

**Bienvenue à toutes et à tous,  
nous allons commencer dans un instant.**

# Modélisation du risque de contrepartie des dérivés de couverture utilisés par l'assureur

-

13 février 2024

-

Rémy LARRECQ

- Le risque de contrepartie est le risque que la contrepartie d'un contrat dérivé fasse défaut avant la date de maturité et qu'une partie des paiements dus ne soient pas récupérés.
- Ce risque a toujours existé mais ne faisait pas l'objet de besoin en fonds propres réglementaires avant la crise financière de 2007.
- Après la crise de 2007, la mise en place de la réglementation Bâle III (2010) a donné lieu à une exigence en fonds propres, puis Solvabilité II (2016).
- Le risque de contrepartie sur les dérivés est quantifié par une grandeur qui s'appelle : Credit Value Adjustment (CVA).

1. Présentation du risque de contrepartie sur les dérivés
  - *Définitions et formules*
2. Méthodes d'évaluation du risque de contrepartie en banque et en assurance
  - *Méthodes réglementaires : Bâle III et SII*
  - *Méthodes avancées : Options et Monte Carlo*
3. Résultats et analyses
  - *Résultats sur plusieurs produits vanilles (taux et change)*
  - *Pilotage du SCR contrepartie sur plusieurs portefeuilles*

# 1. Présentation du risque de contrepartie sur les dérivés

- Définitions et formules
- Enjeux pour les compagnies d'assurances

- La CVA peut aussi être définie comme l'espérance des pertes actualisées :

$$CVA = E^Q[Pertes(A, B)] = \int_{t_0}^T E^Q \left[ (1 - RR) \frac{DF_{t_0}}{DF_t} E(t) \Big| \tau = t \right] dPD(t_0, t)$$

Avec :

$Pertes(A, B)$  = Pertes futures du contrat entre les deux contreparties A et B

$RR$  = Recovery Rate qui correspond au pourcentage récupérée du dérivé

$DF_t$  = Facteur d'actualisation à la date t

$E(t)$  = Exposition future à la date t envers la contrepartie

$PD(t_0, t)$  = Probabilité de défaut de la contrepartie à l'instant t vue à la date  $t_0$

$t_0, t, et \tau$  = respectivement la date de calcul, le temps, et la date du défaut

## Hypothèses faites :

- Indépendance entre l'exposition et la qualité de crédit de la contrepartie
- Taux de recouvrement constant

$$\rightarrow CVA = (1 - RR) \int_{t_0}^T E^Q \left[ \underbrace{\frac{DF_{t_0}}{DF_t} E(t)}_{EE = \text{Expected Exposure}} \right] * dPD(t_0, t)$$

## Enjeux pour les compagnies d'assurance :

- Dans le cadre de leur gestion actif-passif, les assureurs peuvent avoir recours à des dérivés pour se couvrir contre les risques de marché émanant de l'actif comme du passif.
- Par exemple, AXA, 7<sup>ème</sup> assureur mondial, dont l'actif est de 696 Mds d'euros en 2022 publie dans son rapport annuel :
  - ❑ 230,8 Mds d'euros de notionnel pour couvrir le risque de taux (80% de swap, 10% options et 10% futures et forwards)
  - ❑ 170,6 Mds d'euros de notionnel pour couvrir le risque de change (57% futures et forwards, 25% options de change, et 18% de swap de change)
  - ❑ 15,5 Mds d'euros de notionnel pour les actions (74% options, 13% futures et forwards, et 13% swaps)
  - ❑ 10,5 Mds d'euros de dérivés de crédit pour se couvrir contre le risque de contrepartie

## 2. Méthodes d'évaluation du risque de contrepartie en assurance et en banque

- Méthodes réglementaires : Bâle III et SII
- Méthodes avancées : Options et Monte Carlo



## Risque de contrepartie de Solvabilité II (Art. 192 du Règlement Délégué) :

- Le calcul du SCR contrepartie se fait avec **une approche en formule fermée** qui dépend de la qualité de crédit de la contrepartie, du prix du dérivé, de son effet d'atténuation, et du collatéral.

## Risque de contrepartie de Bâle III :

- Deux approches :
  - Une **approche standard** avec une formule fermée qui reprend les mêmes principes que celle de Solvabilité II tout en étant bien plus conservatrice.
  - Une **approche avancée** dans laquelle le risque de contrepartie est calculée à l'aide de la formule discrétisée de la CVA :

$$CVA = (1 - RR) \sum_{k=1}^N EE(t_k) * PD(t_{k-1}; t_k)$$

Pourcentage de l'exposition qui ne sera pas récupérée

Montant de l'exposition en date  $t_k$ .

Probabilité que la contrepartie fasse défaut entre  $t_{k-1}$  et  $t_k$

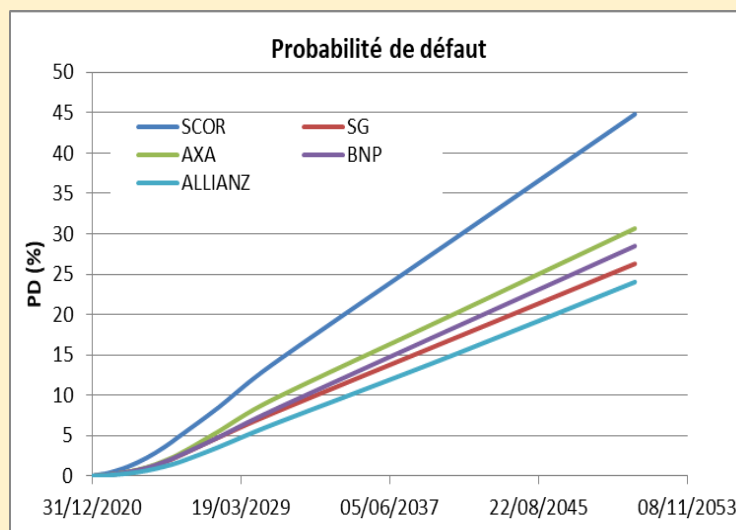
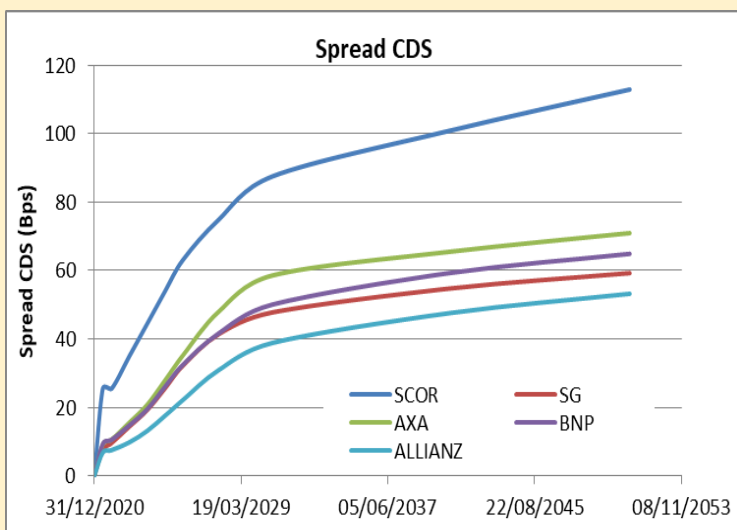
## Méthodes avancées pour calculer la CVA :

1. Calcul de la probabilité de défaut à partir des CDS spreads
2. Calcul des expositions futures :
  - Méthode 1 : À partir de prix d'options
  - Méthode 2 : À partir des Mark-to-Futur via Monte Carlo

Les probabilités de défaut\* (Processus de Poisson) sont calculées à partir :

- des spreads CDS côtés (Options)
- ou d'un processus stochastique (Monte Carlo)

$$* PD(\tau \leq t) = 1 - e^{-\frac{cds(t)}{1-RR} * t}$$

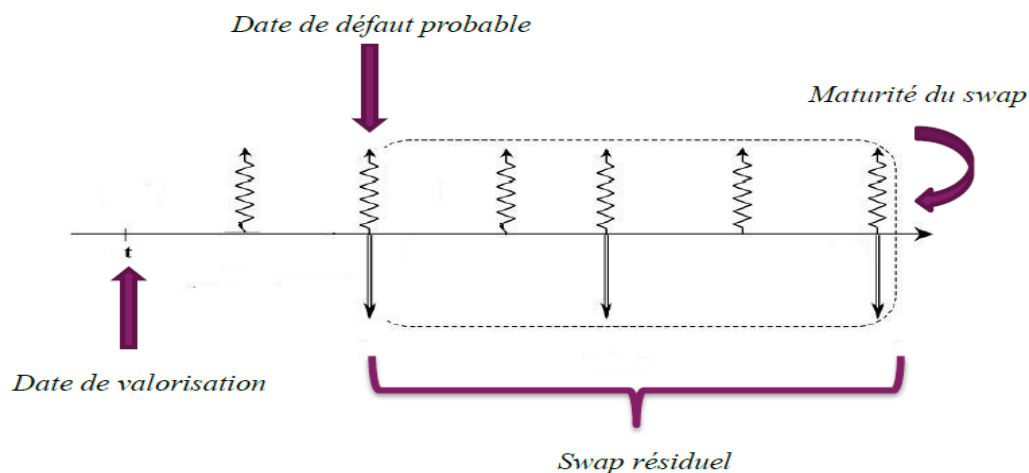


SCOR (A),  
AXA (A+),  
Allianz (AA-)  
SG (A+)  
BNP (A)

## Principe

- Estimer l'EE par une série d'options dont la date d'exercice est la date de défaut de la contrepartie.
- Pour un swap, l'option sous-jacente est une swaption

## Exemple du swap de taux



Hypothèse :

- Taux forward = taux d'actualisation

Contrainte :

- Date de calcul de l'EE à la date de détachement du coupon

$$Mtm_{swap\text{payeur}} = JV - JF = 1 - DF_n - A * tx_{fixe} \approx A(tx_{swap\text{ forward}} - tx_{fixe})$$

$$\rightarrow E[A(tx_{swap\text{ forward}} - tx_{fixe})]^+ = Swaption(tx_{swap\text{ forward}}; tx_{fixe})$$

## Avantages

- S'applique directement au niveau d'une transaction.
- Les options vanilles sont simples à définir et à valoriser.
- L'approche est plus fine que la méthode standard et offre de bons résultats avec aucune donnée calibrée.

## Inconvénients

- Pas de netting : ne s'applique pas de manière globale à un CSA (Credit Support Annex)
- Fonctionne que pour les produits vanilles
- Hypothèses sur les taux forward et taux d'actualisation

## Principe

- Plusieurs scénarios sont générés à des dates futures
- Pour une date future et un scénario donné, le prix du dérivé est calculé (Mark-to-Future). Puis, la moyenne du MtF est calculée pour obtenir l'Expected Exposure (EE) qui est multipliée par la probabilité de défaut du pas de temps et (1-RR) afin d'obtenir la CVA.

## Modèles utilisés

- **Taux** – Hull White 1 facteur  $dr(t) = (a_r(t) - b_r(t)r(t)) * dt + \sigma_r(t)dW_1(t)$
- **Change** – Garman-Kohlhagen  $dF_{ED} = (r_D - r_E)F_{ED}dt + \sigma_{ED}dW_2(t)$
- **Crédit** – Cox-Ingersoll-Ross (CIR)  $ds_t = k(\theta - s(t))dt + \sigma_s\sqrt{s(t)}dW_3(t)$
- **Corrélation SII**

### Avantages

- Netting par contrepartie
- Tous les produits
- L'approche est plus fine

### Inconvénients

- Temps de calcul longs
- Beaucoup de paramètres
- Expertise financière

### 3. Résultats et analyses

- Résultats sur plusieurs produits vanilles (taux et change)
- Pilotage du SCR contrepartie sur plusieurs portefeuilles

*Les calculs ont une date de valeur du 31/12/2020 et les modèles ont été calibrés sur les données du 31/12/2020.*

*Le SCR contrepartie est remis au même niveau de confiance que le risque CVA (99%).*

## CVA sur swap de taux payeur

| Identifiant du produit    | Swap 1             | Swap 2             |
|---------------------------|--------------------|--------------------|
| Date de début             | 04/01/2015         | 04/01/2020         |
| Date de maturité          | 04/01/2025         | 31/03/2036         |
| Nominal                   | 10M€               | 10M€               |
| Broken period             | Start              | Start              |
| Accrual basis             | Act/365            | Act/365            |
| Business day convention   | Modified following | Modified following |
| Fréquence jambe fixe      | Annuelle           | Annuelle           |
| Taux jambe fixe           | 0.20%              | 0.20%              |
| Fréquence jambe variable  | Trimestrielle      | Semestrielle       |
| Indice jambe variable     | Euribor 3M         | Euribor 6M         |
| Marge jambe variable      | 60 bps             | 20 bps             |
| <b>Prix au 31/12/2020</b> | <b>-48 301 €</b>   | <b>133 506 €</b>   |

