Théorie moderne de la gestion de portefeuille
CEA

Cours n°2/3

thierry.granger@dauphine.fr

Rappel du chapitre 1

- Gestion de portefeuille (pas d'actif sans risque)

$$1 = x_1 + x_2 + \dots + x_K$$

$$x_k \geq 0 \dots \text{achat}$$

$$x_k < 0 \dots \text{vente}$$

Rappel

- Cadre temporel [*t*=0, *t*=1] :
  - *ex ante (aujourd'hui)* W_0
  - *ex post (demain, dans un an, etc.)* $\tilde{W}_p = W_0 \tilde{R}_p$

- Rendement d'un portefeuille « P »

$$\tilde{R}_p = x_1 \tilde{R}_1 + x_2 \tilde{R}_2 + \ldots + x_K \tilde{R}_K$$

Rappel

- Le but de la gestion de portefeuille est de trouver le portefeuille optimal

...POUR... $(x_1, x_2, \ldots, x_K)^*$

  - le « client »,
  - le « gérant »,
  - l'« investisseur institutionnel »
  - une société d'assurance, un fonds d'investissement

- Portefeuille optimal : qui maximise l'espérance

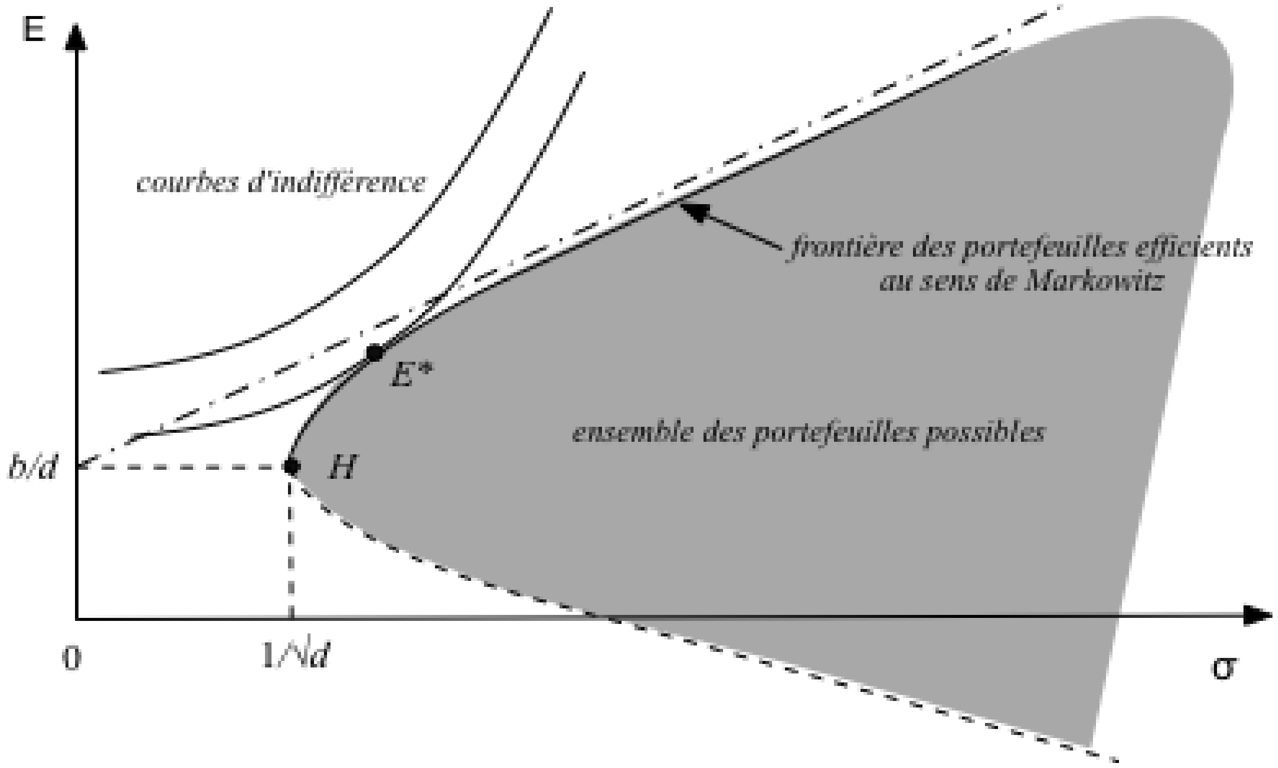
d'utilité pour l'investisseur, par exemple

$$\max \quad U_i(W_{0,} \tilde{R}_p) = E(\tilde{R}_p) - \frac{1}{2\tau_i(W_0)} Var(\tilde{R}_p)$$

Rappel : portefeuille optimal/efficient

- Il faut distinguer optimalité et efficience d'un portefeuille :
  - un portefeuille optimal est un portefeuille efficient qui dépend de l'aversion au risque du gérant (donc en particulier de sa richesse initiale)
  - mais tout portefeuille efficient n'est pas optimal (il existe une infinité de portefeuilles efficient)
- Définition d'un portefeuille efficient :
  - il maximise l'espérance de rendement à variance donnée
  - il minimise la variance de rendement à espérance donnée

Rappel : la frontière des portefeuilles efficients



Exemple numérique

$$\vec{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Rentabilité anticipée de 2 titres
Probabilité des « états du monde » : ¼

Questions : constituer la base de données, calculer la frontière des portefeuilles efficients...

Exemple (suite) : base de données

$$\vec{E}=\begin{bmatrix} E\left(\widetilde{R}_1\right) \\ E\left(\widetilde{R}_2\right) \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Espérances des rendements des titres

$$\widehat{V}=\begin{pmatrix} \sigma_{11}\,\sigma_{12} \\ \sigma_{21}\,\sigma_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/2 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Variances des rendements des titres
(matrice des variances-covariances)

Exemple (suite)

- Le programme de minimisation de la variance applique le 1er critère de sélection des portefeuilles efficients :

$$\left\{\begin{array}{l} \min\limits_{x_1, x_2} \; V_p = (x_1)^2 \sigma_{11} (x_2)^2 \sigma_{22} + 2 x_1 x_2 \sigma_{12} \\ E_p = x_1 E_1 + x_2 E_2 \\ 1 = x_1 + x_2 \end{array}\right|$$

Cas particulier à 2 titres : à chaque valeur de x_1 correspond 1 seule valeur de x_2, une seule valeur de E_p et une seule valeur de V_p.
Et réciproquement.

