Méthodologie de construction de lois Dépendance de place

Travaux réalisés dans le cadre du GT Dépendance de l'Institut des Actuaires

Guillaume Biessy

Responsable R&D chez LinkPact, Professeur Associé à Sorbonne Université

21 novembre 2023

Table des matières

Problématique

Un exemple simple

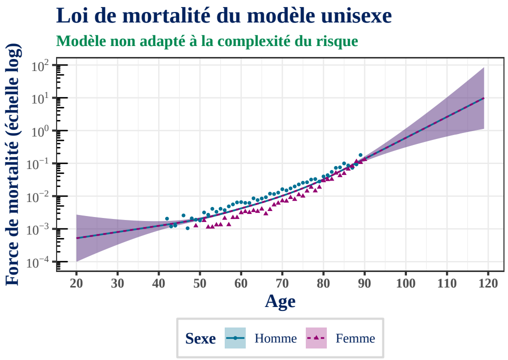
- Supposons que l'on dispose d'un portefeuille de mortalité comprenant **100 000 lignes**
- Les âges couverts vont de **20 à 90 ans** et l'information sur le **sexe des assurés** est également disponible
- On souhaite à partir des données construire des lois d'expérience pour le risque décès allant **de 20 à 120 ans**
- La première étape (non présentée ici) consiste à **agréger les données** par âge et par sexe
- Plusieurs approches pour la construction d'une table d'expérience sont ensuite présentées

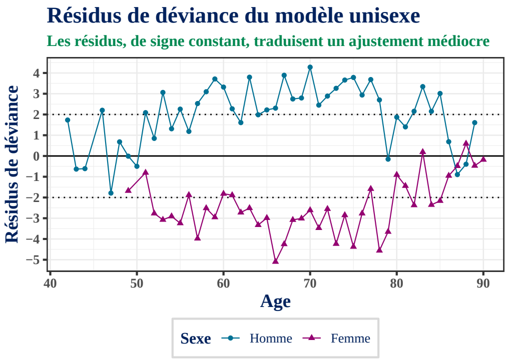
Extrait de données issues du portefeuille fictif

Clé	Date_naissance	Date_souscription	Date_décès	Date_résiliation	Sexe
1	27/09/1967	04/12/1992		04/05/2011	Homme
2	18/07/1934	18/06/1997			Femme
3	02/04/1952	20/01/1997			Homme
4	01/05/1955	20/09/1999		18/04/2010	Homme
5	10/11/1936	05/09/1991	25/02/2001		Homme
6	19/11/1929	17/12/1990	20/11/2014		Homme
7	15/09/1950	06/10/1991			Femme
8	27/02/1971	29/03/1996		28/07/1996	Femme
9	30/10/1930	18/02/1995	01/10/2012		Femme
10	12/09/1934	24/04/1993	22/02/2018		Femme

L'approche unisexe

L'union fait la force

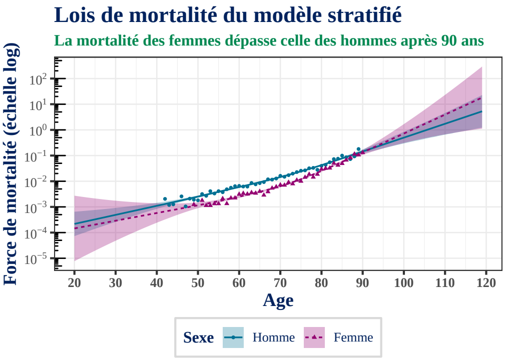


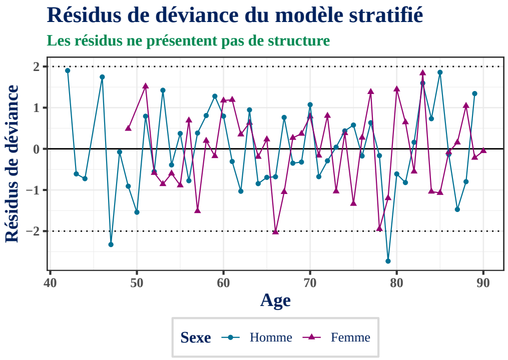


Principe : agréger les données disponibles permet de gagner en **volume** et donc en **robustesse** sur les résultats obtenus... au prix d'un bias conséquent

L'approche segmentée

Ne pas mélanger les choux et les carottes

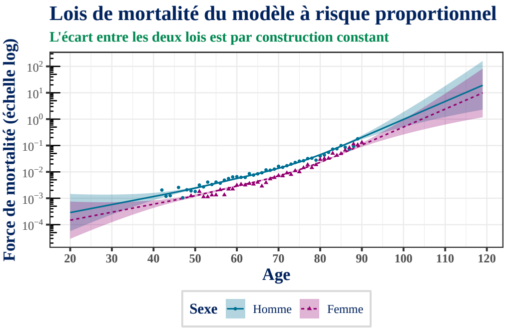


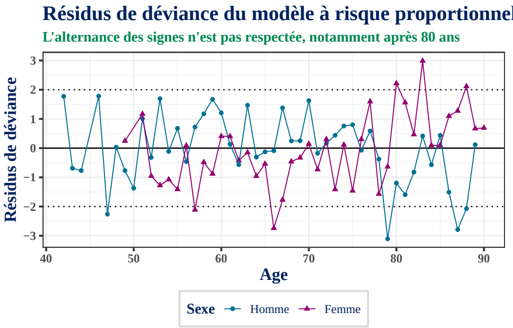


- **Principe :** en présence de **2 populations distinctes**, construire **2 lois distinctes**
- Les lois construites se révèlent relativement **précises** mais l'absence de mise en commun des données augmente néanmoins l'**incertitude** autour des lois
- Les lois extrapolées **se croisent dès 90 ans** ce qui est incohérent du point de vue démographique

