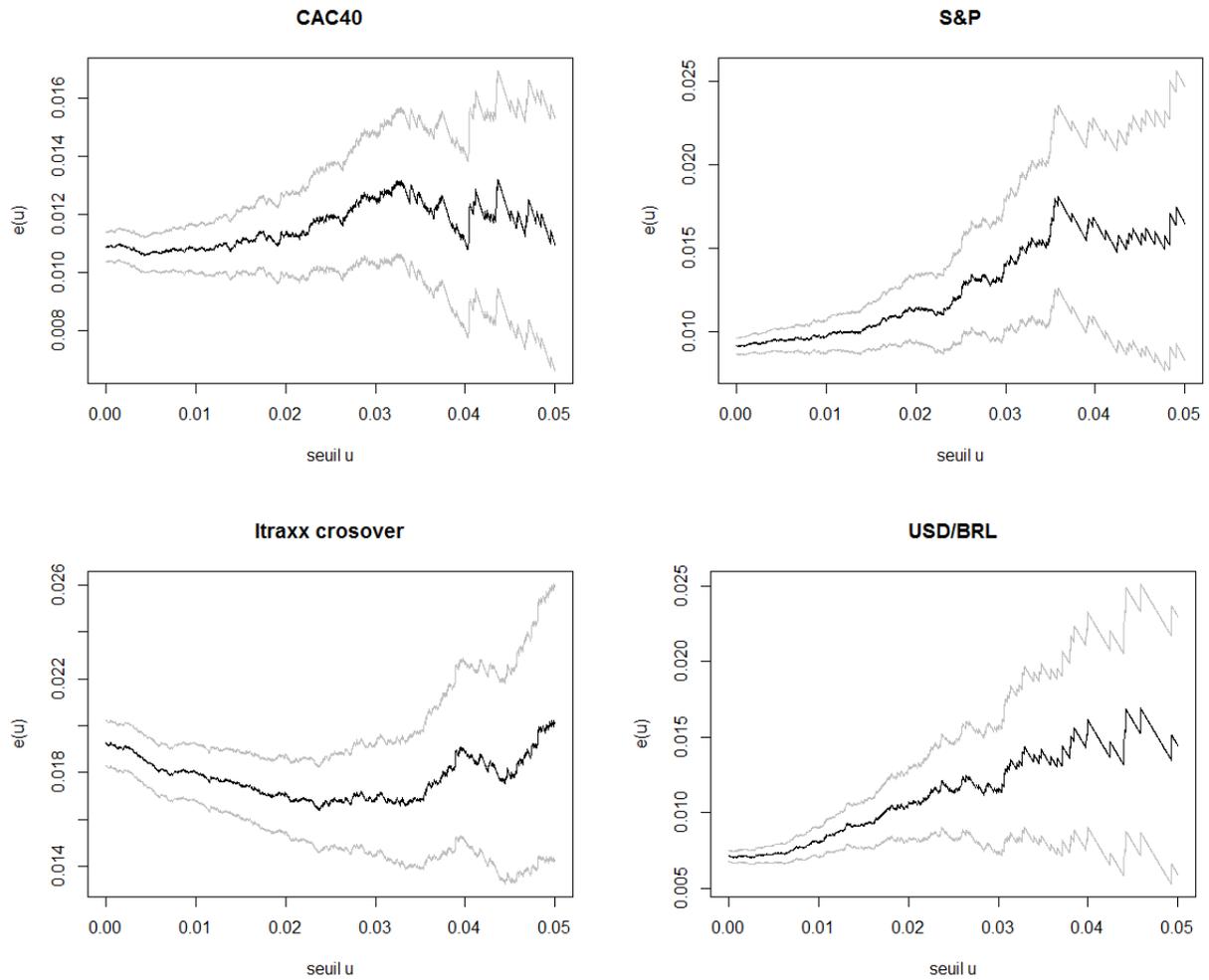


Figure 2.4: **Graphique de la moyenne des excès**

La sélection du seuil se fait à partir du moment où la courbe $e(u)$ semble avoir un comportement linéaire au dessus d'une certaine valeur positive de u .

Nous observons sur la Figure 2.4, par exemple pour la queue gauche de l'indice SP que la courbe devient presque linéaire quand le seuil u est autour de 0.02. La courbe de la moyenne des excès devient linéaire autour des 0.014 pour le CAC40, 0.018 pour l'indice USD/BRL. Il est cependant plus compliqué d'observer le caractère linéaire sur la courbe Itraxx crossover.

En rapportant le nombre de valeurs extrêmes au delà de ces seuils déterminés par la méthode *Mean Excess plot* au nombre d'observation dans les queues de distributions nous obtenons en moyenne un pourcentage de valeurs extrêmes de 10%. Ces résultats confirment le choix de 10% recommandé que Gavin (2000) a utilisé pour la construction des valeurs extrêmes. Il est recommandé d'utiliser cette méthode graphique pour renforcer nos jugements sur les valeurs extrêmes que peuvent enregistrer les actifs, car le seuil u n'est pas toujours uniques sur la courbe de la moyenne des excès.

2.9 Analyse de conformité entre distribution empirique et théorique

Le test de la méthode *Hill plot* a permis de constater qu'elle n'est pas adaptée pour la formation des valeurs extrêmes des données de l'étude. Quant à la méthode *Mean Excess plot*, le choix du seuil sur le graphique peut être difficile. Cependant, les seuils qui sont facilement déterminés sur le *Mean Excess plot* ont généralement 10% de valeurs extrêmes au delà de ces seuils. Ainsi nous retenons 10% des queues de distribution des actifs du portefeuille d'étude pour former les rentabilités extrêmes. Ce choix est fondé sur les résultats obtenus du graphique de la moyenne des excès et des propositions de Gavin (2000) et Neftci (2000). Ces auteurs recommandent de choisir au maximum 10% des queues de distribution pour former les valeurs extrêmes.

Nous rappelons que, comme il a été indiqué par Longin (1998) et Gavin (2000), le choix du seuil peut être subjectif mais doit nécessairement respecter l'équilibre entre variance et biais pour permettre la convergence de l'estimateur de la loi GPD. C'est pourquoi nous testons la conformité de la distribution empirique des observation extrêmes et la distribution théorique à travers les différentes méthodes: QQPlot, Kolmogorov-Smirnov et de test GPD.

2.9.1 Le QQ-Plot

Nous souhaitons à présent savoir si l'utilisation d'une loi de Pareto généralisée est bien adaptée à la modélisation des dépassements de seuil, comme le postule la théorie des valeurs extrêmes. Pour cela, nous avons besoin de disposer de méthodes permettant d'apprécier la qualité d'une loi à décrire un échantillon de données. Pour apprécier la qualité d'ajustement d'une loi, une méthode graphique usuelle en statistiques consiste à tracer le QQ-plot de la loi ajustée. C'est un graphique reliant les quantiles théoriques de la loi aux quantiles empiriques de l'échantillon. Les points tracés sur un QQ-plot sont donc les suivants:

$$\left\{ \left(F^{-1} \left(\frac{n-k+1}{n+1} \right), x_{k:n} \right), k = 1, 2, \dots, n \right\} \quad (2.49)$$

avec F^{-1} l'inverse de la fonction de distribution de la loi ajustée et $x_{k:n}$ le k -ième élément de l'échantillon (x_1, \dots, x_n) classé par ordre croissant. Plus les points obtenus sont situés le long d'une droite, plus la loi utilisée décrit avec précision les données. En particulier, le QQ-plot permet de juger de la qualité de l'ajustement sur les queues de la distribution. Si au niveau d'une queue les points sont convexes (resp. concaves), alors la queue de la loi ajustée est trop fine (resp. épaisse). La précision d'un QQ-Plot est relative au nombre de points de l'échantillon: plus nous disposerons de points, plus le QQ-plot sera fiable.

2.9.2 Test de Kolmogorov-Smirnov

Pour disposer d'une mesure quantitative de la qualité du modèle, nous avons effectué tout au long de ce mémoire des test de Kolmogorov-Smirnov. Ce test permet de déterminer si un échantillon de données (x_1, \dots, x_n) suit une certaine loi de probabilité. Ce test repose sur les propriétés asymptotiques de la fonction de répartition empirique $\hat{F}_n(x)$ définie ainsi:

$$F_n\hat{(x)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{x_i \leq x} \quad (2.50)$$

Le test de Kolmogorov-Smirnov étudie la plus grande différence, en valeur absolue, entre la fonction de répartition empirique $\hat{F}_n(x)$ et la fonction de répartition $F(x)$ de la loi étudiée. On note D_n la statistique de ce test définie ainsi:

$$D_n = \sup_x |\hat{F}_n(x) - F(x)| \quad (2.51)$$

Plus la variable aléatoire D_n est proche de 0, plus la fonction de répartition empirique est proche de la fonction de répartition $F(x)$ postulée. Pour chaque test de Kolmogorov-Smirnov réalisée, nous avons indiqué la *p-value* renvoyé par la fonction `ks.test()` du logiciel R. Si \hat{D}_n est la valeur obtenue de la statistique du test, la *p-value* représente la probabilité d'observer une réalisation \hat{D}_n pour une variable aléatoire D_n , sous l'hypothèse que l'échantillon (x_1, \dots, x_n) est issue de la loi de probabilité de fonction de répartition $F(x)$ postulée. Ainsi, plus cette *p-value* est proche de 0, plus l'hypothèse que les (x_1, \dots, x_n) sont issus de $F(x)$ sera à rejeter. Inversement, une *p-value* proche de 1 indique une bonne modélisation.

2.9.3 GPD Test

Nous avons vue précédemment le test Kolomogorov Smirnov présentant l'avantage de quantifier (*p-value*) la possibilité ou non d'un échantillon d'être issue d'une loi paramétrique définie. Cependant cette dernière se concentre sur l'ensemble de la distribution et plusieurs auteur ont montré qu'une bonne adéquation globale n'implique pas forcément une bonne adéquation en queue de distribution⁶. Or, c'est cette dernière zone qui nous intéresse le plus lorsque nous recherchons des quantiles extrêmes. Nous nous somme de ce fait muni d'un test qui se concentre particulièrement sur ces queues de distributions afin d'affiner notre étude.

Ce test est issue des travaux de Villasenor-Alva et al. et est disponible dans le package `gpd.test` de R. Ce test à pour objectif de répondre à une question "Suis-je en présence ou pas d'un échantillon présentant un paramètre de forme ξ positif ou négatif?". Il nous permettra de se fait d'avoir un autre palier de validation pour nos modélisations et ainsi d'affiner nos recherches.

Utilisation d'un Bootstrap

Le test se déroule ainsi, on considère les deux hypothèses:

- H_0 : l'échantillon aléatoire a une gPd avec $\xi \geq 0$
- H_1 : l'échantillon aléatoire a une gPd avec $\xi \leq 0$

⁶voir SERVEL et TRAN [2012]

Ainsi les deux évènements queues épaisses ou non sont prises en considération dans ce test donc l'intersection-union. Un bootstrap paramétrique est ensuite réalisé sur le paramètre ξ dans chacune des deux hypothèses. On rappelle que l'idée d'un bootstrap paramétrique est de rééchantillonner un échantillon de base afin de lui associer une loi paramétrique. Pour plus de détails voir Villasenor-Alva et al. Nous rappelons que l'expression de la distribution GPD est celle de (2.20).

2.9.4 Exemple d'ajustements

Nous présentons dans la section suivante les différents ajustements d'une loi de Pareto généralisée sur les queues de distributions. L'importance du caractère gain/perte lié au stress test nous incite à nous intéresser aux deux queues de distribution que nous qualifions de queue gauche et droite, représentant respectivement un gain ou une perte lié à la variation d'un actif sur une période donnée. L'historique des prix correspond à ceux explicités dans la section 2.1. Nous avons pu constater avec l'aide de tests statistiques que la loi normale ne modélise pas de façon réaliste les rendements des différents facteurs de risques.

Cette partie est consacrée à l'étude des différents facteurs de risques. Nous estimons dans un premier temps les différents paramètres par maximum de vraisemblance, dans un second temps par soucis de cohérence nous validons notre modèle à l'aide de tests statistiques aussi bien graphique (QQ-plot) que quantitatif (Kolmogorov-Smirnov, GPD test)

	Queue gauche						Queue droite							
	N	N_u	u	ξ	β	(ξ)	(β)	N	N_u	u	ξ	β	(ξ)	(β)
CAC40	2612	360	0.107	0.050	0.011	0.004	0.001	370	0.016	0.223	0.008	0.005	0.005	0.00
S&P	2618	354	0.014	0.185	0.008	0.006	0.000	350	0.014	0.179	0.004			0.000
Eurostock	2615	360	0.102	0.054	0.011	0.001	0.000	360	0.017	0.201	0.008	0.004	0.004	0.000
USD/EUR	2658	360	0.073	0.057	0.003	0.004	0.000	360	0.074	0.087	0.004	0.005	0.005	0.000
USD/BRL	2603	360	0.107	0.201	0.006	0.004	0.000	380	0.104	0.215	0.006	0.004	0.004	0.000
Itraxx crossover	2604	260	0.040	0.189	0.014	0.007	0.001	260	0.033	0.180	0.019	0.006	0.006	0.001
Itraxx EUR	2604	260	0.037	0.271	0.016	0.006	0.001	260	0.038	0.186	0.023	0.006	0.006	0.002
Itraxx Highvol	2604	260	0.037	0.254	0.023	0.005	0.001	260	0.034	0.260	0.015	0.007	0.007	0.001

Table 2.2: **Paramètre estimé du modèle inconditionnel GPD**

Les valeurs (ξ) et (β) correspondent respectivement aux erreurs standards de l'indice de queue ξ et du paramètre de dispersion β du modèle GPD. N est le nombre d'observation dans les queues. N_u est le nombre d'observations au-delà du seuil u . Les valeurs en gras correspondent aux valeurs de l'indice de queue ξ la plus élevée comparativement à l'autre queue de distribution.

Le tableau précédent présente les résultats de l'estimation des paramètres de la distribution de Pareto (ξ et β) ainsi que le nombre d'observation extrêmes N_u et le seuil u obtenus sur les indices actions, crédit et taux de changes.

L'indice de queue ξ de la distribution de Pareto généralisé attire particulièrement notre attention parce qu'il fournit une information sur le poids des extrêmes dans la distributions parente. L'examen du tableau révèle que la valeur de l'indice de queue ξ des différents indices estimés sur la queue droite et gauche sont supérieur à zéro. Cela signifie que ces actifs présentent des distributions à queues épaisses c'est à dire que la probabilité d'occurrence de pertes extrêmes ou de gains extrêmes est plus élevée que ce que prévoit la loi normale. Cette information signale au gestionnaire de risques que certains actifs du portefeuille comme le S&P, l'indice Itraxx EUR ou encore l'indice Itraxx crossover présentent un risque de perte très élevé. Par conséquent la détention de ces actifs demandent beaucoup plus de fonds propres réglementaire.

La comparaison des indices de queues de distribution des actifs du portefeuille d'étude permet d'observer une valeur estimée de l'indice de queue gauche supérieur à celle estimée dans la queue droite pour le S&P, l'indice Itraxx crossover et l'indice Itraxx EUR. Cela montre que la queue gauche de ces actifs est plus épaisse que la queue droite. Ces actifs apparaissent donc plus risqués dans la mesure où la probabilité d'occurrence de gains est associée à un risque de pertes extrêmes relativement plus élevé.

A l'opposé, il apparaît que la valeur du paramètre de $\hat{\xi}$ estimée dans la queue gauche de distribution de l'indice CAC40, l'Eurostock, les taux de changes USD/EUR USD/BRL ainsi que l'Itraxx Highvol est inférieur à celle estimée dans la queue droite. Ce résultat a souligné que ces actifs ont plus de chance d'enregistrer des gains extrêmes que de pertes extrêmes. Le risque de pertes extrêmes serait donc inférieur à la perspective de gains extrêmes.

Les valeurs de l'indice de queue de la distribution de rentabilités sont positives pour tous les actifs. Cela confirme la présence des queues épaisses dans la distribution de rentabilité des actifs du portefeuille d'étude. Ce qui veut dire qu'en utilisant la loi normale pour estimer les pertes potentielles, il y a un risque de sous-estimation des pertes réelles. L'application de la théorie des valeurs extrêmes sur les données de l'étude est donc justifiée car elle n'impose pas de distribution particulière aux données. Nous verrons dans le chapitre suivant comment les mesures de risques peuvent être déterminés à l'aide des paramètres estimés.

Nous vérifions l'adéquation du modèle à l'aide des différents test statistiques:

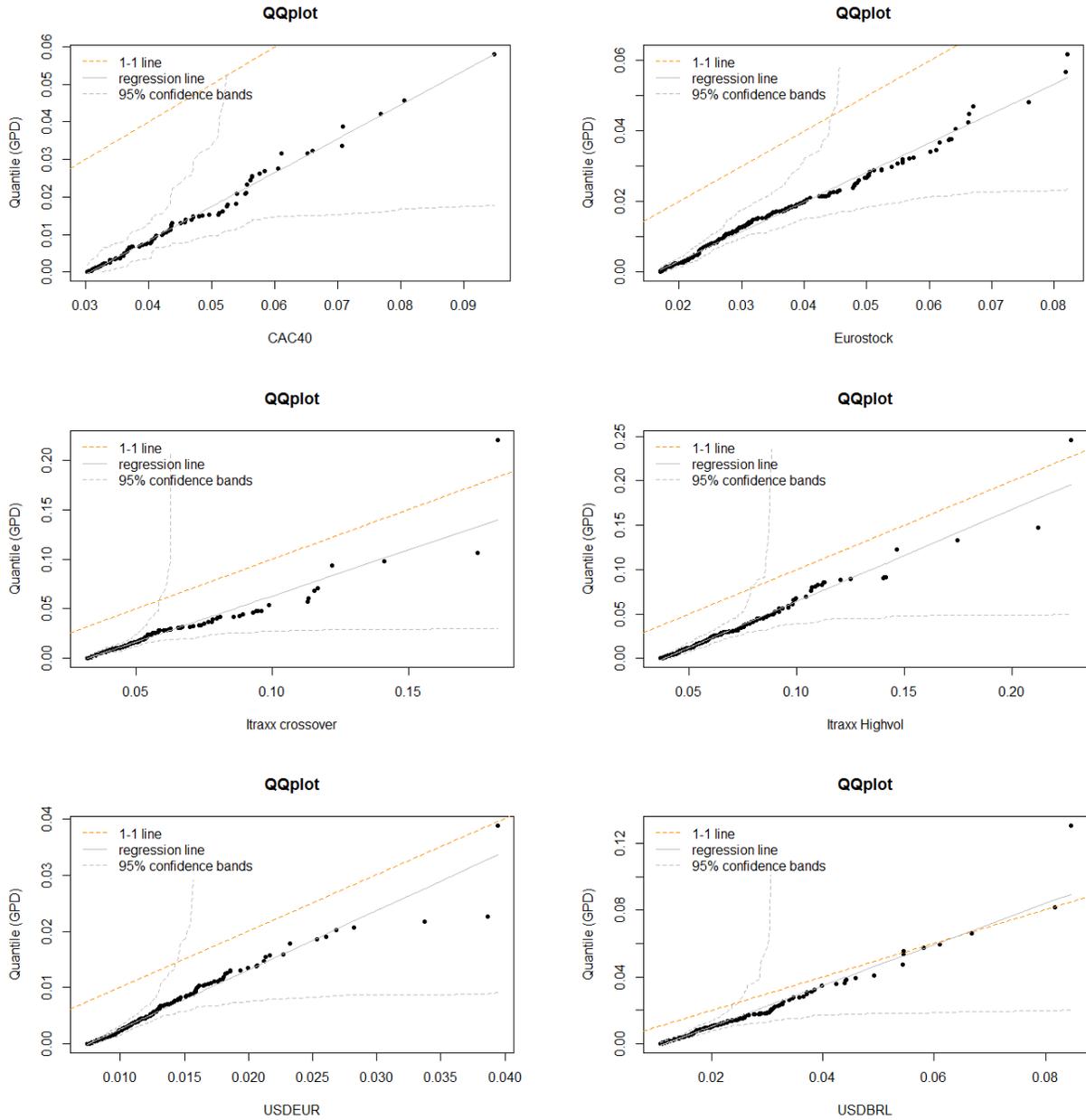


Figure 2.5: **QQ Plot-Test de Conformité de la loi GPD à la distribution empirique**

La relative linéarité des courbes par rapport à la droite montre une certaine conformité entre la distribution empirique des rentabilités extrêmes des actifs.

La détermination d'un seuil pour chacune des queues de distribution du portefeuille d'étude a permis de former la série des rentabilités extrêmes. La linéarité de la courbe QQ-plot pour tous les actifs du portefeuille d'étude permet d'affirmer la conformité entre la distribution empirique des rentabilités extrêmes et la distribution de Pareto généralisé.

Le Test de Kolmogorov-Smirnov qui peut être vue comme un QQ-plot "quantitatif" fait preuve de deuxième étape de validation du modèle. Nous le présentons dans le tableau ci dessous.

Actifs	CAC40	S&P	Eurostock	USD/EUR	USD/BRL	CDS1 ⁷	CDS2 ⁸	CDS3 ⁹
Statistiques	0.90	0.78	0.77	0.86	0.80	0.86	0.84	0.76
P-value	0.21	0.24	0.61	0.09	0.18	0.24	0.14	0.09

Table 2.3: **Test de Kolmogorov-Smirnov des actifs**

Les résultats du test de Kolmogorov-Smirnov montre une certaine cohérence entre la distribution empirique et la modélisation GPD. Cependant le niveau "faible" des p-values sans doute du au caractère propre du test qui se focalise en grande partie sur la partie centrale de l'échantillon nous incite à l'utilisation du test GPD. On rappelle que ce dernier nous donne une information directement sur la queue de distribution et constitue notre dernière étape de validation.

Actifs	CAC40	S&P	Eurostock	USD/EUR	USD/BRL	CDS1 ¹⁰	CDS2 ¹¹	CDS3 ¹²
ξ	$\xi > 0$	$\xi > 0$	$\xi > 0$					
Statistiques	0.98	0.99	0.96	0.96	0.86	0.99	0.99	0.99
P-value	0.64	0.87	0.89	0.89	0.78	0.64	0.70	0.84

Table 2.4: **GPD des actifs**

Le niveau globalement élevé des p-values nous conforte sur le choix de la modélisation GPD.

Ce test que nous avons considéré comme dernier pallier de validation est en parfaite harmonie avec notre idée de modélisation GPD. Nous pouvons ainsi à l'aide de mesure de risque que nous définirons ultérieurement calculer des quantiles extrêmes.

Nous avons supposé dans la section suivante que les rentabilités étaient identiquement et indépendamment distribuées (i.i.d) et que leurs variances étaient constantes dans le temps. Empiriquement, ces hypothèses ne sont généralement pas vérifiées. En effet, les facteurs de risques sont souvent hétéroscédastiques et autocorrélées (Engle (1982)). Il est approprié d'estimer la volatilité conditionnelle, c'est à dire la volatilité qui est conditionnelle au passé récent. Ainsi, la modélisation inconditionnelle vue précédemment ne permet pas d'obtenir des résultats satisfaisants pendant les périodes de fortes volatilités (McNeil and Frey (2000)). La théorie des valeurs extrême suppose également que les données sont i.i.d, ainsi la section suivante traite de la modélisation de la volatilité conditionnelle indispensable pour l'utilisation de la distribution de Pareto.

2.10 Modélisation de la volatilité conditionnelle

Dans cette section nous tenons compte de certaines caractéristiques des rentabilités à savoir l'autocorrélation, le clustering de la volatilité. Les rentabilités sont rendues i.i.d en éliminant les corrélations sérielles et le clustering de volatilités. Le problème de la corrélation sérielle peut être résolu en introduisant dans la moyenne conditionnelle le terme MA (Moving Average). Pour éliminer le clustering de volatilités, il est nécessaire de le modéliser avec un processus qui le génère comme le processus GARCH (Generalized Autoregressive Conditionnal Heteroscedasticity). Le modèle GARCH a été introduit par Bollerslev (1986) pour tenir compte de la dynamique de la volatilité dans le temps. Ce modèle est une extension du modèle ARCH initialement développé par Engle (1982).

Le modèle de volatilité est utilisé dans cette étude pour deux principales raisons:

- La première raison est l'utilisation du modèle comme une méthodologie de mesure de risque. Le modèle de volatilité est directement utilisé pour modéliser la Value at Risk et l'Expected Shortfall
- La deuxième raison est d'extraire des résidus standardisés sur lesquels est basée la méthode des excès, de tenir compte du changement de la volatilité dans le temps et de l'effet d'asymétrie. L'estimation des paramètres de la loi GPD n'est plus basée sur les rentabilité mais plutôt sur les résidus standardisés.

La méthode des excès basée sur la distribution de Pareto généralisée exige que les variables aléatoires soient indépendamment et identiquement distribuées. Cependant, la plupart des rentabilités financières présentent une certaine corrélation sérielle et de l'hétéroscédasticité (Ding et al(1993)). Nous vérifions ces caractéristiques sur les variations des données à partir du test de Ljung-Box (Box et al. (1994)) et de l'autocorrélogramme. Le test de Ljung-Box est basé sur la statistique:

$$Q = n(n + 2) \sum_{k=1}^L \frac{\hat{\rho}_k^2}{n - k} \approx \chi_{(\alpha, L)}^2 \quad (2.52)$$

où n est la taille de l'échantillon $\hat{\rho}_k$ l'échantillon d'autocorrélation au retard k et L est le nombre de retard testé.

Le Test de Ljung-Box permet de tester la présence de la corrélation sérielle dans les variables aléatoire. Si la statistique calculé est inférieure à la valeur critique du Khi-deux, cela indique une absence d'autocorrélation dans les données. Dans le cas contraire les données présentent une corrélation sérielles et ne sont pas considérées comme des variables indépendamment distribuées.

Les résultats de ce test (dans le tableau 2.5) effectué sur les variations des données rejettent l'hypothèse d'absence de corrélation sérielle. Ces résultats sont confirmés par les graphiques en annexe qui montrent respectivement l'autocorrélation et la persistance de la volatilité dans les rentabilités.

Actifs	CAC40	S&P	Eurostock	USD/EUR	USD/BRL	CDS1 ¹³	CDS2 ¹⁴	CDS3 ¹⁵
Statistiques	85.43	78.56	87.21	68.56	90.44	124.45	97.33	77.14
Valeur critique	43.77	43.77	43.77	43.77	43.77	43.77	43.77	43.77
P-value	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Table 2.5: **Résultat du test de Ljung-Box sur les rentabilités**

Les P-values étant nulles, l'hypothèse i.i.d est rejetée au seuil de 5%

2.10.1 Modèle GARCH-GJR

Dans cette étude, nous utilisons le modèle GJR (Glosten, Jagannathan, Runkle) d'ordre 1 connu sous le nom de GARCH asymétrique (Glosten et al. (1993)) qui est une des formes du modèle GARCH pour estimer la volatilité conditionnelle. Il permet non seulement d'estimer la volatilité conditionnelle mais aussi de tenir compte du caractère asymétrique de distribution de variable aléatoire comparativement au modèle GARCH standard qui suppose cette asymétrie nulle.

Le modèle GARCH est un processus qui permet de tenir compte du changement de la volatilité dans le temps. Tous les modèles GARCH ont en commun la corrélation positive entre la volatilité à la date $t - 1$ et celle à la date t , c'est à dire une structure auto-régressive dans la volatilité. Le modèle GJR est un modèle GARCH non linéaire qui permet de rendre compte de l'asymétrie dans la réponse de la variance conditionnelle à une innovation. Le principe du modèle GJR est que la dynamique de la variance conditionnelle admet un changement de régime qui dépend du signe de l'innovation passée. La notion $GJR(1, 1)$ signifie que nous utilisons un modèle d'ordre 1, c'est à dire que la variance à la date t est prévue comme étant la moyenne pondérée d'une constante, de la variance et du résidu au carré à la date $t - 1$.

Supposons X_t des variables aléatoires satisfaisant une représentation de type $ARMA(1, 1) - GJR(1, 1)$ où $ARMA$ est le modèle d'estimation de la moyenne conditionnelle. Ce processus s'écrit sous la forme d'un $ARMA(1, 1)$

$$X_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \epsilon_t + \alpha_2 + \epsilon_{t-1} \quad (2.53)$$

où ϵ représente l'innovation ou le résidu; $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sont des paramètres du modèle. La variance conditionnelle $GJR(1, 1)$ est donnée par:

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_t^2 + \beta_2 \epsilon_{t-1}^2 + \rho \mathbb{1}_{\epsilon_{t-1} < 0} \epsilon_{t-1}^2 \quad (2.54)$$

où $\beta_0 \geq 0, \beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$.

Il est important d'imposer des contraintes sur ces paramètres pour satisfaire la condition de positivité de la variance conditionnelle. La stationnarité des résidus est assurée si :

$$\beta_1 + \beta_2 + \rho/2 \quad (2.55)$$

$\mathbb{1}_{\epsilon_{t-1} < 0}$ est un indicateur tel que :

$$\mathbb{1}_{\epsilon_{t-1} < 0} = 1 \text{ si } \epsilon_{t-1} < 0 \quad (2.56)$$

$$\mathbb{1}_{\epsilon_{t-1} < 0} = 0 \text{ sinon} \quad (2.57)$$

Le paramètre ρ représente le paramètre qui fait la différence entre un modèle de GARCH symétrique et un modèle GARCH asymétrique (modèle GJR). Ce paramètre permet de modéliser un effet asymétrique lié aux signes des innovations ou résidus passés ϵ_{t-1} . Si $\rho > 0$ (respectivement < 0), un choc négatif (positif) sur les innovations passées à la date $t - 1$ se traduira à la date t par une augmentation (respectivement une diminution) de la variance conditionnelle ou de la volatilité conditionnelle. Cet effet asymétrique peut être justifié par l'accroissement de l'effet de levier (ratio d'endettement) d'une entreprise suite à une diminution de sa valeur boursière, ce qui devrait se traduire par une augmentation de son risque tel que mesuré par la variance.

2.10.2 Estimation des paramètres des modèles ARMA-GJR

Nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance pour déterminer les paramètres du modèle ARMA-GJR. Les estimateurs $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\rho})$ s'obtiennent en maximisant la fonction de log-vraisemblance $L(\theta)$. La fonction de log-vraisemblance du modèle ARMA(1,1)-GJR(1,1) de variables aléatoire X_t obtenue sous l'hypothèse de la normalité des résidus de la loi conditionnelle de X_t sachant son propre passé est donnée par la formule suivante:

$$L(\theta) = \log \prod_{t=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2(\theta)}} \exp\left(-\frac{\epsilon_t}{2\sigma_t^2(\theta)}\right) \quad (2.58)$$

$$= -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left(\log \sigma_t^2(\theta) + \frac{\epsilon_t}{\sigma_t^2(\theta)} \right) \quad (2.59)$$

- où θ désigne l'ensemble des paramètres du modèle,
- ϵ_t représente les résidus ou innovations obtenus par la différence entre les rentabilités X_t et la moyenne μ_{t+1} .
- σ_t^2 représente la variance conditionnelle.