Exemple (suite)

- Après substitution des contraintes dans la fonction objectif, on obtient

$$V_p = \frac{23}{2} E_p^2 - 30 E_p + 20$$

On cherche les solutions de cette équation du 2nd degré en fonction de V_p

$$\frac{23}{2} E_p^2 - 30 E_p + 20 - V_p = 0$$

Exemple (suite)

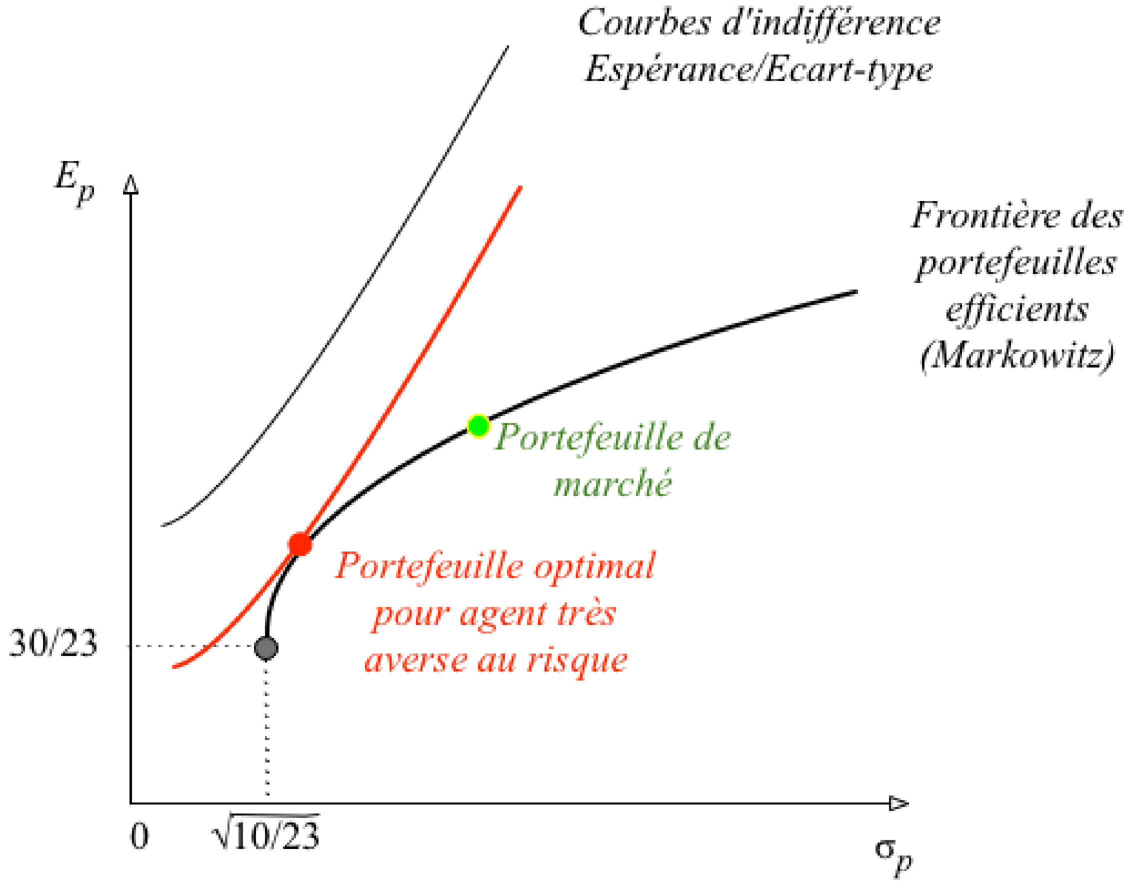
...on retient la solution E_p la plus grande

$$max \;\; E_P \;\; \text{s.c.} \;\; \sigma_p^2$$

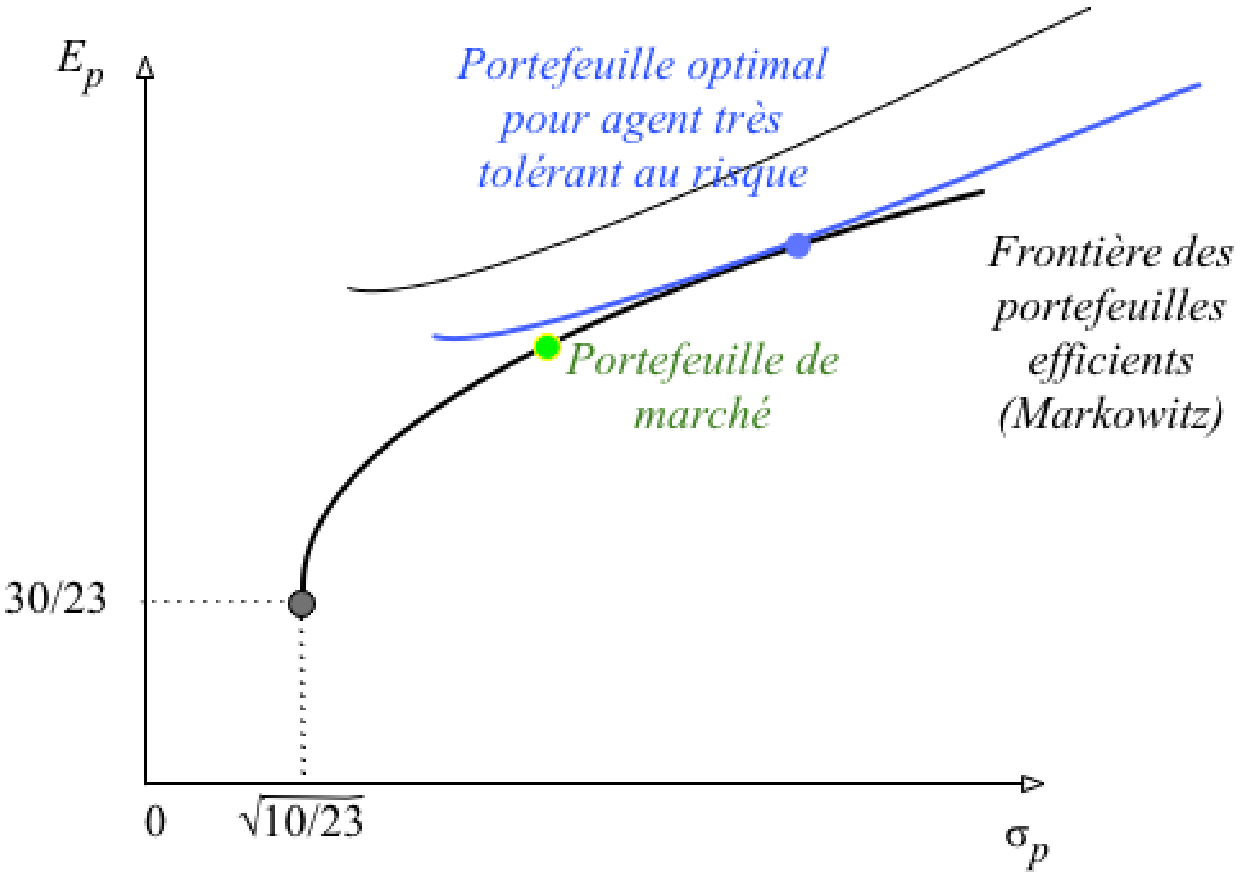
...dans ce programme qui applique le 2e critère de sélection des portefeuilles efficients