Le modèle à risque proportionnel

La règle de trois fait loi





- **Principe :** l'hypothèse d'une forme commune avec un **coefficient de proportionnalité** pour chaque sexe permet de **mutualiser les données** tout en construisant **2 lois distinctes**
- L'**hypothèse de proportionnalité** est **rarement respectée en pratique** ⇒ perte de précision
- L'extrapolation des lois ne tient pas compte des **effets croisés entre l'âge et le sexe** : le niveau de mortalité des hommes et des femmes devrait se rapprocher aux grands âges

Une approche innovante

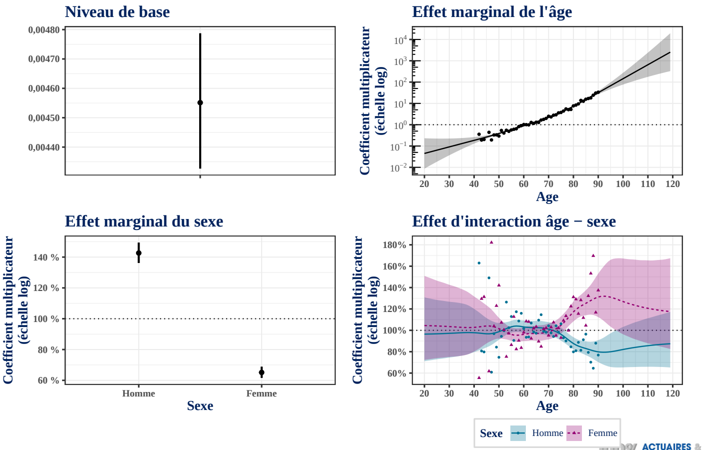
Principe de modularité

Comme alternative aux modélisations précédentes, nous proposons une **approche innovante** s'appuyant sur 2 grandes idées : **modularité** et **parcimonie**

1 La **modularité** consiste à décomposer le risque comme le produit :

- D'une **valeur moyenne** (ou *intercept*)
- D'**effets marginaux** des variables explicatives (ici l'âge et le sexe)
- D'**effets d'interactions** entre les variables explicatives (ici effet croisé de l'âge et du sexe)...

> Cette décomposition est aussi connue sous le nom d'**approche hiérarchique** ou d'ANOVA

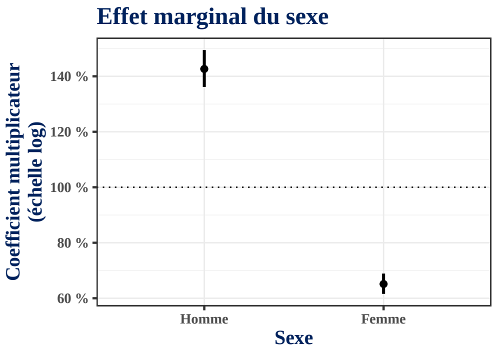


Une approche innovante

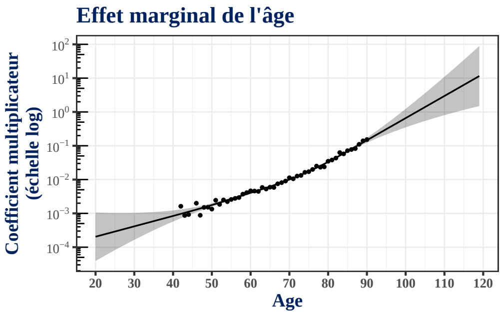
Principe de parcimonie

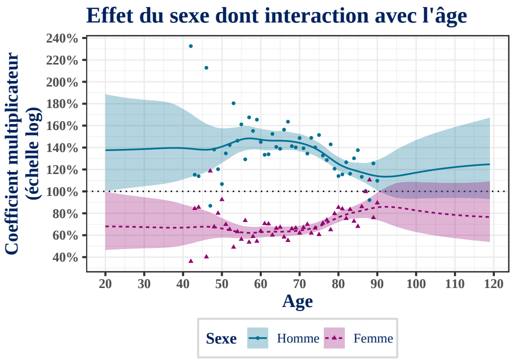
2 La **parcimonie** consiste à donner à chaque paramètre intervenant dans le modèle un **niveau de crédibilité dépendant du volume d'observations** disponible

- De manière formelle, on se place dans le cadre des **modèles mixtes** qui généralisent les **modèles linéaires** classiques
- Un modèle **mixte** est un modèle contenant deux types de paramètres (appelés plutôt ici *effets*) :
  - ⋆ Les **effets fixes** sont des paramètres au sens classique, qui peuvent être présents ou absents du modèle (caractère binaire)
  - ⋆ Les **effets aléatoires** sont des paramètres possédant un niveau de crédibilité **compris entre 0 et 1**. Ce niveau de crédibilité est estimé en même temps que les autres paramètres du modèle et dépend du volume d'observations disponibles. L'effet du paramètre sera multiplié par ce niveau de crédibilité.