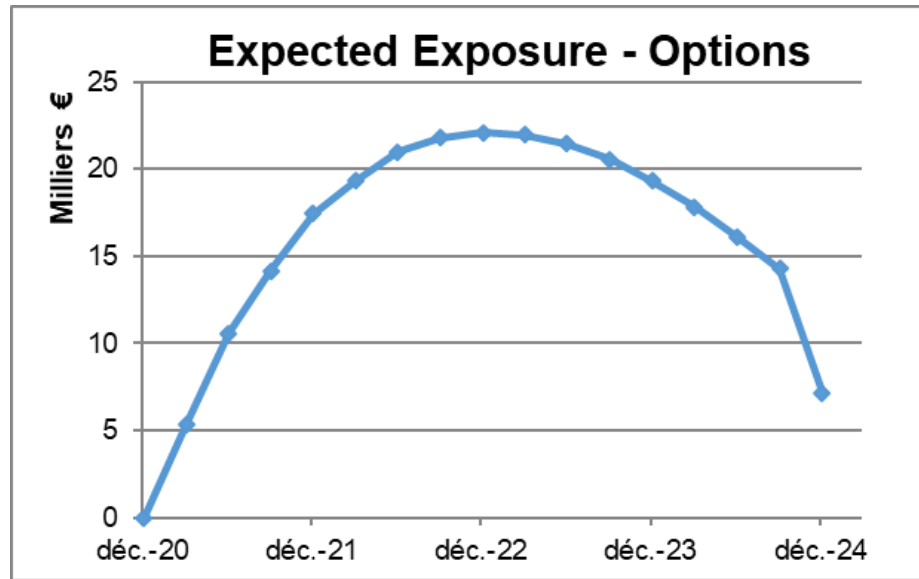
## CVA sur le swap 1 et le swap 2

| Méthode           | SWAP 1      |                   |                              | Méthode           | SWAP 2      |                   |                              |
|-------------------|-------------|-------------------|------------------------------|-------------------|-------------|-------------------|------------------------------|
|                   | VaR CVA (€) | VaR CVA / Nominal | Variation vs. méthode Add-on |                   | VaR CVA (€) | VaR CVA / Nominal | Variation vs. méthode Add-on |
| Standard (Add-on) | 18 969,1    | 0,19%             | -                            | Standard (Add-on) | 265 362,2   | 2,65%             | -                            |
| Options           | 620,2       | 0,01%             | -96,7%                       | Options           | 158 873,7   | 1,59%             | -40,1%                       |
| Monte Carlo       | 4 081,5     | 0,04%             | -78,5%                       | Monte Carlo       | 109 372,8   | 1,09%             | -58,8%                       |
| SCR contrepartie  | 0,0         | 0,00%             | -100,0%                      | SCR contrepartie  | 6 311,6     | 0,06%             | -97,6%                       |

- Swap 1 : Durée résiduelle courte et prix négatif (-48,3k€) -> VaR CVA faible
- Swap 2 : Durée plus longue et prix positif (133,5k€) -> VaR CVA importante
- Une méthode des add-on très conservatrice à cause de la Potential Future Exposure (PFE) de 253,7k€ (swap 1) et de 934k€ (swap 2).
- Des méthodes avancées fournissant une VaR CVA plus faible que celle des add-on
- Des contreparties bien notées et donc des probabilités de défaut faibles
- Le SCR contrepartie est plus faible car les deux approches réglementaires ont des méthodes bien différentes notamment sur le calcul des PD et des expositions.



## CVA sur le swap 1 – EE selon la méthode des options et de Monte Carlo

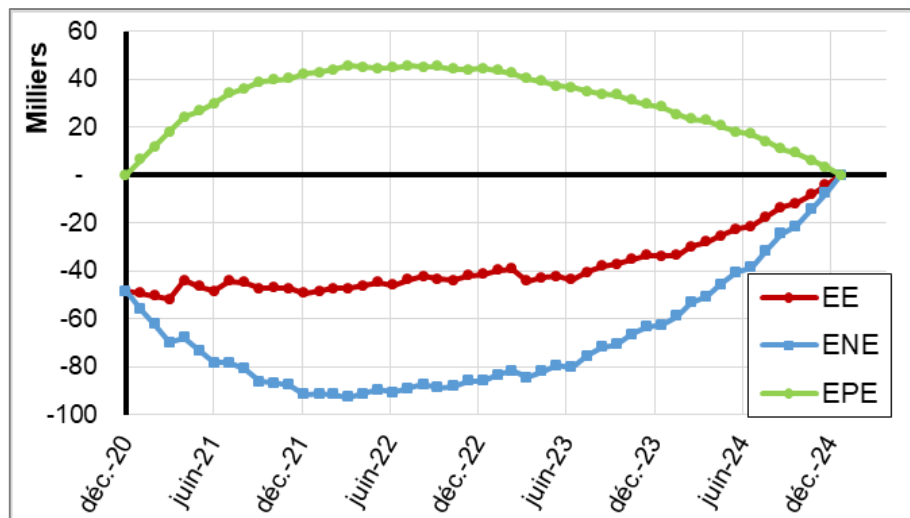


- Profil de l'Expected Exposure : **strictement positif et concave** avec deux effets :

- **Diffusion** : augmentation de l'exposition avec le temps qui matérialise un possible changement des conditions de marché

- **Amortissement** : une baisse du risque avec la baisse des flux à venir quand on avance dans le temps

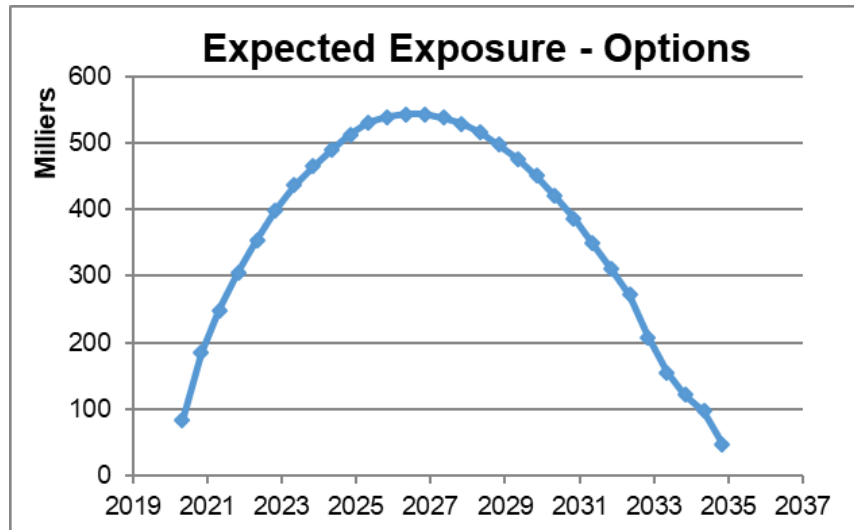
### Profil des expositions – Monte Carlo



- Le profil de l'EPE (Monte Carlo) est à comparer avec celui de l'EE (méthode optionnelle).

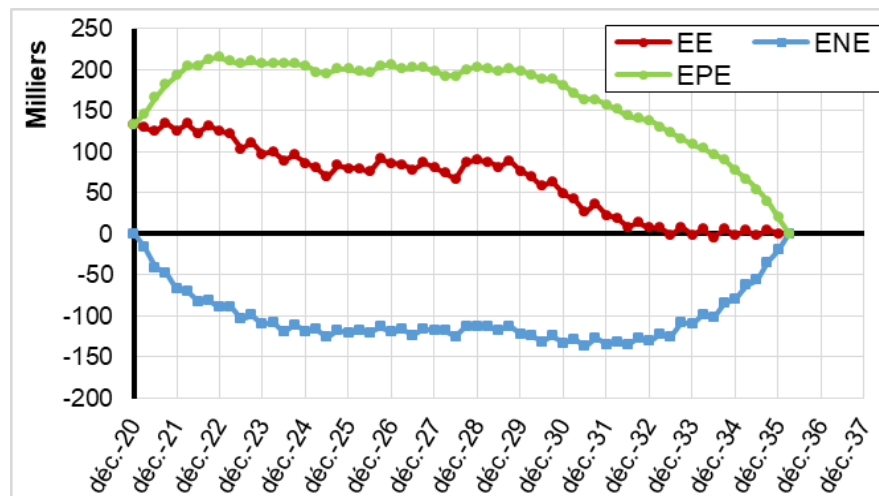
- Point de départ de l'EE pour Monte Carlo est égal au prix du dérivé.

## CVA sur le swap 2 – EE selon la méthode des options et de Monte Carlo



- Phase d'amortissement plus visible sur l'Expected Exposure pour la méthode des options.
- Le point de départ est strictement positif puisque les swaptions sont dans la monnaie dès la première date d'exercice.

## Profil des expositions – Monte Carlo



- Phase d'amortissement visible sur l'EPE et l'ENE à partir de 2030 mais les deux phases restent moins visibles que pour l'EE de la méthode optionnelle
- Profil de l'EE qui reste positif et démarre au niveau du prix du dérivé

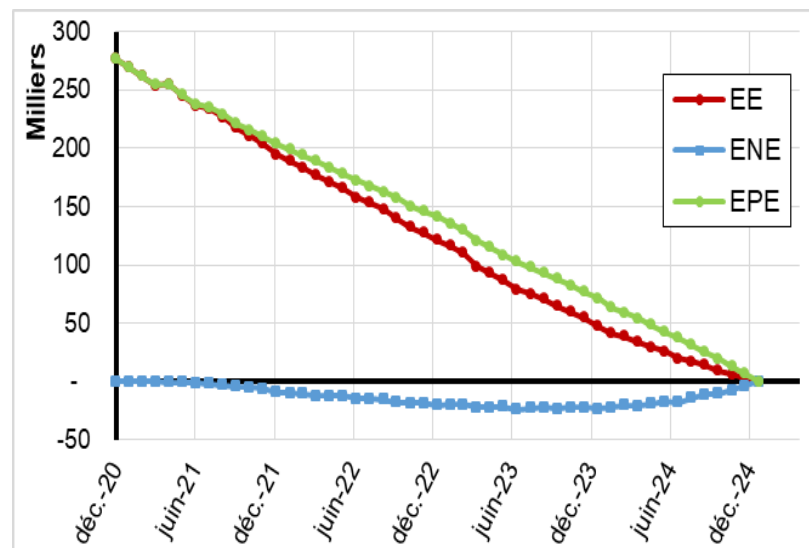
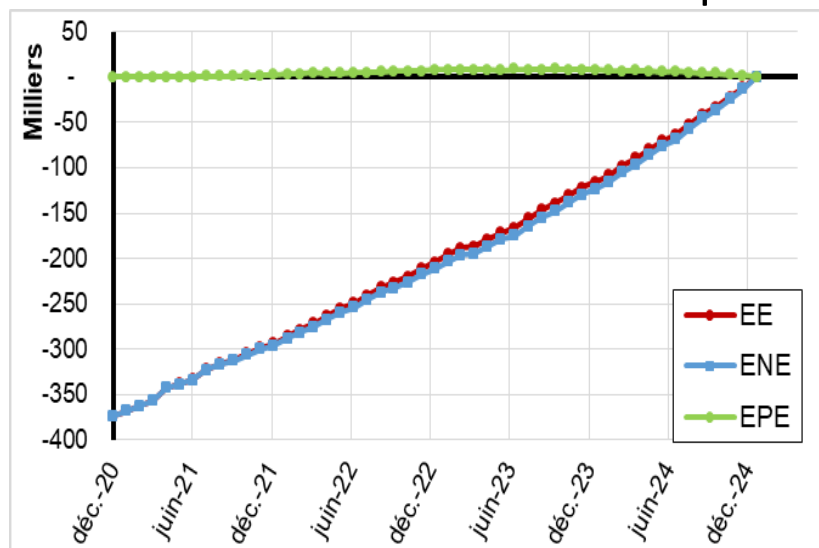
## CVA sur le swap 1 – Sensibilité des profils d'expositions (EE, EPE, ENE)

### Variation du taux fixe de la jambe payeuse du swap 1

Expositions pour le swap 1 avec un taux fixe de 1 % (Mtm << 0)

Expositions pour le swap 1 avec un taux fixe de -0,6 % (Mtm >> 0)

### Profil des expositions – Monte Carlo



Profils extrêmes mais caractéristiques de l'EE, EPE, et ENE d'un swap de taux avec soit un prix très négatif (gauche) ou soit un prix très positif (à droite)