$$\Rightarrow \;\; E_P = \frac{30}{23} + \frac{1}{23}\sqrt{46\,\sigma_p^2 - 20}$$

Exemple (suite) : graphique (a)



Exemple (suite) : graphique (b)



Chapitre 2 – Gestion de portefeuille avec un actif sans risque

Définition de l'actif sans risque

- Sur une période courte, il existe dans l'économie des placements sans risque ou des actifs sans risque. Par exemple un bon du Trésor est un actif sans risque :
  - Il est connu avec certitude en valeur nominale (par exemple 2,25 % sur un an.
  - Le taux d'inflation est connue également avec certitude sur 1 an, par exemple, 1 %
  - Donc le taux d'intérêt réel est de 1,25 % qui est certain

(Sur de petites périodes, inférieures à 6 mois, on raisonne en valeur nominale du taux d'intérêt, connue avec certitude)

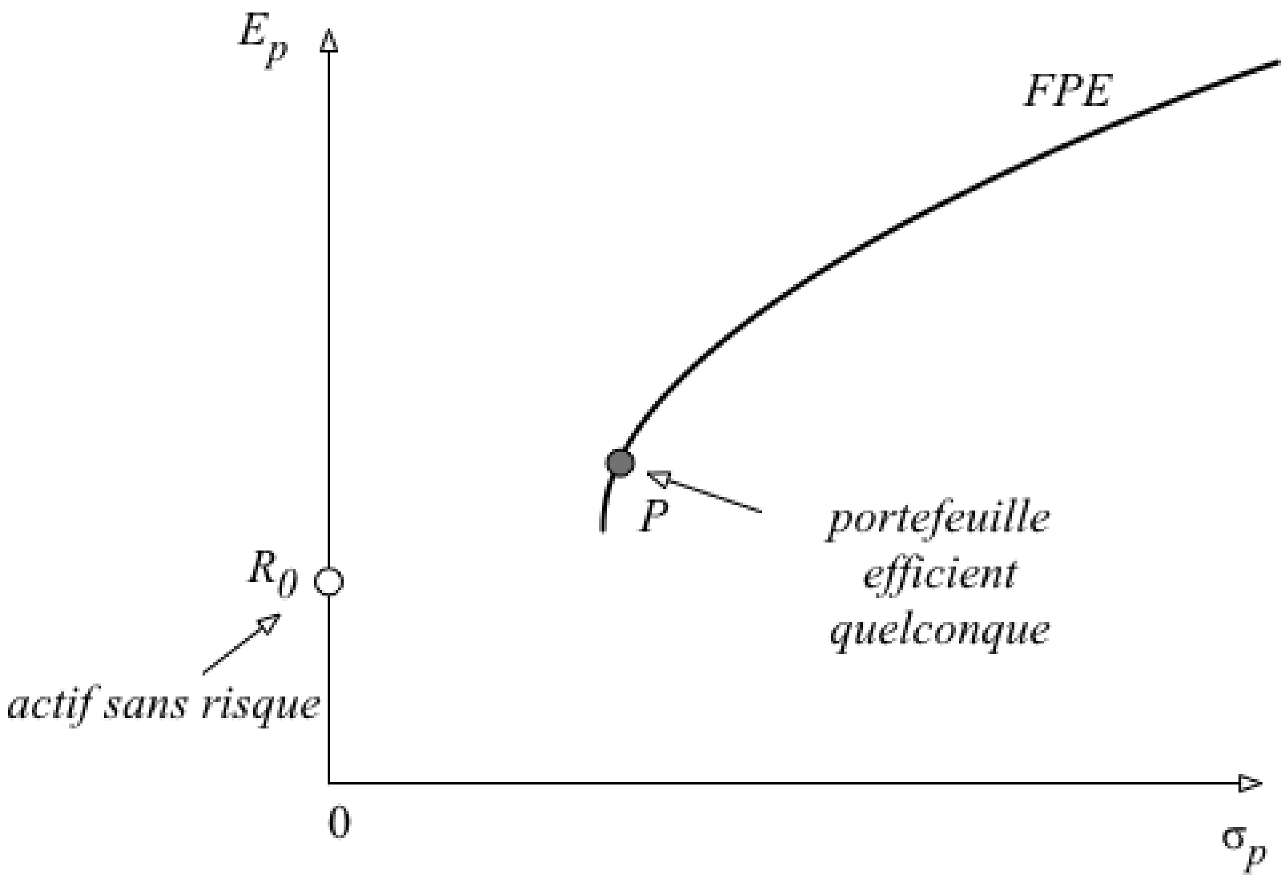
Notation d'un actif sans risque

$R_0 = 1 + r_0$ *non aléatoire*

Exemple numérique, actif de taux de rendement 20 %

$$\vec{R}_0 = \begin{pmatrix} 1,20 \\ 1,20 \\ 1,20 \\ 1,20 \\ 1,20 \end{pmatrix}$$

Report d'un actif sans risque dans le graphique de la frontière efficiente



Calcul du rendement d'un nouveau portefeuille comprenant l'actif sans risque et un portefeuille *P* (efficient)

$$\widetilde{R} = \mu \widetilde{R}_p + (1-\mu) R_0$$

μ : la proportion du portefeuille *P* dans le nouveau portefeuille

$\tilde{R}$: le rendement du nouveau portefeuille

Calcul de l'espérance de rendement du nouveau portefeuille...

$$E(\tilde{R}) = E = \mu E_p + (1-\mu) R_0$$

$$Var(\tilde{R}) = \sigma^2 = Var(\mu \tilde{R}_p) = \mu^2 \sigma_p^2$$

On déduit de la variance

$$\sigma = \mu \sigma_p \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\sigma}{\sigma_p}$$

