

# Allocation stratégique d'actifs sous contrainte de SCR

## Construction d'un proxy du SCR en fonction de l'allocation cible d'actifs par des modèles de régression

**Bruno Detchinli**

Soutenu le 10 novembre 2023

Entreprise : WTW

# CONTEXTE DE L'ÉTUDE

# PLAN

1. La théorie moderne du portefeuille
2. Problématique de l'allocation optimale en vision ALM
3. Construction d'un proxy du SCR en fonction de l'allocation cible d'actifs
4. Mise en œuvre pratique et résultats

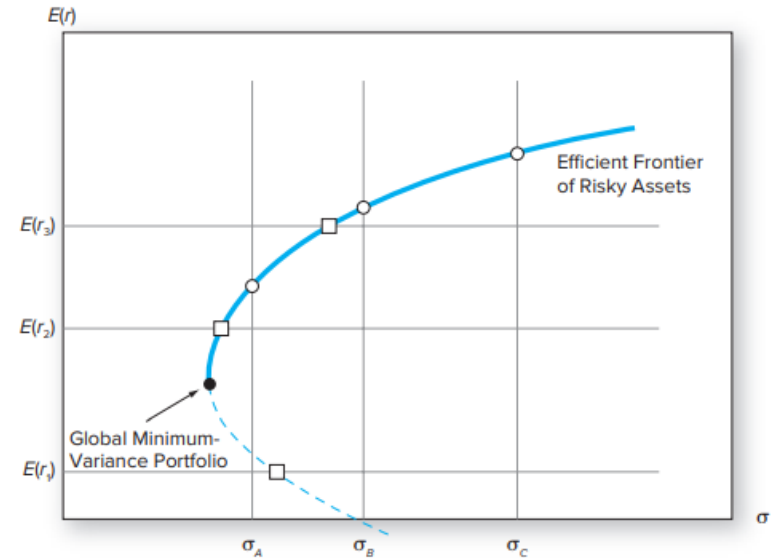
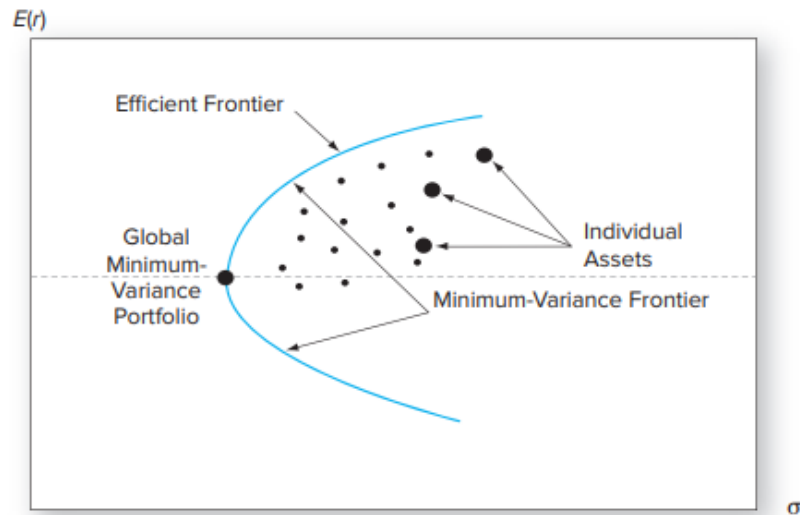
# LA THÉORIE MODERNE DU PORTEFEUILLE

1 • La théorie moderne du portefeuille

# THÉORIE DE MARKOWITZ

$$\text{Ratio de Sharpe} = \frac{ER - r_f}{Vol}$$

$$\begin{cases} ER = \sum_{i=1}^n w_i ER_i \\ Vol = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{w' \Sigma w} \end{cases}$$



# MAXIMISATION DE L'ESPÉRANCE D'UTILITÉ

$$(P) : \max_w E[U(V_t)]$$

$$\text{Averse au risque} \Leftrightarrow \begin{cases} U' > 0 \\ U'' < 0 \end{cases}$$

Coefficient d'Arrow-Pratt

$$A = -\frac{U''}{U'} > 0$$

$$V_T(w) = V_0 \sum_{i=0}^n w_0^i \frac{S_T^i}{S_0^i} = V_0 \left[ \sum_{i=1}^n w_0^i \frac{S_T^i}{S_0^i} + \left(1 - \sum_{i=1}^n w_0^i\right) \cdot (1 + r_f) \right]$$

$$\pi(w) = \frac{V_T}{V_0} - (1 + r_f) = \sum_{i=1}^n w_0^i \left( \frac{S_T^i}{S_0^i} - (1 + r_f) \right) \equiv w' \pi$$

$$V_T(w) = V_0 (1 + r_f + w' \pi)$$

Si de plus, l'excès de rendement  $\pi \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$  et  $V_0 = 1$ , alors  $V_T \sim \mathcal{N}(\mu_V, \sigma_V^2)$  avec  $\mu_V = 1 + r_f + w' \mu$  et  $\sigma_V^2 = w' \Sigma w$

Fonction CARA :  $U(x) = -\exp(-\gamma x)$ ,  $\gamma \geq 0 \rightarrow A(x) = \gamma = \text{constante}$ . Par suite : (P1) :  $w^* = \operatorname{argmax}_w \mu_V - \frac{\gamma}{2} \cdot \sigma_V^2$

Fonction IARA :  $U(x) = x - \alpha x^2$ ,  $\alpha \geq 0 \rightarrow A(x) = \frac{2}{1-2\alpha x}$  croissante en  $x$ . Par suite : (P2) :  $w^x = \operatorname{argmax}_w \mu_V - \alpha \cdot (\sigma_V^2 + \mu_V^2)$