## CVA sur un swap de change (CCS)

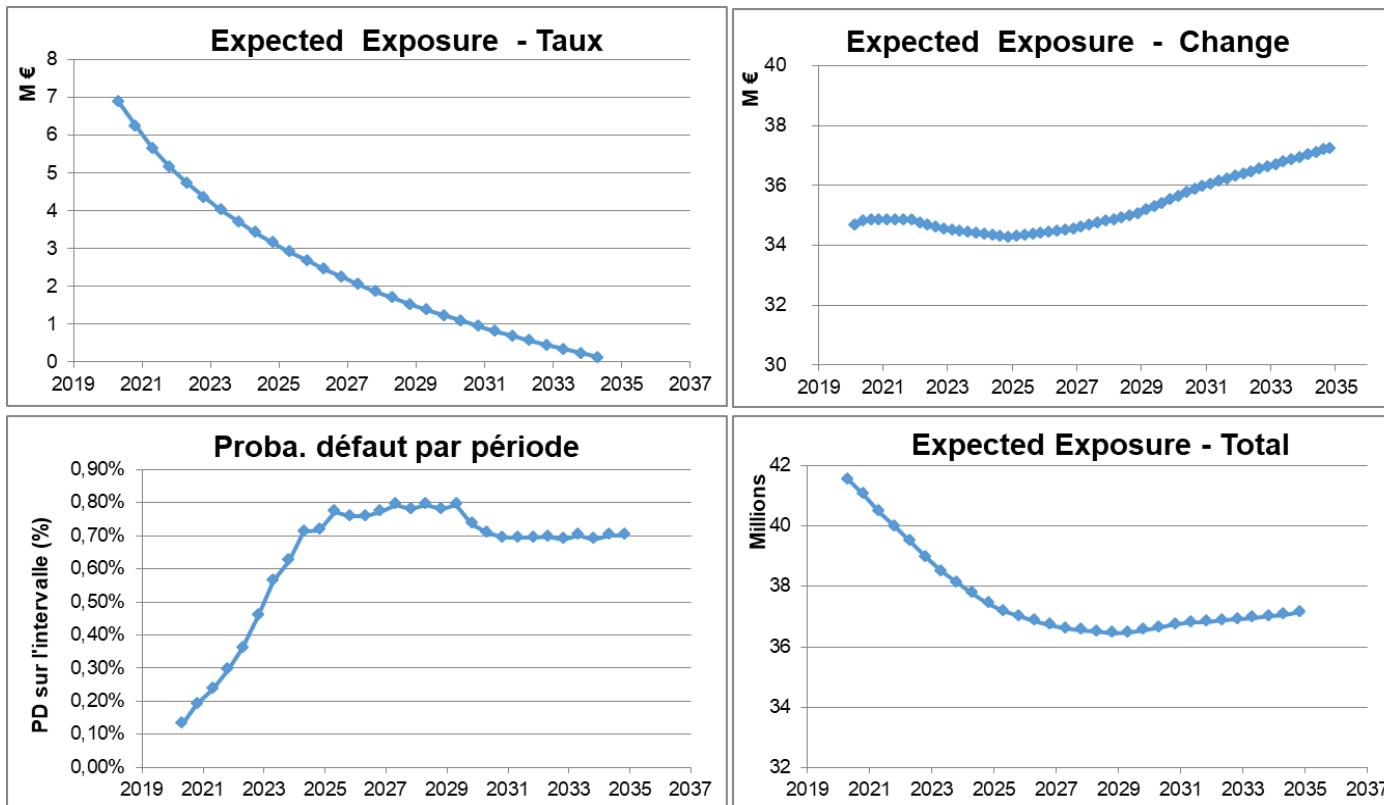
| Identifiant du produit    | CCS                |
|---------------------------|--------------------|
| Date de début             | 30/11/2007         |
| Date de maturité          | 20/09/2036         |
| Broken period             | Start              |
| Accrual basis             | Act/365            |
| Business day convention   | Modified following |
| Nominal jambe fixe        | 16100 M¥ / 100 M€  |
| Fréquence jambe fixe      | Semestrielle       |
| Taux jambe fixe           | 0.5%               |
| Nominal jambe variable    | 100 M€             |
| Fréquence jambe variable  | Trimestrielle      |
| Indice jambe variable     | Euribor 3M         |
| Marge jambe variable      | 0 bps              |
| <b>Prix au 31/12/2020</b> | <b>35,776 M€</b>   |

## CVA sur le swap de change (CCS)

| Méthode           | VaR CVA (€)  | VaR CVA / Nominal | Variation vs. méthode Add-on |
|-------------------|--------------|-------------------|------------------------------|
| Standard (Add-on) | 16 157 172,5 | 12,64%            | -                            |
| Options           | 9 722 527,5  | 7,61%             | -39,8%                       |
| Monte Carlo       | 7 262 308,3  | 5,68%             | -55,1%                       |
| SCR contrepartie  | 2 827 170,5  | 2,21%             | -82,5%                       |

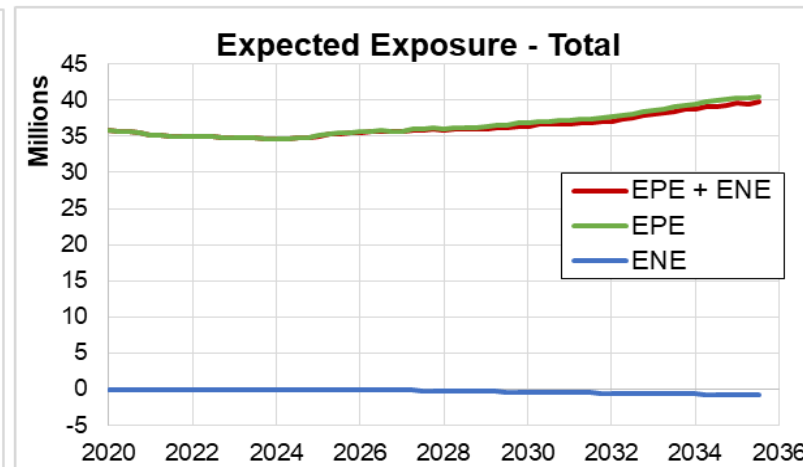
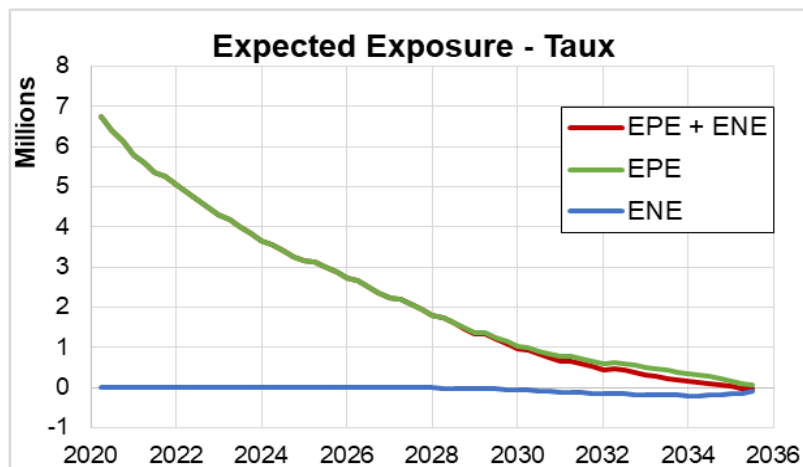
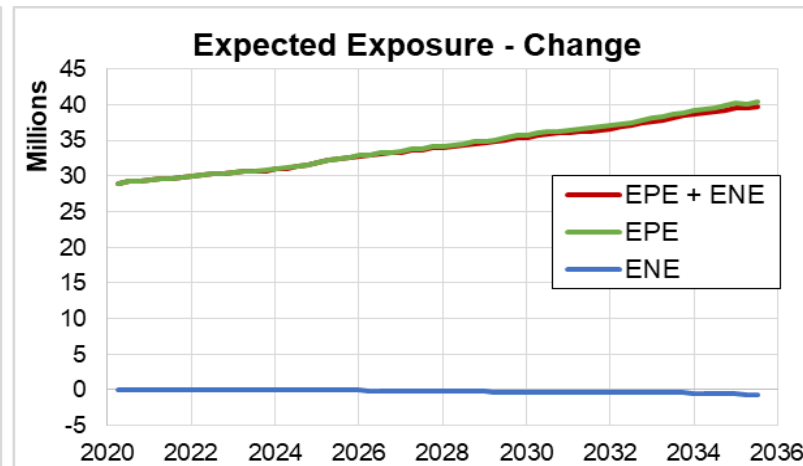
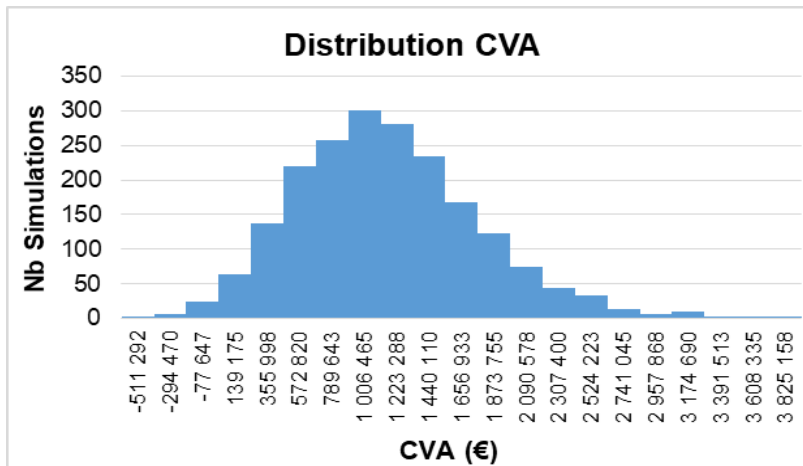
- Valeurs nettement plus importantes que pour les deux swaps précédents à cause d'un prix de marché important (35,7M€) et de la combinaison de deux effets (taux et change).
- Une méthode des add-on toujours très conservatrice
- Des méthodes avancées fournissant une VaR CVA plus faible que celle des add-on (-39,8% et -55,1%)
- Le SCR contrepartie sur ce dérivé toujours en dessous des autres valeurs à cause de la probabilité de défaut nettement en dessous. Par exemple, en prenant la probabilité de 0,8% (Bâle III), le SCR contrepartie serait de 11,283M€.

## CVA sur le swap de change (CCS) – Méthode des options



- Profil de l'exposition taux caractéristique d'un swap de taux dans la monnaie
- L'exposition change qui augmente avec le temps (effet diffusion) à cause de l'échange de nominaux à la date de maturité. L'effet amortissement venant des coupons est négligeable dans ce cas.
- Une exposition totale qui décroît (à cause de l'effet taux) et qui est en légère hausse sur la fin de vie du dérivé à cause de l'effet change

## CVA sur le swap de change (CCS) – Méthode de Monte Carlo



## Principe

→ Transférer du SCR marché vers du SCR contrepartie

### Portefeuille 1 :

Actif : obligation à taux fixe et de duration 15 ans.

Passif : uniquement des fonds propres modélisés par un flux unique à 1 an.

### Portefeuille 2 :

Actif : obligation à taux fixe et de duration 15 ans + swap de taux de même quantité nominal en couverture du risque de taux

Passif : uniquement des fonds propres modélisés par un flux unique à 1 an.

### SCR Portefeuille 1 :

$$SCR_{spread} = Facteur_{SII} * Mtm$$

→ L'obligation est une obligation privée de la zone Euro notée A de duration 15 ans,  $Facteur_{SII} = 13\%$

→ Pour un Mtm de 1€, le SCR spread est alors de 13%.



## SCR Portefeuille 1 :

- Le SCR taux est obtenu en stressant la courbe EIOPA à la hausse et à la baisse le passif. Le choc le plus défavorable est celui à la baisse. Pour un actif de 1€, le SCR taux est alors de **0,42%**
- Par application de la matrice de corrélation SII et de la formule réglementaire, le SCR total est de **13,22%**

## SCR Portefeuille 2 :

- Le  $SCR_{spread}$  est le même que pour le portefeuille 1
- $SCR_{taux} = 0$  car le risque de taux est entièrement couvert
- Le  $SCR_{contrepattie}$  est obtenu en calculant la  $LGD_{SII}$  du dérivé donnée par :  

$$LGD_{SII} = 0.9 * (Mtm + RM_{fin}) = 0.9 * (133.0 + 34.84) * 10^3 = 151.0 \text{ k€}$$

$$SCR_{contrepattie} = 7,06\text{k€}$$
- Le SCR total est alors calculée et divisé par la valeur de l'actif : **13,08%**

→ Le gain de SCR est de **0,14%** de l'actif grâce au transfert du SCR marché vers le SCR contrepattie

# Conclusion

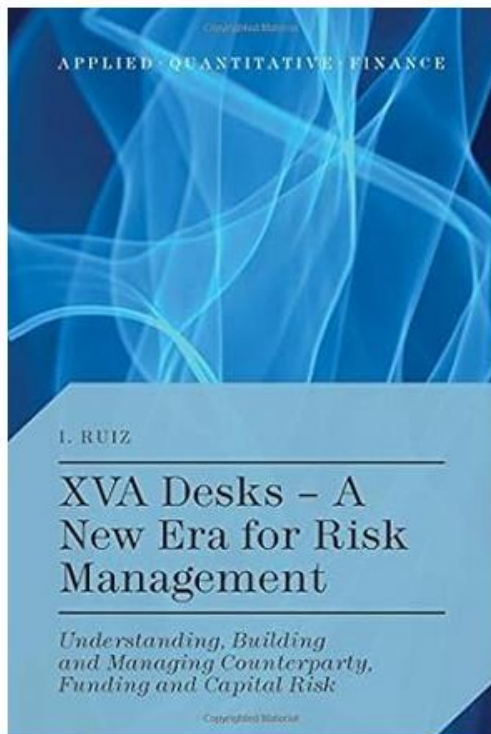
✓ Différentes méthodes pour calculer son risque de contrepartie :

|             | Avantages  | Inconvénients   |
|-------------|--|---|
| Standard    | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Simple à mettre en place et à comprendre</li> <li>• S'applique à tous les produits</li> </ul>   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Très coûteuse en fonds propres</li> </ul>  |
| Options     | <ul style="list-style-type: none"> <li>• S'applique par contrat</li> <li>• Options vanilles simples à calculer</li> <li>• Plus fine et pas de calibration de paramètres</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Pas de netting</li> <li>• Dérivés vanilles uniquement</li> </ul>                                   |
| Monte Carlo | <ul style="list-style-type: none"> <li>• S'applique à tous les produits</li> <li>• Netting possible pour chaque CSA (Credit Support Annex)</li> </ul>                              | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Temps de calcul longs</li> <li>• Beaucoup de paramètres</li> <li>• Expertise financière</li> </ul> |