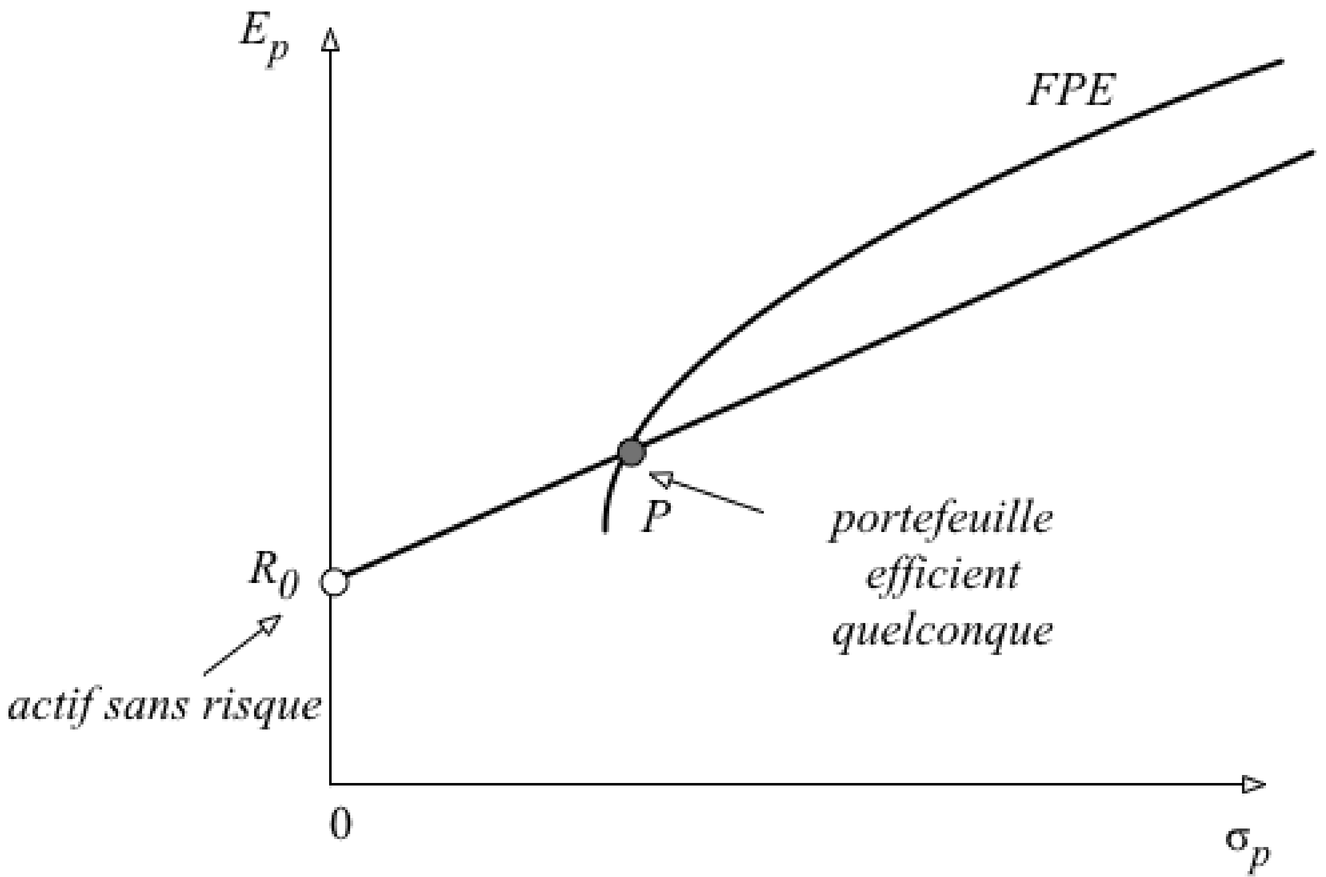
...calcul de l'espérance de rendement du nouveau portefeuille (suite)

… ce qui implique une espérance du nouveau portefeuille

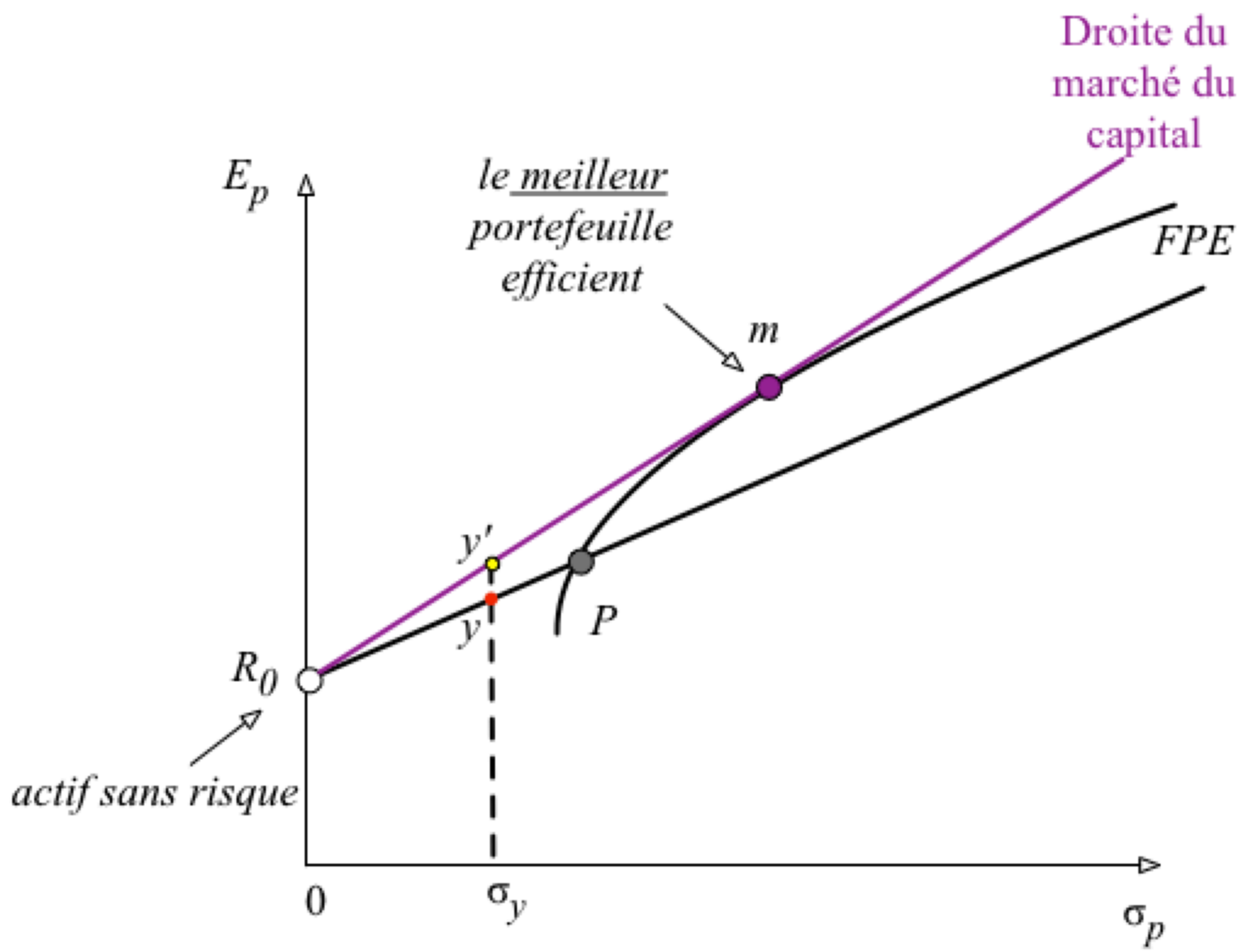
$$E = (\frac{E_p - R_0}{\sigma_p})\sigma + R_0$$