1 • La théorie moderne du portefeuille

# MAXIMISATION DE L'ESPÉRANCE D'UTILITÉ

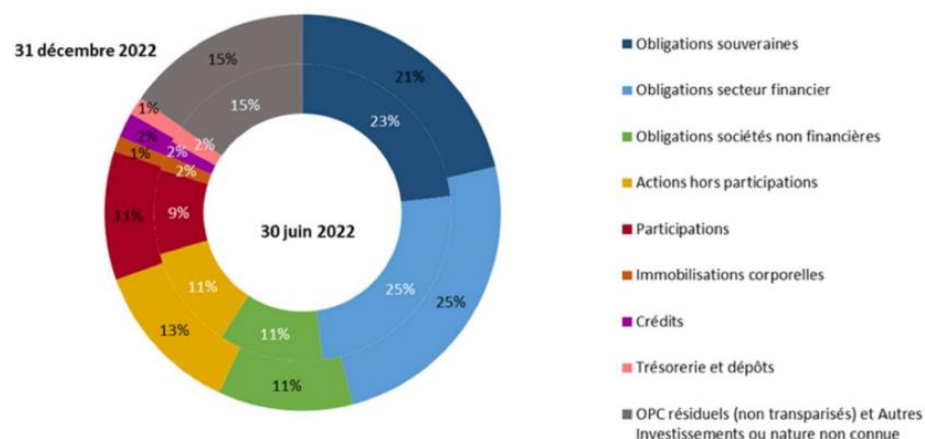
Paramètre $\gamma$	0	1	2	5
Actif				
Obligations d'État	0%	0%	0%	9.61%
Obligations d'entreprises	0%	0%	0%	32.64%
Action	100%	83.90%	41.11%	12.57%
Immobilier	0%	16.10%	58.89%	45.18%

TABLEAU 1 – Allocations optimales pour une fonction d'utilité CARA

Paramètre $\alpha$	0	0.5	1	2.5
Actif				
Obligations d'État	0%	0%	0%	17.95%
Obligations d'entreprises	0%	0%	0%	34.29%
Action	100%	77.29%	35.42%	8.37%
Immobilier	0%	22.71%	64.58%	39.39%

TABLEAU 2 – Allocations optimales pour une fonction d'utilité IARA

Encours total de 2 471 milliards d'euros au 31 décembre 2022



Périmètre : organismes d'assurance soumis aux remises trimestrielles sur base sociale.

Note : - Y compris placements en unités de compte. L'actif du bilan se compose des placements et d'autres actifs.

Source : ACPR et Banque de France

# PROBLÉMATIQUE DE L'ALLOCATION OPTIMALE EN VISION ALM



## ALLOCATION STRATÉGIQUE SOUS CONTRAINTE DE SCR

### 2 • Gestion actif/passif

# PASSIF

Données au 31/12/2022

#### Epargne

Fonds Euro

Unités de compte

Age moyen	Ancienneté moyenne	Primes programmées	Provisions mathématiques	TMG moyen
45 ans	12 ans	9 millions d'euros	2.3 milliards d'euros	2.5%

#### Retraite

Phase de constitution

Retraite

Phase de restitution

Âge moyen	Ancienneté moyenne	Âge moyen de la retraite	Statut	Primes programmées	Provisions mathématiques	TMG moyen
73 ans	28 ans	64 ans	Cotisants : 21% Rentiers : 79%	3 millions d'euros	1.8 milliards d'euros	0.73%

$$be = be\_sinistres + be\_frais\_commissions - be\_prime$$

#### Sinistres pour l'épargne :

Rachats

Arbitrages entre le fonds Euro et les UC

Maturités

Taxes sociales - CSG

#### Sinistres pour la retraite:

Rachats

Maturités ou sorties en capital

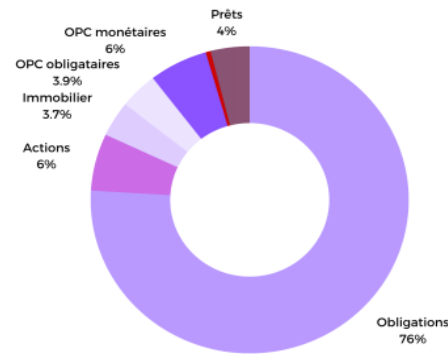
Annuités

Prestations décès

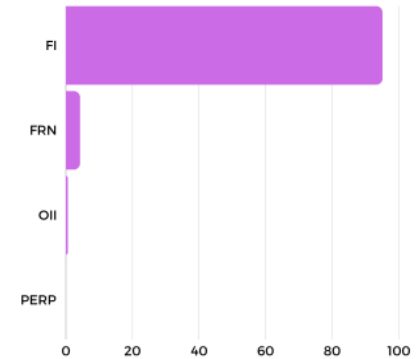
# ACTIF

Données au 31/12/2022

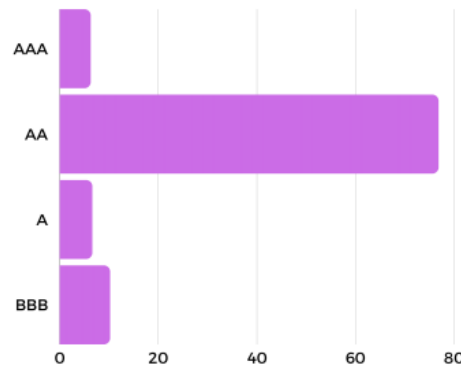
Répartition des classes d'actifs selon la valeur de marché



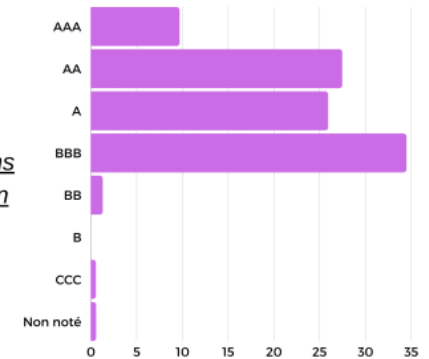
Mise en transparence de la poche obligataire



Répartition des obligations souveraines par notation



Répartition des obligations d'entreprises par notation



# SCÉNARIOS ÉCONOMIQUES

## *Monde risque neutre*

- Probabilité risque neutre sous laquelle les processus de prix actualisés sont des martingales
- Les investisseurs sont indifférents au risque et n'exigent pas de prime de risque pour détenir un actif financier