# Conclusion

- ✓ La mise en place d'une méthode de calcul plus fines va dépendre du portefeuille de dérivés et des moyens disponibles.
- ✓ La mise en place de dérivé pour se couvrir d'un risque de marché peut permettre de réduire son SCR en transférant du SCR marché vers le SCR contrepartie
- ✓ La réglementation assurantielle pourrait être amenée à changer pour une approche plus restrictive comme celle présente dans Bâle III

# ANNEXES



Scientific  
Research  
Publishing

Journal of Mathematical Finance, 2017, 7, 239-274

<http://www.scirp.org/journal/jmf>

ISSN Online: 2162-2442

ISSN Print: 2162-2434



## The Economics of XVA Trading

Peter J. Zeitsch

Calypso Technology Inc., San Francisco, CA, USA

Email: peter\_zeitsch@calypso.com

Article de recherche qui  
explique très bien la xVA  
et ses implications

Porte plutôt sur le trading  
de xVA (assez  
mathématiques)

## Article 192

### Perte en cas de défaut

1. La perte en cas de défaut sur une exposition sur signature unique est égale à la somme de la perte en cas de défaut sur chacune des expositions des contreparties relevant de l'exposition sur signature unique. La perte en cas de défaut est exprimée nette des passifs envers des contreparties relevant de l'exposition sur signature unique pour autant que ces passifs et ces expositions soient compensés en cas de défaut des contreparties et que les dispositions des articles 209 et 210 soient respectées en ce qui concerne ce droit à compensation. Aucune compensation n'est prise en compte si l'on s'attend à ce que les passifs seront éteints avant que l'exposition de crédit soit compensée.

2. La perte en cas de défaut sur un contrat de réassurance ou une titrisation d'assurance se calcule comme suit:

$$LGD = \max[50\% \cdot (REcoverables + 50\% \cdot RM_{re}) - F \cdot Collateral; 0]$$

où:

- (a) *Recoverables* représente la meilleure estimation des montants recouvrables découlant du contrat de réassurance ou de la titrisation d'assurance ainsi que des dettes correspondantes;
- (b)  $RM_{re}$  représente l'effet d'atténuation du risque qu'a le contrat de réassurance ou la titrisation sur le risque de souscription;
- (c) *Collateral* représente la valeur pondérée des sûretés en ce qui concerne le contrat de réassurance ou de titrisation;
- (d) *F* représente un facteur visant à tenir compte de l'effet économique du contrat de sûreté en ce qui concerne le contrat de réassurance ou la titrisation en cas d'événement de crédit concernant la contrepartie.

Lorsque le contrat de réassurance est conclu avec une entreprise d'assurance ou de réassurance ou une entreprise d'assurance ou de réassurance d'un pays tiers et que 60 % ou plus des actifs de la contrepartie sont soumis à des contrats de sûreté, la perte en cas de défaut se calcule comme suit:

$$LGD = \max[90\% \cdot (REcoverables + 50\% \cdot RM_{re}) - F \cdot Collateral; 0]$$

où:

*F* représente un facteur visant à tenir compte de l'effet économique du contrat de sûreté en ce qui concerne le contrat de réassurance ou la titrisation en cas d'événement de crédit concernant la contrepartie.

3. La perte en cas de défaut sur un produit dérivé se calcule comme suit:

$$LGD = \max(90\%(Derivative + RM_{fin}) - F' \cdot Collateral; 0)$$

où

- (a) *Derivative* représente la valeur du dérivé conformément à l'article 75 de la directive 2009/138/CE;
- (b)  $RM_{fin}$  représente l'effet d'atténuation qu'a le dérivé sur le risque de marché;
- (c) *Collateral* représente la valeur pondérée des sûretés en ce qui concerne le dérivé;
- (d) *F* représente un facteur tenant compte de l'effet économique du contrat de sûreté en ce qui concerne le dérivé en cas d'événement de crédit concernant la contrepartie.

## Article 199

### Probabilité de défaut

1. La probabilité de défaut d'une exposition sur signature unique est égale à la moyenne des probabilités de défaut de chacune des expositions sur les contreparties qui relèvent de l'exposition sur signature unique, pondérée par la perte en cas de défaut pour ces expositions.

2. Une exposition sur signature unique  $i$  pour laquelle une évaluation de crédit établie par un OEEC désigné est disponible se voit attribuer une probabilité de défaut  $PD_i$  conformément au tableau suivant.

| Échelon de qualité de crédit | 0       | 1      | 2      | 3      | 4      | 5     | 6     |
|------------------------------|---------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|
| Probabilité de défaut $PD_i$ | 0,002 % | 0,01 % | 0,05 % | 0,24 % | 1,20 % | 4,2 % | 4,2 % |

3. Une exposition sur signature unique  $i$  sur une entreprise d'assurance ou de réassurance pour laquelle une évaluation de crédit établie par un OEEC désigné n'est pas disponible et qui respecte son minimum de capital requis, se voit attribuer une probabilité de défaut  $PD_i$  en fonction du ratio de solvabilité de l'entreprise, conformément au tableau suivant:

| Ratio de solvabilité  | 196 %  | 175 %  | 150 % | 125 % | 122 %  | 100 % | 95 %  | 75 %  |
|-----------------------|--------|--------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|
| Probabilité de défaut | 0,01 % | 0,05 % | 0,1 % | 0,2 % | 0,24 % | 0,5 % | 1,2 % | 4,2 % |

Lorsque le ratio de solvabilité est situé entre les ratios de solvabilité précisés dans le tableau ci-dessus, la valeur de la probabilité de défaut est interpolée de manière linéaire à partir des valeurs de probabilité de défaut les plus proches correspondant aux ratios de solvabilité les plus proches mentionnés dans le tableau ci-dessus. Lorsque le ratio de solvabilité est inférieur à 75 %, la probabilité de défaut est de 4,2 %. Lorsque le ratio de solvabilité est supérieur à 196 %, la probabilité de défaut est de 0,01 %.

### Classement des évaluations de crédit effectuées par les organismes externes d'évaluation du crédit selon une échelle objective d'échelons de qualité de crédit

| Échelon de qualité de crédit  | 0   | 1  | 2 | 3   | 4  | 5 | 6                         |
|---|-----|----|---|-----|----|---|---------------------------|
| <i>Standard &amp; Poor's Credit Market Services France SAS, Standard &amp; Poor's Credit Market Services Italy Srl, Standard &amp; Poor's Credit Market Services Europe Limited</i> |     |    |   |     |    |   |                           |
| Échelle de notation de crédit des émetteurs à long terme mondiale   | AAA | AA | A | BBB | BB | B | CCC,<br>CC,<br>R,<br>SD/D |

## Probabilité de défaut : Bâle III

Lorsqu'il y a plus d'une position sur couverture indicielle,  $M_{ind}$  est l'échéance pondérée par les montants notionnels.

2. Lorsqu'une contrepartie entre dans la composition d'un indice sur lequel est basé un CDS utilisé à des fins de couverture du risque de crédit de contrepartie, l'établissement peut déduire le montant notionnel attribuable à cette contrepartie, conformément à sa pondération d'entité de référence, du montant notionnel du CDS indiciel et le traiter comme une couverture à signature unique ( $B_i$ ) de cette contrepartie, avec une échéance basée sur l'échéance de l'indice.

Tableau 1

| Échelon de qualité de crédit | Pondération $w_i$ |
|------------------------------|-------------------|
| 1                            | 0,7 %             |
| 2                            | 0,8 %             |
| 3                            | 1,0 %             |
| 4                            | 2,0 %             |
| 5                            | 3,0 %             |
| 6                            | 10,0 %            |

La correspondance des échelons de crédit est fournie dans l'annexe III du Capital Requirements Regulation (CRR) :

- 1 -> AAA à AA-
- 2 -> A+ à A-
- 3 -> BBB+ à BBB-
- 4-> BB+ à B-
- 5-> inférieur à B-
- 6 -> non cotée



Les corrélations historiques sont calculées sur une profondeur de 7 ans (2015-2021). Les grandeurs suivantes ont été prises pour calculer la matrice de corrélation historique ;

- Change : la paire de devise EUR/USD
- Immobilier : l'indice « EDHEC IEIF immobilier d'entreprise France »
- Taux : l'indice « BOFA Merrill Lynch 10-15 All Euro gouvernement Index »,
- Actions : l'indice Eurostoxx 50 total return
- Spread : Moyenne pondérée d'indices de spread de crédit entreprise notée AAA à NN d'un portefeuille obligataire supposé de composition constante sur les 7 années

## Corrélations réelles

| Corrélations | Taux    | Action  | Immobilier | Spread  | Change  |
|--------------|---------|---------|------------|---------|---------|
| Taux         | 100,00% | 12,66%  | 18,44%     | 65,52%  | -11,99% |
| Action       | 12,66%  | 100,00% | -1,04%     | 43,36%  | -3,47%  |
| Immobilier   | 18,44%  | -1,04%  | 100,00%    | 10,34%  | -14,31% |
| Spread       | 65,52%  | 43,36%  | 10,34%     | 100,00% | -5,31%  |
| Change       | -11,99% | -3,47%  | -14,31%    | -5,31%  | 100,00% |

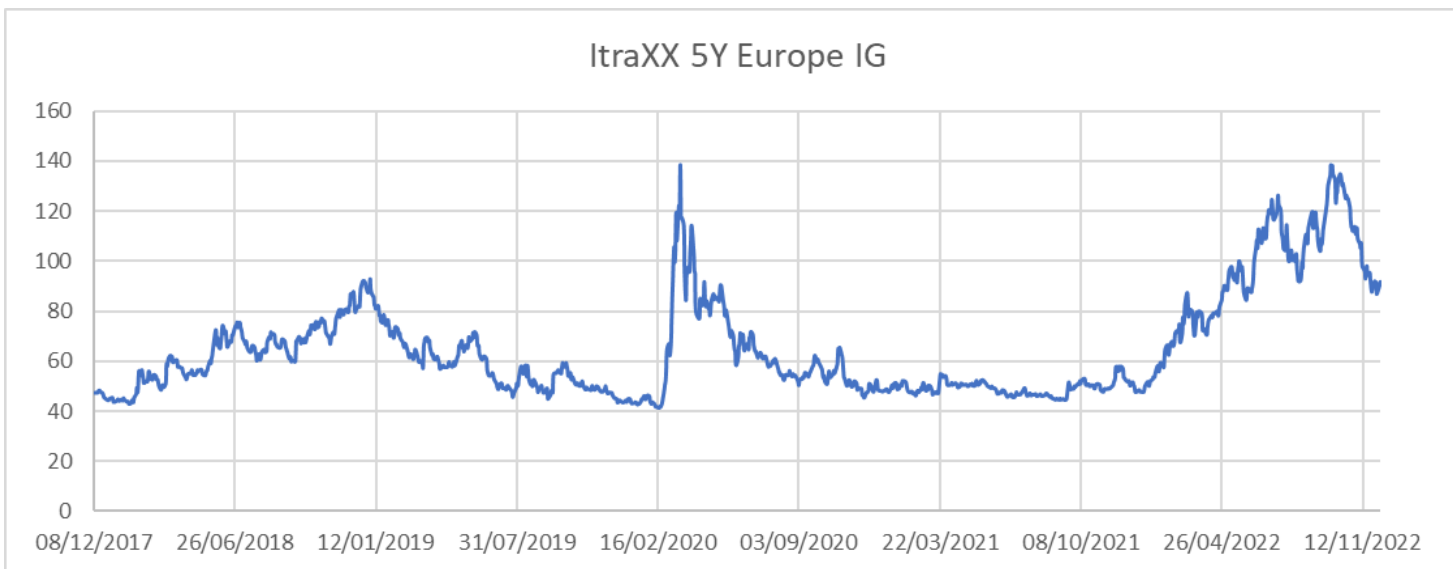
## Corrélations Solvabilité II

| i \ j              | Taux d'intérêt | Actions | Actifs immobiliers | Marge | Concentration | Devise |
|--------------------|----------------|---------|--------------------|-------|---------------|--------|
| Taux d'intérêt     | 1              | A       | A                  | A     | 0             | 0,25   |
| Actions            | A              | 1       | 0,75               | 0,75  | 0             | 0,25   |
| Actifs immobiliers | A              | 0,75    | 1                  | 0,5   | 0             | 0,25   |
| Marge              | A              | 0,75    | 0,5                | 1     | 0             | 0,25   |
| Concentration      | 0              | 0       | 0                  | 0     | 1             | 0      |
| Devise             | 0,25           | 0,25    | 0,25               | 0,25  | 0             | 1      |

Le paramètre A est égal à 0 lorsque l'exigence de capital pour risque de taux d'intérêt fixée à l'article 165 est l'exigence de capital visée au point a) dudit article. Dans tous les autres cas, le paramètre A est égal à 0,5.