Il n'existe pas de solution analytique à la maximisation de la vraisemblance dans le cas général des modèles GARCH. Nous devons donc recourir à une optimisation numériques de la vraisemblance. Nous avons retenu pour conditions initiales sur les paramètres θ , les valeurs estimées dans le cas d'un modèle GARCH sous l'hypothèse de normalité des résidus. Formuler une telle hypothèse semblerait être en contradiction avec notre objectif, qui est justement de ne pas supposer le risque gaussien pour prendre en considération les queues épaisses de sa distribution. Bollerslev et Woolridge (1992) ont cependant montré que les paramètres estimés sous l'hypothèse de normalité du modèle des résidus sont asymptotiquement consistents, sous réserve que l'équation de la variance soit proche de la réalité statistique.

A partir de l'équation (2.59), nous avons maximisé la fonction de log-vraisemblance pour obtenir les estimateurs $\hat{\theta}$ dont les valeurs estimées sont donnée dans le tableau suivant. En effet, figure en premier ligne les paramètres estimés de la fonction de log-vraisemblance. Ensuite, nous avons par actifs, les valeurs estimées, l'erreur standard, la statistique de Student associée au test de nullité du paramètre considéré et la p-value associé à la loi asymptotique de la statistique de Student.

Il est à noter que pour un risque de première espèce de α , si la p-value est inférieure au seuil de $\alpha\%$, nous sommes conduits à rejeter l'hypothèse de nullité du coefficient. Le coefficient est donc significativement différent de zéro.

		Paramètres ARMA(1,1)			Paramètres GJR(1,1)			
		$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\rho}_0$
CAC40	Estimation	0.004	0.572	-0.627	0.000	0.9531	0.0622	-1.00
	Erreur std	0.0001	0.0938	0.0899	0.000	0.0003	0.0004	0.002
	t-value	1.365	5.016	-5.752	0.360	254.636	13.958	-84.802
	P-value	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Eurostock	Estimation	0.0005	0.4705	-0.5170	0.000	0.9535	0.0662	-1.000
	Erreur std	0.0001	0.0937	0.0898	0.0000	0.0037	0.0047	0.0179
	t-value	4.365	5.016	-5.752	0.360	254.636	13.958	-84.802
	P-value	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
S&P	Estimation	0.0000	0.3922	-0.4528	0.0000	0.9229	0.0601	-1.000
	Erreur std	0.000	0.02399	0.0299	0.0000	0.0068	0.0070	0.0163
	t-value	-1.097	1.635	-1.943	6.420	134.786	8.584	-61.282
	P-value	0.273	0.102	0.052	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
USD/EUR	Estimation	0.0000	0.6261	-0.6301	0.0000	0.9645	0.00448	-0.0732
	Erreur std	0.0001	0.0072	0.0071	0.0000	0.0039	0.0045	0.0081
	t-value	-0.503	0.862	-0.875	2.741	243.528	8.923	-0.897
	P-value	0.6150	0.3887	0.3814	0.0061	0.0000	0.0000	0.0361
USD/BRL	Estimation	0.0000	0.9982	-0.9974	0.0000	0.8626	0.1354	0.2641
	Erreur std	0.0002	0.0006	0.0001	0.0000	0.0013	0.0012	0.0042
	t-value	5.041	1432.999	7.041	5.041	66.599	11.206	6.209
	P-value	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
CDS1	Estimation	-0.0011	0.0283	0.0553	0.0019	0.8765	0.1211	0.1772
	Erreur std	0.0003	0.0039	0.0042	0.0006	0.0023	0.0019	0.0088
	t-value	-3.583	0.716	1.292	3.006	36.633	6.319	2.004
	P-value	0.0000	0.4742	0.1963	0.0026	0.0000	0.0000	0.0045
CDS2	Estimation	-0.0007	0.3097	-0.1961	0.0004	0.8761	0.1459	0.2333
	Erreur std	0.0003	0.0161	0.0171	0.0001	0.0011	0.0013	0.0064
	t-value	-1.967	1.919	-1.146	3.990	77.981	10.747	3.621
	P-value	0.0491	0.0549	0.251	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
CDS3	Estimation	0.0001	0.2828	-0.1290	0.0010	0.8655	0.1387	0.2430
	Erreur std	0.0003	0.1369	0.1439	0.0001	0.0013	0.0146	0.0064
	t-value	0.494	2.066	-0.897	6.046	65.316	9.458	3.755
	P-value	0.621	0.0388	0.3699	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Table 2.6: Paramètres estimés des modèles ARMA-GJR

Les valeurs en gras représentent les P-values inférieures à 5%. Les valeurs des paramètres correspondant aux P-values inférieures à 5% sont significativement différentes de zéro.

On observe dans le cas du portefeuille d'étude que les paramètres estimés $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ et $\hat{\rho}$ de la variance conditionnelle de l'équation (2.54) sont significativement différents de zéro au seuil de 5%. Nous remarquons également qu'au seuil de 5%, les paramètres estimés, $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ sur la moyenne conditionnelle de l'équation (2.53) sont significativement différents de zéro pour le CAC40, l'Eurostock et l'USD/EUR. Ils présentent dans certains cas (S&P, Itraxx Highvol) des p-value de l'ordre de 60%. Cela signifie que l'hypothèse de nullité de l'effet i.i.d est acceptée au seuil de 5% pour le S&P.

La volatilité conditionnelle est très persistante ($\hat{\beta}_1 = 0.95$) pour le CAC40 et également très réactive ($\hat{\beta}_1 + \hat{\rho}/2 = 0.4531$). Les autres actifs présentent les mêmes caractéristiques. Ce qui signifie que leur volatilité réagit fortement aux innovations mais aussi au changement de la volatilité à la date $t - 1$. Il faut noter que la stationnarité du modèle est bien vérifiée ($\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 + \hat{\rho}/2 < 1$)

En estimant le modèle ARMA(1,1)-GJR(1,1) sur les rentabilités des actifs du portefeuille d'étude, nous obtenons des résidus et des volatilités conditionnelles. Le processus ARMA(1,1) de l'équation (2.53) fournit la moyenne conditionnelle avec des résidus déterminés par les rentabilités ajustées de la moyenne. Notons Z_t le rapport entre le résidu et la volatilité à la date t représentant un bruit blanc de faible homoscedasticité tel que $\mathbb{E}(z_t) = 0$ et $\text{Var}(z_t) = \sigma_z^2$.

$$Z_t = \frac{x_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t} \quad (2.60)$$

Les variables Z_t sont des résidus standardisés qui constituent les données de base pour le calcul des pertes potentielles par la méthode des excès et par les méthodes traditionnelles de mesure de risque de marché. Ces résidus standardisés sont approximativement identiquement et indépendamment distribués comme le démontre le test de Ljung-Box du tableau ci dessous. Le graphique *voir annexe* présente également l'autocorrélogramme montrant l'absence d'autocorrélation dans les résidus standardisés.

Actifs	CAC40	S&P	Eurostock	USD/EUR	USD/BRL	CDS1 ¹⁶	CDS2 ¹⁷	CDS3 ¹⁸
Statistiques	55.43	88.56	77.21	68.46	80.74	127.34	87.41	74.84
Valeur critique	43.77	43.77	43.77	43.77	43.77	43.77	43.77	43.77
P-value	0.51	0.57	0.78	0.84	0.68	0.48	0.87	0.77

Table 2.7: **Résultat du test de Ljung-Box sur les résidus standardisés**

Les P-values étant supérieur à 5% , l'hypothèse i.i.d est acceptée au seuil de 5%

2.10.3 Prévisions de la moyenne et de la variance conditionnelles

Après avoir estimé les paramètres du modèle GARCH-GJR, nous pouvons prévoir les moyennes conditionnelles ($\hat{\mu}_{t-n+1}, \dots, \hat{\mu}_t$) et les variances conditionnelles ($\hat{\sigma}_{t-n+1}, \dots, \hat{\sigma}_t$). Les moyennes et les variances conditionnelles sont calculés de façon récursive à partir des équations (2.53) et (2.54) après substitution de valeurs initiales. Le graphique *voir annexe* compare l'évolution des résidus et des volatilités conditionnelles estimés par le modèle ARMA(1,1)-GJR(1,1) sur les actifs du portefeuille d'étude. Ce graphique montre la présence du changement de la volatilité (hétéroscedasticité) dans les résidus.

Les valeurs prévisionnelles de la moyenne et de la variance conditionnelles sont déterminés par les formules ci-dessous:

$$\mu_t = \hat{\alpha}_0 + \alpha_1 \hat{X}_t \quad (2.61)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sigma_t^2 \hat{\beta}_2 \epsilon_t^2 + \hat{\rho} \mathbb{1}_{\epsilon_t < 0} \epsilon_t^2 \quad (2.62)$$

La variance σ_{t+1}^2 est déterminé à partir des coefficients estimés ($\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$), ($\hat{\beta}_2$ et $\hat{\rho}$) et à partir du résidu ainsi que la variance à la date t . **Les résidus standardisés et la volatilités prévisionnelles σ_{t+1} servent à l'estimation des paramètres de la distribution de Pareto généralisée et à la modélisation conditionnelle des mesures de risque de marché que nous verrons au chapitre suivant.**

2.10.4 Estimation à l'aide de résidus Standardisés

L'estimation des paramètres de la distribution de Pareto généralisée se fait sur les variables identiquement et indépendamment distribués c'est à dire sur les résidus standardisés qui ont été calculés par l'application des modèles ARMA(1,1)-GJR(1,1) sur les rentabilités des actifs du portefeuille . Nous avons considéré pour l'estimation des paramètres la queue gauche et la queue droite de distribution de chaque actif. Pour la formation des rentabilité extrêmes nous avons appliqué les mêmes méthodologies que celle écrite précédemment, c'est à dire en prenant 10% des résidus standardisés de queues gauche et droite de la distribution de rentabilités des actifs du portefeuille.

	Queue gauche						Queue droite							
	N	N_u	u	ξ	β	(ξ)	(β)	N	N_u	u	ξ	β	(ξ)	(β)
CAC40	2612	370	1.208	0.143	0.556	0.004	0.001	370	1.310	-0.035	0.478	0.001	0.003	
S&P	2618	350	1.308	0.205	0.631	0.006	0.002	350	1.199	-0.008	0.490	0.004	0.000	
Eurostock	2615	360	1.205	0.201	0.011	0.004	0.002	360	1.301	-0.082	0.512	0.004	0.000	
USD/EUR	2658	360	1.259	0.211	0.577	0.007	0.000	360	1.276	0.059	0.573	0.001	0.000	
USD/BRL	2603	360	1.220	0.108	0.648	0.004	0.001	380	1.216	0.048	0.484	0.004	0.000	
Itraxx crossover	2604	260	1.106	0.267	0.455	0.003	0.001	260	1.136	0.255	0.501	0.006	0.001	
Itraxx EUR	2604	260	1.173	0.224	0.510	0.006	0.001	260	1.208	0.139	0.486	0.006	0.004	
Itraxx Highvol	2604	260	1.157	0.162	0.575	0.005	0.001	260	1.133	0.026	0.545	0.005	0.002	

Table 2.8: **Paramètre estimé du modèle conditionnel GPD**

Les valeurs (ξ) et (β) correspondent respectivement aux erreurs standards de l'indice de queue ξ et du paramètre de dispersion β du modèle GPD. N est le nombre d'observation dans les queues. N_u est le nombre d'observations au-delà du seuil u . Les valeurs en gras correspondent aux valeurs de l'indice de queue ξ la plus élevée comparativement à l'autre queue de distribution.

L'examen du tableau précédemment révèle que l'indice de queue estimé sur la queue gauche du CAC40, S&P 500, etc. . . est supérieur à zéro. Cela signifie que ces actifs présentent des distributions à queue épaisses c'est à dire que la probabilité d'occurrence de pertes extrêmes est très élevée.

La comparaison des indices de queue de distributions des actifs du portefeuille d'étude permet d'observer une valeur estimée de l'indice de queue gauche supérieure à l'indice de queue droite. Cela montre que la queue gauche de ces actifs est plus épaisse que leur queue droite. Ces actifs apparaissent donc plus risqués dans la mesure où leur probabilité d'occurrence de gains est associée à un risque de pertes extrêmes relativement plus élevé.

2.11 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'attirer l'attention sur la non normalité et de leptokurticité de la distribution des facteurs de risques. L'indice de queue de la distribution de Pareto généralisée qui détermine la loi suivie par les facteurs de risque indique que ces distributions présentent des queues épaisses. Ces caractéristiques des actifs du portefeuille dénotent leur exposition aux risques extrêmes.

Nous remarquons que la construction des rentabilités extrêmes par la méthode *Mean Excess plot* est plus efficace que par la méthode *Hill plot*. La méthode *Mean Excess plot* a permis de choisir le seuil de formation des rentabilités extrêmes sur lesquelles a été basée l'estimation des paramètres de la distribution de Pareto généralisée.

La méthode des excès basée sur la distribution de Pareto généralisée exige que les variables aléatoires soient indépendamment et identiquement distribuées.

Nous avons ainsi pris en compte la dynamique de la volatilité, l'effet asymétrique des facteurs de risque ainsi que le clustering de volatilité. Ces éléments ont été pris en compte par la modélisation de la volatilité conditionnelle.

Nous aborderons dans le chapitre suivant les mesures de risque qui nous serviront de bases pour la modélisation de nos stress tests.

Les événements de type "cygne noir" sont très souvent causés par des individus qui recourent à des mesures qu'ils ne maîtrisent pas, donnant ainsi une confiance erronée fondée sur des résultats bidons

Nassim Taleb

3

Les Stress Tests et autres mesures de Risques

La quantification du risque est un souci majeur des acteurs financiers. En effet, une meilleure quantification du risque permet de savoir combien un investisseur peut perdre sur son portefeuille dans les période de forte ou faible volatilité sur un horizon de temps donné.

En considérant un portefeuille à un instant donné, le risque est une variation négative de la valeur de ce portefeuille dans le futur. Le risque ne se caractérise pas par une perte absolue mais par une perte relative. Depuis très longtemps, la mesure naturelle du risque était la volatilité (mesure statistique de l'écart type). Par exemple, dans le modèle de sélection de portefeuille de Markowitz, l'agent maximise son espérance de gain pour un niveau donné de volatilité. Cette vision de la mesure statistique du risque a beaucoup évolué depuis le début des années quatre vingt-dix.

Le chapitre précédent nous à donné une idée des différentes lois de probabilité permettant de modéliser les queues épaisses des distributions des rendements financiers. Nous présentons ici la notions de mesures de risques aussi bien quantitative (Value at Risk, Expected Shortfall) que qualitative (Stress Test).

3.1 Mesure de risque et mesure de risque cohérent

Définition 3.1 Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé et \mathcal{G} un ensemble non vide de variable aléatoires à valeurs réelles \mathcal{F} mesurable. On appelle **mesure de risque** toute fonction $\rho : \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{R}$

Artzener et al.(1999) définissent formellement quatre propriétés qu'une "bonne" mesure de risque (ou pour reprendre leur nomenclature, une mesure de risque *cohérente*) doit vérifier .

Définition 3.2 Une **mesure de risque cohérente** est une mesure de risque ρ vérifiant les propriétés suivantes:

1. *Invariance par translation*: $\forall X \in \mathcal{G}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, tel que $X + \alpha \in \mathcal{G}$, on a $\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$
2. *Sous-additivité* : $\forall X_1, X_2 \in \mathcal{G}$, $\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$
3. *Homogénéité positive* : $\forall \lambda \in \mathcal{G}$, $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$
4. *Monotonie*: $\forall X, Y \in \mathcal{G}$ tels que $X \leq Y$ on a $\rho(Y) \leq \rho(X)$.

Cette notion de mesure de risque cohérentes prend surtout sens lorsqu'un gestionnaire possède un portefeuille composé de plusieurs actifs. En effet la diversification des portefeuilles d'actifs en pratique (on ne met pas tous les œufs dans le même panier), nous incite à surtout posséder une mesure qui satisfait au mieux la propriété 2 de la définition ci-dessus. Nous présentons dans la section suivantes deux mesures phares que sont la **Value at Risk** et l'**Expected Shortfall**.

3.2 La Value at Risk

Définition 3.3 (Quantiles) Soit X une variable aléatoire et $\alpha \in]0, 1[$. Le *quantile supérieur* d'ordre α de X , noté $q^\alpha(X)$, est défini par :

$$q^\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P[X \leq x] \geq \alpha\} \quad (3.1)$$

Le *quantile inférieur* d'ordre α de X , noté $q_\alpha(X)$, est défini par :

$$q_\alpha(X) = \inf\{x \in \mathbb{R} : P[X \leq x] > \alpha\} \quad (3.2)$$

Définition 3.4 (Value at Risk) Soit X une variable aléatoire et $\alpha \in]0, 1[$. La *Value at Risk* de X au niveau α notée VaR_α , est définie par:

$$VaR_\alpha = -q_\alpha(X) \quad (3.3)$$

Usuellement, on précise l'horizon temporel de la Value at Risk. Si X représente le rendement du portefeuille pour une période de k jours, on parlera de "VaR à horizon k jours".

Bien que cette mesure ait le mérite d'être simple à interpréter, elle ne satisfait néanmoins pas la propriété de *Sous-additivité* définie par Artzer et al contrairement à l'**Expected Shortfall**.

3.3 L'Expected Shortfall

Définition 3.5 (Expected Shortfall) Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}[X] < \infty$, et soit $\alpha \in]0, 1[$. L'**Expected Shortfall** au niveau de α de X , notée $ES_\alpha(X)$, est définie par :

$$ES_\alpha(X) = \mathbb{E}[X|X \leq -VaR_\alpha] = -q_\alpha(X) \quad (3.4)$$

L'expected Shortfall comparativement à la Value at Risk, présente l'avantage d'être une mesure cohérente. Elle n'est néanmoins pas beaucoup utilisée en pratique en cause, la difficulté de Backtesting.
Référence à ajouter

3.4 Notions de Temps de Retour

Avant d'aborder l'incidence des événements rares sur la gestion des risques, il est important de pouvoir caractériser ce qu'est un événement rare:

Un événement rare est un événement dont la probabilité d'occurrence est petite.

Présentée de cette façon, il est difficile d'utiliser cette définition pour comparer deux événements. Par exemple, est-ce qu'une probabilité de défaillance de 0.7% pour un horizon d'un an est plus petite qu'une probabilité de défaillance de 1.9% pour un horizon de 3% ans? C'est pourquoi les financiers utilisent une notion plus pertinente pour caractériser la rareté d'un événement: le temps de retour (ou return period).

Définition 3.6 (Temps de retour) Considérons la loi du premier excès ou dépassement $X \leq x$. Notons $p = P(X > x) = 1 - F(x)$ la probabilité de dépasser le seuil x . Le premier excès

$$k(x) = \min(i \geq 1 : X_i \geq x) \quad (3.5)$$

est alors, non pas une fonction dépendant de x mais une variable aléatoire de distribution géométrique G_p de paramètre p . Le temps de retour $TR(x)$ des événements rares $X_i \geq x$ est le temps moyen entre deux dépassements:

$$TR(x) = E[k(x)] = 1/p = \frac{1}{1 - F(x)} \quad (3.6)$$

lorsque X_i sont iid.

Exemple 3.1 Supposons que nous nous intéressons au temps de retour de la VaR pour un horizon de prévision h et un niveau de confiance α . Le temps de retour est donné par:

$$TR(VaR) = \frac{h}{1 - F(F^{-1}(\alpha))} = \frac{h}{1 - \alpha} \quad (3.7)$$

Le niveau de confiance peut être défini par la réglementation (donnée externe) ou par l'établissement financier (donnée interne). Dans ce dernier cas, il mesure la tolérance de l'établissement financier

vis-à-vis du risque qu'il prend, et on peut l'interpréter comme l'objectif de rating de l'établissement financier. Par exemple, les actionnaires d'un établissement financier noté AAA auront une exigence de couverture plus élevée que ceux d'un établissement noté BBB.

Le choix de l'horizon de prévision du risque est important dans la mesure où il permet de tenir compte principalement de la liquidité et de la stabilité de la composition du portefeuille. En effet l'horizon doit être relativement plus long pour un portefeuille peu liquide ou pour lequel il n'y aurait pas de marchés de grande liquidité

Exemple 3.2 *Considérons une VaR 99%, le temps de retour associé à l'événement dépassement de la VaR est*

$$TR(VaR) = \frac{1}{1 - 0.99} = 100 \quad (3.8)$$

Si la période de détention est de 1 jour, le temps de retour de la VaR 99% est de 100 jours. Cela veut dire qu'on dépasse la VaR journalière en moyenne tous les 100 jours.

Construire un scénario de crise consiste ainsi à fournir pour un temps de retour préalablement choisi (correspondant au degré de sévérité du scénario) la ou les variations journalières extrêmes associées à chacun des principaux facteurs de risque.

3.5 Les Stress Tests

Le stress test est un outil de gestion de risques utilisé pour évaluer l'impact sur un portefeuille d'un événement extrême ou d'une forte variation de facteur de risque de faible occurrence. Le stress test explore les queues de distribution de pertes au-delà d'un niveau de confiance donné. Il fournit deux informations importantes:

- le niveau des pertes potentielles extrêmes dans une situation
- les différents scénarii qui entraînent ces pertes

L'utilité du stress test comparativement aux mesures quantitatives de risques (VaR et ES) est qu'il permet aux gestionnaires de risque d'évaluer le risque extrême en reproduisant un événement extrême passé et en imaginant un événement extrême futur. Ces deux qualités principales contribuent à améliorer la mesure quantitative du risque par la prise en compte de la perception du risque futur. Le stress test devient ainsi un complément de la mesure de la VaR.

On peut distinguer deux groupes de stress test en fonction de l'objectif suivi: le **macro stress test** et le **micro stress test**.

- **Macro stress test** : Le macro stress test est généralement utilisé par les autorités de contrôle bancaire pour évaluer la résilience du système financier. Il peut s'agir des stress test de type EBA ou encore ceux de la BCE pour les pays de la zone euros.
- **Micro stress test** : Le micro stress test est souvent réalisé au niveau d'un établissement financier ou dans un des services pour évaluer le risque extrême du portefeuille financier détenu.

Dans ce rapport le micro stress test est développé à travers un portefeuille de négociation composé de différentes classes d'actifs. Une enquête sur la pratique du stress test dans les établissements financiers montre que la plupart des stress test sont réalisés sur une série de scénarios basés soit sur les événements historiques, soit sur les événements hypothétiques ou soit sur la combinaison d'événement

historiques et hypothétique (cf. Basel Committee(2005)).Cependant, il existe en plus de ces scénarii historiques et hypothétiques (stress test multivarié), le stress test univarié ou analyse de sensibilité. Nous présentons dans le section suivante les différentes formes de stress tests.

Approche	Description	Avantages	Inconvénients
Scénario historique	Réplique un événement de crise	L'évènement s'est déjà produit	Multitude d'évènements Pas d'interprétation probabiliste Absence d'expertise sur le futur
Scénario hypothétique	"1. Matrice de corrélation 2. Création d'évènements"	"1. Facile à mettre en place 2. Scénario d'expert"	"1. Validité empirique mitigée 2. Dépend de la qualité de l'expertise 2. Pas d'interprétation probabiliste"
Analyse de sensibilité	Choc par un seul facteur de risque	Mesure l'impact d'un facteur de risque	Moins d'information sur le risque global
Scénario + Modèle de VaR	Réplique un événement de crise Matrice de corrélation Mesure par le modèle de VaR	"Interprétation probabiliste des résultats Choc des paramètres du modèle de VaR Plusieurs scénarii possibles Stress par la volatilité et la corrélation	Multitudes d'évènements Dépend de la distribution supposée du modèle
Algorithme ou Reverse Stress Test	1. GPD(EVT) 2. Maximum Loss (méthode de Studer)	1. Possibilité d'identifier le pire scénario 1. Identifie les causes du risque extrême 1. N° impose pas de distribution aux données 2. Possibilité d'identifier le pire scénario"	1. Modélisation complexe 1. Temps de calcul élevé 2. Temps de calcul élevé 2. Hypothèse de normalité des données
Stress Var de Bale 3	VaR calculée sur des données extrêmes	Facile à mettre en place	Données historiques fixés par le régulateur

Table 3.1 : Méthode de Stress tests
L'approche soulignée est l'approche utilisée dans ce mémoire. Scénario + Modèle de VaR est une méthodologie que nous proposons sur les modèles de risque utilisés dans cette étude pour réduire la subjectivité des scénarios historiques et hypothétiques.

3.5.1 Les Stress Tests univariés

Les Stress Tests univariés communément connu sous le nom analyses de sensibilités ont pour but d'identifier l'influence d'un choc d'un seul facteur de risque d'un portefeuille. Un stress test univarié peut se résumer par exemple à l'étude de l'impact d'un choc 5% , 20% ou 30% à la baisse d'une action ou l'augmentation des taux d'intérêts. La Banque des règlements internationaux (2009 page 20) a mis l'accent sur l'utilité de considérer les événements extrêmes pour les périodes historique de Stress et l'importance d'effectuer des Stress Tests univariés pour couvrir les événements hypothétiques dont l'objectif est de capter un champ plus large de possibilité de Stress. Habituellement, l'horizon de projection considéré pour ce type de Stress Tests est relativement court, parfois même instantané comparé aux Stress Tests multidimensionnelles. Grâce à leur facilité de mise en place les Stress Tests univariés sont souvent utilisés comme première approximation de l'impact d'un mouvement significatif d'un facteur d'un risque. Malgré la facilité d'application de cette méthode l'absence de prise en compte des dépendances entre facteurs de risque entraîne un manque d'information sur le risque global (Buhn, et al. 2006 p.15)

3.5.2 Les Stress Tests multivariés

Les Stress Tests multivariés examinent l'impact de changement simultané de plusieurs facteurs de risque d'un portefeuille. A la différence des Stress tests univariés, ils prennent en considération les dépendances entre facteurs de risques. Ils sont de ce fait capables de décrire l'effet d'un scénario entier possédant une multitude de chocs de facteurs de risques d'où leur appellation « analyses de scénarios » (Buhn, et al. 2006 p.15). Les chocs peuvent être de deux types :

Choc absolu: Il s'agit d'un choc fixe. On ajoute le choc en *bp* au niveau actuel du facteur de risque.

Exemple 3.3 *Si le facteur de risque Taux BOR EUR 3M vaut 33 bp alors le facteur de risque choqué à 10 bp vaut 43 bp.*

Choc relatif : Le choc relatif est un choc relatif au niveau du choc. On ajoute au niveau actuel du facteur de risque, un pourcentage du niveau actuel.

Exemple 3.4 *Si le CAC40 vaut 4000 points et le choc relatif est de 10% alors le facteur de risque choqué vaut 4400 points.*

Le choc absolu a toujours le même degré de sévérité que son scénario de base alors que le choc relatif est appliqué relativement à la situation actuelle impliquant une plus grande sévérité durant les périodes de ralentissement économique.

3.5.3 Mesure du risque sur le long terme

La mesure du risque exige la définition d'un horizon sur lequel est estimée la perte potentielle. Cet horizon peut être exprimé en jours, en semaines, en mois ou en années. Pour un gestionnaire de fonds d'investissement, cet horizon peut correspondre à une période régulière de reporting comme le mois ou le trimestre. Les régulateurs des établissements de crédit exigent un horizon de 10 jours ouvrés pour le calcul de la VaR à des fins de mesure de fonds propres réglementaires. Les autorités de contrôle bancaire considèrent cet horizon de 10 jours comme une période nécessaire aux banques pour prendre des mesures correctives par rapport à leurs expositions aux risques et de se conformer aux règles prudentielles. Ainsi, les banques calculant leur VaR sur un horizon d'un jour c'est à dire sur les données journalières, sont confrontées au problème d'estimation de la VaR sur un horizon supérieur à un jour.

Square Roots of Time rule

Il existe la règle de la racine carrée du temps ou *square root of time* qui consiste à multiplier par exemple la VaR journalière par la racine carrée de l'horizon h de prévision du risque afin d'obtenir la VaR sur horizon de h . Elle est suggérée par le Comité de Bâle de 1996 comme un moyen pour calculer la VaR sur 10 jours à partir de la VaR journalière. Dowd (2005) indique qu'il n'est pas réaliste d'utiliser la règle de la racine carrée du temps pour effectuer une extrapolation des mesures de risque sur des horizons plus longs. En effet, la règle de la racine carrée du temps suppose que les rentabilités sont identiquement et indépendamment distribuées et suivent une loi normale.

En observant les caractéristiques des rentabilités des actifs du portefeuille d'étude, on ne peut pas appliquer cette règle. La statistique descriptive des rentabilités des actifs du portefeuille montre que ces rentabilités ne suivent pas la loi normale et que leurs queues de distribution sont épaisses. Cette non-normalité des rentabilités du portefeuille d'étude a été confirmée par les valeurs de l'indice de queue de la distribution de Pareto généralisée qui sont différentes de zéro. C'est pourquoi, nous faisons appel à une méthodologie plus adaptée à la théorie des valeurs extrême afin de mesurer le risque sur le long terme.

3.5.4 Prévision du risque à long terme dans le modèle POT

Pour les distributions à queues épaisses, Danielsson and De Vries (2000) concluent à l'utilisation d'un facteur multiplicatif $h^{1/\alpha}$ ($\alpha = 1/\xi$) pour obtenir la VaR à un horizon h . Cette méthode de prévision sur le long terme suit les travaux de Feller (1971). Feller montre que le risque dans la queue de distributions à queues épaisses est une première approximation, linéairement additif¹.

Rappelons que l'additivité de la loi normale implique l'utilisation de $h^{1/2}$ comme facteur multiplicatif de la VaR pour un horizon à plus d'un jour. Pour les distributions à queues épaisses et pour les risques extrêmes, ce facteur multiplicatif est différent de celui de la loi normale. Les distributions à queues épaisses sont seulement additives dans la queue. Cela implique un facteur multiplicatif de $h^{1/\alpha}$ pour l'analyse de la VaR à un horizon h . Nous utilisons cette méthodologie pour estimer les pertes potentielles sur des horizon de plus d'un jour. Cependant, il faut noter que pour $\alpha > 2$, $h^{1/2} > h^{1/\alpha}$, c'est à dire que le facteur multiplicatif des distributions à queues épaisses est inférieur à celui de la loi normale.