*Best estimate, SCR*

## *Monde réel*

- Les scénarios reflètent la réalité du marché
- Les investisseurs sont sensibles au risque et exigent une prime de risque pour détenir des actifs risqués



*Stratégies financières, allocation d'actif*

# MAXIMISATION DU COUPLE RENDEMENT/RISQUE

Définition de la richesse finale de l'assureur-vie : Valeur actuelle des profits futurs (PVFP)

$$PVFP = \text{résultat technique} + \text{résultat administratif} + \text{résultat financier}$$

$$\text{résultat technique} = VA (\text{primes} - \text{sinistres} + \text{variation de PM} + PB)$$

$$\text{résultat administratif} = VA (\text{chargements sur encours} + \text{chargements sur primes} - \text{frais \& commissions})$$

$$\text{résultat financier} = VA (\text{produits financiers} - TMG - PB - \text{dotation PPE})$$

Etapes de la recherche d'allocation optimale :

- Sélection des allocations cibles à tester
- Détermination pour chaque allocation cible de la distribution de la PVFP → scénarios monde réel sur 10 ans
  - Déduire le critère de rendement : **moyenne de la distribution de la PVFP**
  - Déduire le critère de risque : **VaR 98% de la distribution de la PVFP**
- Prise en compte du SCR
  - Détermination pour chaque allocation le SCR associé → scénarios monde risque neutre sur 50 ans
  - Pénalisation de la distribution de PVFP du coût de portage du SCR

## COÛT DE PORTAGE DU SCR

Le coût de portage est calculé sur la période de projection en monde réel, c'est-à-dire sur 10 ans.

Pour cela, le SCR (prédit par machine learning) est projeté suivant l'évolution des provisions mathématiques ( $pm$ ) selon la formule suivante.

$$scr(t) = scr(t - 1) * \frac{pm(t)}{pm(t - 1)}$$

Le coût de portage est alors calculé comme un pourcentage du SCR. Ce pourcentage est calculé comme la différence entre le taux de rendement attendu par les actionnaires et le taux de rendement de l'actif (du fonds euros) net des frais financiers et net des impôts.

$$coût\ portage(t) = scr(t - 1) * (tx\ attente\ actionnaire - rendement\ net\ actif(t))$$

Enfin, le coût de portage pour l'allocation cible du portefeuille s'écrit comme

$$coût\ portage\ final = \sum_{t=1}^{10\ ans} coût\ portage(t) * \frac{1}{(1 + tx\ attente\ actionnaire)^t}$$

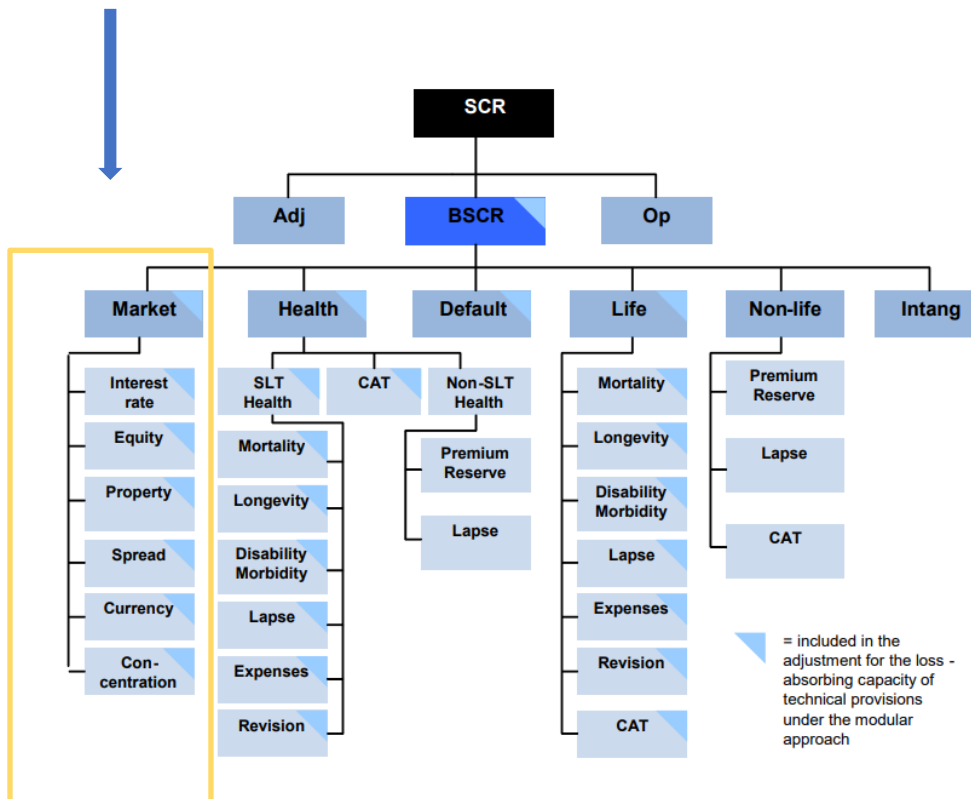
# **CONSTRUCTION D'UN PROXY DU SCR EN FONCTION DE L'ALLOCATION CIBLE D'ACTIFS**

# CALCUL DU SCR PAR LA FORMULE STANDARD

$$SCR = \max(0 ; \text{variation ANR})$$

$$\text{variation ANR} = \text{ANR central} - \text{ANR choc}$$

$$\text{ANR} = \text{VM actif} - \text{BE}$$



**SCR taux :** → Choc de taux d'intérêt à la hausse  
→ Choc de taux d'intérêt à la baisse

**SCR actions :** → Type 1, Type 2  
*choc actions = choc base + ajustement symétrique*

**SCR Immobilier :** → Choc à la baisse de 25%

**SCR spread :** → obligations et prêts non hypothécaires  
→ actifs issus de la titrisation  
→ dérivés de crédits

**SCR change :** → Choc à la hausse de 25% de la devise  
→ Choc à la baisse de 25% de la devise

**SCR concentration :** → mesure les expositions au delà d'un seuil défini selon la qualité de credit  
→ applique les facteurs de chocs associés