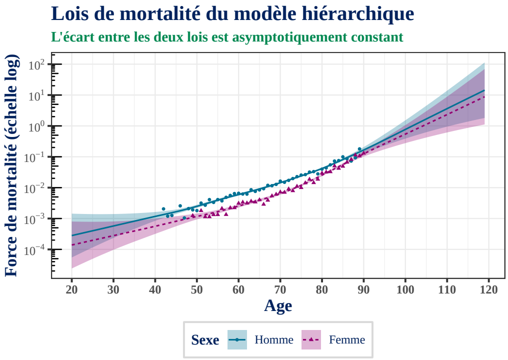
Une approche innovante

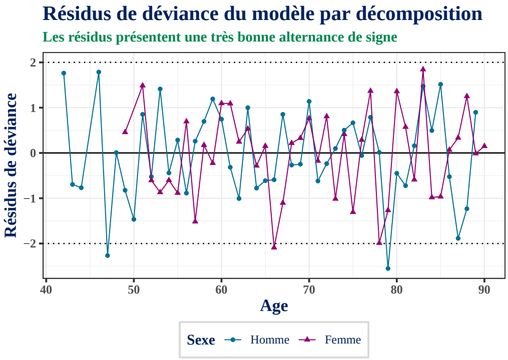




- En jouant sur la régularité imposée au lissage, on peut moduler le **comportement asymptotique des lois** afin d'en assurer la **cohérence**, notamment aux grands âges
- Cela s'inscrit dans une **logique bayésienne** d'intégrer ses connaissances **a priori** sur le risque dans le modèle

L'approche hiérarchique - modèles mixtes





- Les résultats du modèle sont **proches des observations** à tous les âges et pour chaque sexe
- Les données sont de surcroît **mutualisées** ce qui permet une estimation plus **robuste**
- L'extrapolation des lois est **cohérente aux grands âges** grâce à la contrainte imposée à l'interaction âge - sexe

Comparaison des différentes approches

Précision des différents modèles

La mesure de la précision des différents modèles se fait par exemple à l'aide de l'**AIC** :

$$\text{AIC} = \text{Déviance} + 2 \times \text{Dimension effective}.$$

- La **Déviance** du modèle correspond à son **imprécision**
- La **Dimension effective** (edf) est l'équivalent non-paramétrique du nombre de **paramètres indépendants** présents dans le modèle. C'est une mesure de sa **complexité**. La pénalisation de celle-ci permet d'éviter le **sur-apprentissage**.

Modèle	Déviance	Dimension effective	AIC
Unisexe	594,8	5,3	605,4
Segmenté	87,5	8,6	104,6
Risque proportionnel	124,7	6,2	137,1
Hiérarchique	84,7	9,9	104,6

Ici le **modèle segmenté** et l'approche **hiérarchique - modèles mixtes** obtiennent les meilleurs résultats.

Comparaison des différentes approches

Evaluation selon 4 critères

Les modèles introduits seront évalués sur la base des critères suivants :

- **Précision :** adéquation du modèle aux données
- **Robustesse :** faible sensibilité du modèle aux **fluctuations d'échantillonnage**
- **Cohérence :** cohérence démographique et biologique des résultats obtenus aux grands âges
- **Interprétabilité :** capacité à extraire des informations sur l'**effet des variables explicatives** du modèle

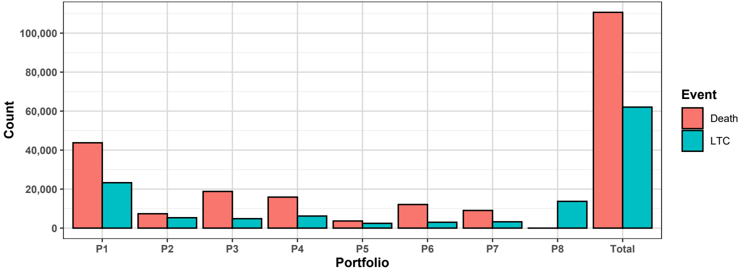
Modèle	Précision	Robustesse	Cohérence	Interprétabilité
Unisexe	- -	+	-	- -
Segmenté	+	-	-	-
Risque proportionnel	-	+	+	+
Hiérarchique	+	+	+ +	+ +

Table des matières

Problématique

Les données

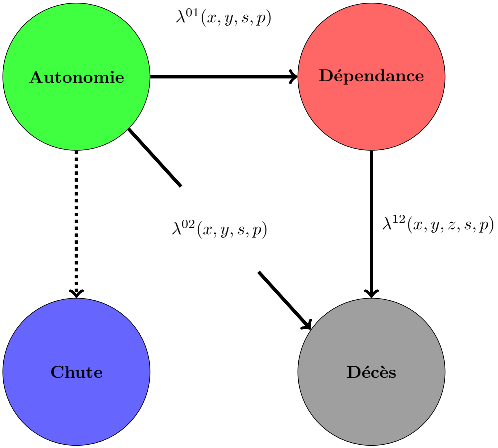
- L'étude présentée ici a été menée début 2020 sur la base de 8 portefeuilles réassurés par **SCOR**
- Ces portefeuilles ont été choisis selon 3 critères : **qualité des données**, **profondeur d'historique**, **volumétrie**
- Ils totalisent plus de **60 000 sinistres observés** mais se basent sur différentes définitions de la dépendance : **partielle** ou **totale**, **grille AGGIR** ou **AVQ**.
- L'objectif était d'estimer une **tendance d'évolution du risque** pour le **modèle interne de la SCOR**