¹Fama and Miller (1972) et Dacorogna et al. (1995) donnent également des détails sur l'additivité dans les queues de distribution à queues épaisses.

3.6 Mesure de risque par la distribution de Pareto généralisée

Dans cette sous section, nous exposons le calcul du quantiles à partir de la distribution de Pareto généralisée afin de mesurer la Value at Risk et l'Expected Shortfall (cf. Embrechts et al (1997) et McNeil and Frey (2000)). Nous commençons par réarranger le coté droit de l'équation (1.8) et nous déterminons la distribution des excès à partir de la distribution parente $F(x)$:

$$F(x) = (1 - F(u))G_{\xi,\beta}(x - u) + F(u), \text{ avec } x > u \quad (3.9)$$

Pour pouvoir utiliser cette équation, nous avons besoin d'estimer $F(u)$, la proportion des observations n'excédant pas le seuil. Le meilleur estimateur de $F(u)$ est la proportion des observations en dessous du seuil u c'est à dire $(N - N_u)/N$, où, N est le nombre d'observations et N_u le nombre d'observations excédant le seuil u . Nous pouvons maintenant remplacer $F(u)$ par cet estimateur et introduire l'équation (2.20) dans l'équation (3.9) pour obtenir l'estimateur de la queue de distribution

$$F(\hat{x}) = 1 - \frac{N_u}{N} [1 + \hat{\xi} \left(\frac{x - u}{\hat{\beta}} \right)^{-1/\hat{\xi}}] \quad (3.10)$$

Le quantile de la distribution de Pareto généralisée est donnée par la variable x de l'équation (3.10) que nous considérons comme le quantile de la VAR. En prenant l'inverse de l'équation (3.10), nous pouvons extraire le quantile de la Value at Risk :

$$VaR_\alpha = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} \left[\left(\frac{N}{N_u} (\alpha) \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right] \quad (3.11)$$

où α est le niveau de risque choisi, $\hat{\xi}$ et $\hat{\beta}$ sont les estimateurs des paramètres ξ et β .

Nous décrivons également l'Expected Shortfall considérée comme une mesure cohérente du risque. L'Expected Shortfall ou la perte moyenne attendue au-delà de la VAR pour une distribution de Pareto généralisée peut être écrite en fonction de la VAR par l'expression suivante:

$$ES_\alpha = E(X|X > VaR_\alpha) = VaR_\alpha + E(X - VaR_\alpha|X > VaR_\alpha) \quad (3.12)$$

L' ES_α est la somme du seuil VaR_α et la moyenne des excès au-delà de ce seuil.

Pour une variable aléatoire X suivant une distribution de Pareto généralisée, l'estimateur de la moyenne des excès au delà du seuil u (sachant que $\xi < 1$) est donné par :

$$E(X - u|X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}, \text{ avec } \beta + \xi u > 0 \quad (3.13)$$

Supposons que les excès au-delà du seuil u aient la même distribution c'est à dire $(X - u)|X > u$ suivent une distribution de Pareto généralisée et notons que $VaR_\alpha > u$, nous pouvons écrire :

$$(X - VaR_\alpha|X > VaR_\alpha) = ((X - u) - (VaR_\alpha - u)|(X - u) > (VaR_\alpha - u)) \quad (3.14)$$

Il peut être démontré que

$$(X - VaR_\alpha|X > VaR_\alpha) \approx G_{\xi,\beta+\xi(VaR_\alpha-u)} \quad (3.15)$$

donc, les excès au delà d'un seuil élevé VaR_α suivent aussi la distribution de Pareto généralisée avec le même indice de queue ξ mais de paramètre de dispersion différent. Nous pouvons alors utiliser l'équation (3.13) pour obtenir l'expression de la moyenne des excès au delà de la VAR par :

$$E(X - VaR_\alpha | X > VaR_\alpha) = \frac{\beta + \xi(VaR_\alpha - u)}{1 - \xi} \quad (3.16)$$

ainsi l'expression de l'Expected Shortfall peut être donnée par la formule suivante :

$$ES_\alpha = VaR_\alpha + \frac{\beta + \xi(VaR_\alpha - u)}{1 - \xi} = \frac{VaR_\alpha}{1 - \xi} + \frac{\beta - \xi u}{1 - \xi} \quad (3.17)$$

La modélisation inconditionnelle des pertes potentielles utilise la méthodologie présentée dans cette section. Pour pouvoir appliquer cette méthodologie, nous avons besoin de construire les rentabilités extrêmes sur laquelle seront basées les mesures de la VaR et l'ES.

Nous avons calculé la VaR et l'ES sur le portefeuille d'étude conformément à la méthodologie présenté précédemment en utilisant le modèle inconditionnel de la loi de Pareto généralisée. Nous avons également déterminé la Var et l'ES suivant les méthodes de Simulation Historique et de Varince-Covariance (cf Annexe). Ce qui nous permet de comparer la performance du modèle GPD à celle des modèles internes des banques. Les calculs sont effectués sur un horizon d'investissement d'un jour et un niveau de confiance de 95%, 99% et 99.9% pendant la période d'estimation de janvier 2008 à décembre 2010.

L'analyse des résultats des tableau ci dessous montre que les valeurs de VaR et ES estimés par le modèle GPD sont supérieures à celles estimées par les méthodes de Simulation Historique et de la loi normale. Ces supériorités sont valables quel que soit le niveau de confiance choisi. En comparant les deux modèles internes de mesure de risque entre eux, nous constatons de façon générale qu'au niveau de confiance de 95%, les valeurs de la VaR estimées à partir de la loi normale sont supérieures à celles estimées par la méthode de la Simulation Historique. Ce qui sous-entend que l'estimation de la VaR par la méthode de la Simulation Historique à ce niveau de confiance pourrait sous-estimer le risque de pertes. Par contre, aux niveaux de confiance de 99%, 99.9%, les valeurs de la VaR de la méthode de la Simulation historique sont supérieures à celles calculées par le modèle de loi normale. Les valeurs inférieures de la VaR estimées par le modèle de mesure de risque basé sur la loi normale quand le niveau de confiance devient plus élevée s'explique par le fait que la loi normale ne permet pas de mesurer correctement le risques extrêmes. En effet, la normalité suppose qu'il y a autant de gains que de pertes autour de la moyenne. Ainsi, quand il y a plus de pertes que de gains dans les queues de distribution de facteurs de risques, la loi normale ne peut pas les capter.

La hiérarchie entre les différents modèles de mesure de risque est également respectée sur les valeurs de l'Expected shortfell que nous observons également. En effet quel que soit le niveau de confiance retenu, les pertes moyennes au-delà de la VaR estimées par le modèle GPD restent supérieures à celles estimées par les modèles internes de mesure de risque.

	$VaR_{95\%}$	$VaR_{99\%}$	$VaR_{99.9\%}$
<i>Temps de retour en jours</i>	20 jrs	100 jrs	1000 jrs
CAC40			
GPD	-0.029	-0.047	-0.076
SH	-0.021	-0.039	-0.068
Normale	-0.022	-0.031	-0.042
SP			
GPD	-0.023	-0.040	-0.76
SH	-0.017	-0.030	-0.065
Normale	-0.018	-0.026	-0.034
Eurostock			
GPD	-0.047	-0.080	-0.135
SH	-0.033	-0.065	-0.121
Normale	-0.036	-0.051	-0.068
Itraxx xover			
GPD	-0.044	-0.075	-0.260
SH	-0.034	-0.058	-0.182
Normale	-0.036	-0.051	-0.161
Itraxx EUR			
GPD	-0.047	-0.085	-0.360
SH	-0.037	-0.059	-0.182
Normale	-0.026	-0.041	-0.268
Itraxx high vol			
GPD	-0.077	-0.081	-0.257
SH	-0.44	-0.068	-0.222
Normale	-0.018	-0.031	-0.168
USD/EUR			
GPD	-0.033	-0.050	-0.86
SH	-0.019	-0.036	-0.068
Normale	-0.018	-0.026	-0.031
USD/BRL			
GPD	-0.037	-0.058	-0.96
SH	-0.019	-0.046	-0.063
Normale	-0.014	-0.032	-0.049

Table 3.2: **Var estimé par les modèles inconditionnels**
VaR(1,P) correspond à la *VaR* calculée sur un horizon d'un jour et au niveau de confiance P (95%, 99%,99, 9%).

	$ES_{95\%}$	$ES_{99\%}$	$ES_{99.9\%}$
<i>Temps de retour en jours</i>	20 jrs	100 jrs	1000 jrs
CAC40			
GPD	-0.039	-0.051	-0.086
SH	-0.034	-0.041	-0.078
Normale	-0.027	-0.033	-0.054
SP			
GPD	-0.035	-0.048	-0.102
SH	-0.023	-0.042	-0.081
Normale	-0.021	-0.036	-0.064
Eurostock			
GPD	-0.063	-0.094	-0.185
SH	-0.042	-0.075	-0.138
Normale	-0.041	-0.062	-0.087
Itraxx xover			
GPD	-0.059	-0.097	-0.310
SH	-0.041	-0.080	-0.172
Normale	-0.039	-0.073	-0.167
Itraxx EUR			
GPD	-0.079	-0.120	-0.391
SH	-0.061	-0.091	-0.201
Normale	-0.056	-0.074	-0.182
Itraxx high vol			
GPD	-0.086	-0.098	-0.310
SH	-0.061	-0.074	-0.231
Normale	-0.043	-0.053	-0.177
USD/EUR			
GPD	-0.063	-0.070	-0.96
SH	-0.049	-0.052	-0.084
Normale	-0.039	-0.047	-0.079
USD/BRL			
GPD	-0.058	-0.078	-0.106
SH	-0.039	-0.047	-0.073
Normale	-0.035	-0.053	-0.069

Table 3.3: **ES estimé par les modèles inconditionnels**
ES(1,P) correspond à la *VaR* calculée sur un horizon d'un jour et au niveau de confiance P (95%, 99%,99, 9%).

3.6.1 Modélisation conditionnelle des mesures de risque de marché

Dans cette section, la Value at Risk et l'Expected Shortfall sont calculées en tenant compte de la dynamique de la volatilité dans le temps. Les variables aléatoires sur lesquelles sont basés les modèles de mesure de risque de marché ont été rendues identiquement et indépendamment distribuées. En effet l'hypothèse d'indépendance et d'identité des variables aléatoires est souvent supposée pour mieux estimer les paramètres des modèles de probabilité. Ainsi, pour l'application de la théorie des valeurs extrêmes basée sur la distribution de Pareto généralisée, nous utilisons les résidus standardisés dont l'hypothèse i.i.d est vérifiée afin de calculer convenable les pertes potentielles sur les actifs du portefeuille d'étude. La mesure de ces pertes potentielles est donnée par la détermination de la VaR et L'ES suivant les formules:

$$VaR_{\alpha}^{\hat{t}+1}(Z) = \mu_{\hat{t}+1} + \sigma_{\hat{t}+1} VaR_{\alpha}(Z) \quad (3.18)$$

$$ES_{\alpha}^{\hat{t}+1}(Z) = \mu_{\hat{t}+1} + \sigma_{\hat{t}+1} ES_{\alpha}(Z) \quad (3.19)$$

où $VaR_{\alpha}(Z)$ et $ES_{\alpha}(Z)$ sont respectivement le quantile et l'Expected Shortfall de la GPD obtenus sur les résidus standardisés Z_t .

Pour déterminer la VaR, nous partons de l'équation (3.20) qui estime la queue $F_z(z)$ de la distribution de Pareto généralisée.

$$F_z(z) = 1 - \frac{k}{N} [1 + \hat{\xi} (\frac{Z - Z_{k+1}}{\hat{\beta}})]^{-1/\hat{\xi}} \quad (3.20)$$

où Z_{k+1} est le $(k+1)$ ème résidu standardisé correspondant au seuil de formation des rentabilités extrêmes, N est le nombre d'observations dans la queue de distribution et k , le nombre de résidus standardisés au delà du seuil Z_{k+1} . Les paramètres $\hat{\xi}$ et $\hat{\beta}$ de la distribution de Pareto généralisée sont estimés sur les excès de résidus standardisés en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance.

L'inversion de l'équation (3.20) permet d'obtenir le quantile $VaR_{\alpha}(Z)$ donné par la formule:

$$VaR_{\alpha}(Z) = Z_{k+1} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} [(\frac{N}{k}(\alpha))^{-\hat{\xi}} - 1] \quad (3.21)$$

en remplaçant l'équation (3.21) par son expression dans l'équation (3.18), cela nous permet de mesurer la Value at Risk.

$$VaR_{\alpha}^{\hat{t}+1}(Z) = \mu_{\hat{t}+1} + \sigma_{\hat{t}+1} (Z_{k+1} + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}} [(\frac{N}{k}(\alpha))^{-\hat{\xi}} - 1]) \quad (3.22)$$

L'Expected Shortfall est la moyenne des pertes au-delà de la VaR. Pour la déterminer nous calculons d'abord $ES_{\alpha}(Z)$ par la formule:

$$ES_{\alpha}(Z) = \frac{VaR_{\alpha}(Z)}{1 - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi} Z_{k+1}}{1 - \hat{\xi}} \quad (3.23)$$

Ensuite, l'équation (3.23) est substituée par sa valeur dans l'équation (3.19) pour obtenir l'Expected Shortfall.

$$ES_{\alpha}^{\hat{t}+1}(Z) = \mu_{\hat{t}+1} + \sigma_{\hat{t}+1} (\frac{VaR_{\alpha}(Z)}{1 - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\beta} - \hat{\xi} Z_{k+1}}{1 - \hat{\xi}}) \quad (3.24)$$

Ces mesures de risque basées sur la modélisation de la volatilité conditionnelle permettent d'estimer les pertes potentielles maximales en prenant en compte le changement de la volatilité et l'effet asymétrique des rentabilités des actifs.

Nous avons estimés la Value at risk et l'Expected Shortfall basée sur la distribution de Pareto généralisée et sur la modélisation de la volatilité conditionnelle. A titre comparatif, les mesures de la Var et l'ES basées sur les modèles conditionnelle (cf Annexe) des établissements financiers ont été calculées. Ces modèles internes comprennent la méthode FHS (méthode conditionnelle de la Simulation Historique) et le modèle GARCH basé sur la distribution de la loi normale.

L'estimation des mesures de risque (VaR et ES) a été réalisée sur la période de janvier 2008 à décembre 2010 à partir d'un historique de 5040 rentabilité journalières pour les différents actifs.

Nous pouvons retenir que le modèle conditionnel GPD estime des pertes potentielles plus élevé que celle estimées par les modèles internes de mesure de risque au niveau de confiance de 95%, 99% et 99.9% . Le modèle GARCH estime les pertes potentielles les plus faibles comparativement aux deux autre modèles de mesure de risque. Cependant, cette supériorité d'un modèle de mesure de risque par rapport à un autre, ne donne aucune information sur la fiabilité à mesurer correctement le risque des actifs du portefeuille.

Nous avons ainsi besoin d'une étape de Backtesting définie en *Annexe* pour définitivement valider notre modèle. La section suivante traite de ce sujet

	$Var_{95\%}$	$Var_{99\%}$	$Var_{99.9\%}$
	$Var_{95\%}$	$Var_{99\%}$	$Var_{99.9\%}$
<i>Temps de retour en jours</i>	20 jrs	100 jrs	1000 jrs
CAC40			
GPDcond	-0.033	-0.057	-0.086
FHS	-0.032	-0.041	-0.072
GARCH	-0.024	-0.034	-0.057
SP			
GPDcond	-0.029	-0.048	-0.86
FHS	-0.021	-0.037	-0.075
GARCH	-0.028	-0.046	-0.074
Eurostock			
GPDcond	-0.052	-0.090	-0.148
FHS	-0.051	-0.074	-0.133
GARCH	-0.039	-0.061	-0.088
Itiraxx xover			
GPDcond	-0.058	-0.084	-0.310
FHS	-0.044	-0.069	-0.199
GARCH	-0.037	-0.061	-0.171
Itiraxx EUR			
GPDcond	-0.058	-0.095	-0.368
FHS	-0.039	-0.068	-0.197
GARCH	-0.034	-0.058	-0.195
Itiraxx high vol			
GPDcond	-0.082	-0.097	-0.269
FHS	-0.64	-0.084	-0.242
GARCH	-0.024	-0.047	-0.186
USD/EUR			
GPDcond	-0.048	-0.061	-0.112
FHS	-0.023	-0.046	-0.071
GARCH	-0.021	-0.036	-0.052
USD/BRL			
GPDcond	-0.047	-0.061	-0.104
FHS	-0.022	-0.056	-0.073
GARCH	-0.017	-0.038	-0.056

Table 3.4: **Var estimé par les modèles conditionnels**
Var(1,P) correspond à la VaR calculée sur un horizon d'un jour et au
niveau de confiance P (95% , 99% , 99.9%).

	$ES_{95\%}$	$ES_{99\%}$	$ES_{99.9\%}$
<i>Temps de retour en jours</i>	20 jrs	100 jrs	1000 jrs
CAC40			
GPDcond	-0.057	-0.068	-0.196
FHS	-0.044	-0.061	-0.079
Normale	-0.035	-0.041	-0.068
SP			
GPDcond	-0.044	-0.056	-0.168
FHS	-0.036	-0.052	-0.111
GARCH	-0.034	-0.041	-0.084
Eurostock			
GPDcond	-0.068	-0.102	-0.215
FHS	-0.042	-0.079	-0.148
GARCH	-0.054	-0.071	-0.114
Itiraxx xover			
GPDcond	-0.061	-0.108	-0.323
FHS	-0.054	-0.087	-0.182
GARCH	-0.048	-0.077	-0.171
Itiraxx EUR			
GPDcond	-0.084	-0.129	-0.402
FHS	-0.071	-0.107	-0.214
GARCH	-0.065	-0.084	-0.192
Itiraxx high vol			
GPDcond	-0.099	-0.148	-0.360
FHS	-0.084	-0.094	-0.212
GARCH	-0.054	-0.068	-0.177
USD/EUR			
GPDcond	-0.071	-0.084	-0.108
FHS	-0.057	-0.068	-0.104
GARCH	-0.051	-0.059	-0.106
USD/BRL			
GPDcond	-0.063	-0.094	-0.126
FHS	-0.057	-0.068	-0.084
GARCH	-0.051	-0.066	-0.081

Table 3.5: **ES estimé par les modèles conditionnels**
ES(1,P) correspond à la VaR calculée sur un horizon d'un jour et au
niveau de confiance P (95% , 99% , 99.9%).

3.7 Backtesting du modèle GPD

Les résultats du contrôle ex post réalisé sur la période de crise de 2008 sont présentés dans les Tableaux suivants. L'examen des résultats du test de Kupiec sur le modèle conditionnel GPD montre une acceptation de l'hypothèse de couverture inconditionnelle sur tous les actifs et à tous les niveaux de confiance. En effet, les probabilités associées aux statistiques calculées sont toutes supérieures aux seuils requis (5%, 1% et 0.1%). Au niveau de confiance de 99.9, (très utiles pour la modélisation de nos stress scénarios), le modèle conditionnel GPD n'enregistre aucune violation sur les actifs du portefeuille.

Les modèles internes de mesure de risque à savoir la méthode FHS et le modèle GARCH ont une fiabilité relative. En effet, la fiabilité de ces modèles selon le test de Kupiec, dépend des actifs et du niveau de confiance choisi. Par exemple, la méthode FHS n'est pas fiable sur l'indice CAC40 et l'indice Eurostock. Cependant, elle assure une fiabilité sur les indices de CDS. Quant au modèle GARCH, il n'est pas fiable sur l'indice S&P mais assure une fiabilité sur les taux.

Compte tenu de la limite du test de Kupiec qui ne peut fournir de statistiques quand le modèle n'enregistre aucune violation, nous avons effectué le test de Wald sur l'ensemble des actifs du portefeuille. Le principal avantage du test de Wald par rapport au test de Kupiec est que le calcul de la statistique est possible même lorsqu'aucune violation n'est constatée. En plus la statistique de Wald donne une indication sur la cause du rejet de l'hypothèse nulle de couverture inconditionnelle. Si celle-ci est élevée et positive, cela signifie que le modèle considéré sous-estime significativement le risque de l'actif étudié alors qu'une valeur négative traduit à l'inverse une surestimation du risque. Une statistique égale à zéro signale, quant à elle, que le nombre réel de violations identique au niveau de risque fixé pour le calcul de la VaR.

Les résultats du test de Wald valident le modèle conditionnel GPD sur tous les actifs du portefeuille quel que soit le niveau de risque retenu. En effet, toutes les probabilités associées aux statistiques de Wald sont supérieures au seuil critique (5%, 1% et 0.1%). Ce qui signifie que la différence entre le niveau de risque fixé pour le calcul de la VaR et la proportion de violations observée n'est pas significative. Cependant, les statistiques de Wald sont dans la majorité des cas faiblement négatives au niveau de risque. Ce qui signifie que le modèle conditionnel GPD surestime légèrement le risque réel.

L'examen des résultats du test de Wald sur les modèles internes de mesure de risque montre que dans la majorité des cas, les statistiques de Wald sont positives et élevées. Cela signifie que les modèles internes ou techniques traditionnelle sous-estiment fortement le risque sur les actifs du portefeuille.

Les résultats du test d'indépendance de Markov présenté également, montrent que pour les trois modèles de mesures de VaR, les violations sont significativement indépendantes. En effet, toutes les probabilités associées aux statistiques sont supérieures au seuil critique requis. Ainsi, on peut considérer que la propriété d'indépendance des séries des violations est remplie par l'ensemble des modèles de risque.

Le test de couverture conditionnelle permet de tester conjointement la propriété de couverture inconditionnelle (test de Kupiec) et celle d'indépendance d'une série de violations. Ce test confirme les analyses précédentes en ce qui concerne la fiabilité des modèles de risque utilisées. Nous observons que le modèle conditionnel GPD assure mieux la couverture conditionnelle que les modèles internes.

Afin de compléter l'analyse, nous examinons aussi les résultats du test de L'Expected Shortfall. La

mesure de l'Expected Shortfall permet d'avoir un indicateur complémentaire à la VaR. Cet indicateur permet de connaître la perte moyenne potentielle une fois que la VaR est dépassée. Les statistiques obtenues par le test proposé par Embrechts et al.(2005) sont également présentées. Quand la valeur absolue de la statistique est égale à zéro, la mesure de l'ES est considéré comme fiable. L'analyse des résultats de ce test montre que l'ES estimée par les trois modèles évalue plus ou moins correctement le risque moyen au delà de la VaR. Cependant, nous ne pouvons rien décider de la fiabilité de l'ES car ce test souffre de l'absence de probabilité associé à la statistique calculée. De manière générale, nous constatons une amélioration de la fiabilité des modèles internes de mesure de risque. Le modèle conditionnel GPD est fiable sur tous les actifs du portefeuille.

	Test de Kupiec			Test de Wald		
	GPD cond	FHS	GARCH	GPD cond	FHS	GARCH
CAC40						
95%	1.14 (0.29)	20.79 (0.00)	7.52 (0.01)	-1.02 (0.85)	5.37 (0.00)	3.05 (0.00)
99%	0.11 (0.74)	15.89 (0.00)	1.96 (0.16)	-0.32 (0.62)	5.40 (0.00)	1.59 (0.06)
99.9%	1.27 (0.26)	9.44 (0.00)	4.83 (0.03)	1.50 (0.07)	5.50 (0.00)	3.50 (0.00)
SP						
95%	0.02 (0.88)	7.52 (0.01)	6.26 (0.01)	-0.15 (0.56)	3.05 (0.00)	2.69 (0.00)
99%	0.11 (0.74)	0.09 (0.76)	12.96 (0.00)	-0.32 (0.62)	0.32 (0.38)	7.69 (0.00)
99.9%	-	4.83 (0.03)	9.44 (0.00)	-0.50 (0.69)	3.50 (0.00)	5.50 (0.00)
Eurostock						
95%	0.02 (0.88)	24.89 (0.00)	6.26 (0.01)	-0.15 (0.56)	5.95 (0.00)	2.76 (0.00)
99%	0.11 (0.74)	29.40 (0.00)	5.50 (0.02)	-0.32 (0.62)	7.95 (0.00)	2.69 (0.00)
99.9%	-	62.22 (0.00)	4.83 (0.03)	-0.50 (0.69)	3.50 (0.00)	5.50 (0.00)
USD/EUR						
95%	0.03 (0.78)	24.49 (0.00)	7.32 (0.01)	-0.04 (0.54)	8.95 (0.00)	2.76 (0.00)
99%	0.17 (0.71)	38.12 (0.00)	6.12 (0.02)	-0.02 (0.64)	11.28 (0.00)	1.69 (0.00)
99.9%	-	60.41 (0.00)	7.83 (0.03)	-0.41 (0.69)	3.50 (0.00)	12.7 (0.00)
USD/BRL						
95%	0.01 (0.71)	24.41 (0.00)	7.65 (0.01)	-0.08 (0.54)	8.41 (0.00)	2.46 (0.00)
99%	0.11 (0.77)	42.18 (0.00)	6.78 (0.02)	-0.02 (0.64)	13.44 (0.00)	7.32 (0.00)
99.9%	-	58.63 (0.00)	6.95 (0.00)	-0.12 (0.69)	12.62 (0.00)	17.2 (0.00)
CDS1						
95%	1.94 (0.16)	3.09 (0.08)	1.54 (0.21)	-1.31 (0.90)	1.89 (0.00)	1.39 (0.10)
99%	1.18 (0.28)	0.09 (0.76)	1.96 (0.16)	-0.95 (0.83)	0.32 (0.38)	1.59 (0.06)
99.9%	-	-	1.27 (0.26)	-0.50 (0.69)	-0.50 (0.69)	1.50(0.07)
CDS2						
95%	2.26 (0.13)	13.49 (0.00)	6.26 (0.01)	1.60 (0.06)	4.21 (0.00)	2.76 (0.00)
99%	5.03 (0.02)	5.50 (0.02)	7.72 (0.00)	-1.59 (0.94)	2.86 (0.00)	3.50(0.00)
99.9%	-	-	-	-0.50 (0.69)	-0.50 (0.69)	-0.50 (0.69)
CDS3						
95%	2.16 (0.76)	11.49 (0.00)	6.86 (0.01)	-1.10 (0.06)	8.21 (0.00)	12.76 (0.00)
99%	1.03 (0.02)	12.50 (0.02)	6.73 (0.00)	-0.79 (0.84)	17.86 (0.00)	31.50 (0.00)
99.9%	-	-	-	-0.35 (0.69)	-0.50 (0.69)	-0.50 (0.69)

Table 3.6: **Résultats du test de Kupiec et de Wald sur les modèles conditionnels**

Les valeurs manquantes correspondent au cas où les statistiques ne sont pas calculables parce que le modèle n'a enregistré aucune violation. Les valeurs entre parenthèse sont des probabilités associées aux statistiques. Le test est effectué sur une fenêtre de backtesting de 250 jours (janvier 2008 à décembre 2008).

	Test d'indépendance			Test de couverture		
	GPD cond	FHS	GARCH	GPD cond	FHS	GARCH
CAC40						
95%	0.00 (0.91)	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	1.15 (0.85)	20.79 (0.00)	7.52 (0.02)
99%	0.00 (1.00)	0.01 (1.00)	0.00 (0.98)	-0.11 (0.95)	15.91 (0.00)	1.96 (0.38)
99.9%	0.00 (0.91)	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	1.27 (0.07)	9.44 (0.01)	4.83 (0.09)
SP						
95%	0.03 (0.86)	0.23 (0.63)	0.20 (0.66)	0.05 (0.97)	7.75 (0.00)	4.46 (0.00)
99%	0.00 (0.99)	0.00 (0.98)	0.02 (0.90)	0.11 (0.92)	0.10 (0.95)	1.96 (0.38)
99.9%	-	0.00 (0.99)	0.00 (0.98)	-	4.83 (0.09)	9.44 (0.01)
Eurostock						
95%	0.00 (0.91)	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	1.15 (0.85)	24.89 (0.00)	6.26 (0.02)
99%	0.00 (1.00)	0.01 (1.00)	0.00 (0.98)	-0.11 (0.95)	29.40 (0.00)	5.50 (0.06)
99.9%	0.00 (0.91)	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	1.27 (0.07)	62.22 (0.00)	4.83 (0.09)
USD/EUR						
95%	0.00 (0.91)	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	1.95 (0.38)	3.09 (0.00)	1.54 (0.46)
99%	0.00 (1.00)	0.01 (1.00)	0.00 (0.98)	0.11 (0.95)	3.56 (0.17)	10.73 (0.00)
99.9%	-	-	0.00 (1.00)	1.27 (0.07)	4.83 (0.09)	4.83 (0.09)
USD/BRL						
95%	0.00 (0.91)	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	1.95 (0.38)	3.09 (0.00)	1.54 (0.46)
99%	0.00 (1.00)	0.01 (1.00)	0.00 (0.98)	0.11 (0.95)	3.56 (0.17)	10.73 (0.00)
99.9%	-	-	0.00 (1.00)	1.27 (0.07)	4.83 (0.09)	4.83 (0.09)
CDS1						
95%	0.00 (0.91)	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	1.95 (0.38)	14.62(0.30)	7.26 (0.04)
99%	0.00 (1.00)	0.01 (1.00)	0.00 (0.98)	0.11 (0.95)	3.56 (0.17)	7.64 (0.00)
99.9%	-	-	-	-	-	-
CDS2						
95%	0.00 (0.91)	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	1.95 (0.38)	14.62(0.30)	7.26 (0.04)
99%	0.00 (1.00)	0.01 (1.00)	0.00 (0.98)	0.11 (0.95)	3.56 (0.17)	7.64 (0.00)
99.9%	-	-	-	-	-	-
CDS3						
95%	0.00 (0.91)	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	1.95 (0.38)	14.62(0.30)	7.26 (0.04)
99%	0.00 (1.00)	0.01 (1.00)	0.00 (0.98)	0.11 (0.95)	3.56 (0.17)	7.64 (0.00)
99.9%	-	-	-	-	-	-

Table 3.7: **Résultats du test de Christoffersen sur les modèles conditionnels**

Les valeurs manquantes correspondent au cas où les statistiques ne sont pas calculables parce que e modèle n'a enregistré aucune violation. Les valeurs entre parenthèse sont des probabilités associées aux statistiques. Le test est effectué sur une fenêtre de backtesting de 250 jours (janvier 2008 à décembre 2008).