# APPRENTISSAGE SUPERVISÉ

$$Z_i = (X_i, Y_i) \sim_{iid} P$$

→ Prédire  $Y$  sachant  $X$

- ❑ Fonction de prédiction  $g$
- ❑ Fonction de perte  $\ell \rightarrow$  mesure l'erreur commise lors de la prédiction
- ❑ Risque ou erreur de généralisation  $\rightarrow$  qualité d'une fonction de prédiction
  - ❑  $R_P(g) = \mathbb{E}_P[\ell(Y, g(X))]$
  - ❑ La meilleure fonction de prédiction est celle qui minimise le risque
  - ❑ Si elle existe, elle est appelée **fonction oracle** ou **prédicteur de Bayes**  $g_P^*$
- ❑ Consistance de l'algorithme de prédiction  $\widehat{g}_n$ 
  - ❑  $\mathbb{E}_P[R_P(\widehat{g}_n)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} R_P(g_P^*)$
  - ❑ La consistance nécessite que la taille  $n$  de l'échantillon soit grande
  - ❑ Les résultats de consistance universelle ne fournissent cependant pas la taille  $n$  pour garantir la convergence



# MODÈLES DE RÉGRESSION

Fonction de prédiction :  $g = \mathbb{E}_P(Y | X = x)$

❑ Régression linéaire

❑  $Y = \alpha + X \cdot \beta$

❑ Fonction de perte :  $\ell(Y, g(Y)) = \mathbb{E}[(Y - g(Y))^2]$

❑ Fonction oracle :  $g_P^* = X \cdot \beta$

❑ GLM

❑  $Y = h(\alpha + X \cdot \beta)$  - h = fonction inverse → GLM Gamma

❑ Fonction de perte :  $\ell(Y, g(Y)) = \mathbb{E}[(Y - g(Y))^2]$

❑ Fonction oracle :  $g_P^* = h(X \cdot \beta)$

❑ Arbres de décision (pas de relation explicite entre Y et X)

❑ Il s'agit de modèles à partition où l'espace des variables caractéristiques X est partitionné en de sous-ensembles

❑ Chaque nœud de l'arbre correspond à un sous ensemble où un test ou un critère de segmentation est mis en place

❑ Pour le modèle Classification And Regression Trees (CART), le critère de segmentation est la variance

## Indicateurs de performance

Erreur quadratique moyenne

$$MSE(y, \hat{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Erreur relative moyenne

$$MAPE(y, \hat{y}_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - \hat{y}_i|}{\max(\epsilon, y_i)}$$

Erreur maximale sur une prédiction

$$\text{Erreur maximale} = \max(|y_i - \hat{y}_i|)$$

Coefficient de détermination

$$R^2(y, \hat{y}) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$



# RÉSULTATS D'APPROXIMATION – SCR TAUX

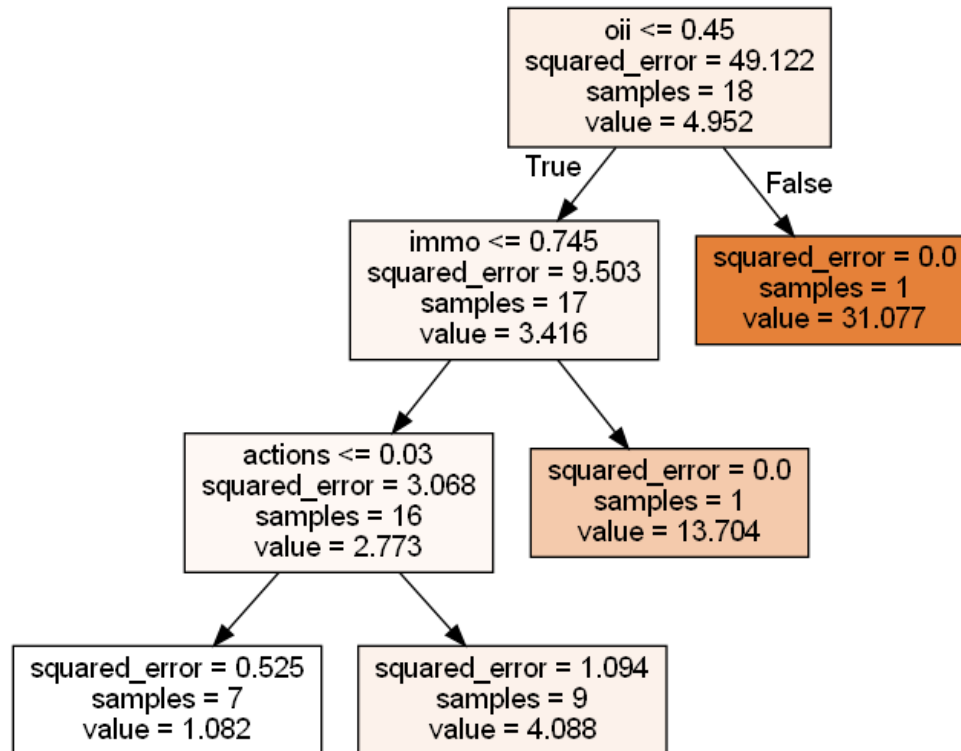
- Régression linéaire :  $Y = \alpha + X \cdot \beta$
- GLM gamma :  $Y = \frac{1}{\alpha + X \cdot \beta}$

Régression linéaire			
Coefficients	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
<i>Intercept</i>	-3.2e + 07	0.0	-1.52
<i>Equity</i>	2.42e + 08	0.13	11.36
<i>Estate</i>	2.27e + 08	0.12	10.67
<i>FRN</i>	4.39e + 07	-0.49	2.06
<i>FI</i>	-6.24e + 07	-0.90	-2.93
<i>OPCVM</i>	8.45e + 07	-0.52	3.97
<i>OII</i>	1.28e + 09	3.96	60
<i>PERP</i>	-1.39e + 08	-1.15	-6.54
<i>MSE</i>	7.9e + 14	0.13	17.46
<i>MAPE</i>	2.13	0.61	2.13
<i>Max Error</i>	2.3e + 07	0.83	10.77
<i>R<sup>2</sup></i>	0.57	0.57	0.77