Les corrélations entre les deux matrices sont globalement de même signe sauf pour le change. Ceci s'explique par notre hypothèse de prendre uniquement l'EUR/USD. Les corrélations SII ont l'avantage d'avoir fait l'objet d'une calibration approfondie, il paraît donc plus pertinent de les prendre en compte. Ceci constitue un choix ou une limite propre à ce mémoire.

Pour connaître le choc à appliquer sur les spreads CDS afin de calculer une VaR stressée dans le cadre du calcul des fonds propres réglementaires pour le risque CVA, nous avons calculé la volatilité historique des spreads CDS sur différentes périodes. L'indice retenu est un ItraXX Europe 5Y pour des obligations Investment grade (notes >BBB-). L'historique sur les 5 dernières années des niveaux des CDS de l'ItraXX est tracé ci-dessous



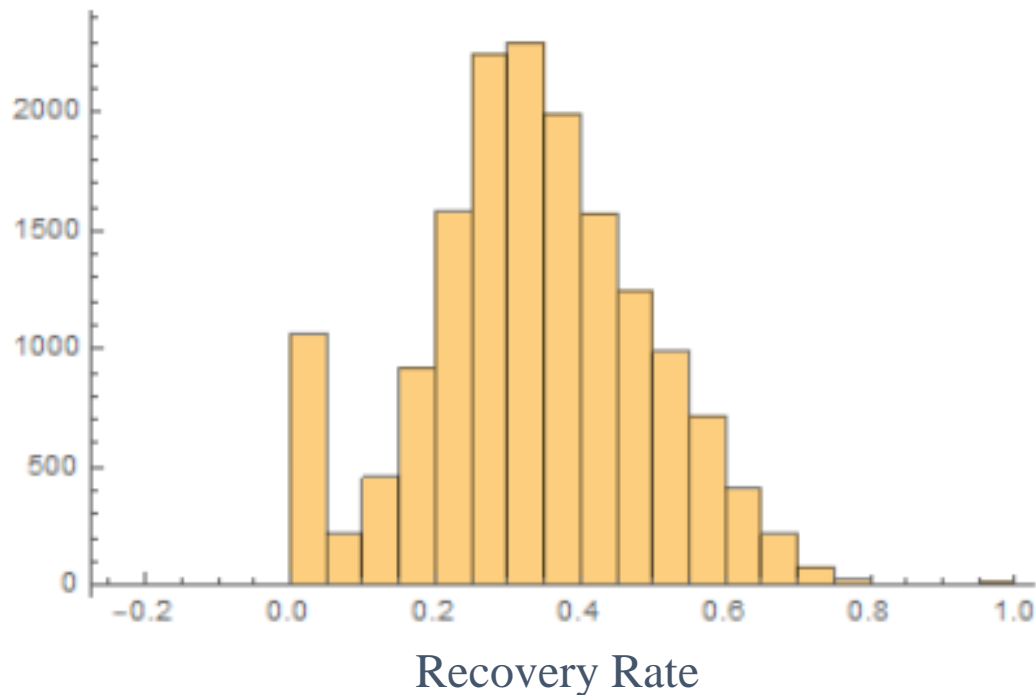
A partir de cette série temporelle, on distingue deux périodes de crises, la première en 2020 lors de la crise Covid-19, et la seconde en 2022 après le début de la guerre en Ukraine. La moyenne et la volatilité de l'indice a été calculée depuis 5 ans, 3 ans et sur 2020 :

|                   | 2017-2022 | 2019-2022 | 2020   |
|-------------------|-----------|-----------|--------|
| <b>Moyenne</b>    | 67,74     | 91,46     | 62,69  |
| <b>Volatilité</b> | 21,38%    | 26,59%    | 29,48% |

Valeur retenue : + 29,48%

## Distribution historique du taux de recouvrement (Recovery Rate)

- Données issues de Moody's de 2005 à 2014 portant sur 542 entreprises (16052 données).



Moyenne : 33,6%

Médiane : 33,3%

## Historique du taux de recouvrement (Recovery Rate)

Table V  
Recovery Rates Statistics by Year

This table reports some annual statistics of the sample used in the paper. First column figures are default frequencies extracted from Standard & Poor's (2006). The other three columns are the number of observations and the mean and standard deviation for recovery rates.

| Year | Default frequency | Number of observations | Mean Recovery | Standard Deviation |
|------|-------------------|------------------------|---------------|--------------------|
| 1981 | 0.14%             | 1                      | 12.00         | -                  |
| 1982 | 1.18%             | 12                     | 39.51         | 14.90              |
| 1983 | 0.75%             | 5                      | 48.93         | 23.53              |
| 1984 | 0.90%             | 11                     | 48.81         | 17.38              |
| 1985 | 1.10%             | 16                     | 45.41         | 21.87              |
| 1986 | 1.71%             | 24                     | 36.09         | 18.82              |
| 1987 | 0.94%             | 20                     | 53.36         | 26.94              |
| 1988 | 1.42%             | 30                     | 36.57         | 17.97              |
| 1989 | 1.67%             | 41                     | 43.46         | 28.78              |
| 1990 | 2.71%             | 76                     | 25.24         | 22.28              |
| 1991 | 3.26%             | 95                     | 40.05         | 26.09              |
| 1992 | 1.37%             | 35                     | 54.45         | 23.38              |
| 1993 | 0.55%             | 21                     | 37.54         | 20.11              |
| 1994 | 0.61%             | 14                     | 45.54         | 20.46              |
| 1995 | 1.01%             | 25                     | 42.90         | 25.25              |
| 1996 | 0.49%             | 19                     | 41.90         | 24.68              |
| 1997 | 0.62%             | 25                     | 53.46         | 25.53              |
| 1998 | 1.31%             | 34                     | 41.10         | 24.56              |
| 1999 | 2.15%             | 102                    | 28.99         | 20.40              |
| 2000 | 2.36%             | 120                    | 27.51         | 23.36              |
| 2001 | 3.78%             | 157                    | 23.34         | 17.87              |
| 2002 | 3.60%             | 112                    | 30.03         | 17.18              |
| 2003 | 1.92%             | 57                     | 37.33         | 23.98              |
| 2004 | 0.73%             | 39                     | 47.81         | 24.10              |
| 2005 | 0.55%             | 33                     | 58.63         | 23.46              |

Source : *Bank for International Settlements*

Summary table of supervisory parameters

Table 2

| Asset Class         | Subclass     |  | Supervisory factor | Correlation | Supervisory option volatility |
|---------------------|--------------|--|--------------------|-------------|-------------------------------|
| Interest rate       |              |  | <b>0.50%</b>       | N/A         | 50%                           |
| Foreign exchange    |              |  | <b>4.0%</b>        | N/A         | 15%                           |
| Credit, Single Name | AAA          |  | <b>0.38%</b>       | 50%         | 100%                          |
|                     | AA           |  | <b>0.38%</b>       | 50%         | 100%                          |
|                     | A            |  | <b>0.42%</b>       | 50%         | 100%                          |
|                     | BBB          |  | <b>0.54%</b>       | 50%         | 100%                          |
|                     | BB           |  | <b>1.06%</b>       | 50%         | 100%                          |
|                     | B            |  | <b>1.6%</b>        | 50%         | 100%                          |
|                     | CCC          |  | <b>6.0%</b>        | 50%         | 100%                          |
| Credit, Index       | IG           |  | <b>0.38%</b>       | 80%         | 80%                           |
|                     | SG           |  | <b>1.06%</b>       | 80%         | 80%                           |
| Equity, Single Name |              |  | <b>32%</b>         | 50%         | 120%                          |
| Equity, Index       |              |  | <b>20%</b>         | 80%         | 75%                           |
| Commodity           | Electricity  |  | <b>40%</b>         | 40%         | 150%                          |
|                     | Oil/Gas      |  | <b>18%</b>         | 40%         | 70%                           |
|                     | Metals       |  | <b>18%</b>         | 40%         | 70%                           |
|                     | Agricultural |  | <b>18%</b>         | 40%         | 70%                           |
|                     | Other        |  | <b>18%</b>         | 40%         | 70%                           |

## Modèles utilisés

Taux – Hull White 1 facteur

$$dr(t) = (a_r(t) - b_r(t) * r(t)) * dt + \sigma_r(t) * dW_1(t)$$

Avec  $a_r$  une fonction déterministe du temps,  $b_r$  est la vitesse de retour à la moyenne reliant le taux court au taux long,  $\sigma_r$  la volatilité des taux court et  $W_1$  un mouvement brownien standard.

→ Le modèle est calibré sur les prix des caps observés sur le marché au 31/12/2020

$$DF_{HW}(t, T) = A(t, T) * e^{-B(t, T) * r(t, T)}$$

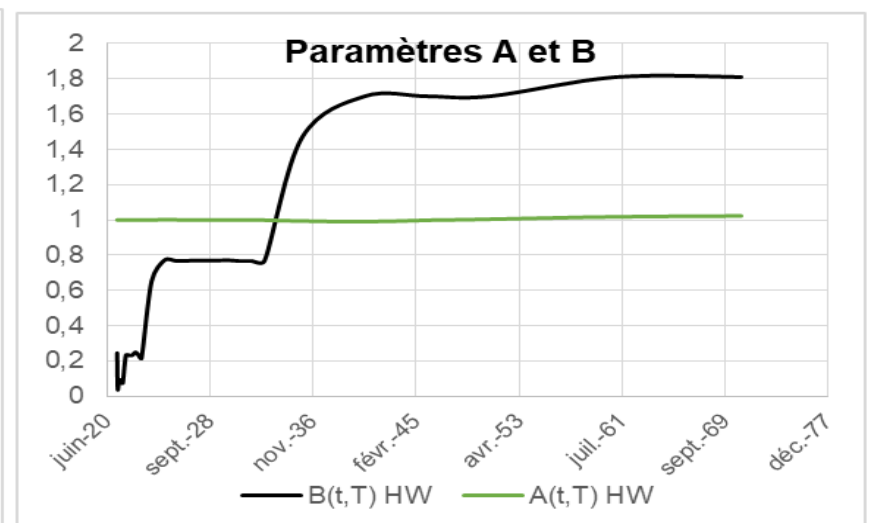
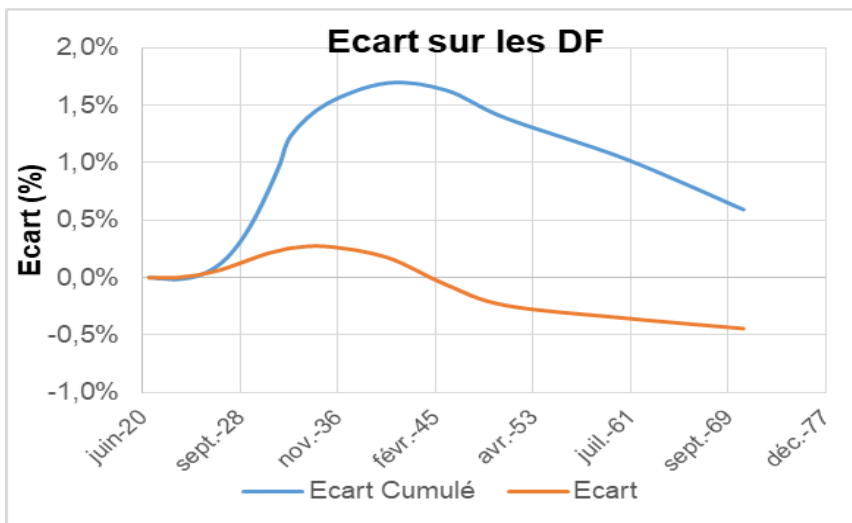
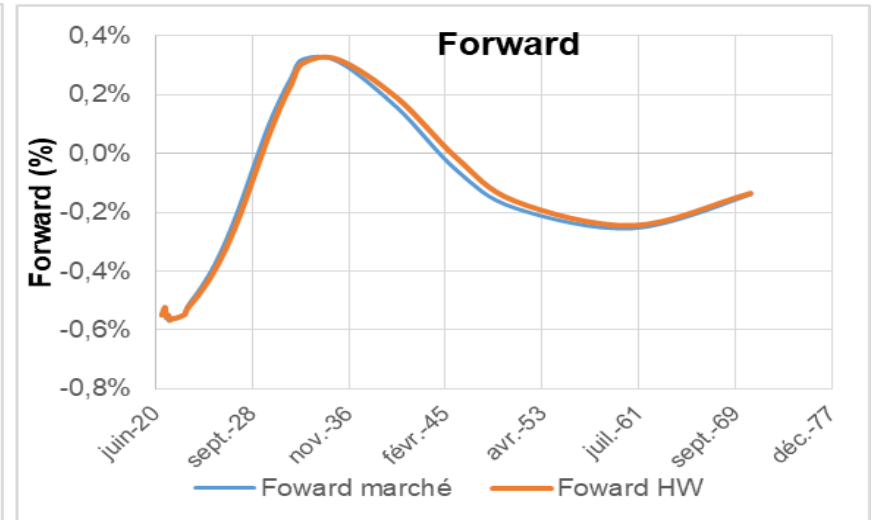
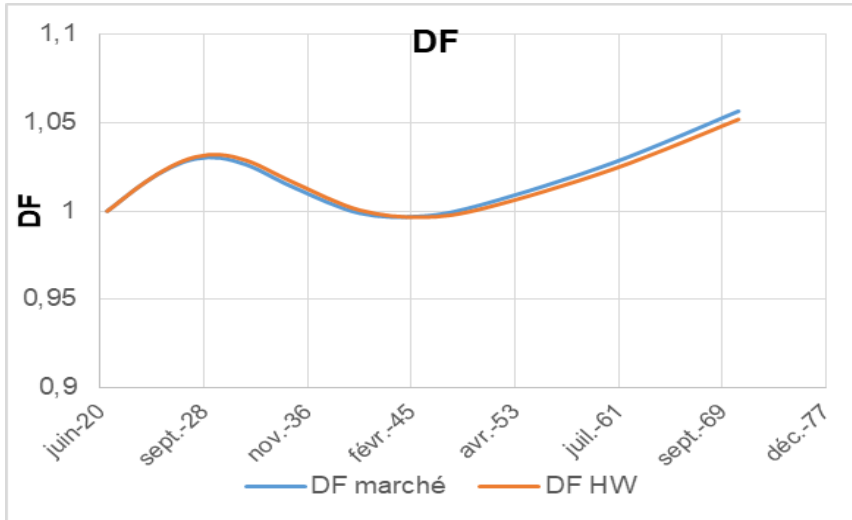
$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-b_r(t) * (T-t)}}{b_r(t)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(t, T) = \frac{DF_{marché}(0, T)}{DF_{marché}(0, t)} * e^{-B(t, T) * fwd(0, t, t+dt) - C(\sigma, t, b_r)} \\ fwd(0, t, t + dt) = \frac{1}{dt} * \left( \frac{DF_{marché}(0, t + dt)}{DF_{marché}(0, t)} - 1 \right) \\ C(\sigma, t, b_r) = \sigma_r^2 (e^{-b_r T} - e^{-b_r t})^2 * \frac{e^{2b_r t} - 1}{4b_r^3} \end{array} \right.$$