	GPD	SH	Normale
CAC40			
95%	0.00	0.00	0.00
99%	0.00	0.00	0.00
99.9%	0.00	0.00	0.00
SP			
95%	0.00	0.00	0.00
99%	0.00	0.00	0.00
99.9%	0.00	0.00	0.00
Eurostock			
95%	0.00	0.00	0.00
99%	0.00	0.00	0.00
99.9%	0.00	0.00	0.00
USD/EUR			
95%	0.00	0.00	0.00
99%	0.00	0.00	0.00
99.9%	0.00	0.00	0.00
USD/BRL			
95%	0.00	0.00	0.00
99%	0.00	0.00	0.00
99.9%	0.00	0.00	0.00
CDS1			
95%	0.00	0.00	0.00
99%	0.00	0.00	0.00
99.9%	0.00	0.00	0.00
CDS2			
95%	0.00	0.00	0.00
99%	0.00	0.00	0.00
99.9%	0.00	0.00	0.00
CDS3			
95%	0.00	0.00	0.00
99%	0.00	0.00	0.00
99.9%	0.00	0.00	0.00

Table 3.8: Résultats du backtesting de l'ES des modèles inconditionnels
Les valeurs égales à zéro montrent que les modèles mesurent correctement le risque au-delà de la VaR

3.8 Conclusion

Compte tenu de la forte sous estimation du risque par les trois modèles de mesure de risque sous l'hypothèse de volatilité constante dans le précédent chapitre, nous avons pris en compte dans celui-ci la dynamique de la volatilité, l'effet asymétrique des rentabilités et le clustering de volatilité. Ces éléments ont été pris en compte par la modélisation de la volatilité conditionnelle.

Les résultats de l'estimation des pertes potentielles montrent d'une part, une diminution de la sous-estimation du risque en période de crise financière et économique et d'autre part, une diminution de la surestimation du risque en période de faible volatilité des marchés. Cette amélioration des trois modèles de mesure de risque dans leur ensemble et sur tous les actifs du portefeuille est due à la prise en compte du changement de la volatilité dans le temps, de l'effet asymétrique des rentabilités sur la volatilité et du clustering de volatilité dans les modèles de mesure de risque.

Les résultats de la procédure du contrôle ex post révèle une fiabilité du modèle conditionnel GPD par rapport aux modèles internes. La fiabilité des modèles est relative c'est à dire qu'elle dépend du type d'actif et du niveau de confiance choisi. Nous notons également que le modèle conditionnel GPD à tendance à légèrement surestimer le risque. Les modèles internes de mesure de risque quant à eux sous-estiment le risque des actifs.

Étant donnée la fiabilité de la distribution de Pareto généralisée sur les actifs individuels du portefeuille, quelle sera sa fiabilité sur un portefeuille globale qui prend en compte les corrélations? Une des solutions est d'associer la théorie des valeurs extrêmes et la théorie des copules. Cette question est importante dans la mesure où la théorie des valeurs extrêmes devient une alternative aux modèles internes de mesure de risque jusqu'à présent utilisés dans les établissements financiers.

Copulas are of interest to statisticians for two main reasons: First, as a way of studying scale-free measures of dependence; and secondly, as a starting point for constructing families of bivariate distributions

Irving Fisher

4

Copules et Dépendances

Nous avons jusqu'à présent traité l'estimation des pertes potentielles sur les actifs individuels du portefeuille d'étude. Dans la réalité, ces actifs individuels ne sont pas indépendants. Ils entretiennent une dépendance entre eux. Pour tenir compte de cette dépendance entre les actifs du portefeuille, nous faisons appel à la théorie des copules afin de mesurer les pertes potentielles sur le portefeuille global. La copule permet de caractériser la dépendance entre différentes variables aléatoires sans se préoccuper de ses lois marginales. L'apport de ce chapitre est l'association de la méthode des excès à la théorie des copules pour mesurer les pertes potentielles sur notre portefeuille financier.

La dépendance est souvent prise en compte par la corrélation linéaire entre les différentes variables aléatoires. La mesure de celle-ci par la corrélation linéaire n'est adaptée que lorsque la relation de dépendance est linéaire et l'univers considéré comme gaussien, cadre d'analyse malheureusement rare en finance. Pour y remédier, il existe des indicateurs de dépendance se fondant sur les discordances et les concordances observées sur des variables aléatoires. Parmi ces indicateurs de dépendance, il y a des coefficients de corrélations non linéaire et non paramétrique, comme le tau de Kendall ou encore le rho de Spearman. Ce sont de bons indicateurs globaux de la dépendance entre variables aléatoires et leurs valeurs sont comprises entre -1 et 1 comme le coefficient de corrélation linéaire.

Pour les distributions non gaussiennes, la corrélation linéaire ne suffit pas pour décrire la structure de dépendance entre les variables aléatoires. En effet, pour la modélisation de la dépendance des événements extrêmes, il est recommandé d'utiliser les copules (Zeevi and Mashal(2002)). La copule est une fonction de dépendance contrairement aux corrélations linéaires et non linéaires qui ne sont pas des indicateurs statistiques.

Une grande diversité de copules ¹ permet de modéliser la dépendance des événements extrêmes parmi lesquelles la copule de Student que nous utilisons dans ce mémoire. Plusieurs études (Breyman et al. 2003) et Demarta and McNeil(2005)) ont montré que la copule de Student permet de modéliser la structure de dépendance des valeurs extrêmes. Quant à la copule gaussienne, son utilisation est limitée du fait de l'hypothèse sous-jacente selon laquelle les valeurs extrêmes sont indépendantes.

¹Les détails sur les différents types de copules et leur estimation peuvent être trouvés dans *Copula methods in finance* de Cherubini et al. (2004) et dans une étude menée par Costinot et al. (2000)

L'objectif de ce chapitre est de tenir compte de la dépendance entre les actifs du portefeuille pour modéliser les pertes potentielles globales.

4.1 Mesure de dépendance par les copules

Dans la théorie des copules, la dépendance entre variables aléatoire est parfaitement décrite par leur distribution jointe. Cependant, nous pouvons distinguer les comportements des distributions marginales de la structure de dépendance. La copule est l'outil permettant d'extraire la structure de dépendance d'une distribution jointe et ainsi de séparer dépendance et comportement marginal. En isolant cette structure de dépendance, il est alors possible de déterminer une loi multivariée originale, car composée de distributions marginales différentes. Un exemple simple est la structure de dépendance générée par une copule gaussienne dont la distribution jointe est gaussienne mais avec des distributions marginales différentes.

La copule de loi de Student est définie comme la structure de dépendance implicite de la distribution multivariée de Student (Annexe). C'est un modèle qui attire beaucoup d'attention pour la modélisation de la structure de dépendance des rentabilités financières. Un certain nombre d'auteurs comme Zeevi and Mashal(2002) et Breymann et al. (2003) ont montré empiriquement que la copule de la loi de Student est généralement supérieure à celle de la loi normale. Une des raisons à cela, est la capacité de la copule de Student à mieux mesurer le phénomène de dépendance des valeurs extrêmes qui sont souvent observées dans les données de rentabilités financières (Demarta and McNeil(2005)). C'est pourquoi, nous l'utilisons dans la méthode POT pour estimer la corrélation entre les facteurs de risque du portefeuille.

Nous utilisons également la copule normale (Annexe) pour estimer la matrice de corrélation pour le modèle GARCH. L'introduction de la copule normale permet de comparer la performance du modèle Generalized Pareto distribution (GPD) à celle du modèle GARCH. Pour la méthode *Filtered Historical Simulation* (FHS), nous faisons la somme des rentabilités logarithmiques des actifs pour déterminer la rentabilité du portefeuille. L'une des qualités de la méthode FHS est de ne pas supposer d'hypothèses ni sur la loi suivie par la distribution des rentabilité, ni sur le type de corrélation qui peut exister entre les facteurs de risque. Ainsi, en considérant la somme des rentabilités logarithmiques des actifs du portefeuille, la corrélation est empiriquement prise en compte entre les actifs du portefeuille.

4.1.1 Théorème de Sklar

Une copule , $C : [0, 1]^n$, est par définition une fonction de distribution multivariée dont les distributions marginales sont uniformément distribuées sur $[0, 1]$.

La théorie des copules est basée sur le théorème de Sklar du nom qui a introduit le concept de copule en 1959. Ce théorème précise le lien défini par la copule C , déterminée à partir de la distribution jointe F , entre les fonctions de répartition marginales univariées et la distribution jointe.

Théorème 4.1 (Théorème de Sklar) *Soit F une fonction de répartition à n dimensions avec des distributions marginales F_1, \dots, F_n , alors il existe une n copule C telle que :*

$$\forall x \in R^n, F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (4.1)$$

C est unique lorsque les distributions marginales F_1, \dots, F_n sont continues.

Une copule permet d'exprimer une fonction de répartition multivariée selon ses marginales . Cette copule résume toute la structure de dépendance. Une copule par définition est une fonction de répartition multivariée C définie sur l'hypercube $[0, 1]^n$ et dont les marginales sont uniforme sur $[0, 1]$, ce qui conduit à une expression probabiliste simple de la copule:

$$C(u_1, \dots, u_n) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n). \quad (4.2)$$

avec les copules, on ne travaille plus en nombre ou montant mais en rang, c'est-à-dire que dans la pratique, on transforme linéairement les observations x_1, \dots, x_n en uniformes empiriques u_1, \dots, u_n où $u_i = \frac{\text{Rang}(x_i)}{n+1}, \forall i \in [1, n]$.

La fonction de densité c d'une copule C ,si elle existe , est définie par :

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C}{\partial u_1, \dots, \partial u_n}(u_1, \dots, u_n) \quad (4.3)$$

4.1.2 Bornes de Fréchet

Toute copule doit être comprise entre la copule minimum et la copule maximum communément appelé les bornes de Fréchet.

- La copule minimum qui a pour expression

$$C^-(u_1, \dots, u_n) = \min(u_1, u_2, \dots, u_n) \text{ avec } (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n \quad (4.4)$$

- La copule maximum s'écrit:

$$C^+(u_1, \dots, u_n) = \max(u_1 + u_2 + \dots + u_n - 1, 0) \text{ avec } (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n \quad (4.5)$$

Pour toute copule C , nous avons :

$$C^-(u_1, \dots, u_n) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq C^+(u_1, \dots, u_n)$$

Les copules minimum C^- et maximum C^+ sont essentielles puisqu'elles définissent des copules extrémales de toute copule, que l'on appelle les bornes de Fréchet.

4.1.3 Théorème d'invariance

L'un des théorèmes essentiel à la théorie des copules est celui de l'invariance par transformation strictement croissantes.

Théorème 4.2 (théorème d'invariance) *Soit des variables aléatoire continues x_1, \dots, x_n de marges F_1, \dots, F_n et de copule associée à la distribution jointe F du vecteur aléatoire $x = x_1, \dots, x_n$ que nous notons $C(x_1, \dots, x_n)$. Si F_1, \dots, F_n sont des fonctions strictement croissantes, alors:*

$$C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = C(x_1, \dots, x_n) \quad (4.6)$$

La copule est invariante par transformations strictement croissantes des variables aléatoires.

4.1.4 Dépendance de queue

Le concept de dépendance de queue fournit une description de la dépendance au niveau des queues de distribution, très intéressante pour étudier la survenance simultanée de valeurs extrêmes. C'est une mesure locale contrairement au tau de Kendall et au rho de Spearman qui mesure la dépendance sur l'ensemble de la distribution.

Le coefficient de dépendance de queue inférieur (lower tail dependence coefficient) et le coefficient de dépendance de queue supérieur (upper tail dependence coefficient) de deux variables aléatoire se déduisent des probabilités conditionnelles suivantes :

$$P(U_1 \leq u_1 | U_2 \leq u_2) = \frac{P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)}{P(U_2 \leq u_2)} = \frac{C(u_1, u_2)}{u_2} \quad (4.7)$$

$$P(U_1 > u_1 | U_2 > u_2) = \frac{P(U_1 > u_1, U_2 > u_2)}{P(U_2 > u_2)} = \frac{1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2)}{1 - u_2} \quad (4.8)$$

Une copule C a une dépendance de queue gauche si :

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0^+} = \frac{C(u, u)}{u}$$

existe et $\lambda_L \in (0, 1]$. Si $\lambda_L = 0$, alors elle n'a pas de dépendance de queue à gauche.

Une copule C a une dépendance de queue droite si :

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1^-} = \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}$$

existe et $\lambda_U \in (0, 1]$. Si $\lambda_U = 0$, alors elle n'a pas de dépendance de queue à droite.

Quand le coefficient de dépendance λ est supérieur à zéro, cela indique une tendance pour la copule à générer en même temps des événements extrêmes.

Pour les distributions elliptiques et symétriques comme la distribution de Student, les deux mesures λ_L et λ_U coïncident et sont notées simplement par λ . Pour la copule normale, leur valeur est zéro et pour la copule de Student, elle est positive. Pour calculer le coefficient de dépendance d'une copule de Student, Embrechts et al (2003) propose la formule:

$$\lambda = \frac{2t_{\nu+1}(-\sqrt{\nu+1}\sqrt{1-\rho})}{\sqrt{1+\rho}} \quad (4.9)$$

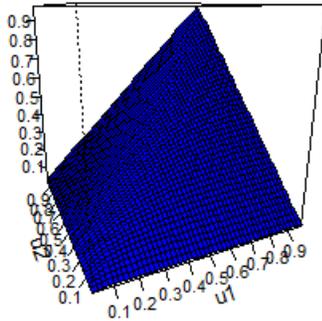
Les coefficients de la dépendance de queue pour la copule de Student sont présentés dans le tableau 4.1. La copule de Student donne une dépendance asymptotique dans la queue de distribution à la fois pour les coefficients de corrélation négative et zéro. La dernière ligne droite du tableau est un cas particulier de la copule de Student quand le degré de liberté tend vers l'infini correspondant à l'absence de dépendance dans la queue.

L'examen du tableau 4.1 montre que plus le degré de liberté est faible et la corrélation élevée entre les actifs, plus la dépendance est forte. Inversement, plus le degré de liberté tend vers des valeurs élevées et une corrélation faible entre les actifs, plus la dépendance dans la queue s'amenuise.

ν/ρ	-0.5	0	0.5	0.9	1
2	0.06	0.18	0.39	0.72	1
4	0.01	0.08	0.25	0.63	1
6	0.00	0.03	0.17	0.56	1
10	0.00	0.01	0.08	0.46	1
∞	0	0	0	0	1

Table 4.1: **Coefficient de dépendance de la copule de Student**
 Coefficient de dépendance de la copule de Student en fonction du degré de liberté et du coefficient de corrélation

Copula CDF



Copula PDF

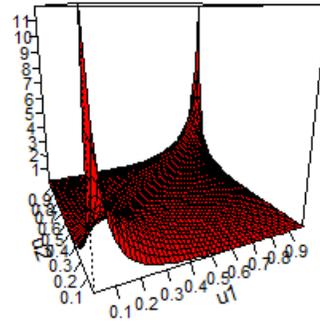


Figure 4.1: CDF et PDF d'une copule de Student Bivariée avec $\rho = 0.7$ et un degré de liberté de 4.

4.1.5 Méthode d'estimation des copules

L'estimation de la copule commence par la transformation des données à l'échelle de la copule en estimant d'abord les distributions marginales des données et en transformant ces marginales en variables uniformes. De façon générale, la modélisation des distributions marginales est réalisée de trois manières:

- une estimation paramétrique de chaque marginale
- une modélisation non paramétrique en utilisant les fonctions de distribution empirique
- une estimation hybride en combinant les modélisations paramétrique

La première méthode est connue sous le nom de *Inference Functions for Margins method* ou IFM (Annexe) développée par Joe and Xu (1996). Dans la pratique, le succès de cette méthode dépend du choix approprié des modèles paramétriques pour les distributions marginales qui n'est pas toujours évident surtout quand les données exposent des queues épaisses.

La deuxième méthode suppose une estimation des distributions marginales par la fonction de densité empirique couramment appelée la méthode de pseudo-vraisemblance qui a été développée par Genest et al.(1995). Les paramètres estimés de la copule qui résultent de cette méthode sont consistants et asymptotiquement convergents pour les variables aléatoires indépendamment et identiquement distribuées.

Soit les vecteurs de variables aléatoire $X_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,d})^T$, $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, d$, l'estimation de la j ème distribution marginale du i ème vecteur F_j est donnée par :

$$F_j^{\hat{}}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_{i,j} \leq x\}} \quad (4.10)$$

Le pseudo-échantillon de la copule est ensuite construit par les vecteurs $\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n$ suivant la formule:

$$\hat{U}_i = (\hat{U}_{i,1}, \dots, \hat{U}_{i,d})^T = (F_1(\hat{X}_{i,1}), \dots, F_d(\hat{X}_{i,d}))^T \quad (4.11)$$

Les rentabilités de chaque facteur de risque X_1, \dots, X_n doivent être identiquement et indépendamment distribuées. Les estimations des distributions marginales \hat{F}_j sont construites à partir des vecteurs de données originelles univariées $X_{1,j}, \dots, X_{n,j}$.

La méthode hybride quant à elle peut être développée par la modélisation des queues de distributions par la théorie des valeurs extrêmes (Davison and Smith (1990)) et la partie intérieure peut être estimée par une fonction de distribution empirique comme dans l'équation (4.10) .

Les paramètres de la copule sont estimés suivant plusieurs méthodes d'inférence statistiques: méthode des moments, méthode du maximum de vraisemblance, méthode IFM et méthode Canonical Maximum Likelihood (CML).

Après l'analyse des avantages et des inconvénients de chacune de ces méthodes, nous retenons dans ce mémoire, une estimation de la copule par la méthode CML. Dans cette méthode d'inférence statistique, les paramètres de la copule sont estimés sans spécifier les distributions marginales. La méthode d'estimation consiste à transformer l'échantillon d'observations $[(x_1^t \dots x_n^t)]_{t=1}^T$ en variables uniformes $[(u_1^t \dots u_n^t)]_{t=1}^T$ et d'estimer les paramètres de la copule. Cette méthode peut être décrite comme suit:

- Estimer les distributions marginales en utilisant les distributions empiriques (sans supposition de formes paramétriques des distributions), c'est à dire $F_j(\hat{x}_i^t)$ avec $i = 1, \dots, n$.
- Estimer par le maximum de vraisemblance les paramètres de la copule

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax} \sum_{t=1}^T \log c(F_1(\hat{x}_1^t) \dots F_n(\hat{x}_n^t); \theta) \quad (4.12)$$

Cette méthode recommandé par Bouye et al. (2000) est voisine de la méthode IFM à la différence qu'elle ne nécessite pas d'avoir recours à l'estimation des marginales. Elle a l'avantage de procéder à une estimation paramétrique de la copule totalement indépendante de la forme paramétrique des distributions marginales.

4.2 Estimation des pertes potentielles sur le portefeuille

Les pertes potentielles sur le portefeuille peuvent être estimés en intégrant l'estimation de la copule dans les mesures de la Value at Risk et l'Expected Shortfall. Cette méthodologie des copules permet de mieux prendre en compte la dépendance entre les différents actifs du portefeuille sans imposer un type particulier de corrélation. En adoptant la corrélation linéaire, cela suppose une relation linéaire entre les actifs du portefeuille dont les distributions de rentabilités suivent une loi normale. Sachant que les actifs du portefeuille ne suivent pas de loi Gaussienne, nous adoptons une mesure de dépendance par les copules:

4.2.1 Série de rentabilités du portefeuille

Pour construire la série de rentabilités du portefeuille sur laquelle est basée la détermination de la Value at Risk et l'Expected Shortfall, nous avons besoin d'estimer les coefficients entre les différents actifs. L'estimation de la matrice de corrélation par la copule commence par la construction des variables uniformes basées sur les résidus standardisés.

- Pour déterminer les résidus standardisés, nous adoptons la même procédure que celle du Chapitre 2. Cette procédure consiste à déterminer pour chaque actifs, les résidus et les volatilités conditionnelle en estimant les modèles ARMA(1,1)-GJR(1,1).
- Les résidus sont ensuite standardisés par le rapport entre les résidus et les volatilités conditionnelles estimés.
- Les résidus standardisés permettent, par transformation, la construction des variables uniformes. Cette transformation est effectuée en estimant la fonction de répartition empirique (4.10) des résidus standardisé afin de ne pas imposer une distribution particulière aux données.
- Si les lois de distribution suivies par les données étaient bien connues, il serait judicieux de choisir ces lois pour la transformation des résidus standardisés. Comme les lois de distribution suivies par les données financières ne sont pas toujours connues avec certitude, nous choisissons la transformation de répartition empirique. Cela consiste à estimer la fonction de répartition empirique des résidus standardisés.

4.2.2 Matrice de corrélation

Une fois cette transformations de variables aléatoire effectuée en variables uniformes, ces données transformées sont utilisées pour estimer la matrice de corrélation de la copule par la méthode *Canonical Maximum Likelihood* décrit précédemment et dont les résultats de l'estimation du 2/01/2008 sont présentés dans le tableau ci dessous. La méthode CML permet de déterminer la dépendance entre les variables aléatoires séparément du choix des distributions marginales.

	CAC40	S&P	Eurostock	USD/EUR	USD/BRL	CDS1 ^a	CDS2 ^b	CDS3 ^c
CAC40	1	0.680 (0.00)	0.871 (0.00)	0.187 (0.00)	0.079 (0.00)	0.106 (0.00)	0.283 (0.00)	0.187 (0.00)
S&P	0.680 (0.00)	1	0.777 (0.00)	0.087 (0.00)	0.081 (0.00)	0.181 (0.00)	0.202 (0.00)	0.198 (0.00)
Eurostock	0.871 (0.00)	0.777 (0.00)	1	0.106 (0.00)	0.101 (0.00)	0.121 (0.00)	0.297 (0.00)	0.171 (0.00)
USD/EUR	0.187 (0.00)	0.167 (0.00)	0.106 (0.00)	1	0.807 (0.00)	0.283 (0.00)	-0.441 (0.00)	0.402 (0.00)
USD/BRL	0.079 (0.00)	0.087 (0.00)	0.101 (0.00)	0.807 (0.00)	1	0.361 (0.00)	-0.377 (0.00)	0.307 (0.00)
CDS1	0.106 (0.00)	0.181 (0.00)	0.121 (0.00)	0.283 (0.00)	0.367 (0.00)	1	0.777 (0.00)	0.801 (0.00)
CDS2	0.283 (0.00)	0.202 (0.00)	0.297 (0.00)	-0.441 (0.00)	-0.377 (0.00)	0.77 (0.00)	1	0.803 (0.00)
CDS3	0.187 (0.00)	0.198 (0.00)	0.171 (0.00)	0.402 (0.00)	0.307 (0.00)	0.801 (0.00)	0.803 (0.00)	1

Table 4.2: **Matrice de dépendance de la copule de Student**

Les valeurs entre parenthèses correspondent aux p-value. Si elles sont inférieures à 5%, l'hypothèse de nullité de la corrélation est rejetée, sinon l'hypothèse de corrélation est acceptée. Les coefficients de corrélation sont estimés sur des rentabilités journalières de janvier 2004 à décembre 2014

^aItraxx xover

^bItraxx EUR

^cItraxx high vol

	CAC40	S&P	Eurostock	USD/EUR	USD/BRL	CDS1 ^a	CDS2 ^b	CDS3 ^c
CAC40	1	0.484(0.40)	0.632(0.57)	0.431(0.61)	0.512(0.09)	0.186(0.37)	0.280(0.12)	0.183(0.08)
S&P	0.484(0.40)	1	0.651(0.00)	0.121(0.51)	0.312(0.30)	0.219(0.00)	0.187(0.00)	0.163(0.00)
Eurostock	0.632(0.57)	0.651(0.50)	1	0.0560(0.50)	0.407(0.50)	0.131(0.50)	0.207(0.50)	0.145(0.50)
USD/EUR	0.431(0.50)	0.121(0.50)	0.560(0.50)	1	0.702(0.50)	-0.360(0.50)	-0.258(0.50)	-0.307(0.50)
USD/BRL	0.512(0.50)	0.312(0.50)	0.407(0.50)	0.702(0.50)	1	-0.384(0.50)	-0.402(0.50)	-0.317(0.50)
CDS1	0.186(0.50)	0.219(0.50)	0.131(0.50)	-0.360(0.50)	-0.384(0.50)	1	0.932(0.50)	0.614(0.50)
CDS2	0.280(0.50)	0.187(0.50)	0.207(0.50)	0.258(0.50)	0.402(0.50)	0.932(0.50)	1	0.864(0.50)
CDS3	0.183(0.50)	0.163(0.50)	0.145(0.50)	-0.307(0.50)	-0.317(0.50)	0.614(0.50)	0.864(0.50)	1

Table 4.3: Matrice de dépendance de la copule Normale

^aTraxx xover

^bTraxx EUR

^cTraxx high vol

L'analyse des résultats du tableau (4.10) de l'estimation de la copule de Student permet de remarquer une forte corrélation significative entre le CAC40 et le S&P. Il existe une faible corrélation positive entre le CAC40 et les spreads de crédits et une corrélation négative entre le S&P et les indices de CDS. Nous notons également une corrélation négative entre les taux de change et l'indice Itraxx EUR

A la différence de la copule de Student la copule normale estime une corrélation négative entre les taux de change et les indices de CDS ainsi que des corrélations positives avec les indices actions. Cependant ces corrélations ne sont pas significativement différentes de zéro en témoigne les forts niveaux des P-values. Il paraît ainsi plus judicieux de considérer que la copule de Student représente au mieux l'évolution des corrélations durant la période de forte volatilité

Nous avons besoin d'estimer les variables uniformes qui ont une structure de dépendance équivalente aux coefficients de corrélation précédemment déterminés. Pour déterminer ces variables uniformes dépendantes, il est nécessaire d'utiliser la simulation de Monte Carlo basée sur les fonctions de densité des copules *voir annexes* et ayant pour paramètres de simulation : la matrice de corrélation et le degré de liberté déterminés par la méthode *Canonical Maximum Likelihood*.

Les données de simulation sont ensuite transformées en résidus standardisés par inversion de la fonction de répartition empirique sur les variables uniformes de chaque actif du portefeuille. Cela donne des résidus standardisés simulés consistants comme ceux obtenus de l'estimation du modèle de volatilité conditionnelle. Les résidus standardisés de chacun des actifs du portefeuille sont identiquement et indépendamment distribués. Chaque actif du portefeuille garde avec les autres une corrélation de rang induite par la fonction copule.

En utilisant les résidus standardisés simulés comme processus de bruit de blanc (variables i.i.d), nous réintroduisons l'autocorrélation et l'hétéroscédasticité observées dans les rentabilités d'origine par la simulation de Monte Carlo basée sur le modèle de volatilité conditionnelle.

Cette simulation permet d'avoir des rentabilités à l'image des rentabilités d'origine sauf qu'elles gardent une dépendance les unes par rapport aux autres. Ainsi, comme les rentabilités utilisées sont des rentabilités logarithmiques nous faisons la somme des rentabilités équipondérées des facteurs de risque pour obtenir une série de rentabilités du portefeuille global.

Les rentabilités du portefeuille global ainsi calculées sont ensuite utilisées pour déterminer les résidus standardisés par l'estimation du modèle de volatilité conditionnelle. Ces résidus standardisés du portefeuille servent de donnée pour l'estimation de la Value at Risk et l'Expected Shortfall basées sur les modèles de risque.

4.2.3 Paramètre estimé du modèle

Les paramètres estimés du modèle GPD sur le portefeuille en supposant la constance de la volatilité sont présentés dans le tableau ci dessous. L'examen de ce tableau montre que le portefeuille global présente un risque extrême (indice de queue ξ en moyenne supérieure à zéro dans la queue gauche). Cependant, après prise en compte du changement de la volatilité dans le temps et du clustering de volatilité, l'indice de queue ξ (proche de zéro) dans le second tableau montre que le portefeuille global ne présente plus de risque extrême. Ces résultats montrent l'avantage de la prise en compte du clustering de volatilité et du changement de la volatilité dans la mesure du risque de portefeuille financier.

	Queue gauche							Queue droite						
	N	N_u	u	ξ	β	(ξ)	(β)	N	N_u	u	ξ	β	(ξ)	(β)
Portefeuille	2000	200	0.231	0.207	0.006	0.001	0.001	2000	200	1.310	-0.035	0.478	0.001	0.003

Table 4.4: Paramètre estimé du modèle inconditionnel GPD

	Queue gauche							Queue droite						
	N	N_u	u	ξ	β	(ξ)	(β)	N	N_u	u	ξ	β	(ξ)	(β)
Portefeuille	2000	200	1.208	0.014	0.556	0.004	0.001	2000	370	1.310	-0.040	0.422	0.001	0.003

Table 4.5: Paramètre estimé du modèle conditionnel GPD

4.3 Value at Risk et Expected Shortfall

Les mesures de la Value at Risk et L'Expected shortfall sont réalisées sur le portefeuille en considérant d'une part la constante de la volatilité et d'autre part le changement de la volatilité dans le temps. L'estimation des mesures de risque (VaR et ES) a été faite sur la période de janvier 2008 à décembre 2010 à partir d'un historique de 5214 rentabilités journalières pour les actifs.

Les Tableaux ci dessous présentent les estimations de la VaR et de l'ES sous l'hypothèse de la volatilité constante et en prenant en compte le changement de la volatilité dans le temps.

Les deux premiers tableaux présente les estimations de la VaR et l'ES sous l'hypothèse de la volatilité constante. L'analyse de ces tableaux montre en termes hiérarchiques que es valeurs de la VaR_{GPD} et de l' ES_{GPD} sont supérieures à celles de la VaR_{SH} et l' ES_{SH} . Les valeurs de la VaR_{SH} et l' ES_{SH} sont supérieures à celles de la $VaR_{Normale}$ et l' $ES_{Normale}$. Ces résultats obtenus sur le portefeuille confirment ceux obtenus sur les actifs individuels dans le Chapitre 3.

Les pertes potentielles déterminées en prenant en compte le changement de la volatilité dans le temps sont présentées dans les tableaux suivants. Dans ces tableaux, nous observons que les valeurs de $VaR_{GPD_{cond}}$ et de l' $ES_{GPD_{cond}}$ sont supérieures à celles des techniques traditionnelles de mesure de risque aux niveaux de confiance de 95%, 99% et 99.9%. Les valeurs de la VaR_{GARCH} et de l' ES_{GARCH} basées sur la loi normale sont inférieures à celle estimées par les deux méthodes précédentes. Cela prouve que la mesure des pertes potentielles par la méthode de la loi normale est inadaptee pour les actifs pris individuellement mais également pour le portefeuille global.

	$VaR_{95\%}$	$VaR_{99\%}$	$VaR_{99.9\%}$
Temps de retour en jours	20 jrs	100 jrs	1000 jrs
Portefeuille GPD	-0.44	-0.059	-0.089
Portefeuille SH	-0.014	-0.025	-0.056
Portefeuille Normale	-0.016	-0.022	-0.046

Table 4.6: Var estimé par les modèles inconditionnels.