GLM gamma				
	Coefficients	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
$\alpha$	<i>Intercept</i>	18.11	-	1.05
	<i>Equity</i>	0.67	-	1.01
	<i>Estate</i>	0.74	-	1.07
	<i>FRN</i>	-0.91	-	-1.19
$\beta$	<i>FI</i>	-0.78	-	-0.97
	<i>OPCVM</i>	-0.58	-	0.48
	<i>OII</i>	2.16	-	2.67
	<i>PERP</i>	-0.32	-	-0.36
	<i>MSE</i>	3.39e + 14	-	14.80
	<i>MAPE</i>	0.96	-	0.68
	<i>Max Error</i>	3.2e + 08	-	11.72
	<i>R<sup>2</sup></i>	0.69	-	0.81

Arbres de décision			
	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
<i>MSE</i>	6.18e + 14	0.89	151.22
<i>MAPE</i>	0.98	0.64	0.98
<i>Max Error</i>	7.2e + 07	2.61	34.00
<i>R<sup>2</sup></i>	0.57	0.57	0.57

# RÉSULTATS D'APPROXIMATION – SCR TAUX



Arbre de décisions pour le proxy du SCR Taux

# RÉSULTATS D'APPROXIMATION – SCR ACTIONS

- Régression linéaire :  $Y = \alpha + X \cdot \beta$
- GLM gamma :  $Y = \frac{1}{\alpha + X \cdot \beta}$

Régression linéaire			
Coefficients	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
<i>Intercept</i>	2.1e+07	0	0.92
<i>Equity</i>	-4.34e+06	-1.17	-0.39
<i>Estate</i>	-4e+06	-1.08	-0.39
<i>FRN</i>	-7.65e+06	-1.67	0.01
<i>FI</i>	7.63e+06	1.49	0.11
<i>OPCVM</i>	-5.37e+05	-0.42	-0.28
<i>OII</i>	-1.33e+08	-17.53	-0.32
<i>PERP</i>	1.75e+08	20.57	-0.19
<i>MSE</i>	8.4e+12	0.38	0.02
<i>MAPE</i>	0.11	0.72	0.13
<i>Max Error</i>	4.2e+06	0.87	0.41
<i>R<sup>2</sup></i>	0.39	0.35	0.41

$\alpha$  {  
 $\beta$  {

GLM gamma			
Coefficients	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
<i>Intercept</i>	16.87	-	-0.25
<i>Equity</i>	-0.19	-	-0.29
<i>Estate</i>	-0.21	-	-0.26
<i>FRN</i>	-0.003	-	0.14
<i>FI</i>	0.29	-	0.15
<i>OPCVM</i>	-0.083	-	-0.08
<i>OII</i>	-0.07	-	-0.22
<i>PERP</i>	-0.04	-	-0.06
<i>MSE</i>	9.3e+12	-	0.01
<i>MAPE</i>	0.12	-	0.09
<i>Max Error</i>	4.5e+06	-	0.21
<i>R<sup>2</sup></i>	0.34	-	0.6

Arbres de décision			
	SCR	SCR standardisé	SCR p/r référence
<i>MSE</i>	1.2e+13	0.33	0.01
<i>MAPE</i>	0.09	0.43	0.09
<i>Max Error</i>	6.7e+06	0.93	0.21
<i>R<sup>2</sup></i>	0.49	0.55	0.63

# MISE EN ŒUVRE PRATIQUE ET RÉSULTATS

# DÉTERMINATION DE L'ALLOCATION OPTIMALE

Etapas de la recherche d'allocation optimale :

- Sélection des allocations cibles à tester
- Détermination pour chaque allocation cible de la distribution de la PVFP → scénarios monde réel
  - Déduire le critère de rendement : **moyenne de la distribution de la PVFP**
  - Déduire le critère de risque : **VaR 98% de la distribution de la PVFP**
- Prise en compte du SCR
  - Détermination pour chaque allocation le SCR associé → scénarios monde risque neutre
  - Pénalisation de la distribution de PVFP du coût de portage du SCR

Classe d'actif	Borne inférieure (%)	Borne supérieure (%)
FI	0	100
FRN	0	100
OII	0	100
Actions	0	100
Immobilier	0	100
OPCVM	0	100
Cash	0	100



92 allocations

Classe d'actif	Borne inférieure (%)	Borne supérieure (%)	Pas (%)
FI	55	75	10
FRN	5	30	6.25
OII	0	5	1
Actions	5	30	5
Immobilier	5	30	5
OPCVM	5	25	4
Cash	0	10	5