On constate que la relation entre E et σ est linéaire : il s'agit d'une droite passant par R_0 et le point (E_p,σ_p).

Les espérances de rendement du nouveau portefeuille en fonction de P quelconque



Recherche du meilleur portefeuille efficient



Définition de la droite du marché du capital

On appelle « droite du marché du capital » l'ensemble des portefeuilles efficients lorsqu'il existe un actif sans risque dans l'ensemble des titres de l'économie.

La droite du marché du capital (DMC) passe par le point (0, R_0) et le point de tangence (σ_m, E_m) à la frontière des portefeuilles efficients.

$$E = \frac{E_m - R_0}{\sigma_m}\sigma + R_0$$

Théorème de séparation de Tobin-Sharpe

Tout portefeuille efficient est la combinaison de 2 fonds :

- Un fonds sans risque de proportion 1-µ
- Un fonds risqué *m* de proportion µ

Le fonds risqué *m* est le « portefeuille de marché » (ce que nous allons démontrer)

Définition du portefeuille de marché

Le portefeuille tangenciel est le « portefeuille de marché »

$$x_1^m + x_2^m + ... + x_K^m = 1$$

dont les proportions sont égales aux capitalisations boursières relatives sur les marchés boursiers.

Intuitivement : puisque tous les gérants ont la même information sur les titres (la même base de données), ils composent leur portefeuille avec le même portefeuille tangenciel qui se reflète dans les capitalisations boursières du marché boursier.

Construction du portefeuille de marché

Supposons qu'il existe N agents dans l'économie, chaque agent est noté i

$$i = 1, \ldots, N$$

Et le portefeuille de l'agent i est noté en général

$$x_{io} + x_{i1}^m + x_{i2}^m + ... + x_{iK}^m = 1$$

...construction du portefeuille de marché...

Par le théorème de séparation, ce portefeuille est constitué de 2 mêmes fonds, où *m* désigne le portefeuille tangenciel

$$(1-\mu_i)+\mu_i\left(x_1^m+x_2^m+...+x_K^m\right)=1$$

Avec $1-\mu_i \equiv x_{io}$

la proportion de titre sans risque

Et μ_i

la proportion du portefeuille de marché

...construction du portefeuille de marché

Sachant que la valeur du patrimoine financier d'un agent *i* est W_i, la valeur totale du titre *k* sur le marché boursier est

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i \, x_k^m \, W_i$$

Et la capitalisation boursière relative du titre *k* est, après simplification

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} \mu_i x_k^m W_i}{\sum_{i=1}^{N} \mu_i W_i} = x_k^m \qquad \text{CQFD}$$

Exercice (suite)...

Rappel de l'équation de la frontière des portefeuilles efficients

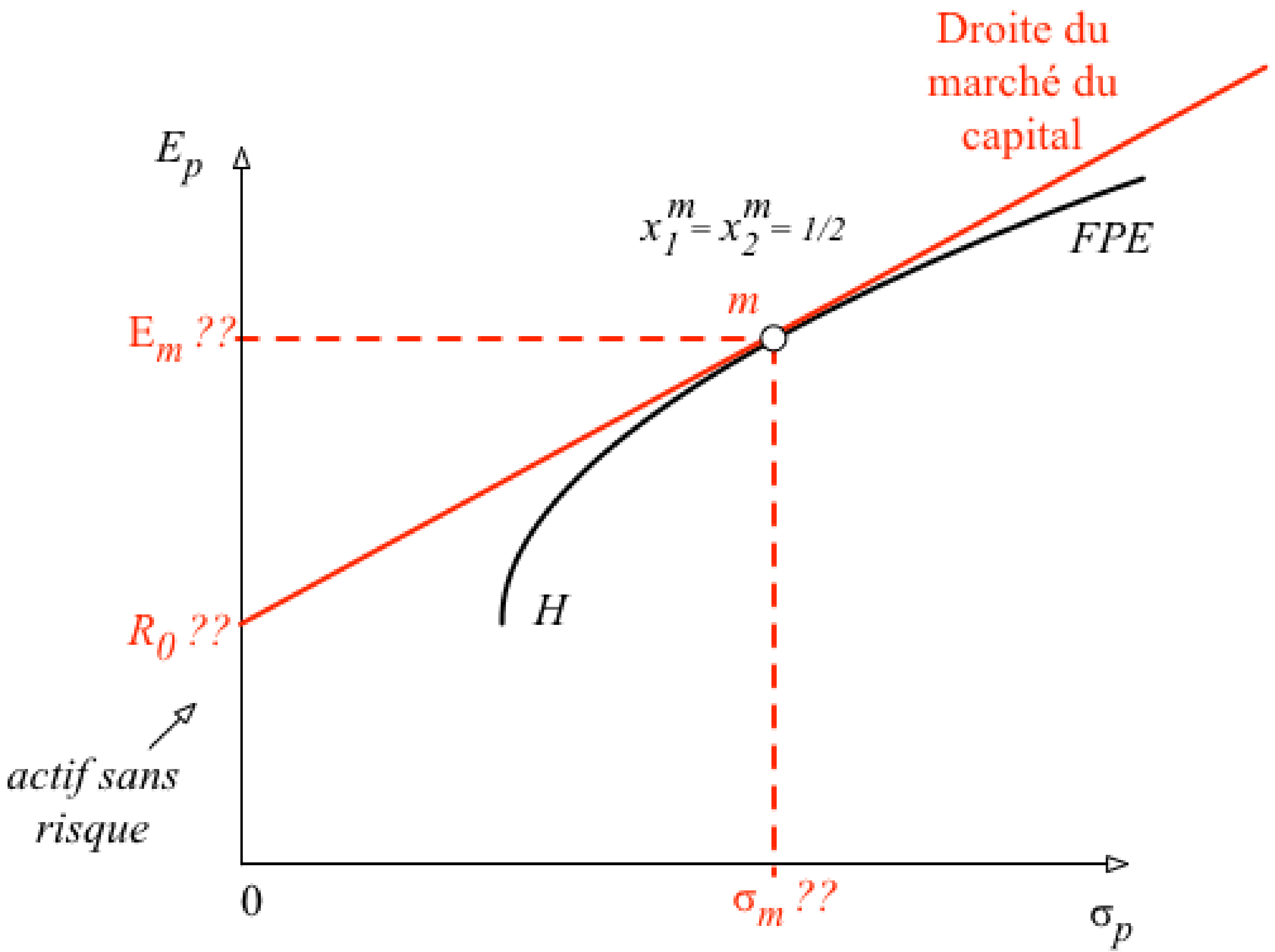
$$E_P = \frac{30}{23} + \frac{1}{23}\sqrt{46\,\sigma_p^2 - 20}$$