	$ES_{95\%}$	$ES_{99\%}$	$ES_{99.9\%}$
Temps de retour en jours	20 jrs	100 jrs	1000 jrs
Portefeuille GPD	-0.054	-0.072	-0.108
Portefeuille SH	-0.023	-0.036	-0.065
Portefeuille Normale	-0.019	-0.025	-0.032

Table 4.7: ES estimé par les modèles inconditionnels.

	$VaR_{95\%}$	$VaR_{99\%}$	$VaR_{99.9\%}$
Temps de retour en jours	20 jrs	100 jrs	1000 jrs
Portefeuille GPD cond	-0.048	-0.062	-0.092
Portefeuille FHS	-0.029	-0.038	-0.062
Portefeuille GARCH	-0.026	-0.031	-0.051

Table 4.8: Var estimé par les modèles conditionnels.

	$ES_{95\%}$	$ES_{99\%}$	$ES_{99.9\%}$
Temps de retour en jours	20 jrs	100 jrs	1000 jrs
Portefeuille GPD cond	-0.062	-0.102	-0.121
Portefeuille FHS	-0.045	-0.053	-0.097
Portefeuille GARCH	-0.040	-0.051	-0.092

Table 4.9: ES estimé par les modèles conditionnels.

4.4 Backtesting du portefeuille

Dans cette sections, nous examinons les résultats du contrôle ex post réalisé sur les modèles de risque pendant la période de crise de 2008. La fiabilité des modèles de risque basées sur l'hypothèse de volatilité constante est évaluée sur le portefeuille global et les résultats sont présentés dans le tableau ci dessous. L'examen de ce tableau montre une fiabilité du modèle GPD, mais avec une forte sous-estimation du risque car les statistiques de Wald sont largement supérieures à zéro au niveau de 99% et 99.9%. La fiabilité des techniques traditionnelles de mesure de risque est complètement rejetée par le test de couverture inconditionnelle (Wald et Kupiec) et par le test de couverture conditionnelle.

Les résultats du contrôle ex post réalisé sur les modèles conditionnels de risque sont également présenté. L'analyse des résultats du test de Kupiec sur le modèle conditionnelle GPD montre une acceptation de l'hypothèse de couverture inconditionnelle sur le portefeuille à tous les niveaux de confiance. En effet les probabilité (P-value) associées aux statistiques calculées sont toutes supérieures aux seuil requis (5%, 1%, 0.1%). Le test de Kupiec effectué sur les techniques traditionnelles (FHS et GARCH) de mesure de risque présente des P-value nulles à tous les niveaux de confiance. Cela monte que les techniques traditionnelles de mesure de risque ne sont pas fiables pour mesurer le risque sur le portefeuille. Les résultats de Wald abondent dans le même sens que le résultats de Kupiec.

Le test d'indépendance de Markov présenté montre que pour les trois techniques de mesure de VaR, les violations sont significativement indépendantes. En effet, toutes les probabilités associées aux statistiques sont supérieures au seuil critique requis. Ainsi on peut considérer que la propriété d'indépendance des séries des violations est remplie par l'ensemble des techniques de mesure de risque.

Le test de couverture conditionnelle permet de tester conjointement la propriété de couverture inconditionnelle (test de Kupiec) et celle d'indépendance d'une série de violations. Nous observons que le modèle conditionnel GPD assure mieux la couverture conditionnelle que les techniques traditionnelles de mesure de risque. Nous constatons sur le portefeuille globale que le modèle GPD est fiable sur les périodes de faible volatilité. De manière générale, les modèles internes de mesure de risque se sont révélés non fiables.

	Test de Kupiec			Test de Wald		
	GPD	SH	Normale	GPD	SH	Normale
Portfeuille						
95%	0.18 (0.67)	125.71 (0.00)	107.04 (0.00)	0.44 (0.33)	15.53 (0.00)	14.07 (0.00)
99%	3.56 (0.06)	152.80 (0.00)	176.76 (0.00)	2.22 (0.01)	23.84 (0.00)	26.38 (0.00)
99.9%	4.83 (0.03)	128.51 (0.00)	211.94 (0.00)	3.50 (0.00)	37.52 (0.00)	55.53 (0.00)
	Test d'indépendance			Test de couverture conditionnelle		
	GPD	SH	Normale	GPD	SH	Normale
Portfeuille						
95%	0.40 (0.53)	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	0.58 (0.75)	125.71 (0.00)	107.04 (0.00)
99%	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	3.56 (0.17)	152.80 (0.00)	176.76 (0.00)
99.9%	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	4.83 (0.09)	128.51 (0.00)	211.94 (0.00)

Table 4.10: **Résultats du backtesting sur les modèles inconditionnels**

. Les valeurs entre parenthèse sont des probabilité associées aux statistiques. Le test est effectué sur une fenêtre de backtesting de 250 jours (janvier 2008 à décembre 2008).

	Test de Kupiec			Test de Wald		
	GPD cond	FHS	GARCH	GPD cond	FHS	GARCH
Portefeuille						
95%	10.81 (0.00)	38.82 (0.00)	60.77 (0.00)	-1.02 (1.00)	7.69 (0.00)	10.01 (0.00)
99%	0.11 (0.74)	15.89 (0.00)	62.83 (0.00)	-0.32 (0.00)	5.40 (0.00)	13.03 (0.00)
99.9%	1.27 (0.26)	20.55 (0.00)	62.22 (0.00)	1.50 (0.07)	9.50 (0.00)	21.51 (0.00)
	Test d'indépendance			Test de couverture conditionnelle		
	GPD cond	FHS	GARCH	GPD cond	FHS	GARCH
Portefeuille						
95%	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	10.81 (0.00)	7.69 (0.00)	10.01 (0.00)
99%	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	0.11 (0.00)	38.82 (0.00)	60.77 (0.00)
99.9%	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	0.00 (1.00)	1.27 (0.50)	20.55 (0.00)	62.24 (0.00)

Table 4.11 : **Résultats du backtesting sur les modèles conditionnels**
. Les valeurs entre parenthèse sont des probabilités associées aux statistiques. Le test est effectué sur une fenêtre de backtesting de 250 jours (janvier 2008 à décembre 2008).

4.5 Conclusion

Dans cette étude, nous avons associé la méthode des excès sur la distribution de Pareto généralisée et la copule de Student pour mesurer le risque de notre portefeuille. Nous avons également associé la méthode FHS et le modèle GARCH de la loi normale respectivement à la copule de Student et à la copule normale. Les mesures de la Value at Risk et de l'Expected Shortfall basées sur la méthode des excès de la théorie des valeurs extrêmes, sur la méthode FHS et sur le modèle GARCH de la loi normale ont permis de faire une évaluation de la fiabilité de chacune des techniques de mesure de risque.

Les premiers résultats de cette étude montrent que le modèle conditionnel GPD estime des pertes potentielles supérieures à celles estimées par la méthode FHS et par le modèle GARCH de la loi normale. Il faut également noter que les pertes estimées par la méthode FHS sont supérieures à celle estimées par le modèle GARCH de la loi normale. Pendant que les méthode FHS et GARCH enregistrent de fortes sous-estimations sur la période de crise financière et économique de 2008, le modèle conditionnel GPD enregistre une légère surestimation du risque sur le portefeuille.

La procédure statistique de contrôle ex post a révélé une fiabilité du modèle inconditionnel et conditionnel GPD à mesurer le risque sur le portefeuille. Malgré cette fiabilité, nous remarquons que le modèle inconditionnel GPD sous-estime le risque réel sur le portefeuille. Parallèlement, les techniques traditionnelle de mesure de risque basées sur la modélisation conditionnelle du risque (FHS et GARCH) et sur la modélisation inconditionnelle du risque (SH et Normale) sont rejetées par le contrôle ex post effectué sur la période crise de l'année 2008.

Ainsi nous somme armés pour aborder la partie cruciale du mémoire concernant les méthodologies de stress tests Historiques et Hypothétiques.

*Le hasard, c'est Dieu qui se
promène incognito*

Albert Einstein

5

Méthodologie Stress Tests Historique

Le stress test par des scénarios historiques est une exigence du comité de Bâle. Ce dernier recommande aux établissements financiers d'inclure des scénarios historiques dans le test de leurs portefeuilles contre les périodes de crises économiques et financières. Parmi ces crises, citons le krach boursier de 1987, la crise du système monétaire européen de 1992-1993, la chute brutale des marchés obligataires des Etats-Unis en 1994. Les établissements de crédit doivent également prendre en compte de fortes volatilités et la réduction de la liquidité associée à ces événements extrêmes (Basel Committee(2009)).

L'apport de ce chapitre est de montrer le processus d'intégration des scénarios historiques dans les modèles de mesures de risque de marché afin d'évaluer les pertes extrêmes auxquelles un portefeuille de négociation peut être exposé. La pratique du stress test par scénario historique consiste à construire des scénarios historiques hors des modèles de mesure de risque et ne permet pas d'assigner de probabilités ni aux scénarios, ni aux pertes extrêmes estimés. Ainsi, il n'y a aucun moyen d'évaluer l'importance qu'elle permet à la direction d'un établissement financier de décider plus rapidement de la mise en place des actions nécessaires à la réduction de ses expositions aux risques extrêmes. Certaines études (Greenspan (2000) et Alexander and Shetty (2008)) proposent d'intégrer le stress test dans les modèles de risque de marché afin de lui donner plus de crédibilité. Notre méthodologie suit cette démarche mais avec une spécificité qui consiste à intégrer le stress de la volatilité conditionnelle et de la matrice de corrélation dans la méthode POT de la théorie des valeurs extrêmes. Ainsi, nous proposons une méthodologie qui consiste à déterminer des pertes extrêmes par le modèle GPD (Generalized Pareto Distribution) de la méthode POT en intégrant le stress de la volatilité conditionnelle et le stress de la corrélation dans la mesure de la Value at Risk et l'Expected Shortfall.

Dans ce chapitre, nous décrivons tout d'abord dans les deux premières sections, le choix de la période d'événement et la spécification des paramètres de choc. Pour réaliser un stress test de type scénario historique, il est nécessaire de déterminer la période historique (date de début et de fin) correspondante à un événement de risque extrême et de spécifier l'amplitude des chocs à effectuer sur le portefeuille. Ensuite, dans la troisième section, nous intégrons le stress test dans les modèles de mesure de risque de marché à travers la volatilité et la matrice de corrélation.

5.1 Période d'évènement

La première question que l'on se pose lors de l'élaboration des scénarii historiques est: quelle période historique pouvons-nous choisir? Cette période historique est généralement liée à une variation relativement modérée ou à un évènement extrême. Une période d'évènement historique est définie de deux manières.

- Premièrement, la période est définie par le lien avec un évènement extrême bien connu comme la crise financière de 2008.
- Deuxièmement, la période est définie en examinant les variations historiques des facteurs de risque relatives à un niveau donné de variations.

La deuxième approche permettra sans doute de sélectionner des crises connues mais d'identifier d'autres périodes d'évènement avec des variations relativement plus élevées que celles constatées sur les périodes de faible volatilité de marché. Elle est la plus utilisée du fait de l'existence de crise historique sur certains facteurs de risque. Le choix d'un évènement de crise permet facilement de déterminer la période de crise. Ce qui n'est pas le cas lorsqu'on commence par examiner d'abord le maximum ou le minimum des variations d'un facteur de risque sur plusieurs années, pour ensuite déterminer la période d'évènement historique.

Les scénarii potentiels de crise utilisés dans le cadre d'un stress test de type scénario historique peuvent inclure les évènements extrêmes suivants:

- Les chocs pétroliers (par exemple, le premier choc pétrolier de 1973 ou les guerres dans le Golfe Persique)
- Le krach boursier d'octobre 1987
- La crise du marché obligataire aux États Unis en 1994
- Le défaut de la Russie et du fonds d'investissement LTCM
- La crise asiatique de 1997

L'attaque terroriste du 11 septembre 2001 est aussi considérée comme un scénario de crise. La caractéristique de ces crises peut être utile à la fois pour assurer la plausibilité des scénarios historiques mais aussi pour guider la construction des scénarios hypothétiques.

Il est important de reconnaître que quel que soit le nombre d'évènements historiques sélectionnés, rien ne garantit que le risque extrême futur soit totalement couvert. Cependant nous pouvons espérer une sélection judicieuse des évènements historiques qui fourniront des informations sur des zones de vulnérabilité d'un portefeuille. Cela permet d'identifier des risques extrêmes dont la mesure n'est pas évidente avec certains outils de mesure de risque de marché comme la Value at risk. Le gestionnaire de risque doit élaborer des scénarios historiques en fonction de la composition du portefeuille et du changement de l'environnement économique.

5.2 Scénario historique: La chute de Lehman Brothers de 2008

Le 15 septembre 2008, Lehman Brothers se déclare en faillite. Avec 639 milliards de dollars d'actifs, une dette de près de 619 milliards de dollars et 25 000 employés dans le monde, Lehman était la quatrième banque d'investissement américaine.

Étant donné sa puissance financière, largement supérieure à celles de Enron ou WorldCom, la faillite de Lehman Brothers est la plus importante de l'histoire. La banque est la plus grosse victime de la crise des subprimes de 2008 et sa chute l'a intensifiée. En effet, elle a contribué à l'érosion de près de 10 000 milliards de dollars sur les marchés actions et crédits mondiaux en octobre 2008.



Figure 5.1: Evolution du CAC40 pendant la période de crise de 2008

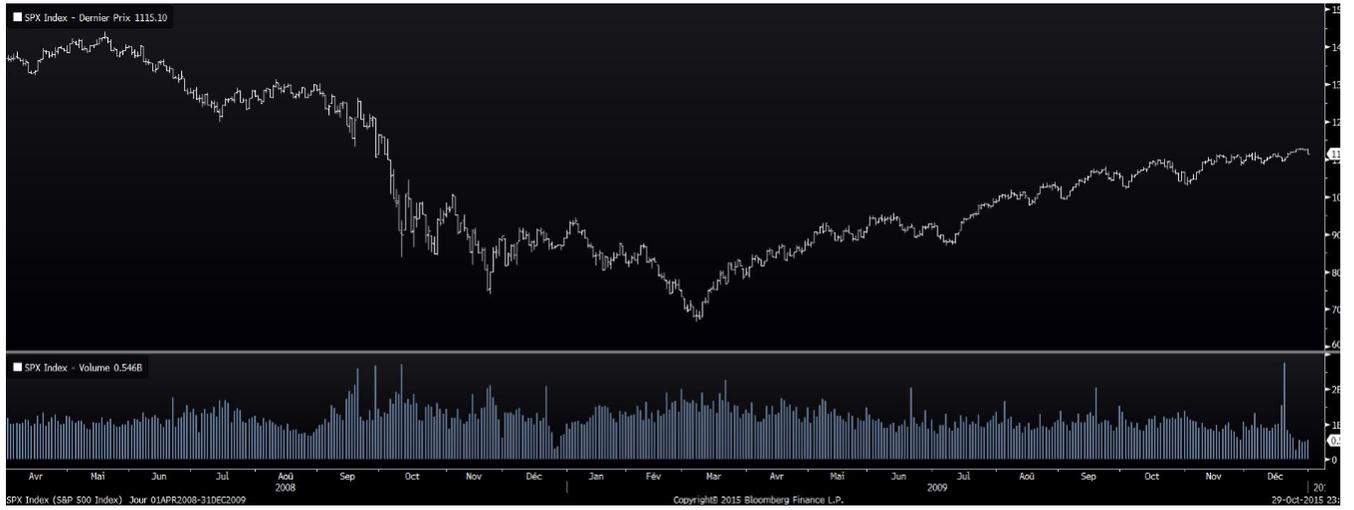


Figure 5.2: Evolution du *S&P500* pendant la période de crise de 2008



Figure 5.3: Evolution de l'indice *Itraxx EUR* pendant la période de crise de 2008

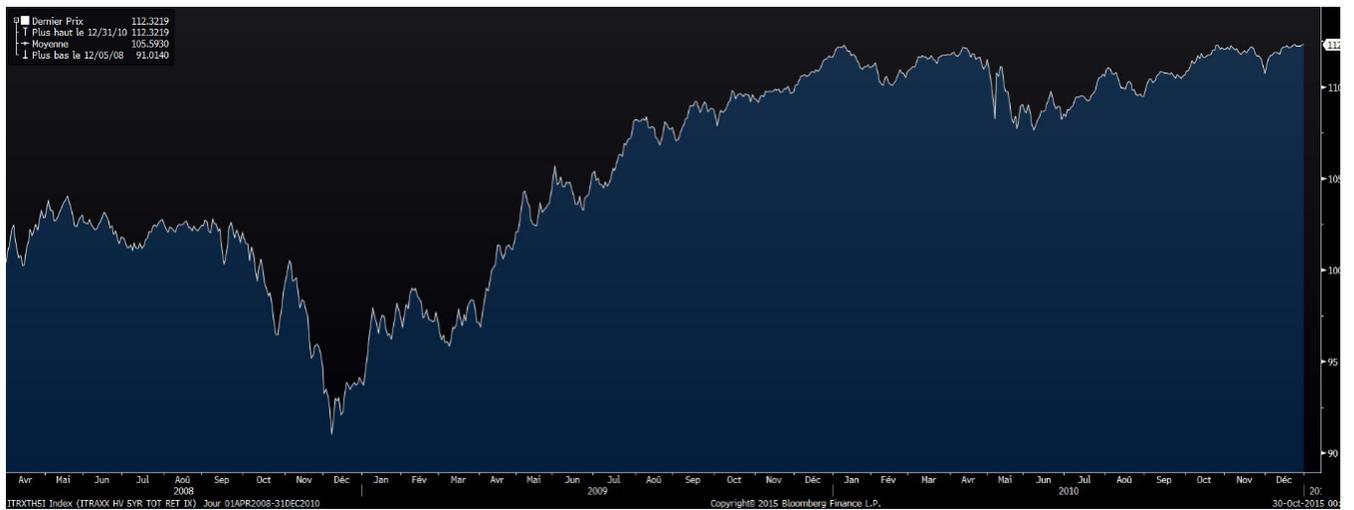


Figure 5.4: Evolution de l'indice Itraxx high vol pendant la période de crise de 2008

Les graphiques précédemment présente la période de fortes volatilités des marchés actions et crédits (les autres graphiques sont présentés en Annexe). Sur cette période, la volatilité la plus forte a été près de 10% sur le CAC 40 et le S&P 500. Nous constatons aussi une forte volatilité sur les indices Itraxx Eur et Itraxx high Vol de l'ordre de 20%. Cependant, il faut noter que la volatilité enregistrée sur le taux de USD/BRL (environ 2%) est faible comparativement à celle des actions actions et des indices de CDS. Nous remarquons cependant que les plus grosses baisses sont constatées pendant la période septembre-Octobre 2008.

Après le choix de l'événement il est nécessaire d'identifier les dates de début et de fin pour élaborer un scénario de stress. Ces dates permettent de déterminer l'amplitude du choc. Mais, l'identification de ces dates de début et de fin n'est pas toujours évidente pour un portefeuille varié comme nous avons. Néanmoins, il existe deux approche principales pour déterminer l'amplitude du choc.

- La première approche consiste à définir un intervalle de période en s'assurant que la période choisie contient toutes les variations significatives des facteurs de risque. Cet intervalle de temps peu être d'un jour, d'une semaine, d'un mois, d'un trimestre, voire d'une année. L'amplitude du choc pour chaque facteur de risque doit correspondre à la plus grande baisse que le facteur de risque a enregistrée indépendamment de la date de début et de fin.
L'avantage de cette approche est qu'elle permet de considérer la plus grande baisse des facteurs de risque. L'inconvénient est que si les chocs sont réalisés ensemble, cela n'aura pas de sens économique.
- La deuxième approche consiste à définir une période d'événement qui ne contient que les plus fortes variations des facteurs de risque. Les intervalles de temps choisis dans cette période d'évènement doivent avoir comme date de début, la date correspondante au plus haut niveau (bas niveau) du facteur de risque et comme date de fin, la date correspondante au plus bas niveau (haut niveau) du facteur de risque. L'amplitude du choc dans l'intervalle de temps doit correspondre à la variation du facteur de risque entre la date de début et la date de fin.
L'inconvénient de cette approche est que la fenêtre d'évènement idéale ne peut être définie. Elle a l'avantage de pouvoir réaliser des chocs simultanés et de donner un sens économique au scénario de stress. La seconde approche est la mieux adaptée. Elle a plus de sens en exerçant des chocs simultanés sur plusieurs facteurs de risque.

Par ailleurs dans cette étude, nous choisissons la première approche pour évaluer les pertes extrêmes sur chaque actif du portefeuille. Nous considérons un historique de 200 observations dans lequel nous évaluons les évènements extrêmes correspondant au scénario identifié précédemment. L'historique du scénario commence quelques jours avant la date de début de l'évènement historique.

La période d'évènement historique commence le 15 août 2008 et se termine le 3 juin 2009. Cette période d'évènement est choisie sur une période de 200 jours.

En observant les Graphiques ci dessus, nous remarquons que cette période de 200 jours contient les plus fortes volatilités enregistrées sur les actifs du portefeuille. Nous retenons 20 jours comme intervalle de temps pour spécifier les chocs historiques. Nous choisissons l'intervalle de temps allant du premier jour (15 septembre 2008) au 20^{ème} jour ouvré pour spécifier le premier choc, du deuxième jour (16 septembre 2008) au 21^{ème} jour ouvré pour spécifier le deuxième choc, etc.

5.3 Spécification des paramètres de chocs

La spécification des paramètres de choc consiste à déterminer l'amplitude de la variation des facteurs de risque. Par exemple, il peut s'agir d'un choc de 5% à la baisse sur le prix de l'indice CAC40 ou d'un choc de 4% sur la volatilité du CAC40. Dans ce mémoire les paramètres de choc sont spécifiés sur les résidus et les volatilités historiques.

Les résidus et les volatilités sont déterminés sur les rentabilités journalières des actifs du portefeuille par l'estimation du modèle ARMA(1,1)-GJR(1,1) pour la méthode GPD. Nous avons détaillé l'estimation de ce modèle dans le chapitre 2. Les paramètres de ces chocs sont déterminés dans un intervalle de temps de 20 jours (risque de liquidité) compris dans la période d'évènement.

Pour le résidu, le paramètre de choc est défini comme le minimum ou le maximum de toutes les variations. Cette façon de déterminer le paramètre de choc sur les résidus ou sur les rentabilités est connue sous le nom de méthode *Drawdown* (cf. Acar and James (1997)).

- Si le minimum des résidus est sélectionné, la variation est équivalente à une diminution maximum du facteur de risque.
- Si le maximum des résidus est sélectionné, la variation est équivalente à une augmentation maximum du facteur de risque.

Finalement, cette variation peut être considérée comme une valeur absolue maximum. Dans ce cas, la variation est égale à la valeur maximum de la variation que celle-ci soit en hausse ou en baisse. Cela permet de prendre en compte des situations adverses où certains facteurs de risque enregistrent des gains extrêmes pendant la période de crise. Le choix du paramètre de choc sur les résidus est effectué en respectant ces principes (voir *Table 5.1*).

Pour le choc par la volatilité historique, le paramètre de choc correspond à la valeur maximale de la volatilité historique sur l'intervalle de temps de 20 jours (risque de liquidité). Cet intervalle de temps est le même que celui fixé pour le résidu. Les deux paramètres spécifiés (résidu et volatilité historique) permettent d'exercer un choc simultané sur la volatilité conditionnelle future. Rappelons que l'objectif de la spécification des paramètres de choc (résidu et volatilité historique) est de prévoir la volatilité conditionnelle. Cette dernière dépend du résidu et de la volatilité historique.

Scénario Historique		
	Résidu	Volatilité
CAC40	0.194	0.107
S&P	0.187	0.103
Eurostock	0.191	0.081
USD/EUR	0.107	0.0308
USD/BRL	0.083	0.021
Itraxx crossover	0.212	0.217
Itraxx EUR	0.197	0.132
Itraxx Highvol	-0.118	0.111

Table 5.1: Valeurs des paramètres de choc.

Ces paramètres de choc sont déterminés à partir du 15 septembre 2008 et sur un intervalle de temps de 5 jours.

Une fois que ces paramètres de choc sont déterminés, ils sont introduits dans la formule de la volatilité conditionnelle afin de calculer des pertes extrêmes sur chaque actif du portefeuille d'étude.

5.3.1 Stress de la volatilité conditionnelle

Le stress de la volatilité historique consiste à prévoir la volatilité conditionnelle à la date t en fonction du paramètre de choc spécifié à l'instant $t - 1$. Si nous notons σ_{t-1} et ϵ_{t-1} les paramètres de choc, la transmission de ces chocs dans la volatilité conditionnelle peut être exprimée par:

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_t^2 + \beta_2 \epsilon_{t-1}^2 + \rho \mathbb{1}_{\epsilon_{t-1} < 0} \epsilon_{t-1}^2 \quad (5.1)$$

où $\beta_0 \geq 0, \beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$.

Les paramètres β_0, β_1 et β_2 sont déterminés sur un échantillon de rentabilités par l'estimation du modèle GJR(1,1) pour le modèle GPD.

Après le stress des volatilités conditionnelles, les valeurs de stress VaR et de stress Expected Shortfall sont calculées par les formules ci-dessous

$$VaR_\alpha^t(Z) = \mu_t + \sigma_t (Z_{k+1} + \frac{\beta}{\xi} [(\frac{N}{k}(\alpha))^{-\xi} - 1]) \quad (5.2)$$

$$ES_\alpha^t(Z) = \mu_{t+1} + \sigma_{t+1} (\frac{VaR_\alpha(Z)}{1 - \xi} + \frac{\beta - \xi Z_{k+1}}{1 - \xi}) \quad (5.3)$$

où Z_{k+1} représente le seuil au delà duquel les résidus standardisés extrêmes sont formés. Les paramètres de queue et d'échelle sont respectivement représentés par ξ et β . N est le nombre total de résidus standardisés négatifs et k , le nombre de résidus standardisé extrêmes.

5.3.2 Stress de la matrice de corrélation

D'un point de vue opérationnel, le principal problème du stress test apparaît quand il s'agit d'intégrer la corrélation dans la procédure du stress test. Des études empiriques réalisées par Mori et al. (1995) et Jackson et al (1998) ont montré que la corrélation n'est pas constante dans le temps. Ces auteurs indiquent également que la corrélation change en période de crise. Nous testons cette constance de la corrélation sur notre portefeuille. Pour réaliser ce test, nous avons calculé la corrélation avant et pendant la période d'événement correspondante à la faillite de Lehman Brothers. Les résultats du calcul des coefficients de corrélation sont présentés dans les tableaux ci dessous. Ces coefficients de corrélations sont obtenus par l'estimation de la copule de Student sur un historique de 200 rentabilités journalières avant et après le 15 août 2008.

	CAC40	S&P	Eurostock	USD/EUR	USD/BRL	CDS1 ^a	CDS2 ^b	CDS3 ^c
CAC40	1	0.680(0.00)	0.871(0.00)	0.187(0.00)	0.079(0.00)	0.106(0.00)	0.283(0.00)	0.187(0.00)
S&P	0.680(0.00)	1	0.777(0.00)	0.087(0.00)	0.081(0.00)	0.181(0.00)	0.202(0.00)	0.198(0.00)
Eurostock	0.871(0.00)	0.777(0.00)	1	0.106(0.00)	0.101(0.00)	0.121(0.00)	0.297(0.00)	0.171(0.00)
USD/EUR	0.187(0.00)	0.167(0.00)	0.106(0.00)	1	0.807(0.00)	-0.283(0.00)	-0.441(0.00)	-0.402(0.00)
USD/BRL	0.079(0.00)	0.087(0.00)	0.101(0.00)	0.807(0.00)	1	0.361(0.00)	0.377(0.00)	0.307(0.00)
CDS1	0.106(0.00)	0.181(0.00)	0.121(0.00)	-0.283(0.00)	0.367(0.00)	1	0.777(0.00)	0.801(0.00)
CDS2	0.283(0.00)	0.202(0.00)	0.297(0.00)	-0.441(0.00)	0.377(0.00)	0.777(0.00)	1	0.803(0.00)
CDS3	0.187(0.00)	0.198(0.00)	0.171(0.00)	-0.402(0.00)	0.307(0.00)	0.801(0.00)	0.803(0.00)	1

Table 5.2: Copule de Student avant la faillite de Lehman Brothers

Les valeurs entre parenthèse correspondent aux p-value. Si elles sont inférieures à 5%, l'hypothèse de nullité de la corrélation est rejetée, sinon, l'hypothèse de corrélation est acceptée.

^aItarxx xover

^bItarxx EUR

^cItarxx high vol

	CAC40	S&P	Eurostock	USD/EUR	USD/BRL	CDS1 ^a	CDS2 ^b	CDS3 ^c
CAC40	1	0.720(0.00)	0.917(0.00)	0.370(0.00)	0.134(0.00)	0.174(0.00)	0.306(0.00)	0.207(0.00)
S&P	0.720(0.00)	1	0.816(0.00)	0.184(0.00)	0.121(0.00)	0.207(0.00)	0.306(0.00)	0.217(0.00)
Eurostock	0.917(0.00)	0.816(0.00)	1	0.131(0.00)	0.114(0.00)	0.189(0.00)	0.317(0.00)	0.241(0.00)
USD/EUR	0.370(0.00)	0.184(0.00)	0.131(0.00)	1	0.901(0.00)	-0.382(0.00)	-0.560(0.00)	-0.507(0.00)
USD/BRL	0.134(0.00)	0.121(0.00)	0.114(0.00)	0.981(0.00)	1	0.401(0.00)	0.431(0.00)	0.511(0.00)
CDS1	0.174(0.00)	0.207(0.00)	0.189(0.00)	-0.382(0.00)	0.3401(0.00)	1	0.871(0.00)	0.881(0.00)
CDS2	0.306(0.00)	0.306(0.00)	0.317(0.00)	-0.560(0.00)	0.431(0.00)	0.871(0.00)	1	0.834(0.00)
CDS3	0.201(0.00)	0.217(0.00)	0.241(0.00)	-0.507(0.00)	0.511(0.00)	0.881(0.00)	0.834(0.00)	1

Table 5.3: Copule de Student après la faillite de Lehman Brothers

Les valeurs entre parenthèse correspondent aux p-value. Si elles sont inférieures à 5%, l'hypothèse de nullité de la corrélation est rejetée, sinon, l'hypothèse de corrélation est acceptée.