4 • Résultats

# ALLOCATION OPTIMALE SANS PRISE EN COMPTE DU SCR

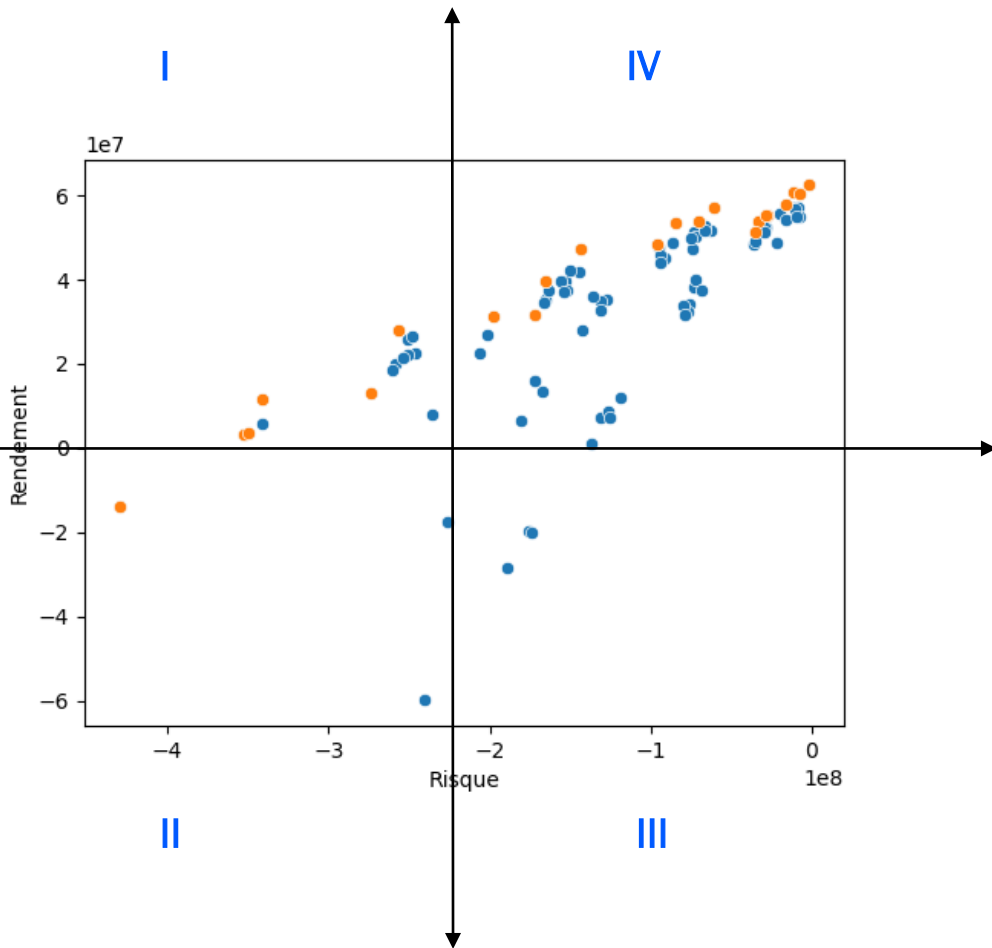


Figure 1

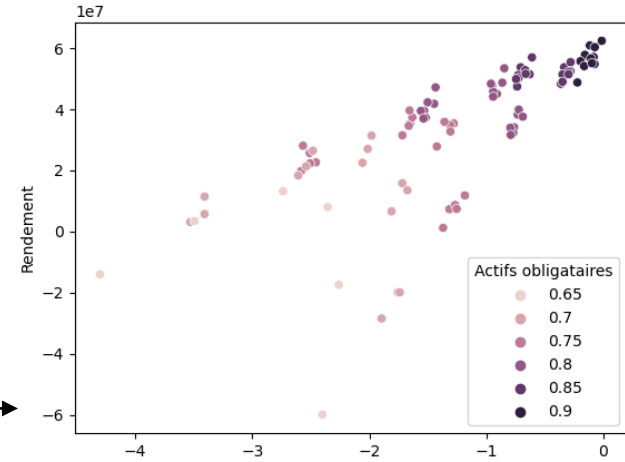


Figure 2

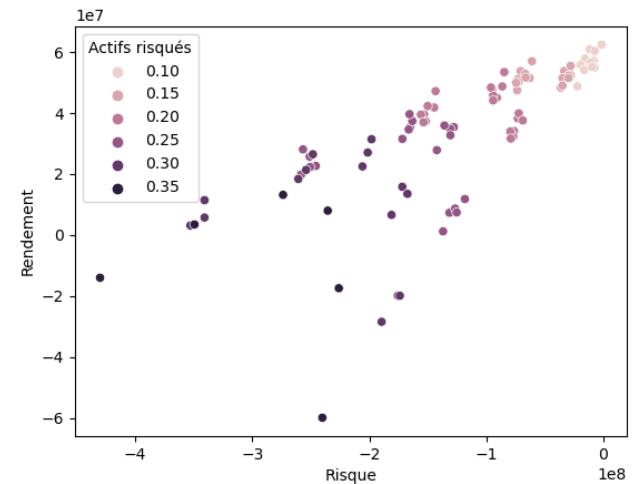
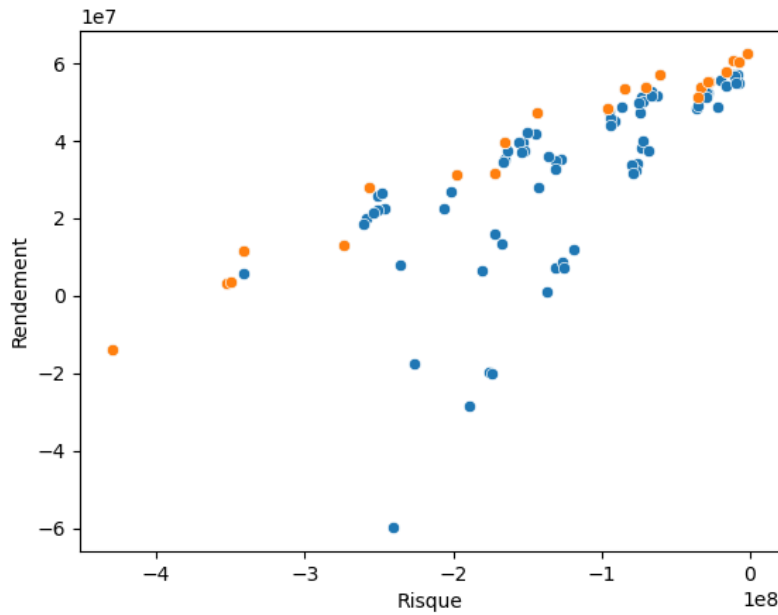