On suppose que le portefeuille de marché est

$$x_1^m = x_2^m = \frac{1}{2}$$

Question : trouver l'équation de la droite du marché du capital ?

...exercice : représentation graphique



exercice... calcul de la DMC

- Il faut calculer les paramètres s et R_0 de l'équation de la tangente à la FPE

$$\mathrm{E} = \mathrm{s}\,\sigma + R_0$$

- s peut être calculé à partir de la dérivée de la FPE, pour les valeurs (σ_m,E_m)
- R_0 peut être ensuite déduit de l'équation de la droite sachant s, σ_m et E_m

...exercice (suite)...

- Ce que nous connaissons :

$$E = \frac{30}{23} + \frac{1}{23}\sqrt{46\,\sigma^2 - 20}$$

$$E_m = \frac{1}{2}\,1 + \frac{1}{2}\,2 = \frac{3}{2}$$

$$\sigma_m^2 = \frac{23}{2}\,\frac{9}{4} - 30\,\frac{3}{2} + 20 = \frac{7}{8} \simeq (0,9354)^2$$

...exercice (suite)...

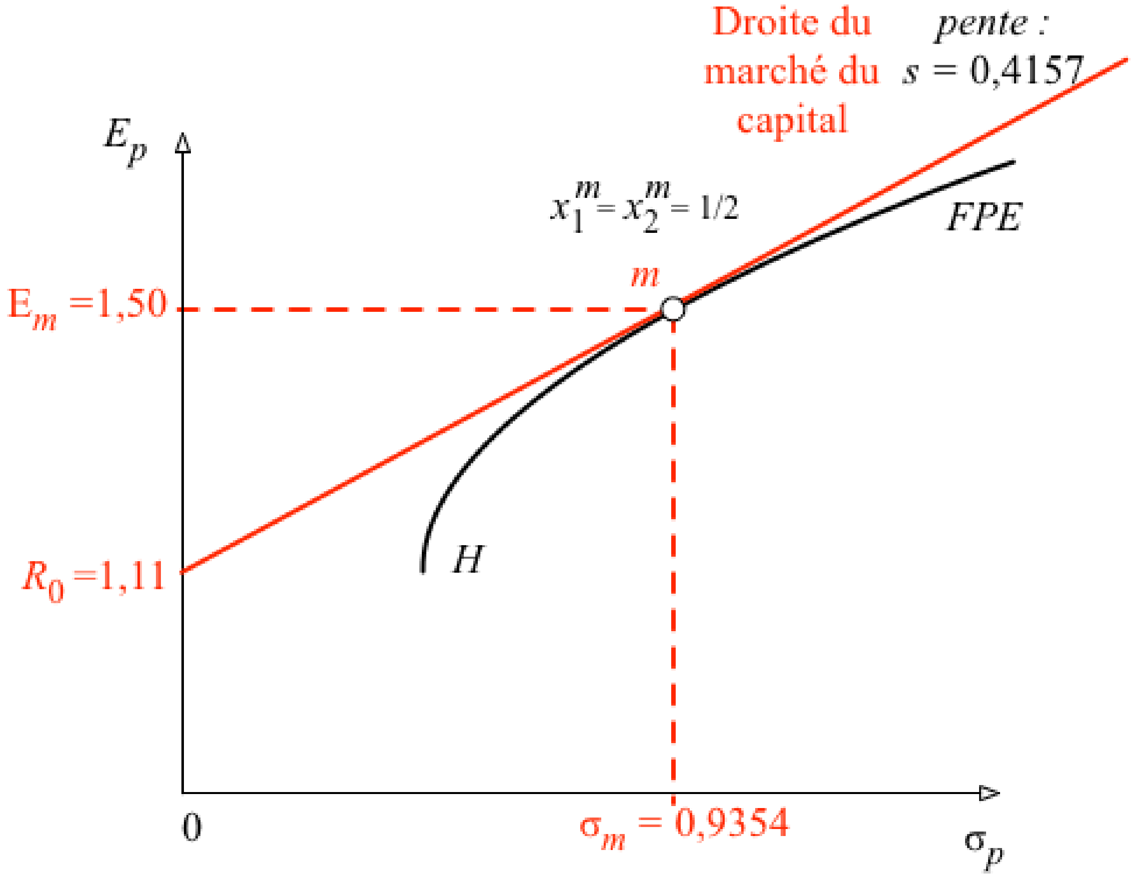
- Ce que nous pouvons déduire

$$s = \frac{\partial E}{\partial \sigma} \; = \; (2 \times 46\sigma)\frac{1}{23}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{46\,\sigma^2 - 20}} \; = \; 0,4157$$

on a remplacé σ par σ_m.

$$R_0 = E_m - s\sigma_m = \frac{3}{2} - 0,4157 \times 0,9354 = 1,1111$$

...exercice (fin)



Chapitre 3. Détermination des prix d'équilibre des actifs financiers

Pourquoi a-t-on besoin de connaître la théorie des prix d'équilibre ?