^aItraxx xover

^bItraxx EUR

^cItraxx high vol

L'examen des Tableaux 5.3 et 5.2 montre effectivement un changement de la corrélation entre les facteurs de risque d'une période à l'autre. En comparant les deux tableaux, nous remarquons que la corrélation entre les actions se renforce positivement pendant cette période de crise par une augmentation des coefficients de corrélation. Ce constat est également vérifié sur les indices de CDS ou la corrélation augmente avec les indices actions ainsi que taux de change.

L'analyse des corrélations montre que le changement de corrélation entre les actifs financiers en période de crise dépend des caractéristiques propres à chaque crise. En effet la faillite de Leman Brother entraine tous les facteurs de risque à la baisse. Ce qui explique l'évolution des facteurs de risque dans la même direction.

Le « séisme Lehman Brothers » a par ailleurs joué un rôle de catalyseur dans la dégradation de l'activité économique via une perte de confiance généralisée des agents économiques. Les niveaux des indicateurs de confiance, déjà nettement orientés à la baisse, ont connu un effondrement à partir de septembre 2008 et n'ont atteint leur point bas qu'à la fin du premier trimestre de 2009, après six mois de chute ininterrompue. Pour les entreprises comme pour les ménages, qui avaient été confrontés depuis plus d'un an à un choc sur les prix des matières premières, à un retournement des marchés immobiliers dans de nombreuses économies et à une dégradation de l'activité et des conditions financières, la faillite de la banque Lehman Brothers a été le signal de détresse du système financier.

Ces résultats peuvent guider l'élaboration de scénarios hypothétiques basés sur la corrélation afin de leur assurer une certaine crédibilité aux yeux de la direction d'une banque.

5.3.3 Estimation des pertes extrêmes sur le portefeuille

Les pertes potentielles extrêmes sont estimées par le stress de la volatilité conditionnelle et du coefficient de corrélation sous le scénario faillite de Lehman Brothers. Ces paramètres de modèles sont ensuite intégrés dans les mesures de la Value at risk et l'Expected Shortfall.

La Value at risk et l'Expected Shortfall sont estimées sur les 20 premiers jours ouvrés après la faillite de la banque d'investissement Lehman Brothers. Ces indicateurs de risques sont estimés sur le scénario cité plus haut ainsi qu'un scénario de base. Le scénario de base donne les valeurs de la VaR et de l'ES sans le stress des paramètres du modèle (volatilité ou corrélation) et calculées sur le même historique que celle du scénario de Lehman.

5.3.4 Pertes extrêmes déterminées par le stress de la volatilité

Les pertes extrêmes sont estimées sur les actifs du portefeuille à partir du stress de la volatilité conditionnelle. Ce stress de la volatilité conditionnelle est basé sur le scénario historique précédemment défini. Rappelons que le stress de la volatilité conditionnelle consiste à estimer une volatilité conditionnelle future (σ_{t+1}) en exerçant un choc simultané sur le résidu (ϵ_t) et la volatilité historique (σ_t) déterminés pendant la période de crise. La volatilité conditionnelle stressée est ensuite intégrée dans les mesures de risque (VaR et ES) pour évaluer les pertes extrêmes que peuvent enregistrer les actifs du portefeuille. Les pertes extrêmes sont calculées suivant le scénario de la faillite de Lehman Brothers. Les pertes sous le scénario de base c'est à dire sans stress des facteurs de risque sont également calculées. Le scénario de base est un indicateur de sévérité de l'hypothèse du scénario formulé. En effet, il indique en fonction de la valeur des pertes extrêmes estimées si l'impact du scénario futur envisagé est plus ou moins extrême.

Les résultats de l'estimation de la VaR et de l'ES sont présentés dans le tableau ci dessous. Les pertes ont été estimées sur l'horizon d'un jour et aux niveau de confiance de 95%, 99%, et 99.9% pour tous les actifs du portefeuille.

En terme hiérarchiques entre les trois techniques de mesure de risque dans le scénario historique, les valeurs de la VaR_{GPD} sur les actifs du portefeuille et sur le portefeuille sont supérieures à celles de la VaR_{FHS} et la VaR_{GARCH} . La mesure de la VaR_{GARCH} est à son tour supérieur à celle de la VaR_{FHS} . Cette analyse est aussi valable pour la mesure de l'Expected Shortfall.

Nous retenons que le stress test par scénario historique peut s'effectuer à travers la volatilité conditionnelle en exerçant un choc simultané sur la volatilité et sur le résidu du jour précédant le jour de l'estimation des pertes extrêmes. Il faut aussi noter qu'il est possible de réaliser un choc uniquement sur le résidu. Cependant, ce type de choc aura moins d'impact sur la volatilité future parce que le coefficient du résidu dans l'estimation de la volatilité conditionnelle est très faible par rapport à celui de la volatilité passée.

	Scénario de Base			Scénario Historique		
	$VaR_{95\%}$	$VaR_{99\%}$	$VaR_{99.9\%}$	$VaR_{95\%}$	$VaR_{99\%}$	$VaR_{99.9\%}$
Portefeuille GPD cond	-0.244	-0.347	-0.508	-0.291	-0.414	-0.598
Portefeuille FHS	-0.190	-0.213	-0.214	-0.226	-0.272	-0.272
Portefeuille GARCH	-0.196	-0.278	-0.369	-0.232	-0.328	-0.435

Table 5.4: Valeurs des pertes potentielle-scénario par la volatilité historique VAR. Le scénario de base correspond à l'estimation des pertes sans stress des facteurs de risque.

	Scénario de Base			Scénario Historique		
	$ES_{95\%}$	$ES_{99\%}$	$ES_{99.9\%}$	$ES_{95\%}$	$ES_{99\%}$	$ES_{99.9\%}$
Portefeuille GPD cond	-0.309	-0.417	-0.586	-0.368	-0.494	-0.684
Portefeuille FHS	-0.209	-0.213	-0.213	-0.266	-0.272	-0.272
Portefeuille GARCH	-0.246	-0.318	-0.402	-0.291	-0.376	-0.475

Table 5.5: Valeurs des pertes potentielle-scénario par la volatilité historique ES

5.4 Pertes extrêmes déterminées par le stress de la matrice de corrélation

Les pertes potentielles extrêmes sont déterminées sur le portefeuille suivant le stress des coefficients de corrélation sous le scénario historiques. Il faut noter que les coefficients de corrélation pour le modèle de la loi normale conditionnelle sont déterminés par l'estimation de la copule gaussienne. Quant aux coefficients de corrélation intégrés dans le modèle GPD, ils ont été estimés par la copule de Student avec un degré de liberté de 4. Ainsi nous les introduisons dans les modèles GPD et GARCH pour déterminer les pertes extrêmes potentielles

Dans le cadre du stress de la corrélation, il n'est pas possible de stresser la corrélation pour la méthode FHS parce qu'il n'est pas possible d'estimer la corrélation comme on peut le faire dans les modèles paramétriques ou semi-paramétriques. La structure de corrélation dans la méthode FHS est empiriquement intégrée dans la méthodologie. Par conséquent, il n'y aura pas d'éléments de comparaison concernant la méthode de simulation historique FHS.

L'examen des résultats après le stress de la corrélation dans les différents modèle de risque montre clairement la supériorité du modèle GPD par rapport au modèle GARCH de la loi normale. En effet, les pertes extrêmes potentielles estimées par le modèle GPD sont supérieures à celles déterminées par le modèle GARCH. Cependant, nous remarquons pour le modèle GARCH de la loi normale que les pertes potentielles extrêmes calculées sous le scénario de base. Ces résultats obtenus sur le modèle de la loi normale sont dus aux caractéristiques de ce modèle à sous-estimer le risque en période de fortes fluctuations ou de risques extrêmes.

	Scénario de Base			Scénario Historique		
	$VaR_{95\%}$	$VaR_{99\%}$	$VaR_{99.9\%}$	$VaR_{95\%}$	$VaR_{99\%}$	$VaR_{99.9\%}$
Portefeuille GPD cond	-0.066	-0.077	-0.089	-0.077	-0.099	-0.134
Portefeuille FHS	-0.032	-0.044	-0.044	-	-	-
Portefeuille GARCH	-0.028	-0.039	-0.052	-0.022	-0.031	-0.041

Table 5.6: Valeurs des pertes potentielle-scénario par la corrélation historique VaR

	Scénario de Base			Scénario Historique		
	$ES_{95\%}$	$ES_{99\%}$	$ES_{99.9\%}$	$ES_{95\%}$	$ES_{99\%}$	$ES_{99.9\%}$
Portefeuille GPD cond	-0.073	-0.082	-0.094	-0.091	-0.114	-0.152
Portefeuille FHS	-0.042	-0.044	-0.044	-	-	-
Portefeuille GARCH	-0.035	-0.045	-0.057	-0.027	-0.035	-0.045

Table 5.7: Valeurs des pertes potentielle-scénario par la corrélation historique ES

Les scénarios historiques que nous venons de spécifier ont deux grands avantages. Le premier avantage concerne la plausibilité des scénarios historiques. En effet, les événements sur lesquels sont basés les scénarios historiques se sont déjà produits dans le passé et cela leur donne une certaine plausibilité. Il est très difficile d'écarter les scénarios historiques pour la seule raison qu'ils ne se reproduiraient pas. L'expérience nous montre par exemple que le crash boursier de 1987 où l'indice Dow Jones a perdu 22% le 19 octobre 1989 a été plus sévère que celui de 1929 où le même indice a perdu 13% de sa valeur en un jour (le 28 octobre 1929). Le deuxième avantage est que les scénarios historiques sont rapidement compris par la Direction d'un établissement financier. Une indication selon laquelle l'entreprise perdait X millions d'euros si demain le krach boursier d'octobre 1987 se reproduisait est très facile à comprendre et permet d'avoir une grande réactivité dans la gestion des risques extrêmes.

5.5 Conclusion

L'apport de ce chapitre a été de proposer une méthodologie d'intégration des scénarios historiques dans les modèles de mesure de risque de marché. Cela a consisté à modifier les paramètres de la volatilité conditionnelle et la corrélation en fonction des valeurs de rentabilité, de volatilité et de corrélation déterminées sous le scénario de faillite de Lehman Brothers. Ensuite ces paramètres ont été intégrés dans la mesure de la Value et Risk et de l'Expected Shortfall.

Premièrement, nous sommes partis du scénario faillite de Lehman Brothers pour effectuer un choc sur la volatilité conditionnelle. Nous remarquons que les pertes extrêmes estimées sur les facteurs de risques sont plus élevées que celles déterminées sous le scénario de base c'est à dire sans stress des facteurs de risque. Dans le cadre de la gestion extrêmes, les mesures peuvent être prises pour réduire l'exposition sur ces différents actifs du portefeuille.

Deuxièmement, nous avons effectué un choc sur la corrélation. Les pertes extrêmes potentielles estimées sous le scénario historique élevé s'explique par le fait qu'il entraîne tout les actifs dans la même direction. Pour le modèle GPD les pertes extrêmes estimées sont supérieures à celles déterminées sous le scénario de base. Cette sévérité devrait amener un gestionnaire de risque à mettre en place un plan de gestion de ces risques extrêmes pour pouvoir être réactif en cas de leur réalisation effective.

La méthodologie que nous proposons dans ce chapitre permettra aux établissements financiers

de mieux élaborer leurs scénarii historiques et intégrer ces scénario dans les modèles de risque pour estimer les pertes extrêmes. Cela réduit la subjectivité des scénarios historiques construits hors des modèles de risque. En effet il est plus judicieux d'intégrer les scénarios historiques dans un modèle fiable que dans un modèle qui s'est révélé faillible en période de forte volatilité des marchés.

L'estimation des pertes extrêmes par la construction de scénario historiques n'évalue les vulnérabilités du portefeuille que par rapport à un évènement extrême passé. Le résultat des scénario historiques reste ainsi dépendant d'évènements extrêmes enregistrés dans le passé. Pour autant, rien ne garantit qu'il y ait pas d'évènements plus extrêmes que ceux qui se sont déjà produits. La construction de scénarios hypothétiques permet d'appréhender ce type d'évènements extrêmes par la formulation d'hypothèses sur l'évolution des facteurs de risque ou sur le changement de l'environnement économique ou politique dans un pays ou dans une région du monde.

*C'est quand la mer se retire qu'on
voit ceux qui se baignent nus*

Warren Buffett

6

Méthodologie Stress Tests Hypothétique

Les scénarii construits sur la base de variations historiques extrêmes ou de crises passées ne sont pas nécessairement les pires scénarios ou des scénarios catastrophes. Il peut y avoir des variations extrêmes du marché qui n'ont jamais été enregistrées dans le passé mais qui constitueraient les pires scénarii. Ce type de scénarios extrêmes n'est pas à écarter, surtout si on se réfère à l'histoire des crises financières et économiques. Par exemple, après la crise de 1929 où l'indice Dow Jones a perdu 13% sur la seule journée du lundi 28 octobre 1929, on ne pouvait imaginer une perte plus sévère dans le futur jusqu'au jour où le même indice Dow Jones a enregistré une perte de 22.6% sur la seule séance du 19 octobre 1987. Ainsi, pour identifier les scénarios catastrophes, on ne peut pas considérer les seuls événements extrêmes historiques, mais aussi tous les événements extrêmes potentiels futurs.

La construction de scénarios basée sur les données historiques ne tient pas nécessairement compte des caractéristiques du portefeuille. Les scénarios historiques peuvent, par exemple, être construits sur la base d'une crise monétaire sans que le portefeuille ne contienne des devises. Le portefeuille joue un rôle plus important dans la construction des scénarii hypothétiques. Le lien entre la composition du portefeuille et les scénarios catastrophes envisagés permet d'assurer la crédibilité de ces scénarii. En effet, plus le lien entre l'événement de crise envisagé et le portefeuille est claire et cohérent dans la construction de scénario, plus les résultats du stress test seront acceptés par les décideurs.

Le comité de Bâle sur la supervision bancaire ne donne aucune indication sur la façon d'identifier les scénarios catastrophes. La solution pour un établissement financier va consister à faire appel à l'expérience et à l'expertise de ses équipes dans tous les domaines possibles. Ces experts peuvent utiliser leurs connaissances du marché, du portefeuille, des stratégies de trading et d'arbitrage pour identifier les situations qui pourraient entraîner de fortes pertes. Les scénarios hypothétiques sont donc construits sur la base des jugements des experts et de leurs appréhensions du futur. La construction de scénarios hypothétiques et l'intégration de ces scénarios dans les modèles de risque de marché n'ont pas été suffisamment explorées dans la littérature financière. Les établissements financiers ne dévoilent pas non plus leurs méthodologies pour la construction de leurs scénarios hypothétiques.

Ce chapitre traite principalement de l'intégration des scénarii hypothétiques dans les modèles de risque de marché et particulièrement celui de la distribution de Pareto généralisée.

6.1 Hypothèses des scénarios

La formulation des scénarios catastrophe est généralement basée sur l'hypothèse d'évènements économiques ou politiques. Ces événements sont présumés causer de fortes pertes dans le portefeuille des établissements financiers. En se fondant sur une expertise économique et politique, la démarche est de déterminer étape par étape le déclenchement des événements. Ensuite, la chaîne des événements est traduite d'une manière plausible dans la variation des facteurs de risque. Cette variation des facteurs de risque constitue le scénario catastrophe à appliquer au portefeuille d'actifs.

La détermination des événements extrêmes ainsi que leur transposition dans la variation des facteurs de risque doivent être clairement définies. La qualité et la plausibilité des scénarios dépendront entièrement de l'expertise économique et du bon raisonnement. C'est pourquoi, lors de la construction de scénarios hypothétiques, l'équipe d'experts doit être fortement impliquée. Ces experts doivent avoir une expérience variée dans plusieurs secteurs d'activités économique et dans la géopolitique des grandes régions du monde. La construction de scénarios hypothétiques doit aussi impliquer la direction de l'établissement financier parce que c'est elle qui prend les décisions les plus importantes. La crédibilité des résultats des scénarios dépend principalement de l'implication de tous les acteurs concernés lors de la construction des scénarios et de leur approbation que tels scénarios puisse se produire.

Les scénarios hypothétiques sont quelquefois basés sur des hypothèses d'évènements comme par exemple:

- Un tremblement de terre au Japon
- Un coup d'État en Russie
- L'assassinat du président Américain
- La faillite d'une grande banque mondiale
- L'abandon par un pays sous pression de la fixité du taux de change
- La sortie de la Grèce de la zone Euro

Ainsi, en sélectionnant l'évènement déclencheur, la spécificité de l'établissement et celle de son portefeuille doivent être prises en compte. En effet, les scénarios catastrophes envisagés devraient impacter significativement les facteurs de risque du portefeuille.

Un autre groupe de scénarios hypothétiques que nous n'allons pas développer dans ce mémoire mais qui reste important au niveau d'une banque est un scénario basé sur le modèle économique et les stratégies d'investissement d'un établissement financier. La vulnérabilité de l'établissement financier peut être évaluée sous l'hypothèse de déclin futur de son marché. Cette hypothèse de déclin du marché peut être utilisée comme un événement déclencheur des scénarios hypothétiques. Dans ce cas précis, il est essentiel de donner une indication explicite de ces hypothèses de marché pour assurer la crédibilité des résultats.

6.2 Scénario hypothétique : Baisse des marchés européens, sortie de la Grèce de la zone Euro

Le choix de ce scénario s'explique en partie par le contexte économique actuelle où nous observons une grande instabilité des marchés Européen depuis 2012.

L'hypothèse de base de ce nouveau scénario "Euroland Crisis" est une sortie de la Grèce de la zone euro. Cet événement entraînerait.

- La mise en place par la Banque Centrale Européenne d'un Assouplissement Quantitatif (ou Quantitative Easing), avec des achats massifs par la BCE de dettes souveraines euro
- Des interventions simultanées des principales banques centrales (FED,BoE,BCE)

Les chocs retenus reposent en grande partie sur ces deux hypothèses très fortes, qui vont impacter en premier lieu les rendements et donc les spreads des bonds souverains de la zone euro, ainsi que les taux courts:

- Spreads divisé par deux pour les émissions des pays de la zone Euro
- Taux courts (3 mois) tendent vers zéro

A cela va s'ajouter une résurgence des craintes sur les autres pays fragiles de la zone, avec au premier rang le Portugal, l'Italie, L'Espagne. L'impact pour les banques serait pire que celui dû à la faillite de Lehman Brothers, avec un assèchement de la liquidité encore plus violent, et une forte baisse de valeur pour les actifs risqués.

Les principales hypothèses de chocs qui en découlent sont donc:

- Sur les actions, de forte baisses sur les principaux indice européens, américains et émergents
- Sur les taux, on suppose des chocs élevés à la baisse, avec des taux US et UK qui évoluent de la même façon, alors que les taux euro baissent fortement sur le court terme
- Les souverains de la zone euro sont évidemment fortement impactés, avec des spreads qui doublent sur les GIIPS¹ hors Grèce et la France. L'Allemagne est impactée dans une moindre mesure grâce à la bonne résistance de son économie. Les États-Unis, le Japon et la Suisse bénéficiant d'un "flight to quality" ² très favorable, voient leurs spreads baisser. Le Royaume-Uni pâtit de sa trop grande proximité avec la zone Euro et reste donc à l'écart de ce "flight to quality" (choc de spread nul).
- Le crédit, comme les autres actifs risqués, souffre fortement, avec des spreads qui doublent en Europe et qui augmentent de 50% aux US

6.3 Stress de la volatilité

Cette section présente une méthodologie de modification de la volatilité pour tenir compte de la perception du risque extrême futur. Ce risque futur peut être anticipé en spécifiant des chocs à partir de notre perception de l'incertitude qui prévaut sur le marché. Ces chocs sont ensuite introduits dans la volatilité et leurs conséquences sont évaluée en terme de pertes extrêmes sur le portefeuille. Compte tenue du nombre limité de facteurs de risques pour ce travail de recherche, nous fournissons des choques les plus adaptés possible à la réalité économique.

¹Grèce, Italie, Irlande, Portugal, Espagne

²Phénomène d'important mouvements capitaux qui, lors d'un Krach boursier, se déplacent de valeurs mobilières vers des placements plus sûrs, généralement plus liquide

6.3.1 Construction des chocs

Les chocs sont définis comme étant une variation extrême, c'est-à-dire une discontinuité dans les prix suite à une information importante entrant sur le marché. La taille du choc est basée sur les événements hypothétiques comme spécifiés dans la section précédente. Le tableau ci dessous présente les valeurs hypothétiques des chocs de rentabilité et de volatilité des actifs du portefeuille.

Scénario Historique		
	Résidu	Volatilité
CAC40	-0.20	0.05
S&P	-0.15	0.06
Eurostock	-0.18	0.05
USD/EUR	0.08	0.03
USD/BRL	0.01	0.02
Itraxx crossover	0.09	0.05
Itraxx EUR	0.11	0.07
Itraxx Highvol	0.10	0.06

Table 6.1: **Rentabilités et volatilités hypothétiques.**

6.3.2 Intégration des chocs dans la volatilité

Les conséquences d'un événement extrême peuvent être exprimées en terme de forte variation de la volatilité. Cette volatilité future σ_{t+1} à prévoir est déterminée par l'estimation du modèle GJR(1,1). Elle dépend de la volatilité σ_t et du résidu ϵ_t à l'instant t . La variance permettant d'obtenir cette volatilité future est définie par:

$$\sigma_{t+1}^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_t^2 + \beta_2 \epsilon_t^2 + \rho \mathbb{1}_{\epsilon_{t-1} < 0} \epsilon_t^2 \quad (6.1)$$

où $\beta_0 \geq 0, \beta_1 > 0$ et $\beta_2 > 0$.

Le premier jour du stress test c'est-à-dire à l'instant t , la volatilité σ_t est égale à la volatilité perceptible à la date d'estimation pour qu'elle puisse refléter les conditions du marché. Le résidu ϵ_t représente les informations disponibles à l'instant t sur le futur. Il correspond au choc de la rentabilité défini précédemment. En réponse au choc à la date t , la volatilité future σ_{t+1} augmentera en fonction de l'ampleur du choc.

6.3.3 Pertes potentielles extrêmes estimées sur les actifs du portefeuille

Les pertes extrêmes sont estimées sur le portefeuille d'actifs à partir du stress de la volatilité conditionnelle. Ce stress de la volatilité conditionnelle est basé sur les scénarios hypothétiques. Le stress de la volatilité conditionnelle consiste à estimer une volatilité (σ_t) à la date t . Les hypothèses sur la rentabilité et la volatilité à l'instant t sont fixées en fonction de la perception du risque futur. La volatilité conditionnelle stressée est ensuite intégrée dans les mesures de risque (VaR et ES) pour évaluer les pertes extrêmes que peuvent enregistrer les actifs du portefeuille. Les pertes extrêmes sont calculées suivant un scénario de baisse des marchés européens difficilement gérable. Les pertes extrêmes potentielles sous le scénario de base c'est à dire sans stress des facteurs de risque, sont également calculées. Le scénario de base est un indicateur de sévérité des hypothèses de scénario formulées. En effet, il indique en fonction de la valeur des pertes estimées si l'impact du scénario futur envisagé est plus ou moins extrême.

Les résultats de l'estimation de la Var et l'ES est présentés dans le tableau ci dessous. Les pertes ont été estimés sur l'horizon d'un jour et aux niveau de confiance de 95%, 99%et 99,9% pour tous les actifs du portefeuille. Les pertes extrêmes calculées sur le portefeuille global correspond au scénario catastrophe.

Les pertes extrêmes estimées sous le scénario hypothétique du modèle GPD est supérieur aux pertes estimées sous le scénario de base. Cela montre que si ce scénario envisagé se réalise , les actifs du portefeuille peuvent enregistrer des pertes plus élevés que celle calculées sans le stress des facteurs de risque.

En termes hiérarchiques entre les trois techniques de mesure de risque les valeurs de VAR_{GPD} sont supérieurs à celles de la VAR_{FHS} et VAR_{GARCH} . Cette analyse est aussi valable pour la mesure de l'Expected Shortfall.

Nous retenons que le stress test par scénario hypothétique peut s'effectuer à travers la volatilité conditionnelle en exerçant un choc simultané sur la volatilité et sur la rentabilité le jour précédant le jour de l'estimation des pertes extrêmes. Il faut aussi noter qu'il est possible de réaliser un choc uniquement sur la rentabilité. Cependant comme nous l'avons vu dans le chapitre précédant il sera d'une moins grande ampleur que celui de la volatilité.

	Scénario de Base			Scénario Historique		
	$Var_{95\%}$	$Var_{99\%}$	$Var_{99.9\%}$	$Var_{95\%}$	$Var_{99\%}$	$Var_{99.9\%}$
Portefeuille GPD cond	-0.164	-0.247	-0.402	-0.389	-0.586	-0.964
Portefeuille FHS	-0.236	-0.249	-0.249	-0.606	-0.646	-0.646
Portefeuille GARCH	-0.143	-0.203	-0.269	-0.299	-0.423	-0.561

Table 6.2: Valeurs des pertes potentielle-scénario par la volatilité hypothétique VAR.

	Scénario de Base			Scénario Historique		
	$ES_{95\%}$	$ES_{99\%}$	$ES_{99.9\%}$	$ES_{95\%}$	$ES_{99\%}$	$ES_{99.9\%}$
Portefeuille GPD cond	-0.218	-0.314	-0.495	-0.642	-0.646	-0.646
Portefeuille FHS	-0.247	-0.249	-0.249	-0.375	-0.484	-0.612
Portefeuille GARCH	-0.180	-0.232	-0.294	-0.532	-0.762	-1.177

Table 6.3: Valeurs des pertes potentielle-scénario par la volatilité hypothétiques ES

6.4 Stress de la matrice de corrélation

La forte intuition de l'augmentation de la corrélation en période de crise n'est pas unanimement acceptée par tous les auteurs. L'intuition reste cependant très forte et il est convenable de construire des scénarii de stress test avec une augmentation de la corrélation. Mc Vey (2010) observe sur des périodes de crise, une augmentation de la corrélation entre les matières premières et un portefeuille composé de 60% d'actions et 40% d'obligations.

La modification de la matrice de corrélation en fonction de la perception de risques futurs doit respecter certaines règles pour maintenir la cohérence et la validité de la corrélation entre les facteurs de risque. Il existe aujourd'hui des méthodologies pour modifier les matrices de corrélations sans qu'elles perdent leurs **propriétés mathématiques**. Pour exemple Finger (1997) propose de modifier les vecteurs de rentabilités des facteurs de risque. Dans cette procédure, la modification des corrélations est induite par la modification des rentabilités. Il est également possible de modifier directement la matrice de corrélation sans passer par cette approche. On peut citer la méthode de la décomposition spectrale de Rebonato (1999) (Voir Annexe). Cette méthode permet d'avoir une matrice de corrélation valide après modification de la matrice de corrélation originale. Dans le cadre de ce mémoire nous adoptons cette méthode pour la modification de la matrice de corrélation.

6.4.1 Matrice de corrélation historique

La matrice de corrélation historique est déterminée pour identifier les pertes potentielles sous le scénario de base et évaluer la sévérité des scénarii hypothétiques. Elle est calculée sur les données historiques par l'estimation de la copule de Student pour le modèle GPD et par la copule normale pour la technique de mesure de la loi normale. Les résultats de ces estimations pour la copule de Student sont présenté ci dessous. Nous observons des corrélations plus ou moins similaires à celles du chapitre précédent c'est à dire une corrélation importante entre actifs de même classe, ainsi qu'une corrélation non négligeable avec les autres classes d'actifs.

	CAC40	S&P	Eurostock	USD/EUR	USD/BRL	CDS1^a	CDS2^b	CDS3^c
CAC40	1	0.560(0.00)	0.734(0.00)	0.108(0.00)	0.081(0.00)	0.101(0.00)	0.207(0.00)	0.171(0.00)
S&P	0.560(0.00)	1	0.631(0.00)	0.121(0.00)	0.133(0.00)	0.410(0.00)	0.310(0.00)	0.360(0.00)
Eurostock	0.734(0.00)	0.631(0.00)	1	0.170(0.00)	0.097(0.00)	0.117(0.00)	0.230(0.00)	0.184(0.00)
USD/EUR	0.108(0.00)	0.121(0.00)	0.170(0.00)	1	0.780(0.00)	0.401(0.00)	0.510(0.00)	0.630(0.00)
USD/BRL	0.081(0.00)	0.133(0.00)	0.097(0.00)	0.780(0.00)	1	0.401(0.00)	0.370(0.00)	0.333(0.00)
CDS1	0.101(0.00)	0.410(0.00)	0.117(0.00)	0.431(0.00)	0.401(0.00)	1	0.710(0.00)	0.740(0.00)
CDS2	0.207(0.00)	0.310(0.00)	0.230(0.00)	0.510(0.00)	0.370(0.00)	0.710(0.00)	1	0.782(0.00)
CDS3	0.171(0.00)	0.360(0.00)	0.184(0.00)	0.630(0.00)	0.333(0.00)	0.740(0.00)	0.782(0.00)	1

Table 6.4: Copule de Student - scénario de base

Les valeurs entre parenthèse correspondent aux p-value. Si elles sont inférieures à 5%, l'hypothèse de nullité de la corrélation est rejetée, sinon, l'hypothèse de corrélation est acceptée. Les coefficients de corrélation sont estimés sur un historique de rentabilités journalières de janvier 2008 à décembre 2014.

^aItraxx xover

^bItraxx EUR

^cItraxx high vol

6.4.2 Matrice de corrélation hypothétique

La matrice de corrélation déterminées sur les données historiques sont à modifier en fonction du scénario envisagé. Le scénario correspond à une baisse des marchés européens difficilement gérable suite à la sortie de la Grèce de la zone euro. Le marché des Etats-Unis est également impacté par contagion. Cette forte corrélation entre les actifs dans ce contexte de crise s'explique par son caractère systémique. Ainsi, nous supposons une forte corrélation entre les indices actions et les indices des CDS et une corrélation positive moins forte avec les indices de taux de change.

	CAC40	S&P	Eurostock	USD/EUR	USD/BRL	CDS1 ^a	CDS2 ^b	CDS3 ^c
CAC40	1	0.850	0.850	0.300	0.700	0.700	0.700	0.700
S&P	0.850	1	0.850	0.300	0.300	0.700	0.700	0.700
Eurostock	0.850	0.850	1	0.300	0.300	0.700	0.700	0.700
USD/EUR	0.300	0.300	0.300	1	0.850	0.500	0.500	0.500
USD/BRL	0.300	0.300	0.300	0.850	1	0.500	0.500	0.500
CDS1	0.700	0.700	0.700	0.500	0.500	1	0.850	0.850
CDS2	0.700	0.700	0.700	0.500	0.500	0.850	1	0.850
CDS3	0.700	0.700	0.700	0.500	0.500	0.850	0.850	1

Table 6.5: Copule de Student modifiés

^aItraxx xover

^bItraxx EUR

^cItraxx high vol

Le Tableau 6.5 présente des résultats des modifications qui ont été apportées à la matrice de corrélation 6.4 en fonction de l'hypothèse d'une baisse des marchés européens. Le Tableau 6.5 est utilisé pour l'estimation des pertes extrêmes par les deux modèles paramétriques de mesure de risque (GPD et GARCH). Comme on peut le remarquer dans ce tableau, nous envisageons une forte corrélation positive entre les actifs.