Les résultats de l'étude n'engagent pas la responsabilité du groupe SCOR et ne reflètent pas nécessairement sa vision actuelle sur le risque

Problématique

Modélisation du risque dépendance



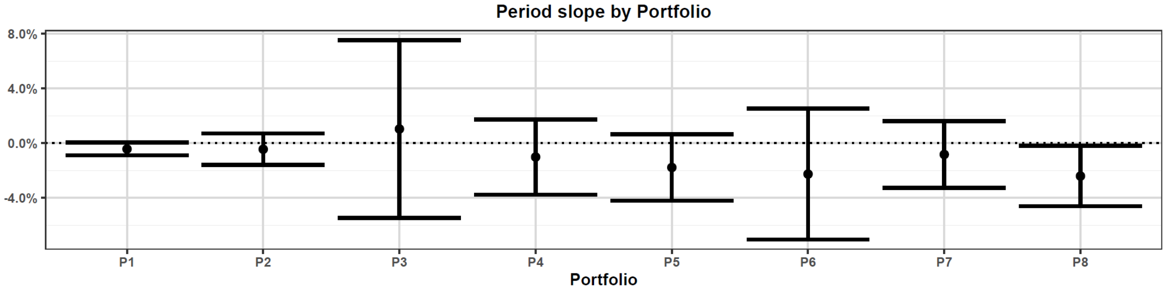
Le modèle multi-états associé au processus de Dépendance

- La modélisation du risque dépendance peut s'appuyer sur le **modèle multi-états** ci-contre
- Ce modèle comprend 3 lois devant être modélisées :
  - ⋆ la **loi d'incidence en dépendance** λ^{01},
  - ⋆ la **loi de mortalité des autonomes** λ^{02}
  - ⋆ la **loi de mortalité des dépendants** λ^{12}
- Celles-ci sont supposées dépendre des variables explicatives suivantes :
  - ⋆ L'**âge atteint**, noté x
  - ⋆ L'**année calendaire**, notée y
  - ⋆ La **durée passée en dépendance**, notée z (pour la loi de mortalité des dépendants uniquement)
  - ⋆ Le **sexe**, noté s
  - ⋆ Le **portefeuille**, noté p

Problématique

La nécessité d'une modélisation multi-portefeuilles

- L'approche visant à **regrouper les données** et à estimer une **loi unique** sans tenir compte de l'origine de celles-ci n'est pas assez précise pour mesurer efficacement une tendance d'évolution
- L'approche par **risques proportionnels** souffre du même défaut
- L'**approche segmentée** par portefeuille fournit toutefois des **tendances d'évolution non significatives** au seuil de 95 % considéré (voir ci-dessous)



Tendance annuelle d'évolution moyenne par portefeuille pour la loi d'incidence

Problématique

Hypothèses

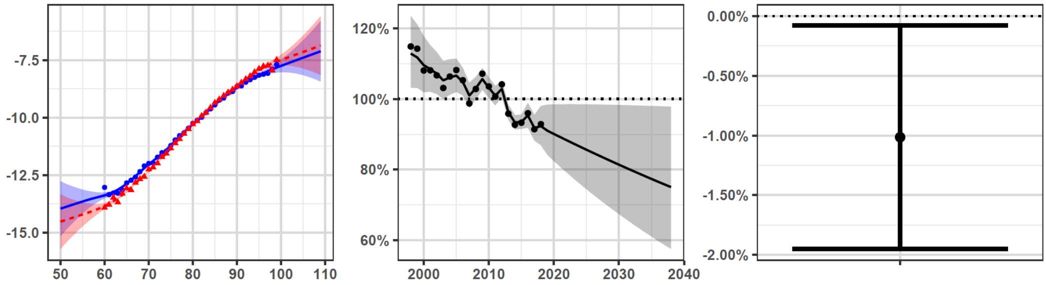
Nous utilisons l'approche hiérarchique - modèles mixtes précédente avec les hypothèses suivantes :

- **Lois d'incidence et de mortalité autonome** :
  - ⋆ Chaque portefeuille possède **ses propres lois** par âge et sexe.
  - ⋆ Les lois pour chaque sexe et chaque portefeuille sont **asymptotiquement exponentielles (et donc proportionnelles entre elles)** aux âges jeunes comme aux grands âges
  - ⋆ Les lois possèdent une **tendance d'évolution annuelle commune (unisexe)** mais peuvent présenter des écarts à cette tendance ponctuels et propres à chaque portefeuille

- **Lois de mortalité des dépendants** :
  - ⋆ Chaque portefeuille possède **sa propre loi** par âge, ancienneté en dépendance et sexe
  - ⋆ Les lois de mortalité des dépendants des différents portefeuilles sont **asymptotiquement constantes aux ancienneté en dépendance élevées** ainsi qu'aux âges jeunes comme aux grands âges