Figure 3

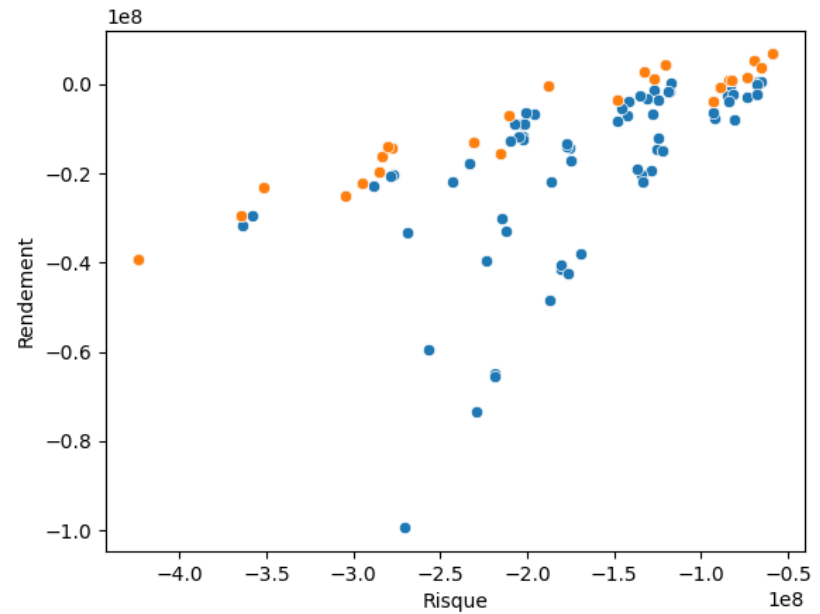


4 • Résultats

# ALLOCATION OPTIMALE AVEC PRISE EN COMPTE DU SCR



Sans prise en compte du SCR



Avec prise en compte du SCR

4 • Résultats

# ALLOCATION OPTIMALE AVEC PRISE EN COMPTE DU SCR

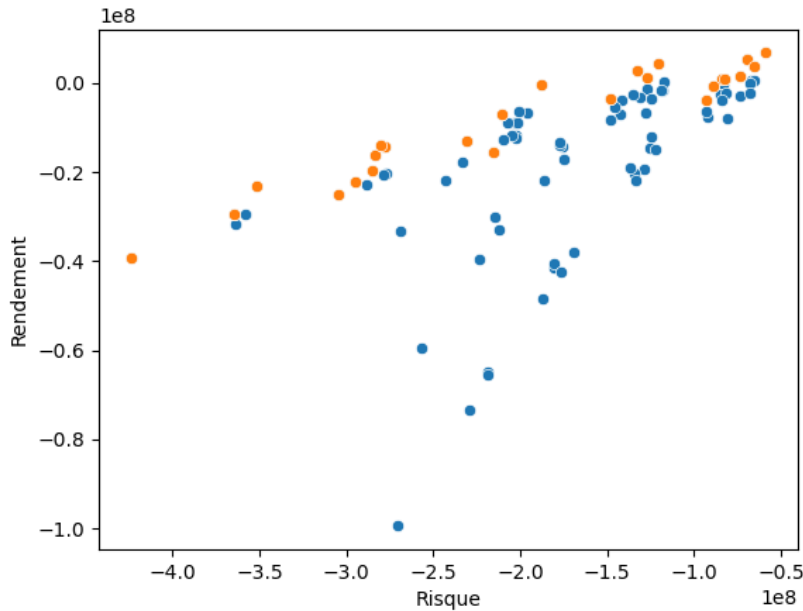


Figure 1

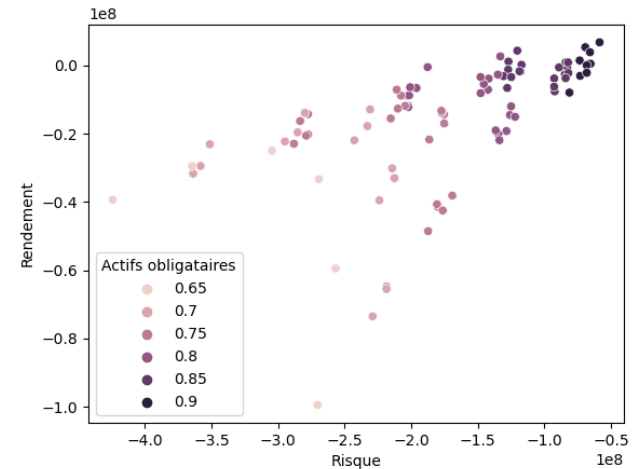


Figure 2

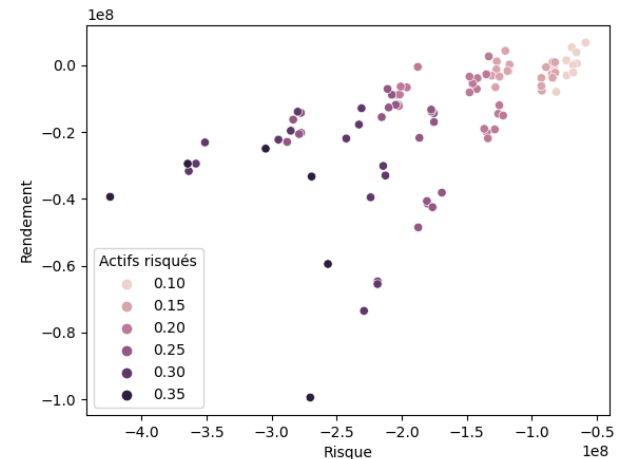
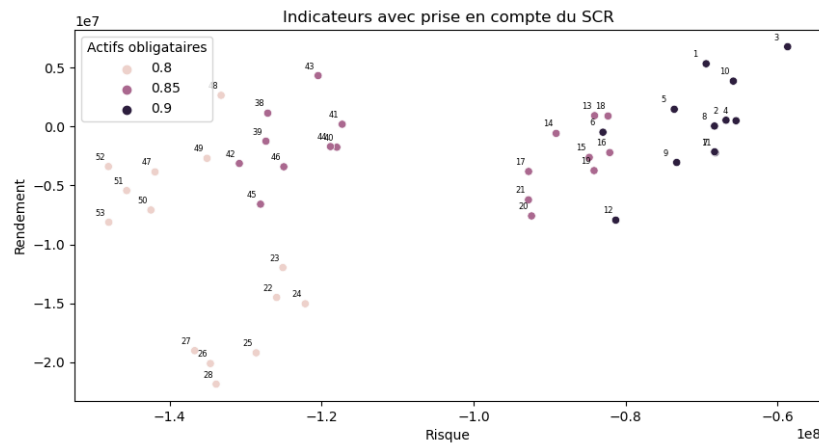
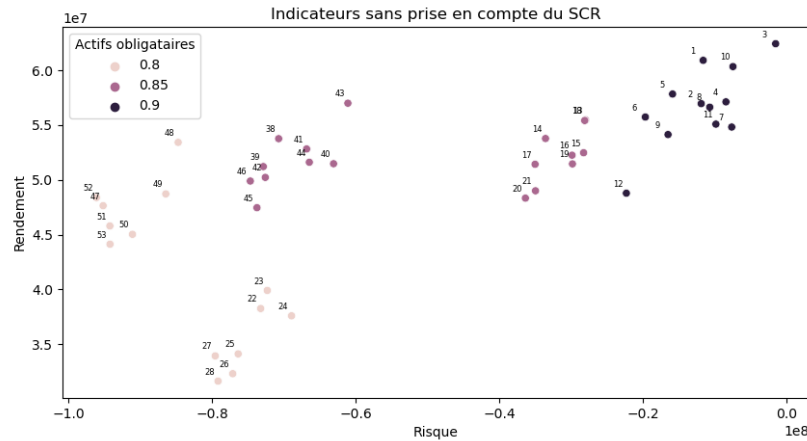