Après la modification de la matrice de corrélations du 6.4 en fonction du scénario envisagé, il est indispensable de vérifier la validité de cette matrice de corrélation. La procédure de validation (Annexe) de la matrice de corrélation consiste à déterminer les valeurs propres. Si toutes les valeurs propres de la matrice sont supérieures ou égales à zéro, la matrice de corrélation est valide. Dans le cas contraire, il est obligatoire de procéder à la transformation (Annexe). Cette validation est indispensable dans la mesure de corrélation doit être au moins **semi-définie positive** pour ne pas qu'il y ait des variances négatives.

Pour vérifier également la positivité d'une matrice, il est possible de procéder à la décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation. Selon Alexander and Ligh(1997), pour être sûr que la matrice soit semi-positif, il faut que la matrice respecte la propriété mathématique ci-dessous:

$$C = A \times A^T \quad (6.2)$$

où C est la matrice de corrélation modifiée, A la matrice de Cholesky et A^T , la matrice transposée de Cholesky.

Les résultats de la décomposition de Cholesky est présenté ci-dessous.

	CAC40	S&P	Eurostock	USD/EUR	USD/BRL	CDS1^a	CDS2^b	CDS3^c
CAC40	1	0.850	0.850	0.300	0.700	0.700	0.700	0.700
S&P	0.00	0.526	0.242	0.085	0.085	0.199	0.199	0.199
Eurostock	0.00	0.00	0.467	0.051	0.051	0.121	0.121	0.121
USD/EUR	0.00	0.00	0.00	0.948	0.790	0.281	0.281	0.281
USD/BRL	0.00	0.00	0.00	0.00	0.524	0.084	0.084	0.084
CDS1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.607	0.360	0.360
CDS2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.488	0.182
CDS3	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.453

Table 6.6: Matrice de Cholesky du scénario hypothétique

^aItraxx xover

^bItraxx EUR

^cItraxx high vol

Pour le calcul des pertes extrêmes sur le portefeuille d'actifs, nous procédons de la même manière que la procédure présentée dans le chapitre 4. La seule différence est que la matrice de corrélation a été modifiée en fonction du scénario de stress envisagé. Il faut noter que la prise en compte de la corrélation entre les actifs du portefeuille dans le modèle FHS se fait empiriquement, donc il n'y a pas de matrice de corrélation au vrai sens du terme. Cependant, pour pouvoir évaluer les pertes extrêmes sur le portefeuille à partir du modèle FHS, nous développons une procédure qui consiste à:

- Spécifier des rentabilités de stress pour chaque facteur de risque, par exemple les rentabilités spécifiées dans les chocs hypothétiques;
- Considérer ces rentabilités de stress comme des rentabilités récentes (ou innovations récentes) dans le modèle FHS de Barone-Adesi et al. (2000);
- Déterminer la distribution de pertes et profits pour calculer les pertes extrêmes.

6.5 Pertes potentielles extrêmes estimées sur le portefeuille

Les pertes extrêmes, estimées par le modèle GPD sous le scénario de base et sous le scénario de baisse des marchés européens sont présentés dans le tableau ci-dessous. Cette estimation correspond aux valeurs de la VaR et l'ES aux niveaux de confiance de 95%, 99% et 99,9% et sur un horizon d'un jour.

L'examen du tableau ci-dessus montre des pertes estimées croissantes au rapport au niveau de confiance choisi pour les techniques paramétriques de mesure (GPD et GARCH). Par contre, elles sont identiques à tous les niveaux de confiance pour la technique de mesure FHS. Nous constatons que les pertes estimées à une date donnée par la méthode FHS ne changent généralement pas, quel que soit le niveau de confiance choisi ou le type de mesure de risque retenu (VaR ou ES).

En termes hiérarchiques entre les trois techniques de mesure de risque sous le scénario de base et le scénario hypothétique, les valeurs de la VaR_{GPD} sont supérieures à celles de la VaR_{FHS} . La mesure de la VaR_{FHS} est à son tour supérieure à celle de la loi normale sauf au niveau de confiance de 99,9 dans le scénario de base. Cette analyse est aussi valable pour l'Expected Shortfall.

Nous retenons que le stress test par scénario hypothétique peut s'effectuer à travers la modification des coefficients de corrélation pour les techniques paramétriques de mesure de risque et l'exercice d'un choc simultané sur les rentabilités des actifs composant le portefeuille pour les techniques non paramétriques. L'obtention des pertes plus extrêmes dépend du type de corrélation envisagé. Comme nous venons de le voir, les techniques paramétriques génèrent moins de pertes extrêmes si le scénario est basé sur une corrélation négative entre les actifs du portefeuille. La corrélation négative entre actifs d'un portefeuille intègre le bénéfice de la diversification.

	Scénario de Base			Scénario Historique		
	$VaR_{95\%}$	$VaR_{99\%}$	$VaR_{99.9\%}$	$VaR_{95\%}$	$VaR_{99\%}$	$VaR_{99.9\%}$
Portefeuille GPD cond	-0.48	-0.058	-0.072	-0.075	-0.104	-0.159
Portefeuille FHS	-0.034	-0.034	-0.034	-0.059	-0.059	-0.059
Portefeuille GARCH	-0.020	-0.028	-0.037	-0.026	-0.037	-0.049

Table 6.7: Valeurs des pertes potentielle-scénario par la corrélation hypothétique VAR.

	Scénario de Base			Scénario Historique		
	$ES_{95\%}$	$ES_{99\%}$	$ES_{99.9\%}$	$ES_{95\%}$	$ES_{99\%}$	$ES_{99.9\%}$
Portefeuille GPD cond	-0.055	-0.064	-0.078	-0.094	-0.127	-0.192
Portefeuille FHS	-0.034	-0.034	-0.034	-0.059	-0.059	-0.059
Portefeuille GARCH	-0.025	-0.032	-0.040	-0.033	-0.043	-0.054

Table 6.8: Valeurs des pertes potentielle-scénario par la corrélation hypothétiques ES

6.6 Conclusion

La méthodologie proposé dans ce chapitre a permis de construire un scénario hypothétique afin de déterminer les pertes extrêmes que peut enregistrer un portefeuille de négociation. Nous sommes parti d'une hypothèse de Baisse des marchés européens qui entraine une sortie de la Grèce de la zone Euro. Les pertes extrêmes estimées sous ce scénario hypothétique comparativement au scénario de base a montré que l'impact sur le portefeuille est plus élevé dans le cas d'une Baisse des marchés européens et ceux même si ce portefeuille n'est pas composés exclusivement d'actifs européens. Cette méthodologie peut être utilisée par les établissement financiers. Elle leur permet également de savoir dans quel contexte, ce risque extrême se réalise avec la contribution de chaque facteur de risque.

La forme c'est le fond qui remonte à la surface

Victor Hugo

7

Conclusion

Compte tenu de la fiabilité de la méthode POT à mesurer correctement le risque sur les actifs du portefeuille d'étude, nous l'avons utilisée pour estimer les pertes potentielles globales. En effet, les actifs dans un portefeuille ne sont pas indépendants les uns des autres et la corrélation a tendance à se renforcer pendant les périodes de crises financières et économiques. Comme il a été montré par plusieurs études que la corrélation entre les facteurs de risque n'est pas toujours linéaire, nous avons fait appel à la copule de Student pour mieux mesurer la dépendance entre les facteurs de risque composant le portefeuille d'étude. Ces résultats montrent que les établissements financiers peuvent utiliser la méthode POT de la théorie des valeurs extrêmes pour évaluer correctement leurs risques et le capital réglementaire nécessaire pour couvrir ces risques.

Nous avons suivi les recommandations du Comité de Bâle sur la mise en place des programmes de stress tests. L'objectif étant d'amener les établissements financiers à évaluer les risques extrêmes et les préparer à les gérer. Dans ce cadre nous avons proposé d'intégrer ces stress tests dans les modèles de risque afin de réduire leur subjectivité. Ainsi, les pertes extrêmes potentielles ont été estimées par l'analyse de scénarios.

Premièrement, les scénarios historiques ont été construits et intégrés dans la méthode POT et les modèles traditionnels de mesure de risque pour évaluer les pertes extrêmes potentielles. Les résultats montrent que les pertes extrêmes potentielles estimées dépendent de la fiabilité des modèles. Ce qui conduit à dire que le stress test basé sur des modèles non fiables entraîne une sous-estimation du risque extrême et la mise en place de mesures correctives mal adaptées.

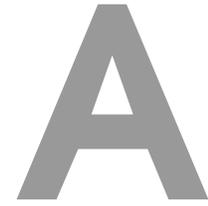
Deuxièmement, une construction de scénario hypothétique a été effectuée sur le portefeuille d'actifs. Cela a permis de montrer comment, à partir des hypothèses sur l'évolution d'une situation économique ou régionale, il est possible d'intégrer ces prévisions dans les modèles de risque pour déterminer les pertes extrêmes afin de se préparer à les affronter au cas où ces hypothèses se matérialiseraient. Cette étude sur les scénarios hypothétiques basée sur le modèle GPD a permis de déterminer les pertes extrêmes qu'un portefeuille d'actifs peut enregistrer dans les conditions extrêmes de marché. Cette méthodologie que nous proposons permettra aux établissements financiers d'être plus efficaces dans l'élaboration de plans de réduction de leurs expositions aux risques extrêmes. En effet, connaissant la

perte extrême sur un portefeuille et les actifs financiers qui concourent à la réalisation de cette perte, il peut s'agir de réduire ou de vendre les actifs les plus risqués.

Les stress tests basés sur les scénarios historiques et hypothétiques peuvent ne pas mesurer le pire scénario. La difficulté dans ces deux types de scénario de stress test que connaissant les pertes potentielles du portefeuille, cela peut conduire à croire à une certaine sécurité du portefeuille surtout si ces pertes potentielles sont gérables par l'établissement financier. En effet l'établissement financier ne sait pas si d'autres scénarii, également plausibles, aboutiraient à des pertes plus importantes. Même dans les scénarios hypothétiques, personne ne peut savoir si les scénarios de stress élaborés sont de pires scénarios.

L'autre difficulté après avoir calculé les pertes potentielles extrêmes est qu'il est presque impossible de déterminer les facteurs de risque qui ont entraîné ces pertes. Cela est une question qui n'a pas encore trouvé de réponse dans les scénarios historiques et hypothétiques.

Une approche de recherche des pires scénario (ou reverse stress test) permet de résoudre ces problèmes. Le principal objectif est d'identifier les pires scénarii c'est-à-dire les scénarios dans lesquels le portefeuille actuel enregistrera des pertes extrêmes. Pour les prochaines études il serait intéressant de tester ces méthodologies de reverse stress tests.



Caractéristique des actifs du portefeuille

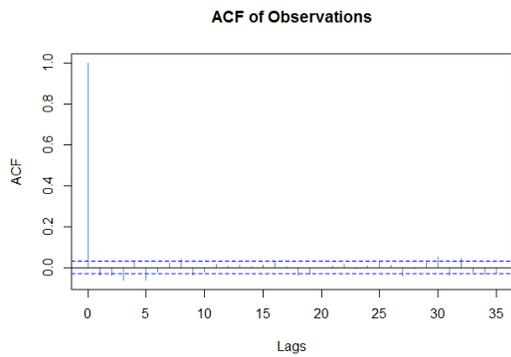


Figure A.1: CAC40

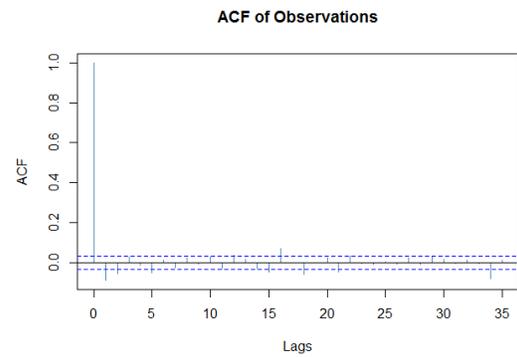


Figure A.2: S & P

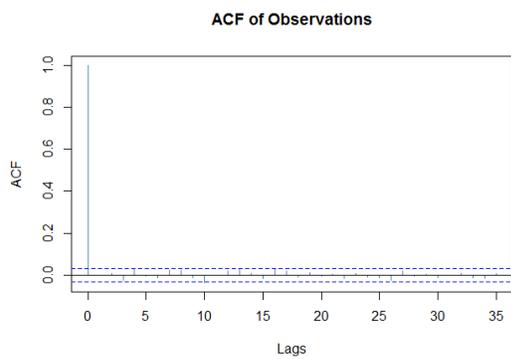


Figure A.3: USD/EUR

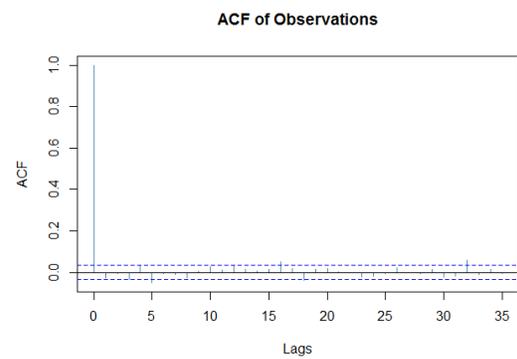


Figure A.4: USD/BRL

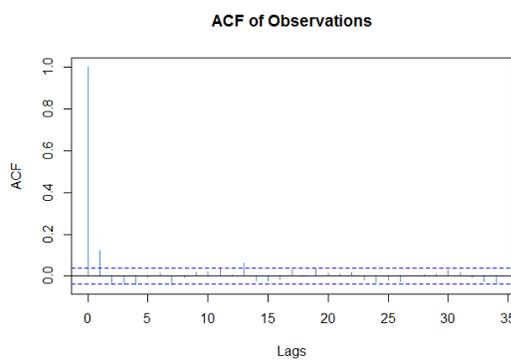


Figure A.5: Itraxx EUR

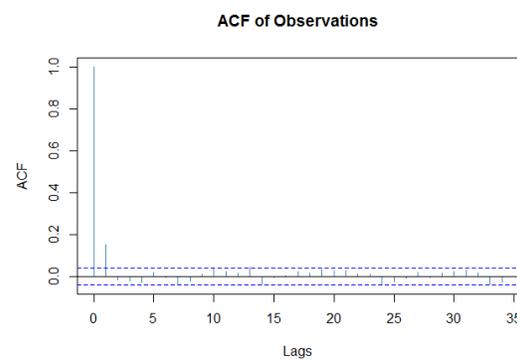


Figure A.6: Itraxx Highvol

Figure A.7: Test d'autocorrélation des rentabilités

L'autocorrélogramme montre la présence de corrélation sérielle sur les rentabilités des actifs du portefeuille

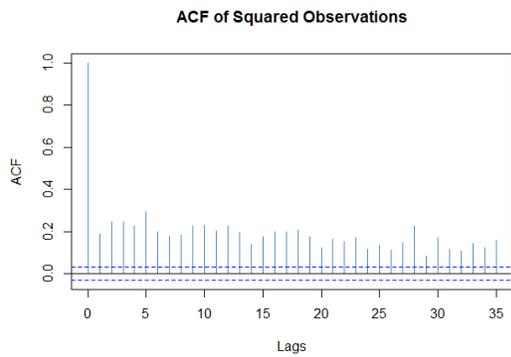


Figure A.8: CAC40

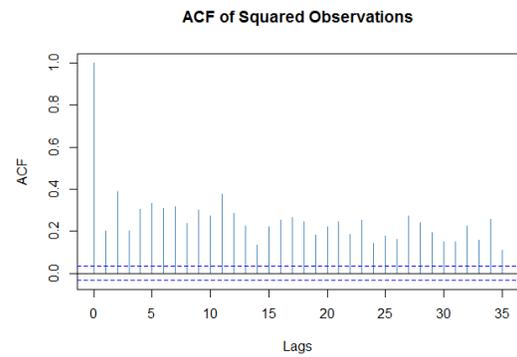


Figure A.9: S & P

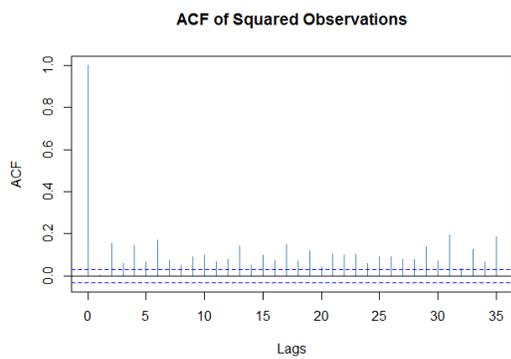


Figure A.10: USD/EUR

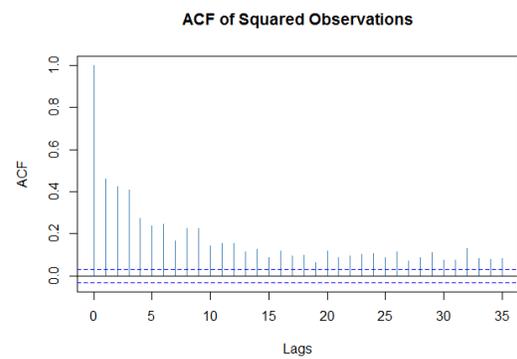


Figure A.11: USD/BRL

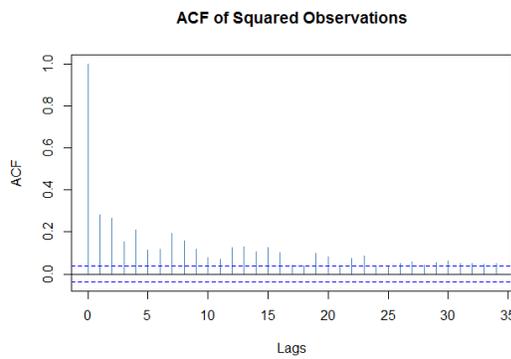


Figure A.12: Itraxx EUR

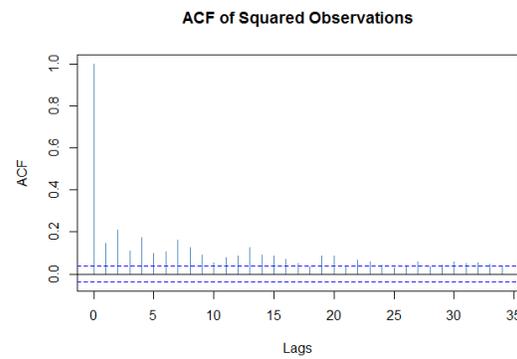


Figure A.13: Itraxx Highvol

Figure A.14: Test d'autocorrélation des rentabilités au carré

L'autocorrélogramme montre la persistance de la volatilité dans les rentabilités des actifs du portefeuille

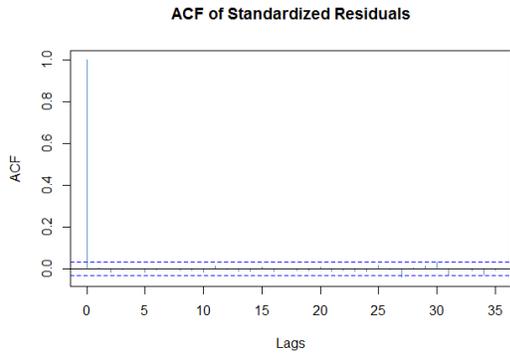


Figure A.15: CAC40

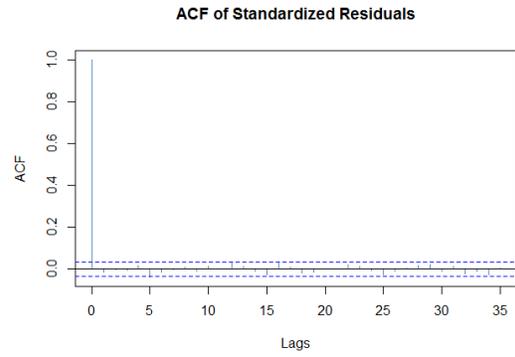


Figure A.16: S & P

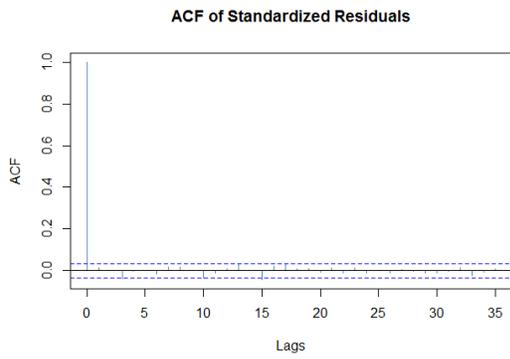


Figure A.17: USD/EUR

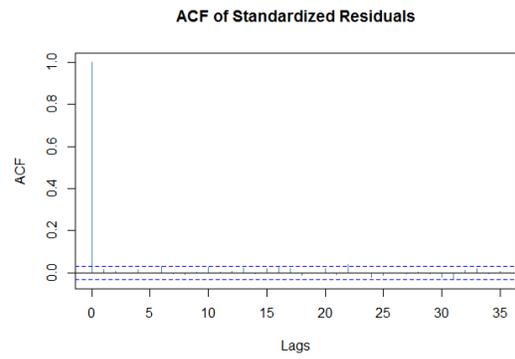


Figure A.18: USD/BRL

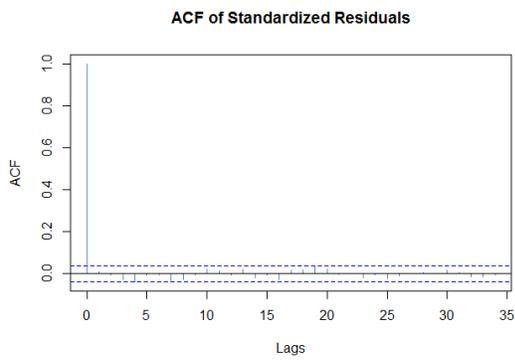


Figure A.19: Itraxx EUR

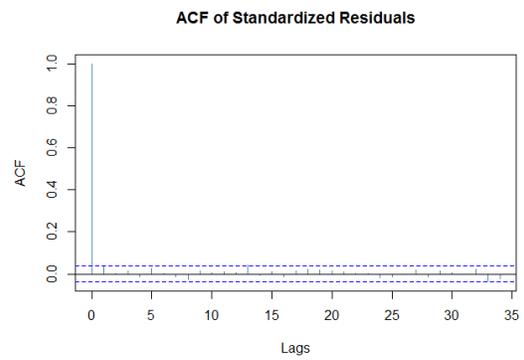


Figure A.20: Itraxx Highvol

Figure A.21: Test d'autocorrélation des résidus

L'autocorrélogramme montre l'absence de corrélation sérielle sur les résidus des actifs du portefeuille