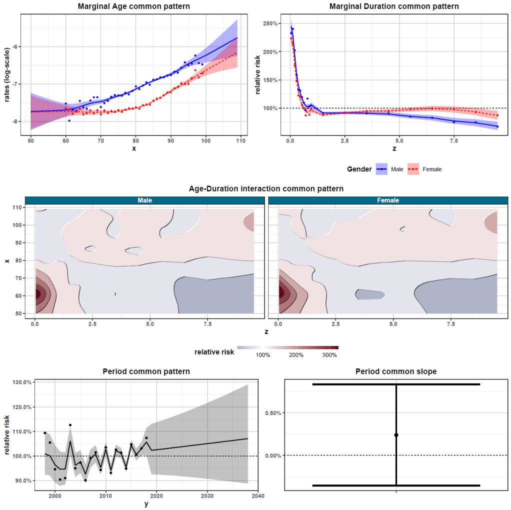
i L'interprétation des résultats présentera d'abord les **effets communs**, indépendants de la variable portefeuille puis la **position relative** des différents portefeuilles.

Effets communs : loi d'incidence en dépendance



- La loi d'incidence en dépendance augmente de manière **quasi-exponentielle avec l'âge**, avec toutefois un ralentissement de la croissance aux âges élevés
- Les taux sont **plus élevés pour les hommes que pour les femmes jusqu'à 80 ans** environ, après quoi la tendance s'inverse
- La loi présente une évolution **en baisse** sur la période avec une amélioration annuelle de l'ordre de 1 % par an, **significative** au seuil de 95 % considéré.

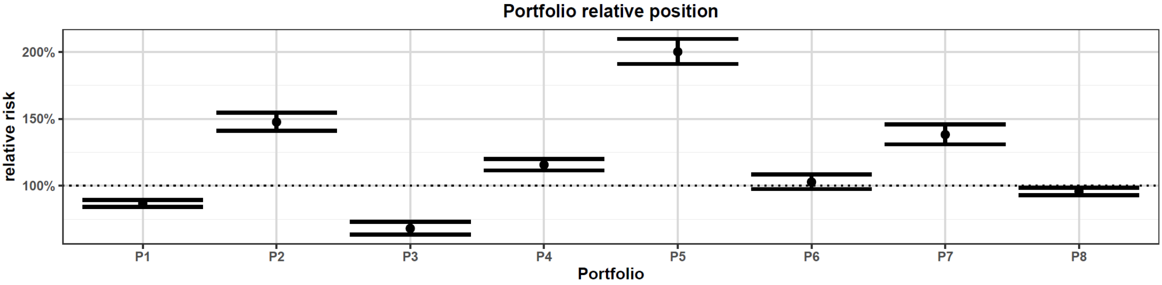
Effets communs : loi de mortalité des dépendants



- La mortalité des dépendants est **croissante avec l'âge** mais cette croissance est assez lente avant 80 ans
- On observe un **pic de mortalité lors des premiers mois passés en dépendance** suivi d'une relative stabilité pour les anciennetés en dépendance plus élevées
- Un **effet croisé** entre ces deux variables est observé : le pic de mortalité est **plus important pour les âges *jeunes*** (inférieurs à 75 ans)
- La mortalité des dépendants présente une **tendance en légère hausse** sur la période (0,25 % par ans) mais celle-ci est **non-significative** au seuil de 95% considéré

Position relative des différents portefeuilles

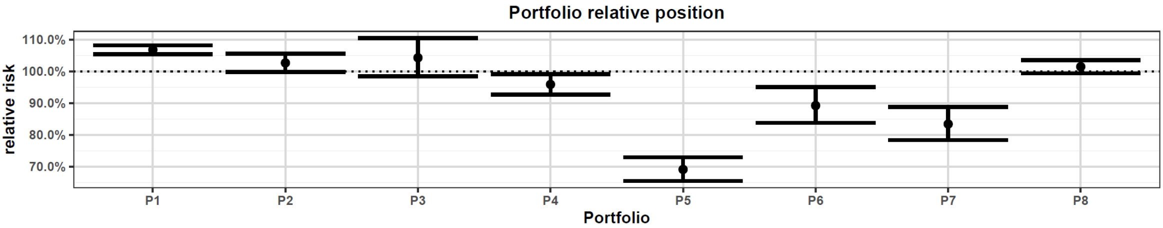
Loi d'incidence en dépendance



- Les portefeuilles P5 et P7 (qui couvrent la **dépendance partielle**) présentent des taux d'incidence supérieurs aux autres portefeuilles
- Les portefeuille P2 et P4 semblent quant à eux appliquer une **politique de gestion plus généreuse** que leurs concurrents
- Ces positions relatives démontrent le **rôle majeur** de la **politique de gestion des sinistres** dans les résultats d'un produit dépendance au même titre que la définition utilisée

Position relative des différents portefeuilles

Loi de mortalité des dépendants



- On observe des **positions relatives globalement symétriques** entre les taux d'incidence précédents et les taux de mortalité des dépendants
- En effet, plus le taux d'incidence est **élevé**, plus les sinistres sont acceptés à un **stade précoce de dépendance**
- Mécaniquement, la **durée moyenne passée en dépendance** sera ainsi **plus importante** pour ces portefeuilles d'où une mortalité des dépendants associée **plus faible**.