Avec  $DF_{HW}$  le prix d'une obligation zéro-coupon donné par le modèle d'Hull White et  $DF_{marché}$  celui du marché.

## Modèles utilisés

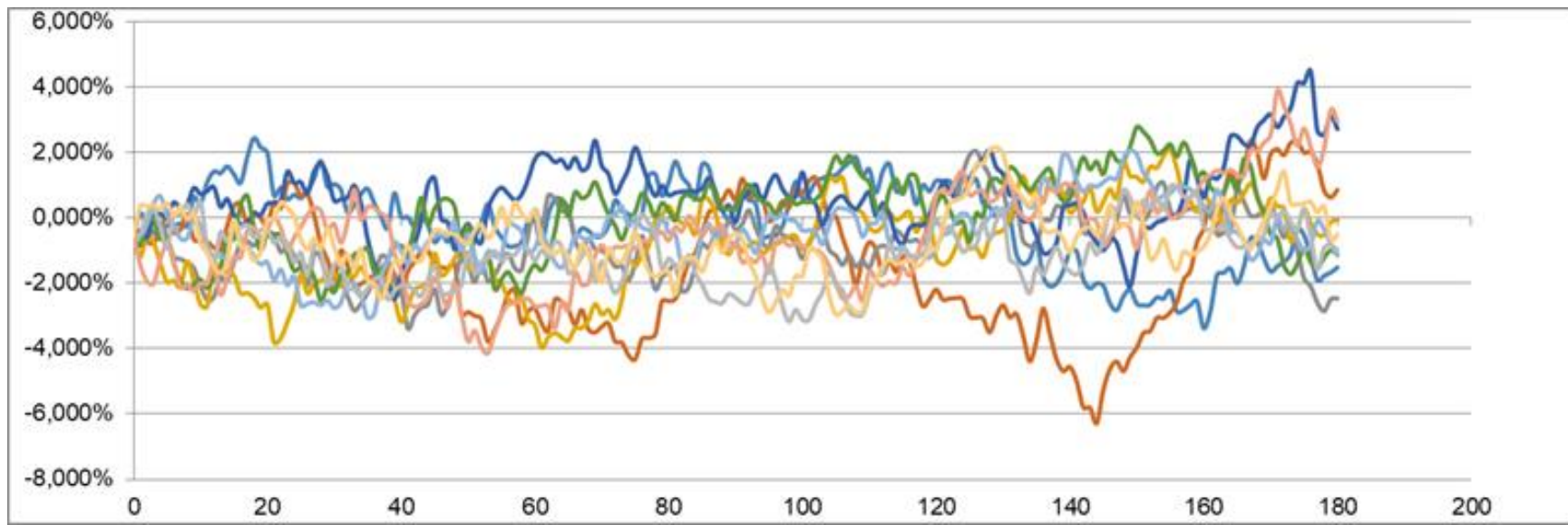
Après résolution numérique, les résultats suivants sont obtenus et tracés sur les différents graphiques ci-dessous :



### Modèles utilisés

Les 10 premières trajectoires obtenues avec ces paramètres pour le taux courts Euribor 6M sont tracés ci-dessous :

Trajectoires des taux courts simulés pour l'Euribor 6M avec  $b = 0.9$  et  $\sigma = 0.015$



| Paramètres   | €STR | EUR3M | EUR6M |
|--------------|------|-------|-------|
| <b>b</b>     | 0,8  | 0,55  | 0,9   |
| <b>sigma</b> | 0,02 | 0,016 | 0,015 |



## Modèles utilisés

*Change* – Garman-Kohlhagen (Brownien géométrique)

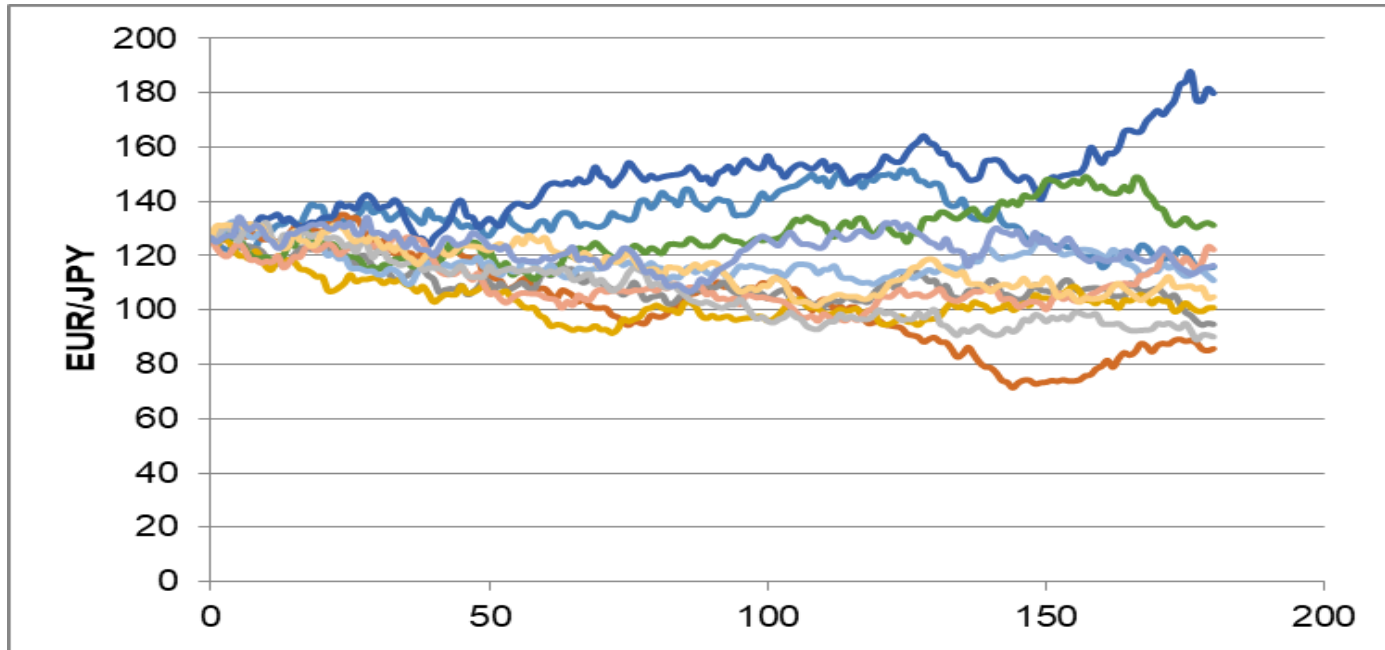
$$dF_{EEEEDDD} = (r_{DDD} - r_{EEE})F_{EEEEDDD}dt + \sigma_{EEEEDDD}dW_2(t)$$

Avec  $F_{EEEEDDD}$  le cours de change spot à la date de valorisation entre la devise étrangère (EEE) et la devise domestique (DDD),  $r_{DDD}$  et  $r_{EEE}$  les taux zéro-coupon courts respectivement dans la devise étrangère et domestique,  $\sigma_{EEEEDDD}$  la volatilité moyenne des options ATM du cours de change EEE/DDD. Enfin  $W_2$  un mouvement brownien standard.

- Modèle calibré sur les données du 31/12/2020 de la paire de devise EUR/JPY (le swap de change étudié par la suite est sur cette paire)
- Le taux de change EURJPY spot au 31/12/2020 est 126.84. Le taux court dans les deux devises sont  $r_{EEE} = -0.04\%$  et  $r_{DDD} = -0.55\%$ . La volatilité d'une option EURJPY ATM au 31/12/2020 est de 7.06%. A titre de comparaison, la volatilité annuelle historique sur un an d'historique est de 3.08% et la volatilité sur 3 ans d'historique est de 4.83%.

## Modèles utilisés

A partir des paramètres ci-dessus, les 10 premières trajectoires des cours de change EUR/JPY sont tracées ci-dessous :



Le terme  $r_{DDD} - r_{EEE}$  est négatif ce qui fait apparaître une pente négative sur les taux de change simulés.

## Modèles utilisés

*Crédit* - Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

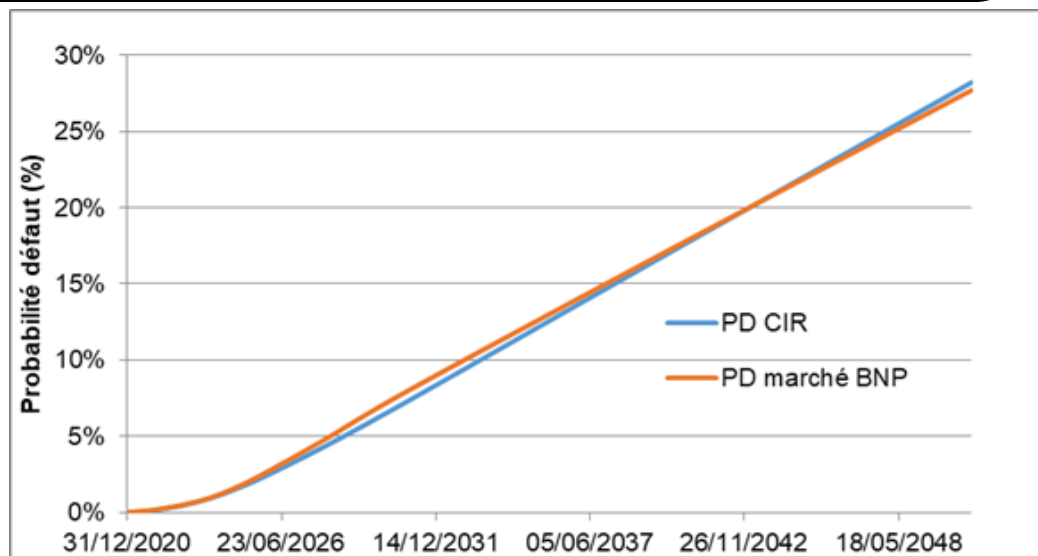
$$ds_t = k * (\theta - s(t))dt + \sigma_s * \sqrt{s(t)}dW_3(t)$$

Avec  $k$  la vitesse de retour à la moyenne des spreads,  $\theta$  le niveau des CDS à long terme,  $\sigma_s * \sqrt{s(t)}$  la volatilité du processus, et  $W_3$  un mouvement brownien standard.