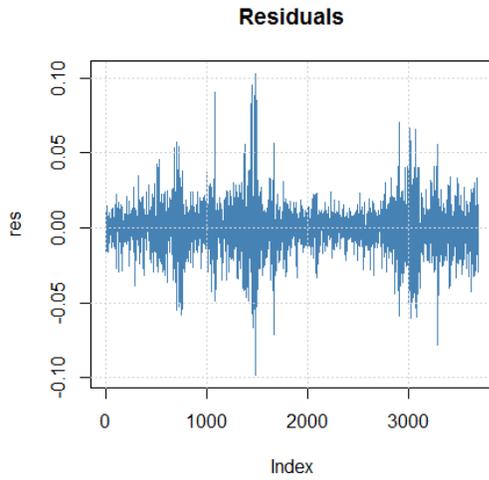


Figure A.22: CAC40

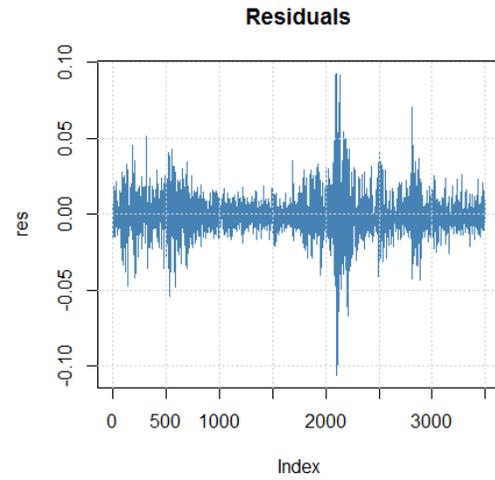


Figure A.23: S & P

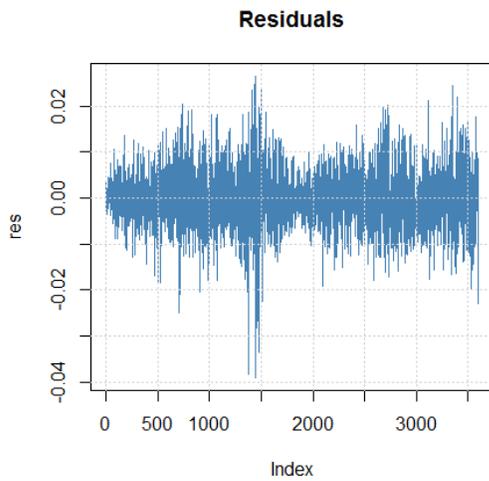


Figure A.24: USD/EUR

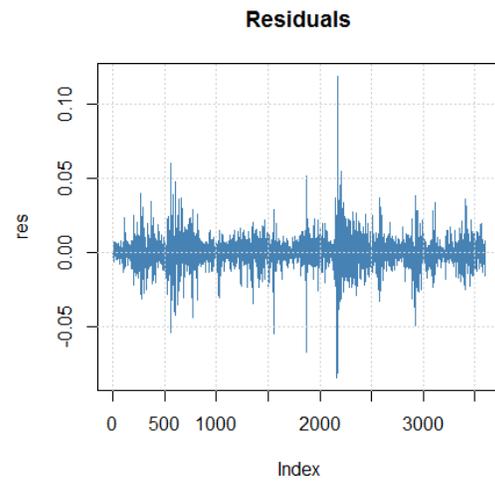


Figure A.25: USD/BRL

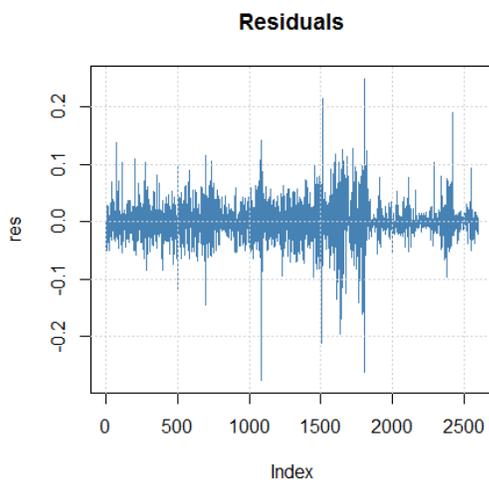


Figure A.26: Itraxx EUR

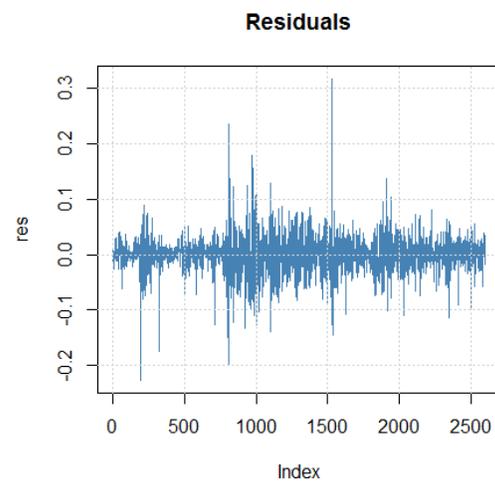


Figure A.27: Itraxx Highvol

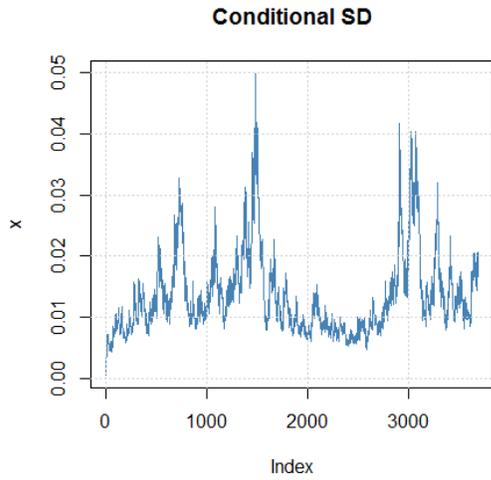


Figure A.29: CAC40

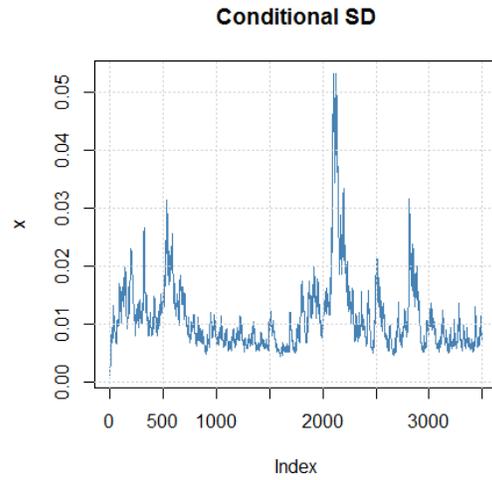


Figure A.30: S & P

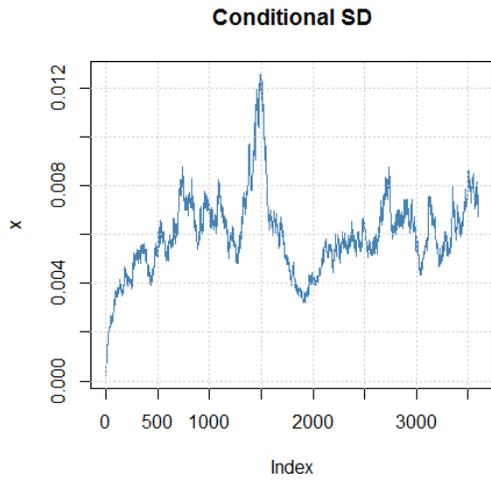


Figure A.31: USD/EUR

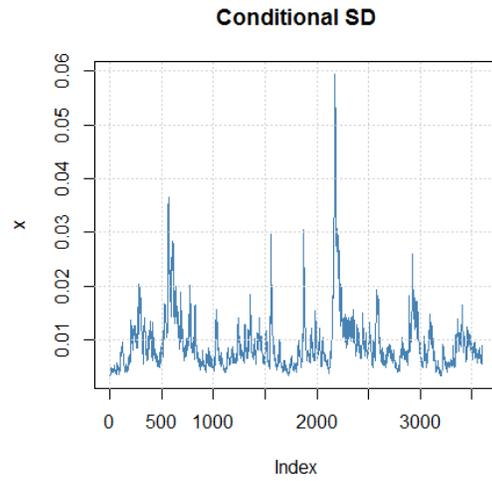


Figure A.32: USD/BRL

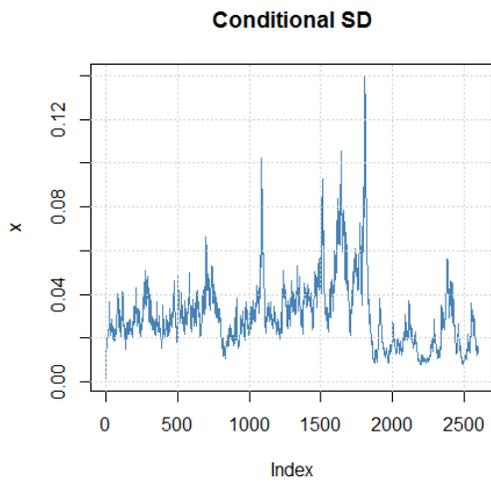


Figure A.33: Itraxx EUR

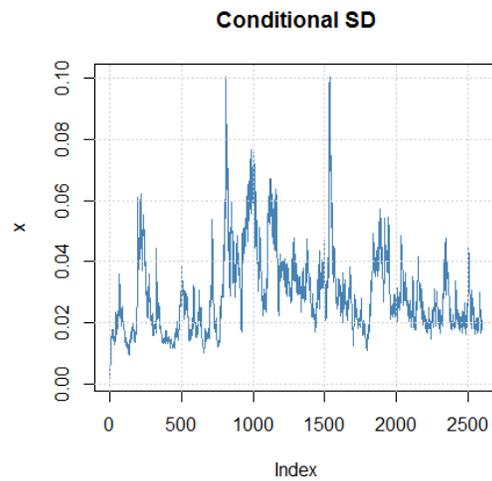


Figure A.34: Itraxx Highvol

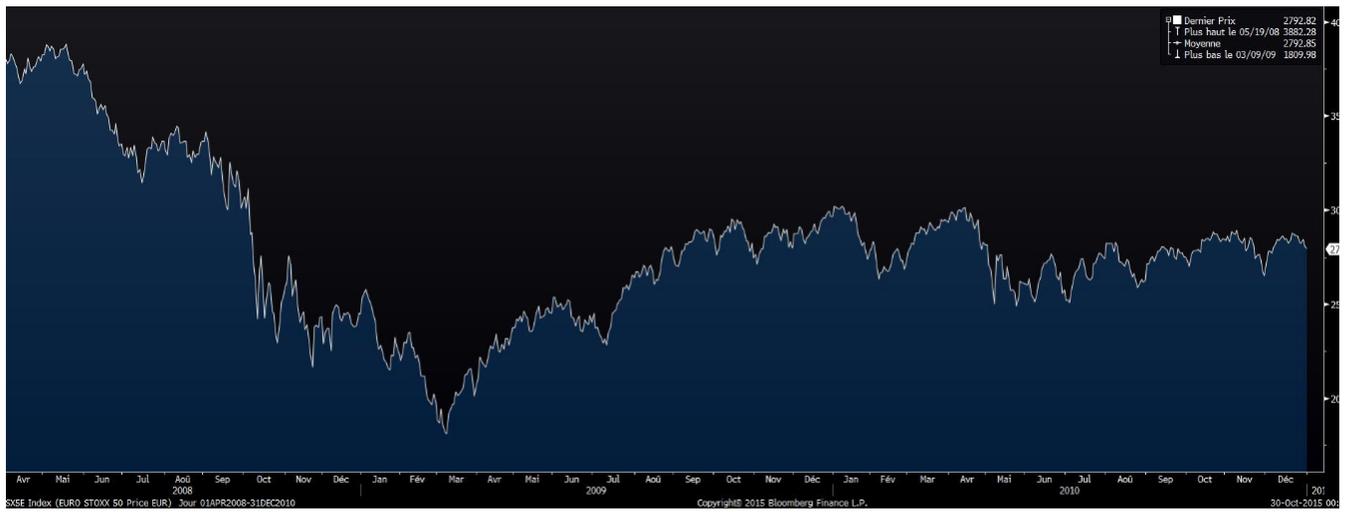


Figure A.36: Evolution de L'Eurostock pendant la période de crise de 2008



Figure A.37: Evolution du Itraxxcrossover pendant la période de crise de 2008



Figure A.38: Evolution de l'indice EUR/USD pendant la période de crise de 2008



Figure A.39: Evolution de l'indice USD/BRL pendant la période de crise de 2008

B

Modèle internes de mesure de risque de marché

B.1 Méthode de la Simulation Historique

Cette méthode a été choisie pour sa popularité dans l'industrie bancaire. En effet, une enquête qui a été menée par Perignon and Smith (2010) montre 73

Dans cette méthodologie, la VaR est définie comme α quantile de la distribution empirique des rentabilités de l'Expected Shortfall au seuil de α est la moyenne de toutes les rentabilités empiriques au delà de la VaR.

B.2 Methode Filtered Historical Simulation

Cette méthode est une adaptation de la méthode Filtered Historical Simulation de Brone-Adesi and Bourgoin (1998). La méthode commence par l'estimation du modèle GARCH asymétrique sur les rentabilités, puis les rentabilités sont standardisées par le rapport entre les résidus et les volatilités conditionnelle actuelles estimés. Nous simulons les résidus standardisés, puis nous déterminons α quantile des résidus standardisés multiplié par la volatilité conditionnelle prévisionnelle pour la VaR. L'Expected Shortfall est déterminée en calculant la moyenne des résidus standardisés au delà de la VaR multipliée par la volatilité conditionnelle prévisionnelle.

B.3 Méthode Variance-Covariance

Cette méthode est utilisée dans cette étude comme un modèle de benchmark. Nous supposons dans cette approche que les rentabilités X_t sont i.i.d et suivent une loi normale:

$$X_t \sim N(0, \sigma^2) \quad (\text{B.1})$$

Sous cette hypothèse, la VaR et l'ES sont respectivement calculées au seuil de confiance α par:

$$VaR_\alpha = q_\alpha \sigma \quad (\text{B.2})$$

et

$$ES_\alpha = \alpha^{-1} \phi(q_\alpha) \sigma \quad (\text{B.3})$$

où q_α est la valeur critique de la loi normale standard inverse au seuil de $\alpha\%$, σ est la volatilité et ϕ est la fonction de la densité de la loi normale.

B.4 Méthode GARCH de la loi normale

Dans cette approche les rentabilités ajustées de leur moyenne $\xi_t = X_t - \hat{X}$ sont supposées conditionnellement et normalement distribuées avec une variance conditionnelle suivant un processus GARCH(1,1) symétrique:

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 (\epsilon_{t-1})^2 \quad (\text{B.4})$$

où $\beta_0 \geq 0, \beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ et $\beta_1 + \beta_2 < 1$.

Les paramètres β_0, β_1 et β_2 sont déterminés par l'estimation du modèle GARCH(1,1).

La Var et l'ES sont calculées respectivement comme dans les équations (B.2) et (B.3) mais cette fois ci la volatilité est une volatilité conditionnelle déterminée par l'estimation du modèle GARCH(1,1).

B.5 Contrôle ex post des modèles de mesure de risque

B.6 Méthodes statistiques de contrôle ex post

La première étape d'un travail de contrôle ex post ou de backtesting consiste à construire des violations sur laquelle sera appliquée un ensemble de tests visant à mesurer la fiabilité d'une technique de mesure de risque.

En fréquence journalière par exemple, la série des violations permet d'estimer le nombre de jours où la pertes enregistrée dépasse la perte maximale estimée par la technique de mesure de risque. La série des violations notée I_t est définie par l'expression suivante:

$$I_t = (\alpha) \begin{cases} 1 & \text{si } x_t \leq VaR_t(\alpha) \\ 0 & \text{si } x_t > VaR_t(\alpha) \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

où x_t est la rentabilité de l'actif financier à l'instant t avec $1 \leq t < T$ i.e compris dans la fenêtre temporelle utilisée pour le contrôle ex post.

Christoffersen (1998) énonce qu'une méthode de VaR est fiable lorsque la séquence des violations I_t satisfait les propriétés de couverture inconditionnelle (Unconditional Coverage Property) et d'indépendance (Independance property) des exceptions ou des violations.

B.6.1 Test de couverture inconditionnelle des violations

Les tests de couverture conditionnelle correspondent à la première catégorie de tests développés pour estimer la fiabilité d'un modèle de mesure de la VaR.

Le test POF (Proportion of Failures) de Kupiec (1995), permet d'évaluer la pertinence d'une méthode de mesure de risque en comparant la proportion observée $\hat{\alpha}$ des violations de la VaR au niveau de risque retenu α . La fiabilité d'une technique de mesure de VaR sera rejetée lorsque la proportion observée diffère significativement de α .

Il s'agit de tester les hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} H_0 & : \hat{\alpha} = \alpha \\ H_1 & : \hat{\alpha} \neq \alpha \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Soit $I(\alpha)$ le nombre de violations dans un échantillon de T observations et supposons que $I(\alpha)$ suit une distribution binomiale avec les paramètres T et $I(\alpha)$. Le test du ratio de vraisemblance de la couverture inconditionnel (Likelihood Ratio of unconditional coverage ou LRuc) est le suivant:

$$LRuc = 2 \log \left(\left(\frac{1 - \hat{\alpha}}{1 - \alpha} \right)^{T - I(\alpha)} \frac{\hat{\alpha}^{I(\alpha)}}{\alpha} \right) \quad (\text{B.7})$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T} I(\alpha) \quad I(\alpha) = \sum_{t=1}^T I_t(\alpha)$$

L'hypothèse H_0 est rejetée lorsque la statistique LRuc est supérieure à la valeur critique du Khi-deux à un degré de liberté.

Dans le cas où la proportion de violations $\hat{\alpha}$ est exactement égale au niveau de risque retenu α pour le calcul de la VaR, la statistique prend une valeur nulle. Cela indique que la technique de mesure de risque évaluée remplit parfaitement la condition de couverture inconditionnelle de Christoffersen qui est nécessaire à la validation d'une méthode de mesure de risque. Par contre, la statistique LRuc est d'autant plus élevée que l'écart entre $\hat{\alpha}$ et α est important. Dans ce deuxième cas, on considère que la technique de mesure de risque surestime ou sous-estime significativement le niveau de risque de l'actif financier.

Le test de Kupiec présente cependant un inconvénient majeur que l'on retrouve dans la majorité des tests de contrôle ex post. Lorsque aucune violation de la VaR n'est constatée, il n'est plus possible de calculer la statistique puisque le logarithme de zéro n'existe pas.

Pour contourner cette limite, Campbell (2005) propose d'utiliser une variante de la statistique de vraisemblance de Kupiec: le test de Wald. La statistique du test de Wald notée z , se définit par l'expression suivante:

$$z = \frac{\sqrt{T}(\hat{\alpha} - \alpha)}{\sqrt{\alpha(1 - \alpha)}} \quad (\text{B.8})$$

L'hypothèse de couverture inconditionnelle de Christoffersen est rejetée lorsque la statistique z est supérieure à la valeur critique associée à la loi normale au niveau de confiance choisi.

Le test de couverture inconditionnelle statue sur la fiabilité des modèles de mesure de risque sans tenir compte de l'interdépendance entre les violations dans le temps. Pour remédier à ce problème, le test d'indépendance des violations peut être utilisé.

B.6.2 Test d'indépendance des violations

Cette hypothèse est établie sur la considération selon laquelle un *clustering* de violations n'a pas les mêmes conséquences que plusieurs violations dispersées dans le temps. En effet, il est souvent plus difficile de faire face à six violations successives qu'à huit violations éparses de la VaR puisque l'enregistrement de plusieurs pertes substantielles consécutives peut mener une institution financière vers la faillite. Ces regroupements de violations signalent un manque de réactivité du modèle de VaR aux changements des conditions de marché.

Plusieurs tests ont été proposés pour examiner la propriété d'indépendance de la série des violations de la VaR. Le test de Markov proposé par Christoffersen (1998) s'est révélé le plus utilisé. Il s'agit de

tester si la vraisemblance d'une violation de la VaR est influencée par la violation ou non de la VaR le jour précédent. Une méthode de mesure de VaR est considérée comme fiable lorsque la probabilité d'une violation de la VaR à la date t est indépendante de ce qui s'est produit à la date $t - 1$. Ce test est réalisé en s'appuyant sur une matrice de contingence 2×2 présentant les violations de la VaR sur les jours adjacents.

	$I_{t-1} = 0$	$I_{t-1} = 1$	
$I_t = 0$	N_1	N_2	$N_1 + N_2$
$I_t = 1$	N_3	N_4	$N_3 + N_4$
	$N_1 + N_3$	$N_2 + N_4$	

Table B.1: Matrice de Contingence du test d'indépendance des exceptions

N_1 désigne le nombre de jours successifs sans exceptions; N_2 le nombre de jours sans exception précédés par une exception; N_3 , le nombre de jours sans exception suivis par une exception et N_4 , le nombre de jours successifs avec exceptions.

Dans le cas où les rapports $\frac{N_3}{N_1 + N_3}$ et $\frac{N_4}{N_2 + N_4}$ sont égaux, cela traduit que la proportion des violations qui surviennent après une précédente violation est la même que la proportion des violations qui suivent un jour où aucune violation ne s'est produite.

Sous l'hypothèse d'indépendance, la statistique du ratio de vraisemblance d'indépendance des violations (Likelihood Ratio of indépendance ou LRind) est donnée par :

$$\begin{cases} LRind = -2\log\left(\frac{(1 - \pi_1)^{N_1+N_3} \times \pi_1^{N_2+N_4}}{(1 - \pi_{01})^{N_1} \times \pi_{01}^{N_3} (1 - \pi_{11})^{N_2} \times \pi_{11}^{N_4}}\right) & \text{si } N_4 \neq 0 \\ LRind = -2\log\left(\frac{(1 - \pi_1)^{N_1+N_3} \times \pi_1^{N_2+N_4}}{(1 - \pi_{01})^{N_1} \times \pi_{01}^{N_3}}\right) & \text{si } N_4 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

$$\pi_1 = \frac{N_2 + N_4}{N}, \quad \pi_{01} = \frac{N_3}{N_1 + N_3} \quad \text{et} \quad \pi_{11} = \frac{N_4}{N_2 + N_4} \quad (\text{B.10})$$

La fiabilité d'une technique de mesure de risque est rejetée lorsque la statistique est supérieure à la valeur du Khi-deux à 1 degré de liberté.

Il est possible de combiner les propriétés de couverture inconditionnelle et indépendance pour tester l'hypothèse de couverture conditionnelle (Likelihood Ratio of conditional coverage ou LRcc) dont la statistique est donnée par :

$$LRcc = LRuc + LRind \quad (\text{B.11})$$

Cette statistique est distribuée comme une distribution de Khi-deux à 2 degré de liberté. La statistique LRcc permet de tester en même temps les propriétés de couverture inconditionnelle et d'indépendance des violations.

B.6.3 Backtesting de l'Expected Shortfall

La fiabilité de l'Expected Shortfall peut être évaluée par la statistique V proposée par Embrechts et al. (2005). Elle est donnée par :

$$V = \frac{|\sum_{t=1}^n (X_t - ES_t) I_{X_t < VaR_t}|}{\sum_{t=1}^n I_{X_t < VaR_t}} \quad (\text{B.12})$$

où $I_{X_t < VaR_t} = 1$ si $X_t < VaR_t$ 0 sinon.

Suivant cette formule, la mesure de l'Expected Shortfall est fiable si la valeur de la statistique V est nulle ou tend vers zéro.

La limite de cette méthode est qu'elle n'associe aucune probabilité à la statistique calculée pour pouvoir décider définitivement de la fiabilité des modèles de mesure de l'Expected Shortfall.

Copules

C.1 Copule de Student multivariée

Un vecteur de variables aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)'$ suit une distribution multivariée de Student de degré de liberté ν , de vecteur de moyennes μ et de matrice de dispersion positive et finie Σ , noté $X \sim t_d(\nu, \mu, \Sigma)$, si sa fonction de densité est donnée par

$$f(X) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{(\pi\nu)^d|\Sigma|}} \left(1 + \frac{(X-\nu)'\Sigma^{-1}(X-\nu)}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}} \quad (\text{C.1})$$

Il faut noter que dans l'équation (C.1), la covariance $cov(X) = \frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$, donc la matrice de covariance n'est pas exactement égale à Σ et est seulement finie si $\nu > 2$.

La copule de Student reste invariante par transformations strictement croissantes du vecteur de variables aléatoires X . Cela signifie que la copule d'une distribution $t_d(\nu, \mu, \Sigma)$ est identique à celle de la distribution $t_d(\nu, 0, \Lambda)$ où Λ est la matrice de corrélation déduite de la matrice de dispersion Σ . Cette copule unique est donnée par :

$$C_{\nu, \Lambda}^t(u) = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_d)} \frac{\Gamma(\frac{\nu+d}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{(\pi\nu)^d|\Lambda|}} \left(1 + \frac{(X' \Lambda^{-1} X)}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}} dX \quad (\text{C.2})$$

où t_{ν}^{-1} représente le quantile de la fonction de distribution standard de Student univariée t_{ν} . Dans le cas bivarié, la notation simplifiée est $C_{\nu, \rho}^t$ où ρ est constitué des éléments non diagonaux de la matrice Λ .

C.2 Copule normale multivariée

Soit I_{ρ} une matrice symétrique définie positive avec $diag \ \rho = 1$ et Φ_{ρ} une distribution normale multivariée avec une matrice de corrélation ρ . La copule normale multivariée est définie par

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n, \rho) = \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \quad (\text{C.3})$$

La densité de la copule normale est donnée par :

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n, \rho) = \frac{1}{|\rho|} \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta^T (\rho^{-1} - \mathbf{I}) \zeta\right) \quad (\text{C.4})$$

où $\zeta_i = \Phi^{-1}(u_i)$ et \mathbf{I} , la matrice identité de dimension $(n \times n)$.

La densité normale multivariée quant à elle est donnée par l'équation suivante:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\rho|} \exp\left(-\frac{1}{2} X^T \rho^{-1} X\right) \quad (\text{C.5})$$

La copule normale multivariée peut être ainsi définie par

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n, \rho) = \frac{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\rho|} \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta^T \rho^{-1} \zeta\right)}{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\rho|} \exp\left(-\frac{1}{2} \zeta^T \zeta\right)} \quad (\text{C.6})$$

C.3 Méthode IFM (Inference Functions for Margins)

La méthode des fonctions d'inférence des marginales ou IFM a été proposée par Joe and Xu (1996). Elle repose sur le fait que la représentation en copule permet de séparer les paramètres spécifiques de la structure de dépendance de ceux des distributions marginales. Ainsi, les paramètres peuvent être estimés en deux étapes à partir de la décomposition de la formule suivante:

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \log c(F_1(x_1^t, \theta_1), \dots, F_n(x_n^t, \theta_n); a) + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^n \log f_k(x_k^t, \theta_k) \quad (\text{C.7})$$

où $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n; a)$ le vecteur des paramètres contenant les paramètres de chaque marginale et les paramètres de la copule. La maximisation se fait en deux étapes:

Les paramètres de chaque marginale sont estimés

$$\hat{\theta}_k = \operatorname{argmax}_{\theta_k} l_k(\theta_k) = \operatorname{argmax}_{\theta_k} \sum_{t=1}^T \log f_k(x_k^t, \theta_k) \quad (\text{C.8})$$

puis les paramètres a de la copule sont estimés à partir des estimateurs précédents

$$\hat{a} = \operatorname{argmax}_a l_c(a) = \operatorname{argmax}_a \sum_{t=1}^T \log c(F_1(x_1^t, \hat{\theta}_1), \dots, F_n(x_n^t, \hat{\theta}_n); a) \quad (\text{C.9})$$

Dans la méthode IFM, l'estimateur $\hat{\theta}_{IFM} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n; \hat{a})$ vérifie la propriété de normalité asymptotique et nous avons :

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IFM} - \theta_0) \longrightarrow N(0, G^{-1}(\theta_0)) \quad (\text{C.10})$$

où $G(\theta_0)$ est la matrice d'information de Godambe.

Si on définit

$$g(\theta) = \left(\frac{\delta}{\delta\theta_1} l_1, \dots, \frac{\delta}{\delta\theta_n} l_n \right) \quad (\text{C.11})$$

alors la matrice de Godambe s'écrit (Joe and Xu (1996)):

$$G(\theta_0) = D^{-1} M (D^{-1})^T \quad (\text{C.12})$$

$$D = E\left[\frac{\delta}{\delta\theta} g(\theta)^T\right] \quad \text{et} \quad M = E[g(\theta)^T g(\theta)]$$

Cette méthode présente l'avantage de reposer sur des calculs plus légers que ceux générés par une méthode de maximum de vraisemblance mais la détermination de la matrice de Godambe peut s'avérer très complexe en raison de multiples calculs de dérivées. L'estimation de la copule dans la méthode IFM est également sensible à une éventuelle erreur d'estimation des marginales car elle intervient directement dans le calcul de la log-vraisemblance.



Validation de la matrice de corrélation modifiée

La méthode de décomposition spectrale d'une matrice symétrique développée par Rebonato and Jackel (1999) consiste à déterminer une matrice de corrélation valide en calculant les valeurs propres (eigenvalues) λ_i et les vecteurs propres supérieurs (eigenvectors) s_i de la matrice de corrélation stressée C tel que

$$C \times S = \Lambda \times S \quad (\text{D.1})$$

avec $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$, et définir les éléments non négatifs de la matrice diagonale Λ' par :

$$\Lambda' : \quad \lambda'_i = \begin{cases} \lambda_i & \lambda_i \geq 0 \\ 0 & \lambda_i < 0 \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

Si la matrice de corrélation stressée C n'est pas semi-définie positive c'est à dire qu'au moins une des valeurs de λ_i est négative, es valeurs négatives doivent être mises à zéro.

Il faut également définir les éléments non négatifs de la matrice diagonale T tout en respectant l'espace propre (eigensystem) S par:

$$T : \quad t_i = [\sum_m S_{im}^2 \lambda'_m]^{-1} \quad (\text{D.3})$$

Les vecteurs propres s_i sont multipliés par les valeurs propres λ'_i associées " corrigées " et rangées comme les colonnes de la matrice B' .

$$B' := S\sqrt{\Lambda'} \quad (\text{D.4})$$

Finalement, B est obtenu à partir de B' en normalisant les vecteurs ligne de B' à longueur unitaire.

$$B := S\sqrt{T}B' = \sqrt{T}S\sqrt{\Lambda'} \quad (\text{D.5})$$

Par construction, la matrice de corrélation valide est donnée par :

$$\hat{C} := B \times B^T \quad (\text{D.6})$$

La matrice de corrélation \hat{C} est une matrice semi-définie positive avec une diagonale unitaire. Elle représente une matrice de corrélation valide qui est presque identiques à la matrice de corrélation stressée C .

GLOSSAIRE

- **Faits stylisés:** Constat d'ordre empirique, généralement non quantifié, mais jugé représentatif du fonctionnement de l'économie.
- **Crédit Default Swap:** Un Credit Default Swap (CDS) est un contrat par lequel un vendeur de protection s'engage, contre le paiement d'une prime, en cas d'événement affectant la solvabilité d'une entité de référence, à dédommager l'acheteur.
- **CAC 40:** Le CAC 40 est un indice boursier regroupant les 40 plus importantes capitalisations boursières françaises cotées à la bourse de Paris.
- **S&P 500:** Le S&P 500 est un indice boursier qui regroupe les 500 valeurs américaines qui sont les plus représentatives de l'économie américaine
- **EUROSTOCK50:** L'EUROSTOCK50 est un indice boursier au niveau de la zone euro. Il regroupe 50 sociétés selon leur capitalisation boursière au sein de la zone euro et non pas au niveau de l'Europe ni de l'Union européenne.
- **USD/EUR:** USD/EUR désigne la valeur du dollar exprimé en euro
- **USD/BRL:** USD/BRL désigne la valeur du dollar exprimé en real brésilien
- **Itraxxover:** Indice de CDS composé de 40 valeurs les plus liquides parmi les obligations dont leur notation financière par les agences de rating est inférieur à BBB^-
- **ItraxxEUR:** Indice de CDS composé de 125 valeurs européennes les plus liquides sur le marché
- **Itraxxhignvol:** Indice de CDS composé de 30 valeurs ayant le spread le plus élevé c'est à dire le plus risqué
- **Spread de crédit:** Le "spread" de crédit désigne la prime de risque, où l'écart entre les rendements des obligations d'entreprises et les emprunts d'États de mêmes caractéristiques.

- **Lehman Brothers:** Lehman Brothers était une banque d'investissement multinationale proposant des services financiers diversifiés. Le siège social de la firme se trouvait à New York, et elle possédait d'autres sièges régionaux à Londres et Tokyo ainsi que divers bureaux à travers le monde. Elle fit officiellement faillite le 15 septembre 2008 (faute de repreneurs) à la suite de la crise financière mondiale née de la crise des subprimes.
- **Crise des suprimés:** La crise des subprimes est une crise financière qui a concerné le secteur de l'immobilier et qui a touché l'économie mondiale à partir de 2007.
- **Enron:** Enron fut l'une des plus grandes entreprises américaines par sa capitalisation boursière. En décembre 2001, elle fit faillite en raison des pertes occasionnées par ses opérations spéculatives sur le marché de l'électricité, qui avaient été maquillées en bénéfices via des manipulations comptables.
- **WorldCom:** WorldCom était une entreprise de télécommunication américaine fondée en 1989, qui a fait une faillite retentissante en 2002.
- **Quantitative Easing:** Le Quantitative Easing est une politique de dernier recours qui permet aux banques centrales d'augmenter la masse monétaire en choisissant d'accroître les réserves des banques centrales. On peut dire que c'est une solution de dernier recours car c'est une option qui n'est choisie que lorsque les autres méthodes sont inefficaces.
- **FED:** La Réserve fédérale américaine (Fed) est la Banque centrale des Etats-Unis. Constituée de 12 banques régionales, les "Regional Reserve Banks", la Fed définit la politique monétaire des Etats-Unis : elle fixe le taux de réserve obligatoire, le taux d'escompte, et elle dirige les opérations d'open market (interventions sur les marchés financiers pour influencer le niveau des taux d'intérêt)
- **BCE:** La Banque centrale européenne, ou BCE, est l'institution indépendante chargée de définir et d'appliquer la politique économique et monétaire de l'Union européenne. Elle gère la monnaie unique et s'assure de la stabilité financière dans la zone euro.
- **BoE:** La Banque d'Angleterre (Bank of England, BoE) est la banque centrale du Royaume-Uni. Elle est l'institution monétaire équivalente à la Banque Centrale Européenne (BCE) pour la Zone Euro et la Réserve Fédérale des Etats-Unis (FED).
- **bp:** Un point de base, expression venue directement de l'anglais basis point (abrégé en bp au singulier et bps au pluriel), désigne en langage économique et financier un centième de point de pourcentage.

Bibliography

- [1] P. EMBRECHTS, C. KLUPPELBERG, and T. MIKOSCH. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, 1997.
- [2] A.J. MCNEIL and R. FREY. "Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series : an extreme value approach". Journal of Empirical Finance, 2000.
- [3] R.L. SMITH. "Threshold methods for sample extremes". Statistical Extremes and Applications, 1984.
- [4] J. DANIELSSON and C.G. DE VRIES. "Value-at-Risk and extreme returns". Annales d'Economie et de Statistique, 2000.
- [5] T. RONCALLI. "Théorie des valeurs extrêmes - modélisation des événements rares pour la gestion des risques ". Cours, 2002.
- [6] S. COLES. An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values. Springer, 2001.
- [7] E. CASTILLO and A.S. HADI. "Fitting the Generalized Pareto Distribution to data". Journal of the American Statistical Association, 1997.
- [8] M. GARRIDO. Modélisation des Évènements Rares et Estimation des Quantiles Extrêmes, Méthodes de Sélection de Modèles pour les Queues de Distribution. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2002.
- [9] J.R.M. HOSKING and J.R. WALLIS. "Parameter and quantile estimation for the Generalized Pareto Distribution". Technometrics, 1987.
- [10] Acar, E and S. JAMES. Maximum loss and maximum drawdown in financial markets. In Forecasting Financial Markets Conference in London, 1997.
- [11] ALEXANDER C and E. SHEEDY. Developing a stress testing framework based on market risk models. Journal of Banking & Finance, 2008.
- [12] ARAGONES, J C BLANCO and K. DOWND. Incorporating stress tests into market risk modeling. Derivatives Quartely, 2001.
- [13] BARONE-ADESI G K GIANOPOULOS, and L. VOSPER .Filtered historical simulation. Backtest Analysis, Uiversity of Westminster, 2000.
- [14] BASEL COMMITTEE, B. S. A survey of stress tests and current practice at major financial institutions. Bank for Interntional Settlements, 2005
- [15] BERKOWITZ J. A coherent framework for stress-testing. FEDS Working Paper, 2005
- [16] BREYMANN, W A. DIAS and P. EMBRECHTS. Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance.

- [17] COSTINOT, A, G. RIBOULET, T. RONCALLI and C. Lyonnais. Stress testing et théorie des valeurs extrêmes: une vision quantifiée du risque extrême. Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, 2000
- [18] DEMARTA, S and A. MCNEIL. The t copula and related copulas. International Statistical Review, 2005
- [19] EMBRECHTS and A. MCNEIL. Modelling dependence with copulas and applications to risk management. Handbook of heavy tailed distributions in finance, 2003
- [20] FROMONT, E. Modélisation des rentabilités extrêmes des distributions de hedge funds. Banque & Marchés, 2005
- [21] GAVIN J. Extrême value theory an empirical analysis of equity risk, 2000
- [22] KOUROUMA, O. TARAMASCO. Extreme value at risk and expected shortfall during financial crisis, 2011
- [23] KUPIEC, P. Stress testing in a value at risk framework. The journal of Derivatives, 1998
- [24] LONGIN. From value at risk to stress testing: The extrême value approach, 2000
- [25] RONCALLI, T. La gestion des risques financiers. Paris : Economica, 2009