Figure 3

4 • Résultats

# ALLOCATION OPTIMALE AVEC PRISE EN COMPTE DU SCR

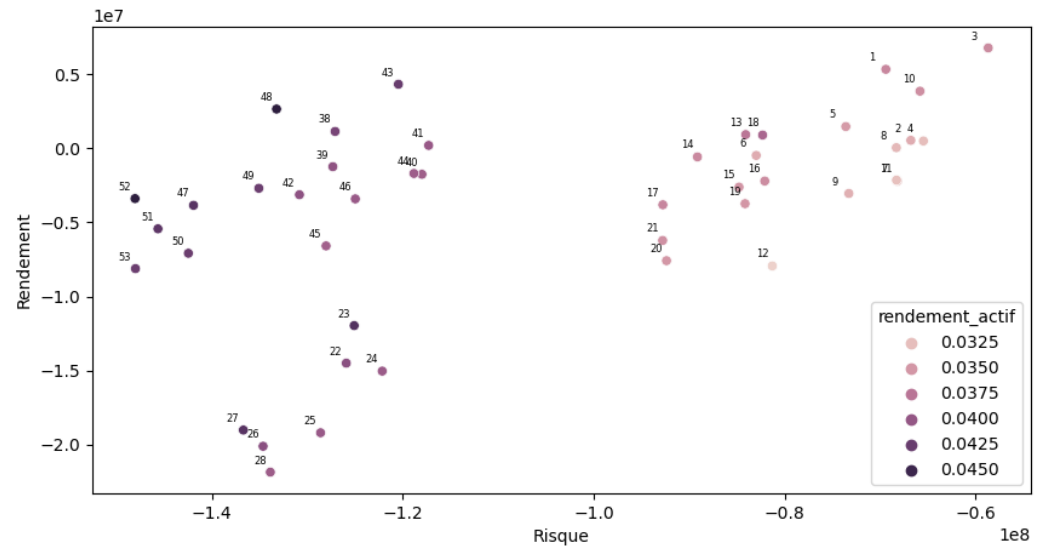
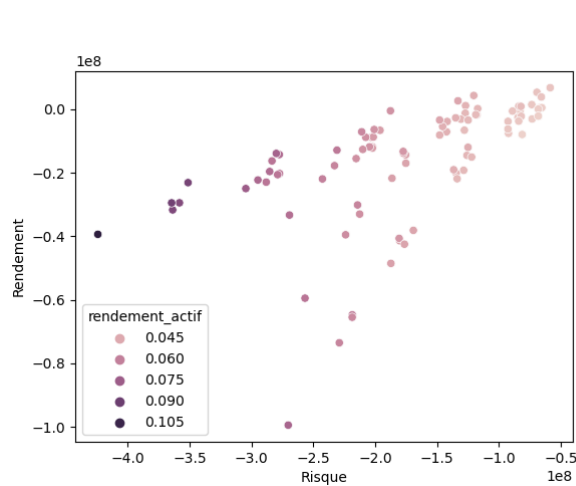


4 • Résultats

# ALLOCATION OPTIMALE AVEC PRISE EN COMPTE DU SCR

TMG moyen Epargne : 2.5%

TMG moyen Retraite : 0.73%



# CONCLUSION

- Conclusion

## BILAN

- Le sujet de l'allocation stratégique d'actifs est crucial et d'actualité pour les compagnies d'assurance du fait du contexte dynamique des deux dernières années.
- Comme en finance, la recherche de l'allocation optimale consiste à maximiser un couple rendement/risque.
  - Critère de rendement : moyenne de la distribution de la richesse finale (PVFP) évaluée en univers de scénarios monde réels ;
  - Critère de risque : Value at Risk de niveau 98% de la distribution de la PVFP.
- Les contraintes réglementaires qui pèsent sur les assureurs se caractérisent par la prise en compte du SCR dans le problème de maximisation du couple rendement/risque.
  - La production du SCR en pratique est une tâche fastidieuse et chronophage. Nous nous sommes donc intéressés à la construction d'un proxy du SCR en fonction de l'allocation d'actifs.
  - La méthode utilisée consiste à approximer les SCR des sous modules de risque de marché sur un échantillon d'apprentissage préalablement construit par nos soins.
  - Les modèles GLM Gamma se sont révélés efficaces à cette fin.
- La prise en compte du SCR et précisément du coût de portage du SCR permet de disposer des niveaux "réels" des critères de rendement de risque s'assurant de la robustesse de l'étude.
- Le choix de l'allocation optimale dépend de nombreux paramètres à savoir les stratégies financières de la compagnie, l'appétence au risque et la capacité à supporter un coût d'immobilisation plus ou moins important de la charge en capital.

- Conclusion

## LIMITES ET PERSPECTIVES

- L'étude a reposé sur l'hypothèse forte que seul le SCR de marché est affecté par les variations d'allocations
  - Pour que l'étude soit complète, il faudrait calibrer un proxy pour les autres modules de risque
- Nous avons testé les modèles de régression linéaire, GLM gamma et les arbres de décisions sur un échantillon de taille  $n = 29$ 
  - Augmenter la taille de l'échantillon pour offrir plus de capacité d'apprentissage aux algorithmes
  - Tester d'autres algorithmes