Conclusion

Synthèse :

- Nous avons présenté une approche innovante reposant sur 2 idées : **modularité** et **parcimonie**
- Celle-ci s'adapte à la quantité d'information disponible et permet d'obtenir un modèle **précis**, **robuste**, **cohérent** et **interprétable**
- Elles permettent d'estimer dans le cas du **risque dépendance** des caractéristiques communes aux portefeuilles et notamment des **tendances d'évolution** au cours du temps
- La mise en commun de données provenant de sources différentes permet de **renforcer le modèle**, même si ces sources sont **hétérogènes** (*p.ex.* différentes définitions de la dépendance)

Limites et perspectives :

- Cette méthode pourra être utilisée pour la construction de **lois de place**, prospectives ou non, pour le **risque dépendance**
- Si les tendances observées peuvent refléter de réelles évolutions dans les **conditions de vies des personnes âgées, autonomes ou dépendantes**, elles peuvent également capturer des changements dans la **politique de gestion des sinistres** des assureurs

Proposition de protocole

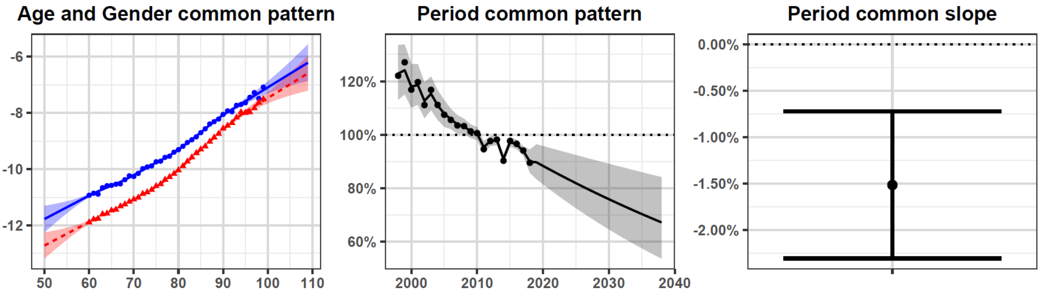
Protocole :

1. Chaque assureur transmet des **données individuelles anonymisées** dans le **format cible** à l'**Institut**
2. L'**Institut** regroupe les données des différents assureurs dans une seule base et **anonymise leur provenance**
3. L'**Institut agrège les données** par combinaison de portefeuille, d'âge, sexe, d'année calendaire et d'ancienneté en dépendance (en tenant compte des différentes franchises)
4. L'**Institut** applique l'**approche de modélisation présentée** aux données agrégées
5. La loi commune obtenue est **rendue publique** et pourra être homologuée
6. Chaque assureur reçoit la **loi individuelle correspondant à son portefeuille**

Avantages de l'approche :

- L'**anonymat des assurés** est préservé durant tout le processus
- Chaque assureur obtient une **connaissance accrue du risque associé à son portefeuille**
- Chaque assureur connaît **sa position par rapport au reste du marché** mais pas la position de ses concurrents pris individuellement

Effets communs : loi de mortalité des autonomes



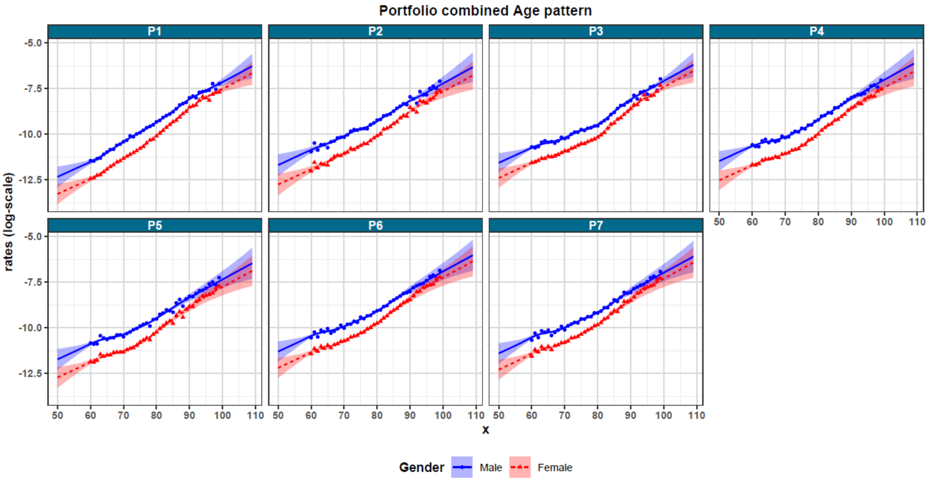
La mortalité des autonomes se comporte comme la mortalité de la population générale et présente :

- Une **croissance exponentielle avec l'âge**
- Un **écart conséquent entre les deux sexes**, qui s'amenuise aux âges élevés