- La théorie, si elle est assez exacte, permet de comprendre les raisons des prix des actifs
- La théorie, si …, permet de comprendre une hausse et une baisse de prix
- La théorie, si …, permet de savoir si un actif est surévalué ou sous-évalué – s'il y a une « bulle » positive ou négative sur un actif

...et pratiquement

- Profiter d'« occasions d'arbitrage » :
  - acheter les actifs sous-évalués
  - vendre les actifs surévalués

ou

  - acheter le portefeuille de marché
  - vendre le portefeuille de marché

- C'est ce qu'on appelle une « gestion active » de portefeuille, par opposition à une « gestion passive »

Le critère d'absence d'occasion d'arbitrage (AOA) permet de distinguer les situations d'équilibre ou de déséquilibre

- On suppose qu'il existe une base de données

$$\vec{E}\,,\widehat{V}$$

- On compose un portefeuille efficient de caractéristiques

$$(E, \sigma)$$

- Il doit être sur la DMC en l'AOA pour tous les agents

$$E = \frac{E_m - R_0}{\sigma_m}\sigma + R_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{E - R_0}{\sigma} = \frac{E_m - R_0}{\sigma_m}$$

Occasion d'arbitrage et absence d'équilibre

- S'il existe un portefeuille (*E'*, σ') dont le ratio rendement/risque est inférieur au rendement moyen du marché, on ne l'achètera pas (on le vendra)

$$\frac{E' - R_0}{\sigma'} < \frac{E_m - R_0}{\sigma_m}$$

$$E' = E(\tilde{R}) = \frac{E(\tilde{Y})}{P}$$

- S'il existe un portefeuille (*E''*, σ'') dont le ratio rendement/risque est supérieur au rendement moyen du marché, on l'achètera

$$\frac{E'' - R_0}{\sigma''} > \frac{E_m - R_0}{\sigma_m}$$

- Pas d'équilibre des espérances et des variances de rendements des actifs

Absence d'occasion d'arbitrage et équilibre

- À l'équilibre, il y a

(1) absence d'occasion d'arbitrage sur un portefeuille entier

$$\frac{E - R_0}{\sigma} = \frac{E_m - R_0}{\sigma_m}$$

(2) absence d'occasion d'arbitrage dans le cas d'un changement marginal du portefeuille efficient ∂x_j

$$\frac{\frac{\partial(E - R_0)}{\partial x_j}}{\frac{\partial \sigma}{\partial x_j}} = \frac{E_m - R_0}{\sigma_m}$$

Formes de l'équation du rendement d'un portefeuille

$$\tilde{R} = (x_1\tilde{R}_1 + ... + x_j\tilde{R}_j + ... + x_K\tilde{R}_K) + (1 - x_1 - ... - x_j - ...x_K)R_0 \qquad (1)$$

$$\tilde{R} = \mu\Big[\underbrace{(x_1^m\tilde{R}_1 + ... + x_j^m\tilde{R}_j + ... + x_K^m\tilde{R}_K)}_{\tilde{R}_m}\Big] + (1 - \mu)R_0 \qquad (2)$$

$$E = (x_1E_1 + ... + x_jE_j + ... + x_KR_K) + (1 - x_1 - ... - x_j - ...x_K)R_0 \qquad (3)$$

$$E = \mu(x_1^mE_1 + ... + x_j^mE_j + ... + x_K^mR_K) + (1 - \mu x_1^m - ... - \mu x_j^m - ...\mu x_K^m)R_0 \quad (4)$$

Calcul de la dérivée par rapport à l'espérance

- De l'équation (3) on déduit la première dérivée

$$\frac{\partial (E - R_0)}{\partial x_j} = E_j - R_0 \tag{4}$$

Forme de l'équation de l'écart-type du rendement d'un portefeuille et dérivée...

$$\sigma = \sqrt{\sum_{a=1}^{K}\sum_{k=1}^{K} x_a x_k \, \sigma_{ak}} = \sqrt{f(x_1, ..., x_K)} \qquad (5)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\,\frac{f_j'}{\sqrt{f}} = \frac{1}{2}\,\frac{2\,\sum_{k=1}^{K} x_k \, \sigma_{kj}}{\sigma} \qquad (6)$$

...suite du calcul de la dérivée de l'écart-type...

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_j} = \frac{\sum_{k=1}^{K} x_k \, Cov(\tilde{R}_k, \tilde{R}_j)}{\sqrt{Var(\tilde{R})}} = \frac{\sum_{k=1}^{K} \mu \, x_k^m \, Cov(\tilde{R}_k, \tilde{R}_j)}{\sqrt{\mu \, Var(\tilde{R}_m)}} \tag{7}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_j} = \frac{Cov(\tilde{R}_m, \tilde{R}_j)}{\sqrt{Var(\tilde{R}_m)}} = \frac{\sigma_{jm}}{\sigma_m} \tag{8}$$

...finalement, à l'équilibre...

$$\frac{\frac{\partial(E-R_0)}{\partial x_j}}{\frac{\partial \sigma}{\partial x_j}} = \frac{E_m - R_0}{\sigma_m}$$

En utilisant les dérivées (4) et (8) on obtient

$$\frac{\partial(E - R_0)}{\partial x_j} = \frac{E_m - R_0}{\sigma_m} \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} \tag{9}$$

$$\Longrightarrow \; E_j - R_0 = (E_m - R_0)\frac{\sigma jm}{\sigma_m^2} \tag{10}$$

...le *Capital Asset Pricing Model (CAPM)**

$$\mathrm{E}_j - R_0 = (E_m - R_0)\frac{\sigma jm}{\sigma_m^2} \equiv (E_m - R_0)\,\beta_j$$

équation (10) pour $j = 1, ..., K.$

- Le bêta du titre *j* représente le risque du titre *j.*
- Ce risque n'est pas absolu (variance du titre *j*) mais relatif au marché (covariance par rapport au rendement du marché).
- Si le bêta est égal à 1, le rendement du titre est le même que celui du marché

* traduction en français : Modèle d'évaluation des actifs financiers (Médaf)

Interprétation des bêtas (1)

- Une sorte d'élasticité (raisonnement en %)
- Si β_j = 3 : le rendement du titre *j* augmente de 3 % en moyenne lorsque le rendement du marché dans son ensemble augmente de 1 % en moyenne
- Si β_j = 0,5 : le rendement du titre *j* augmente de 0,5 % en moyenne lorsque le rendement du marché dans son ensemble augmente de 1 % en moyenne
- $\beta_j < 0$: rare, « valeur refuge »