→ Diffusion d'une grandeur strictement positive (spread CDS >0)

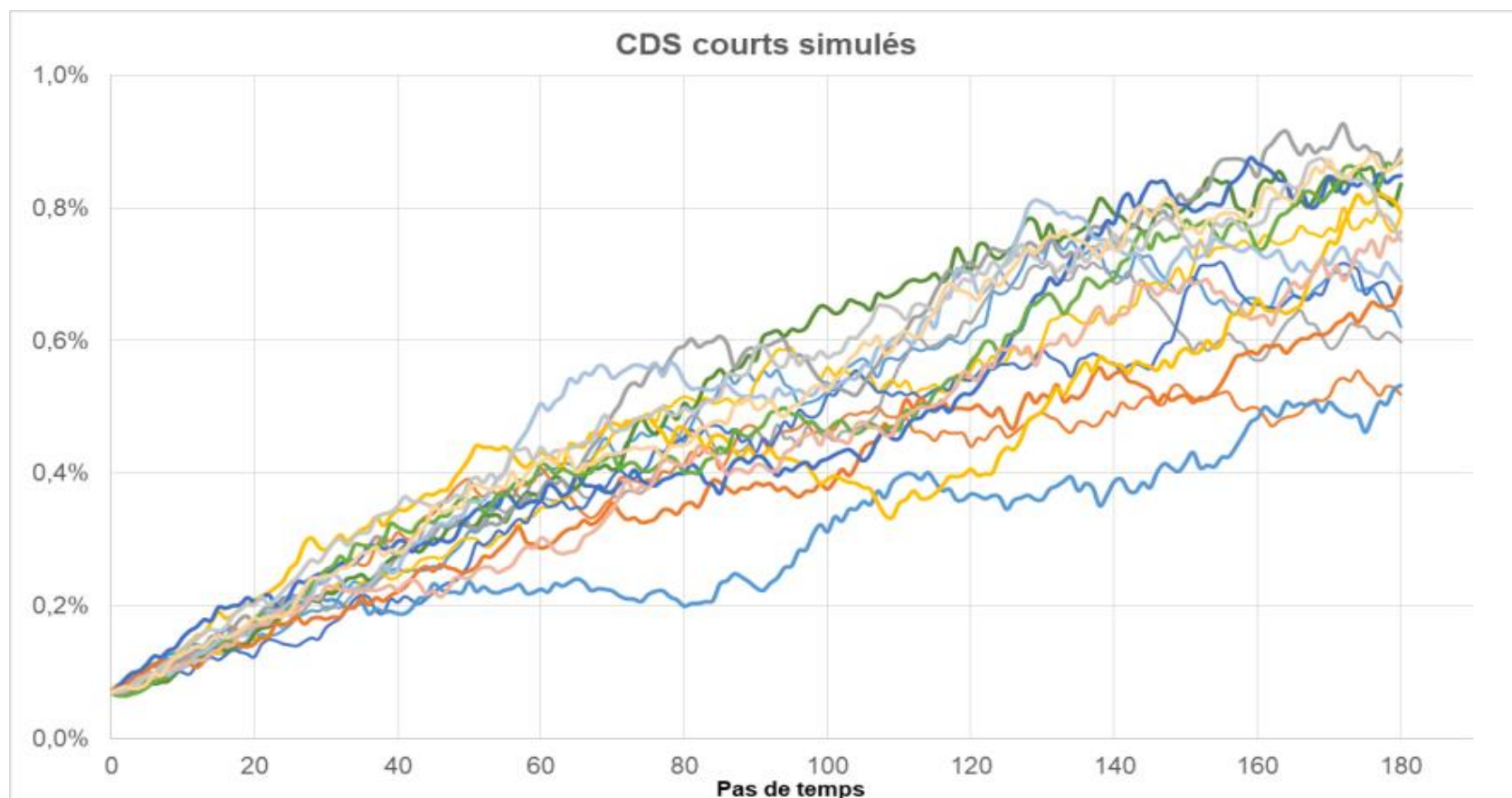
→  $2k * \theta > \sigma_s^2$  avec  $k, \theta, et \sigma_s$  appartenant à  $\mathbb{R}^{+*}$ . Si ces trois paramètres sont nuls alors le processus est défini mais n'a aucun intérêt.

**Après la résolution numérique,** l'erreur quadratique est  $9.98.10^{-5}$ , et les paramètres sont :  $k = 6.85\%$ ,  $\theta = 1.45\%$ , et  $\sigma = 1.05\%$ . La condition pour que ce modèle existe est vérifiée puisque  $2k * \theta > \sigma_s^2$  donne  $0.0019$  qui est bien supérieur à  $0.0001$ .



## Modèles utilisés

A partir des paramètres  $k, \theta, et \sigma$  obtenues, les CDS courts sont simulés sur les 15 prochaines années avec un pas de temps  $dt = 20$  jours. Au pas de temps de temps 180 (31/12/2035), les CDS courts simulés sont en moyenne de 0.7%.



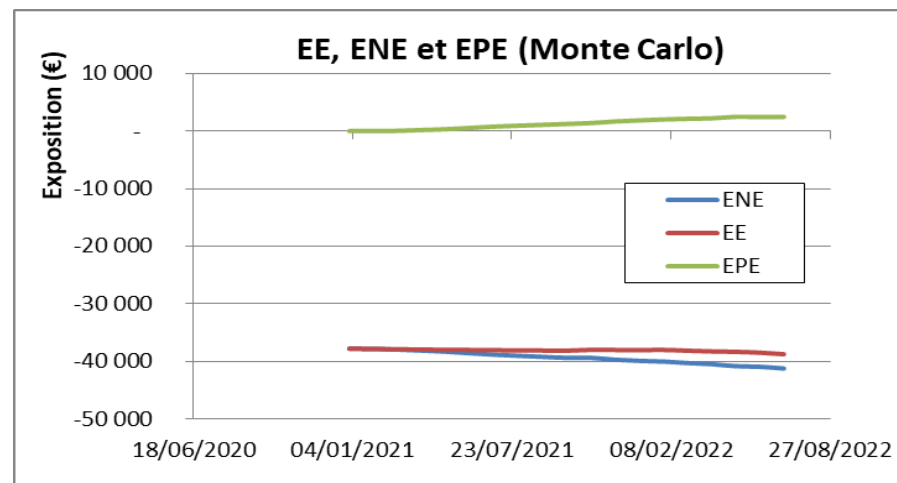
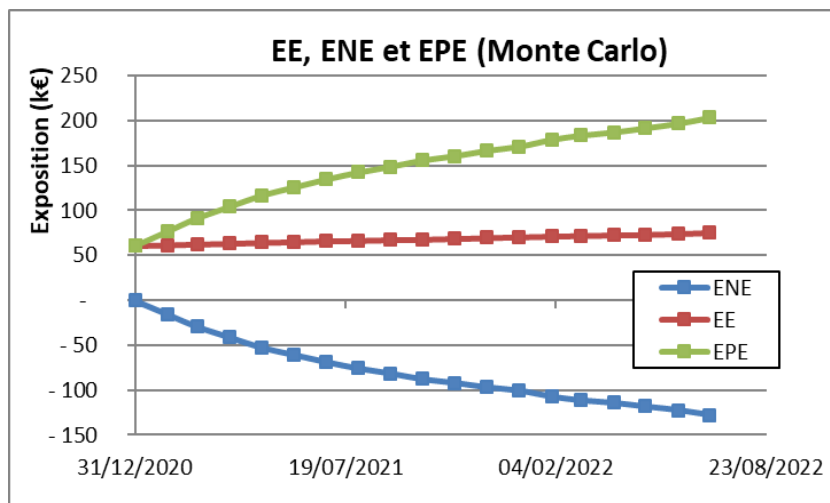
- Profil croissant avec concentration du risque à la date de maturité car aucun flux intermédiaire venant réduire l'exposition.
- Effet Diffusion uniquement

## Forward de change dans la monnaie

| Méthode          | VaR CVA (€) | VaR CVA / Nominal | Variation vs. méthode Add-on |
|------------------|-------------|-------------------|------------------------------|
| Add-on           | 10 468,7    | 0,21%             | -                            |
| Options          | 2 273,2     | 0,05%             | -78,3%                       |
| Monte Carlo      | 665,4       | 0,01%             | -93,6%                       |
| SCR contrepartie | 3 820,9     | 0,08%             | -63,5%                       |

## Forward de taux en dehors de la monnaie

| Méthode          | VaR CVA (€) | VaR CVA / Nominal | Variation vs. méthode Add-on |
|------------------|-------------|-------------------|------------------------------|
| Add-on           | 335,0       | 0,01%             | -                            |
| Options          | 2,0         | 0,00%             | -99,4%                       |
| Monte Carlo      | 0,0         | 0,00%             | -100,0%                      |
| SCR contrepartie | 0,0         | 0,00%             | -100,0%                      |



## 20.2 INSTRUMENTS DÉRIVÉS PAR TYPE DE COUVERTURE

Les instruments dérivés de couverture se présentent comme suit :

|                              | 31 décembre 2022   |              |  |                |  |              |  |              |                    |                |
|------------------------------|--|--------------|--|----------------|--|--------------|--|--------------|--------------------|----------------|
|                              | Instruments dérivés utilisés dans une relation de couverture de juste valeur |              | Instruments dérivés utilisés dans une relation de couverture de flux de trésorerie |                | Instruments dérivés utilisés dans une relation de couverture d'investissements nets à l'étranger |              | Macro-couverture et autres instruments dérivés hors couverture au sens IAS 39 utilisés néanmoins principalement dans le cadre de couvertures économiques |              | Total              |                |
|                              | Valeur notionnelle   | Juste valeur | Valeur notionnelle   | Juste valeur   | Valeur notionnelle   | Juste valeur | Valeur notionnelle   | Juste valeur | Valeur notionnelle | Juste valeur   |
| <i>(En millions d'euros)</i> |  |              |  |                |  |              |  |              |                    |                |
| Dérivés de taux d'intérêt    | 42 639   | 2 487        | 39 127   | (5 120)        | -  | -            | 149 009  | 637          | 230 775            | (1 996)        |
| Dérivés actions              | 1 048  | (9)          | -  | -              | -  | -            | 14 446   | 224          | 15 493             | 214            |
| Dérivés de change            | 3 976  | 73           | 14 873   | (837)          | 16 571   | (138)        | 135 190  | 1 397        | 170 610            | 495            |
| Dérivés de crédit            | -  | -            | -  | -              | -  | -            | 10 499   | 53           | 10 499             | 53             |
| Autres dérivés               | 287  | (58)         | 5 012  | (989)          | -  | -            | 14 150   | (507)        | 19 449             | (1 554)        |
| <b>TOTAL</b>                 | <b>47 949</b>  | <b>2 492</b> | <b>59 012</b>  | <b>(6 946)</b> | <b>16 571</b>  | <b>(138)</b> | <b>323 294</b>   | <b>1 804</b> | <b>446 827</b>     | <b>(2 787)</b> |

Le tableau ci-dessus comprend tous les dérivés comme décrit en Note 1.10, c'est-à-dire de couverture, de macro-couverture, et autres, en position active ou passive.

Source : Rapport annuel AXA 2022

- D'autres ajustements (xVA) du prix du dérivé existent pour passer du prix en univers risque neutre à un prix en univers risque réel :
  - ❑ DVA (Debit Value Adjustment) : correspond à son propre risque de contrepartie, autrement dit la CVA du point de vue de la contrepartie
  - ❑ FVA (Funding Value Adjustment) : correspond au risque de refinancement lié à la non collatéralisation des dérivés
  - ❑ LVA (Liquidity Value Adjustment) :  $FVA - CVA$
- CVA unilatéral correspond à la CVA sans prise en compte de son propre risque de contrepartie (DVA). Ainsi, la CVA bilatérale est égale à la CVA unilatéral + DVA.



## Right Way Risk et Wrong Way Risk (WWR)

- La conditionnalité du défaut dans le terme de l'exposition future implique une relation de dépendance entre la qualité de crédit et l'exposition future.
- Cette dépendance peut être positive (Right WR) ou négative (Wrong WR) :
  - ❑ Exemple de WWR : swap receveur taux fixe d'un producteur de pétrole et qui paie un coupon variable qui dépend du prix du pétrole
    - Plus le prix du pétrole baisse, plus le swap se valorise pour la banque et donc son montant en risque est important
    - Plus le prix du pétrole baisse, plus la notation du producteur de pétrole baisse et augmente son risque de défaut.
  - ❑ Exemple de RWR : la position inverse.