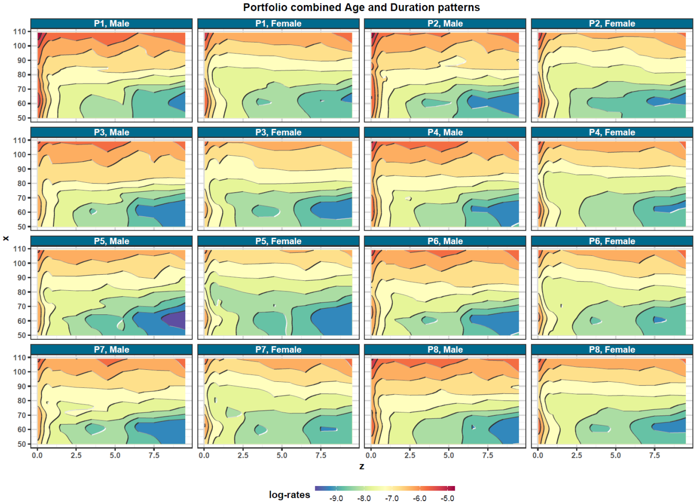
Elle présente une évolution **en nette baisse** sur la période avec une amélioration annuelle de l'ordre de 1,50 % par an, **très significative** au seuil de 95 % considéré.

Loi d'incidence : effet de l'âge

Loi de mortalité autonome : effet de l'âge



Loi de mortalité des dépendants : effet de l'âge et de l'ancienneté en dépendance



Lissage de Whittaker-Henderson

Présentation du lissage

Soit y un vecteur d'observations et w un vecteur de poids positifs ou nuls, tous deux de taille n.

L'estimateur associé au **lissage de Whittaker-Henderson** s'écrit :

$$\hat{y} = \underset{\theta}{\text{argmin}}\{F(y, w, \theta) + R_{\lambda,q}(\theta)\} \quad \text{où :}$$

- $F(y, w, \theta) = (y - \theta)^T W(y - \theta)$ représente un **critère de fidélité aux observations**
- $R_{\lambda,q}(\theta) = \theta^T P_\lambda \theta$ représente un **critère de régularité**

en notant $W = \text{Diag}(w)$ la matrice diagonale des poids et $P_\lambda = \lambda D_{n,q}^T D_{n,q}$ la **matrice de pénalité** où $D_{n,q}$ est la **matrice des différences d'ordre q**, de dimensions $(n - q) \times n$ avec :

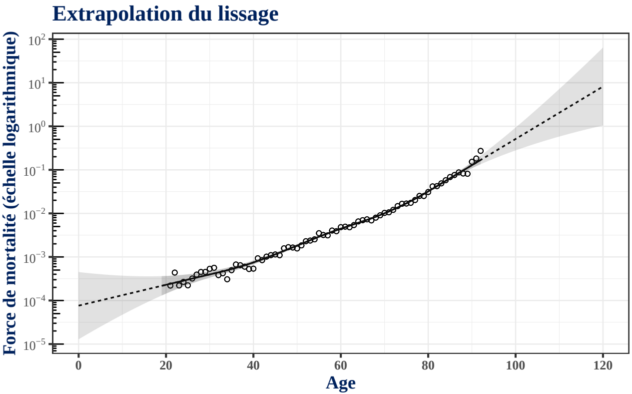
$$D_{n,1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad D_{n,2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice $D_{n,1}$ pénalise ainsi les coefficients **non-constants** et la matrice $D_{n,2}$ les **coefficients non-alignés**.

Lissage de Whittaker-Henderson

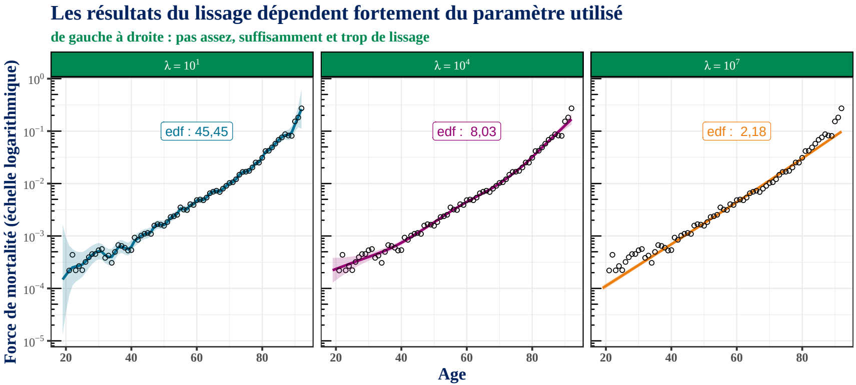
Extrapolation du lissage

- Il est possible (et simple dans le cas unidimensionnel) d'**extrapoler le lissage** au-delà des âges pour lesquels on dispose d'observations
- Cette extrapolation se fait en **minimisant un critère de régularité** étendu aux nouvelles observations
- L'extrapolation du lissage dépend ainsi de l'ordre q choisi pour les matrices de différence :
  - ⋆ Elle est **constante égale au dernier taux estimé** si $q = 1$
  - ⋆ Elle s'inscrit dans le **prolongement affine des deux derniers taux estimés** si $q = 2$



Une approche innovante

Impact du paramètre dans un lissage



Lissage de Whittaker-Henderson appliqué à un portefeuille de données de mortalité fictif