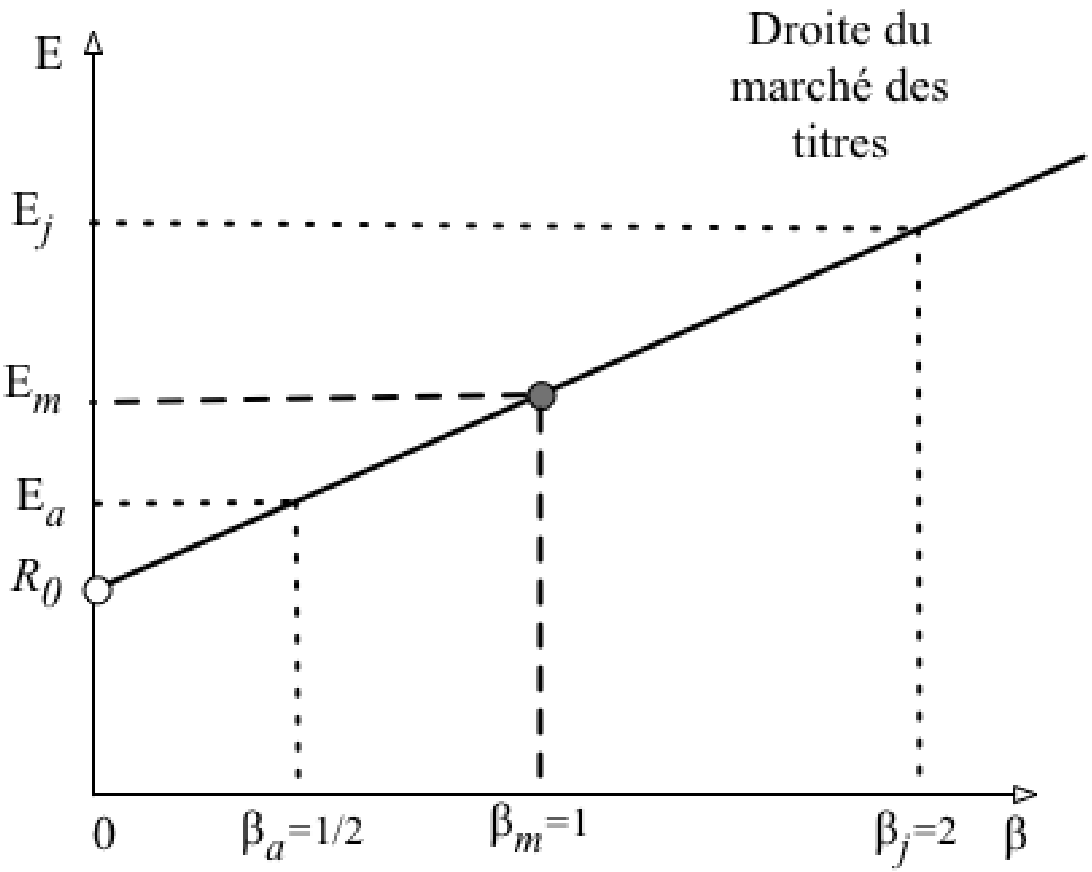
Interprétation des bêtas (2)

- Dans le premier cours, on avait montré que le risque – au sens de la variance du rendement – d'un portefeuille composé de nombreux titres (approximativement le portefeuille du marché) tendait à être égal à la covariance moyenne des titres entre eux
- Dans le CAPM on retrouve cette idée que le risque d'un titre particulier est une covariance, mais relative : selon que celle-ci est au dessus ou en dessous de la covariance moyenne (donnée par la variance du marché) son rendement sera plus élevé ou moins élevée que le rendement du marché

Interprétation des bêtas (3)

- Le risque d'un titre est mesuré par le bêta d'un titre
- Le rendement du titre sans risque, R_0, est supposé exogène
- Le rendement du marché, E_m, est supposé exogène
- Le bêta d'un titre est donc le seul facteur explicatif de l'espérance de rendement d'un titre, E_j (endogène)
- OU : le bêta d'un titre est le seul facteur explicatif de l'espérance de la prime de risque sur le titre, $E_j - R_0$ (endogène)

Droite du marché des titres



NB : Les valeurs négatives des bêtas sont omises

Interprétation de la pente de la DMT et de R_0...

- La pente de la DMT est égale à $E_m - R_0$
- R_0 est un taux d'intérêt à court terme (supposé nominal) donc déterminé par la Banque centrale, qui réagit à l'état de la conjoncture macroéconomique, en particulier au taux d'inflation anticipé
- E_m est déterminé par l'état de la conjoncture macroéconomique d'une part et des facteurs structurels comme la démographie et l'aversion au risque (ou la tolérance au risque) dans la population

Actuellement, la pente de la DMT et la valeur de R_0...

- La politique monétaire accommodante de la BCE, dans un contexte de très faible inflation implique un taux sans risque nominal, R_0, très faible
- Début 2015, des anticipations plus optimistes des entrepreneurs engendrent une hausse importante des actions en bourse, E_m : + 20 % environ depuis le début de l'année) : la bourse anticipe la reprise ?
- La hausse des cours en bourse des actions peut aussi s'expliquer par l'abondance des liquidités fournies par la BCE et le manque d'investissement réel profitable : moment de bulle financière ?

CAPM sous forme prix

$$E(R_j) - R_0 = (E(R_m) - R_0)\,\beta_j \tag{1}$$

$$\frac{E(y_j)}{v_j} - R_0 = \left[\frac{E(y_m)}{v_m} - R_0\right] \frac{\frac{cov(y_j, y_m)}{v_j\ v_m}}{\frac{var(y_m)}{v_m}} \tag{2}$$

$$E(y_j) - R_0\, v_j = \left[E(y_m) - R_0\, v_m\right] \frac{cov(y_j, y_m)}{var(y_m)} \tag{3}$$

$$v_j = \frac{E(y_j)}{R_0} - \left[\frac{E(y_m)}{R_0} - v_m\right] \frac{cov(y_j, y_m)}{var(y_m)} \tag{4}$$

Endogènes et exogènes dans le CAPM sous forme prix

Endogènes $(j = 1, ..., K)$

$$v_j = \frac{E(y_j)}{R_0} - \left[\frac{E(y_m)}{R_0} - v_m\right] \frac{cov(y_j, y_m)}{var(y_m)} \tag{4}$$

Exogènes :

$$y_m = \sum_{k=1}^{K} y_k$$

$$v_m = \sum_{k=1}^{K} v_k$$

$$R_0$$

Fin du deuxième cours