## Hypothèses faites :

- Indépendance entre l'exposition et la qualité de crédit de la contrepartie
- Taux de recouvrement constant

$$\rightarrow CVA = (1 - RR) \int_{t_0}^T E^Q \left[ \underbrace{\frac{DF_{t_0}}{DF_t} E(t)}_{EE = \text{Expected Exposure}} \right] * dPD(t_0, t)$$



## Structure détaillé de l'algorithme construit sous VBA

### *Bloc 1 : Données de marchés*

- Génération des variables aléatoires selon une loi Normale centrée réduite
- Calculs des corrélations entre les facteurs de risques (change, taux, et crédit)
- Génération des variables aléatoires corrélées via Choleski
- Calibration des modèles pour diffuser les facteurs de risques
- Simulation des chemins selon le modèle du facteur de risque et à partir des variables aléatoires corrélées et des paramètres calibrés



### *Bloc 2 : Calcul intermédiaires sur les données de marché*

- Reconstruction des courbes de taux à la date future  $T_i$  à laquelle les MtF sont calculés
- Calcul de la probabilité de défaut à partir des CDS sur chaque pas de temps (entre  $T_{i-1}$  et  $T_i$ )



### *Bloc 3 : Calcul des Mark-to-Futur (MtF)*

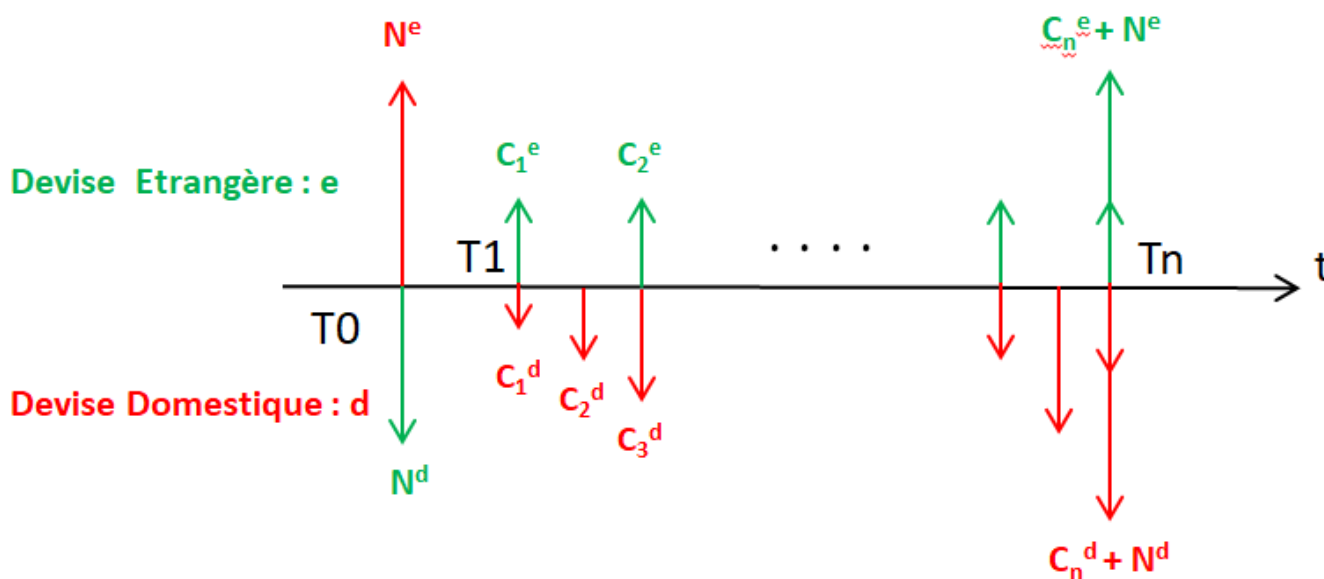
- Calcul des MtF à partir des données de marché (taux, change, CDS) pour chaque scénario et chaque date future



### *Bloc 4 : Calcul des indicateurs*

- Calcul des EE, ENE, et EPE
- Calcul de la CVA

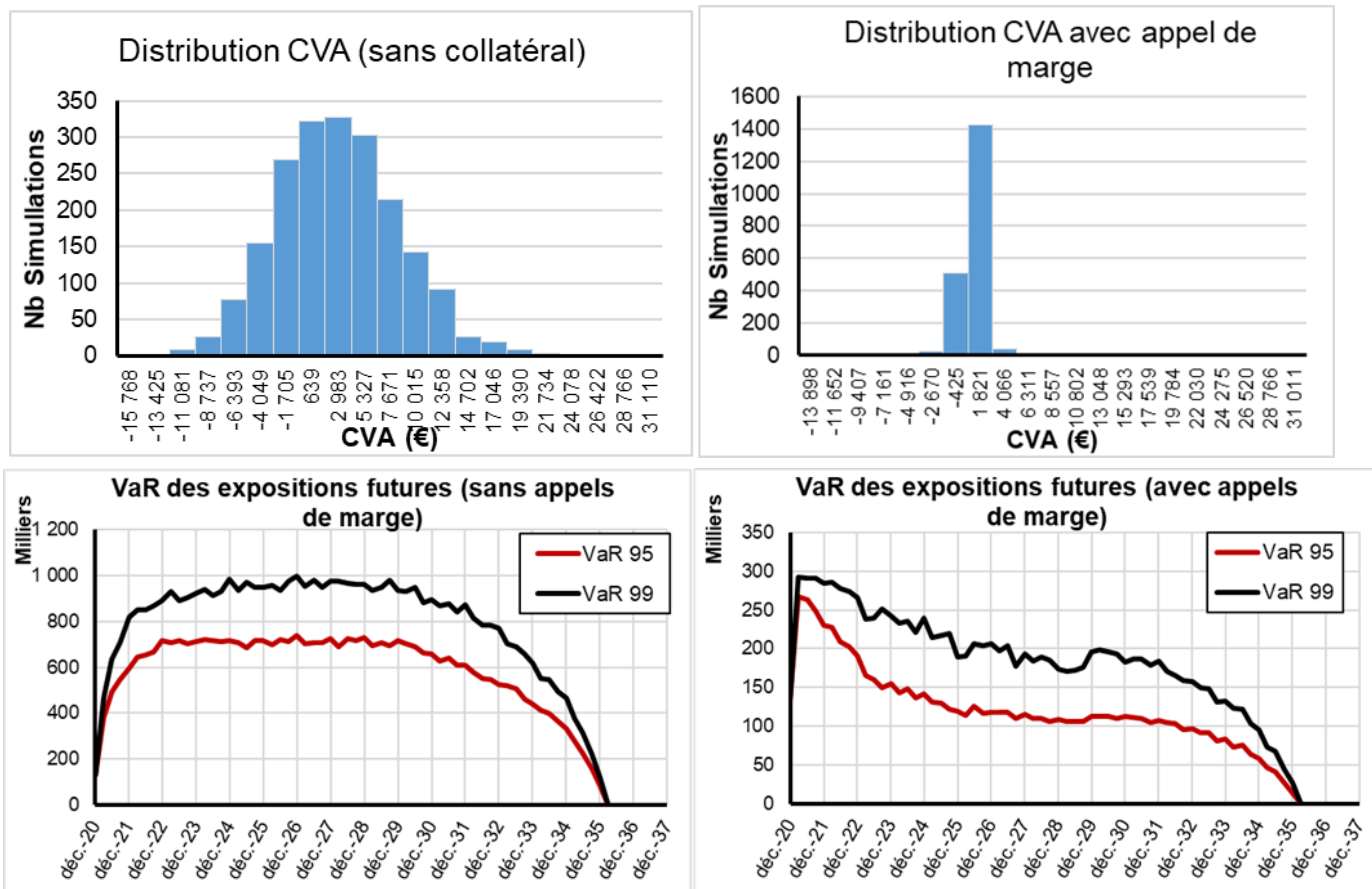
## Exemple du swap de devise



Le swap se décompose en une partie taux (swaption) et une partie change (option de change)

## CVA sur le swap 2 – Sensibilité des profils d'expositions (EE, EPE, ENE)

*Mise en place d'appels de marge hebdomadaires*



- L'appel de marge simulé : Hebdomadaire, appel de marge initial de 4%, seuil de 3% du notionnel, et pas de montant minimal de transaction (MTA)
- CVA moyenne passe de 3 216€ à 281€ et la CVA max de 28,8k€ à 4,1k€.

## Risque de contrepartie de Solvabilité II (Art. 192 du Règlement Délégué) :

$$SCR_{contrepartie} = \sqrt{SCR_{def1}^2 + 1.5 * SCR_{def1} * SCR_{def2} + SCR_{def2}^2}$$

Les expositions de type 1 contiennent les expositions « aux dérivés autres que les dérivés de crédit ». Les expositions de type 2 sont toutes celles non comprises dans le type 1.

$$SCR_{Contrepartie} = SCR_{def1} = 3\sigma = 3\sqrt{V}$$

Avec :

$$V = \sum \frac{1,5PD(1 - PD)}{2,5 - PD} \sum LGD^2$$

$$LGD = \max(90\%(Mtm_{dérivé} + RM_{dérivé}) - F' * Collatéral; 0)$$

$Mtm_{dérivé}$  = le prix du dérivé

$RM$  = Effet d'atténuation du dérivé sur le risque de marché

$F'$  = Facteur tenant compte de l'effet économique du contrat de sûreté pour le dérivé en cas de défaut

$Collatéral$  = prix du collatéral

## Formule standard (Bâle III) pour le besoin en fonds propres

$$VAR_{CVA} = 2,33\sqrt{h} \sqrt{\left( \sum_i 0,5w_i * (M_i EAD_i^{tot} - M_i^{hedg} B_i) - \sum_{ind} w_{ind} M_{ind} B_{ind} \right)^2 + \left( \sum_i 0,75w_i^2 * (M_i EAD_i^{tot} - M_i^{hedg} B_i)^2 \right)}$$

Cette formule se simplifie puisque  $B_i$  et  $B_{ind}$  qui correspondent aux notionnels des couvertures CDS et indicielles sont nuls dans ce mémoire. De plus,  $h=1$ .

$$VAR_{CVA} = 2,33 \sqrt{\left( \sum_i 0,5w_i * (M_i EAD_i^{tot}) \right)^2 + \left( \sum_i 0,75w_i^2 * (M_i EAD_i^{tot})^2 \right)}$$

Avec

$EAD_i^{tot}$  = Exposition totale sur la contrepartie i

$w_i$  = la probabilité de défaut

$M_i$  = la durée résiduelle du dérivé

**L'EAD est égale à :  $\alpha * (RC + PFE)$  avec  $\alpha = 1,4$  ; RC la valeur du dérivé et PFE la perte potentielle future qui est le produit du supervisory factor (fonction du sous-jacent : 0,5% pour le taux et 4% pour le change) et de l'add-on (fonction du notionnel et de la durée)**

## Formule avancée (Bâle III) pour le besoin en fonds propres

- La formule de la CVA est discrétisée :

$$CVA = (1 - RR) \sum_{k=1}^N EE(t_k) * PD(t_{k-1}; t_k)$$

Pourcentage de l'exposition qui ne sera pas récupéré

Montant de l'exposition en date  $t_k$ .

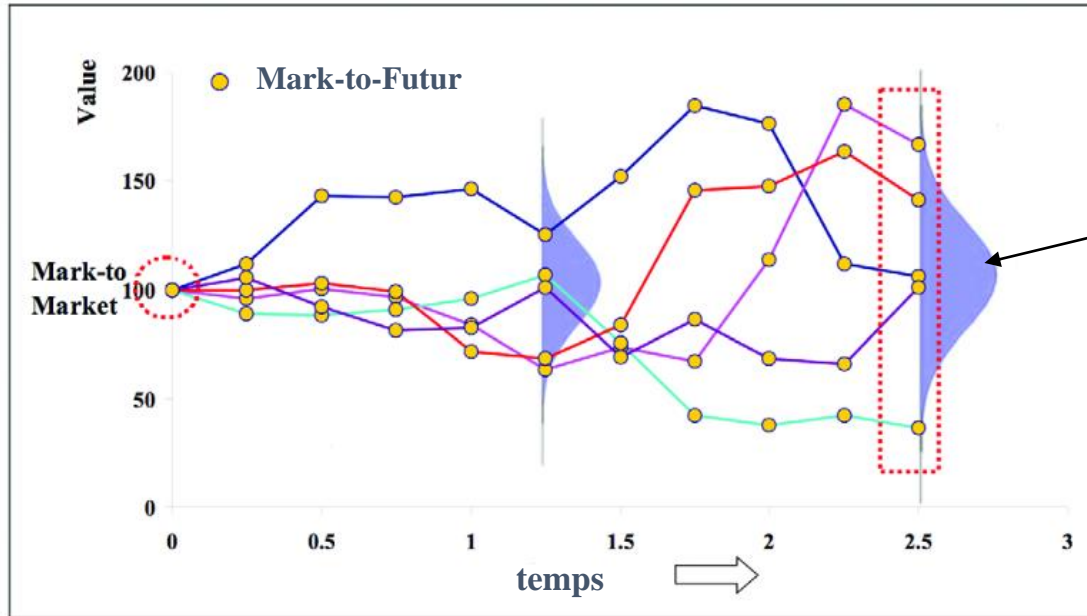
Probabilité que la contrepartie fasse défaut entre  $t_{k-1}$  et  $t_k$

- A partir de la CVA calculée, le montant en fonds propres réglementaire (ou montant au titre du risque CVA) est déterminé par :

$$FP_{CVA} = VaR_{CVA} = 3\sqrt{CVA + CVA_{stressée}}$$

Avec la  $CVA_{stressée}$  qui est calculée en choquant uniquement les probabilité de défaut.

## Modèles utilisés



Distribution des  
Mark-to-Futur