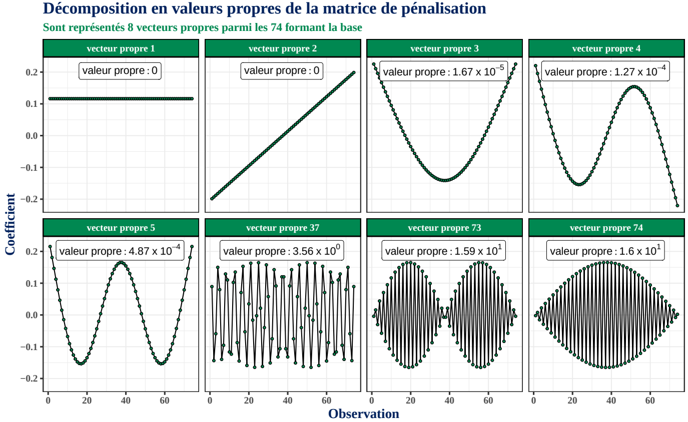
- Le **paramètre de lissage** λ contrôle l'importance relative des critères de fidélité et de régularité
- Les **degrés de liberté** edf représentent un équivalent non-paramétrique du nombre de paramètres indépendants du modèle

Une approche innovante

Un lissage est un modèle mixte

La **décomposition en valeurs propres** de la **matrice de pénalité** permet d'interpréter le lissage en tant que **modèle mixte** :

- Le **signal d'entrée** peut être décomposé dans la base des **vecteurs propres**
- Le lissage va pénaliser d'autant **plus fortement** les différentes composantes du signal qu'elles sont **irrégulières**
- Dans le cas de poids uniforme, chaque composante est ainsi divisée par $1 + \lambda s_k$ où s_k est la **valeur propre** associée à la composante k
- Le résultat du lissage s'obtient alors en sommant les différentes composantes ainsi pénalisées

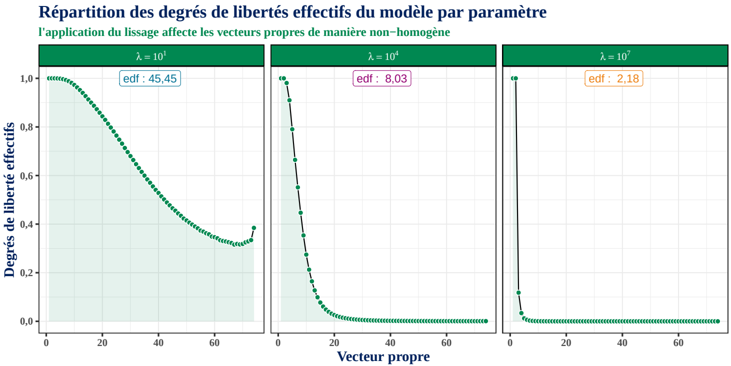


Extrait d'une base de vecteurs propres associés à n = 74 et q = 2. Ces vecteurs propres sont représentés par ordre de pénalisation croissante

Une approche innovante

Un lissage est un modèle mixte

- La figure ci-joint représente les degrés de libertés effectifs par paramètre dans l'illustration du lissage précédente.
- Les q premiers vecteurs propres ne sont jamais pénalisés et les degrés de liberté effectifs associés à ceux-ci sont donc toujours égaux à $1 \Rightarrow$ **effets fixes**
- Les autres vecteurs propres ont des degrés de liberté effectifs strictement décroissants avec $\lambda \Rightarrow$ **effets aléatoires**



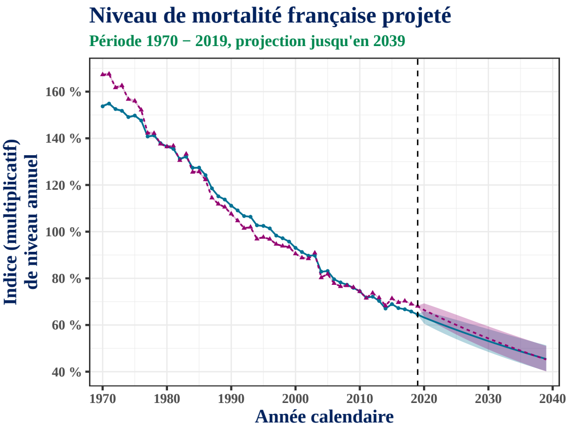
Ces degrés de liberté correspondent à des **coefficients de crédibilité** !

Degrés de liberté effectifs du modèle associés aux vecteurs propres, pour différentes valeurs du paramètre de lissage

Une approche innovante

Une série temporelle est un modèle mixte

- Les modèles de type **ARIMA** comptent parmi les plus utilisés pour construire des tables prospectives
- Ces modèles sont construits à partir de **sommes** ($\Rightarrow$ combinaisons linéaire) de **fluctuations aléatoires** ($\Rightarrow$ effets aléatoires) éventuellement corrélées entre elles, auxquelles s'ajoute une **tendance affine** ($\Rightarrow$ effet fixe)
- Ils peuvent ainsi facilement être interprétés en tant que **modèles mixtes**



> Contrairement aux modèles de séries temporelles classiques, les **modèles mixtes** tiennent compte de l'**incertitude sur les observations** de la série étudiée