1/ Corrigé du 2^e exercice sur la FPE

$$E(\tilde{r}_1) = E_1 = 0,03$$

$$E(\tilde{r}_2) = E_2 = 0,08$$

$$Var(\tilde{r}_1) = \sigma_{11} = 0,02$$

$$Var(\tilde{r}_2) = \sigma_{22} = 0,05$$

$$\rho = 0,36$$

Programme de la FPE

Programme général

$$\min_{x_1 \ldots x_K} V = \sum_{j=1}^{K} \sum_{k=1}^{K} x_j \, x_k \sigma_{jk} \tag{1}$$

$$1 = \sum_{j=1}^{K} x_j \tag{2}$$

$$E = \sum_{j=1}^{K} x_j \, E_j \tag{3}$$

Application du programme au cas de 2 titres risqués

$$
\begin{aligned}
\min_{x_1, x_2} V &= (x_1)^2 \, \sigma_{11} + (x_2)^2 \, \sigma_{22} + 2 \, x_1 \, x_2 \sigma_{12} \\
1 &= x_1 + x_2 \\
E &= x_1 \, E_1 + x_2 \, E_2
\end{aligned}
$$

Résolution par substitution

Calcul de la covariance :

$$\sigma_{12} = \rho \, \sigma_1 \, \sigma_2 = (-0,32)\sqrt{0,02}\sqrt{0,05} = -0,0101$$

Calcul de la variance du portefeuille à minimiser :

$$\min V = 36,0000 \, E^2 - 3,3600 \, E + 0,0884$$

Commentaire : à chaque niveau d'espérance correspond un seul niveau de variance qui est donc la variance minimale.

Équation de la FPE

Fonction de variance minimale dans le plan (E, σ)

$$V = 36,0000\,E^2 - 3,3600\,E + 0,0884$$

Fonction d'espérance maximale dans le plan (σ, E)

On recherche les solutions de l'équation du second degré issue de la fonction de variance minimum,

$$36\,E^2 - 3,36\,E + (0,0884 - V) = 0$$

On obtient la solution « supérieure » suivante,

$$E = 0,047 + \frac{1}{6}\sqrt{\sigma^2 - 0,010}$$

Équation de la frontière des portefeuilles efficients

Ajout aux 2 titres risqués d'un titre sans risque

$$r_0 = 4\,\%$$

$$\begin{aligned}
\max_{E,\sigma}\ \theta &= \frac{E - r_0}{\sigma} \\
E &= 0,047 + \frac{1}{6}\sqrt{\sigma^2 - 0,010}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \max\ \theta = \frac{0{,}047 + \frac{1}{6}\sqrt{\sigma^2 - 0{,}010} - r_0}{\sigma}$$

Résolution : recherche de la droite du marché du capital

- Condition de 1er ordre :

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = 0$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{6}\frac{\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 - 0,01}} - 0,047 + r_0 - \frac{1}{6}\sqrt{\sigma^2 - 0,01}$$

$$\boxed{r_0 = 4\,\% \ \Rightarrow \ \sigma_m = 0,267 \ E_m = 0,088}$$

Équation de la droite du marché du capital

- La forme générale de l'équation est

$$E = c\,\sigma + r_0$$

où

$$c = \frac{E_m - r_0}{\sigma_m}$$

- Pour r_o = 4 % : $\boxed{E = 0,18\,\sigma + 0,04}$

2/ Effet de levier dans un portefeuille

Avec 1 actif sans risque (R_0)

$$\begin{aligned} E &= x_0 \, R_0 + x_1 \, E_1 \\ E &= (1 - x_1) \, R_0 + x_1 \, E_1 \\ E &= R_0 + x_1 \, (E_1 - R_0) \end{aligned}$$

$$\text{Une definition du levier : } \frac{\text{total des actifs}}{\text{fonds propres}} = \frac{x_1}{1} = x_1$$

$$\text{Une autre definition du levier : } \frac{\text{dette}}{\text{fonds propres}} = \frac{-x_0}{1} = x_1 - 1$$

Application à un portefeuille de la DMC

- Le deuxième titre est le « portefeuille du marché »

$$\begin{aligned} E &= x_0\, R_0 + x_m\, E_m (= (1-\mu)\, R_0 + \mu\, E_m) \text{ autre notation} \\ E &= (1 - x_m)\, R_0 + x_1\, E_1 \\ E &= R_0 + x_m\, (E_1 - R_0) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & x_0 + x_m \\ \text{si } x_m & = 1, & x_0 = 0 \\ \text{alors} & \text{tout} & \text{en p. de march, pas d'emprunt, pas de levier} \\ \text{si } x_m & < 1, & x_0 > 0 \\ \text{alors} & \text{p. de} & \text{march + actif ss risque, pas d'emprunt, pas de levier} \\ \text{si } x_m & > 1, & x_0 < 0 \\ \text{alors} & \text{p. de} & \text{march + emprunt : levier} \end{array}$$

3/ CAPM sous forme prix

$$E(R_j) - R_0 = (E(R_m) - R_0)\,\beta_j \tag{1}$$

$$\frac{E(y_j)}{v_j} - R_0 = \left[\frac{E(y_m)}{v_m} - R_0\right] \frac{\frac{cov(y_j, y_m)}{v_j\; v_m}}{\frac{var(y_m)}{v_m^2}} \tag{2}$$

$$E(y_j) - R_0\, v_j = \left[E(y_m) - R_0\, v_m\right] \frac{cov(y_j, y_m)}{var(y_m)} \tag{3}$$

$$v_j = \frac{E(y_j)}{R_0} - \left[\frac{E(y_m)}{R_0} - v_m\right] \frac{cov(y_j, y_m)}{var(y_m)} \tag{4}$$