Théorie moderne de la gestion de portefeuille
CEA

Cours n°1/3

thierry.granger@dauphine.fr

Avant la « gestion moderne » (1/2)

- Première moitié du XX$^{\text{ième}}$ siècle : *prudent man rule*
  - *John Burr Williams : The Theory of Investment Value* (1938)
  - analyse financière *: stock picking*
  - un portefeuille ne doit comprendre que des titres (actions ou obligations) d'entreprises réputées pour leur bonne gestion
  - pas d'opérations spéculatives, comme des ventes à découvert
  - neutralisation du risque par suffisante diversification

Avant la « gestion moderne » (2/2)

- John Maynard Keynes
  - L'importance de l'information du gérant
  - La concentration des portefeuilles est nécessaire pour obtenir un bon rendement
  - [NB : *ce serait la gestion alternative aujourd'hui*]

Après 1952 : la gestion moderne

- Elle modifie la règle de prudence
  - La diversification efficiente (intelligente)
  - La diligence raisonnable (*due diligence*) est l'ensemble des vérifications qu'un éventuel investisseur va réaliser avant l'achat d'un titre, afin de se faire une idée précise de la situation d'une entreprise. (Lexique du journal *LES ÉCHOS*).

Plan du cours (1/2)

- CH1 – La gestion de portefeuille en l'absence d'actif sans risque : la frontière des portefeuilles efficients
- CH2 – La gestion de portefeuille avec un actif sans risque : la droite du marché du capital
- CH3 – Le *Capital Asset Pricing Model* (ou modèle d'évaluation des actifs financiers) : le béta d'un titre ou d'un portefeuille
- CH4 – Les applications de la théorie moderne de la gestion de portefeuille : marchés efficients ou non, gestion passive/gestion active

Plan du cours (2/2)

- Cours 1/3 : CH1
- Cours 2/3 : CH2 et CH3
- Cours 3/3 : CH4

Chapitre 1 – Le choix de portefeuille en l'absence d'actif sans risque

L'inauguration de la gestion moderne : l'article clef

- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), 77-91.
- Prix Nobel en 1990 (avec Merton H. Miller et William F. Sharpe)
- Première approche mathématique de la finance

1 - Cadre temporel d'un gérant

- Un gérant de portefeuille est supposé avoir un horizon de réflexion et de calcul unique
- On parlera d'allocation stratégique lorsque l'horizon est lointain
  - supérieur à 1 an, ce peut être 10 ans, 30 ans (fonds de pension pour les retraites)
- On parlera d'allocation tactique (parfois) ou de gestion active lorsque l'horizon est proche
  - Inférieur à 1 an, éventuellement au jour le jour

Cadre temporel : statique

- $t = 0, 1$
- 0 : aujourd'hui
- 1 : demain, 1 an, 10 ans
- Pas de consommation en date 0
- Une décision, en $t = 0$, de répartir sa richesse initiale entre plusieurs placements
- Les placements seront revendus en $t = 1$

Décision en $t = 0$

- Répartition de la richesse entre plusieurs placements $\equiv$ choix de portefeuille
- Il existe K titres dans l'économie (actions, obligations, etc.)
- 1 portefeuille particulier sera noté :
  - $(n_1, n_2, \ldots, n_K)$
  - n_k représente la quantité d'actions ou d'obligations de l'entreprise k détenue dans le portefeuille

2 - Contraintes budgétaires du portefeuille d'un gérant

- *en* $t = 0$,

  $W_0 = n_1 v_1 + n_2 v_2 + \dots + n_K v_K$

- *en* $t = 1$,

  $$\tilde{W}_1 = n_1 \tilde{y}_1 + n_2 \tilde{y}_2 + \dots n_K \tilde{y}_K$$

- Les y_k et W_1 sont des variables aléatoires
- W_t ($t = 0, 1$) représente la richesse en $t = 0$ et le revenu total en $t = 1$
- y_k est appelé « revenu du titre *k* »
- y_k représente le produit de la vente du titre *k* en $t = 1$:
  - dividendes + cours, s'il s'agit d'une action
  - coupon + cours, s'il s'agit d'une obligation

Passage des revenus aux rendements d'un portefeuille

$$\frac{W_0}{W_0}=\frac{n_1 v_1}{W_0}+\frac{n_2 v_2}{W_0}+\ldots+\frac{n_K v_K}{W_0}$$

$t = 0$

$$1=x_1+x_2+\ldots+x_K$$

$$\frac{\widetilde{W}_1}{W_0}=\frac{n_1 v_1 \widetilde{y}_1}{W_0 v_1}+\frac{n_2 v_2 \widetilde{y}_2}{W_0 v_2}+\ldots+\frac{n_K v_K \widetilde{y}_K}{W_0 v_K}$$

$t = 1$

$$\widetilde{R}_p=x_1\widetilde{R}_1+x_2\widetilde{R}_2+\ldots+x_K\widetilde{R}_K$$

Proportions, revenus, rendements

- Les x_k représentent les proportions de titres dans le portefeuille
- Les R_k représentent les rendements des titres

$$R_k = 1 + r_k = y_k / v_k \qquad (k = 1, \ldots, K)$$

R_k représente le « rendement brut » : le rapport du revenu final sur le prix initial

r_k représente le « rendement net »

- On peut raisonner en brut ou en net...

...exemples

- Un portefeuille contient 50 % d'un titre *«a»* dont le rendement net est 8 % et 50 % d'un titre «*b*» dont le rendement net est 4 %.
- Le rendement du portefeuille est alors de 6 % :

$$6\ \% = \tfrac{1}{2} * 8\ \% + \tfrac{1}{2} * 4\ \%$$

- Un portefeuille contient 2/3 d'un titre *«a»* dont le rendement net est 3 % et 1/3 d'un titre «*b*» dont le rendement net est 9 %.
- Le rendement du portefeuille est alors de 5 %

$$5\ \% = 2/3 * 3\ \% + 1/3 * 9\ \%$$

Achats et ventes de titres

- On suppose une certaine richesse à placer W_0
- Lorsqu'un titre est acheté,

$$n_k > 0 \text{ ou } x_k > 0$$

  – on dit que l'on détient une « position longue » du titre dans le portefeuille

- Lorsque le titre est vendu (alors que l'on ne détient pas ce titre),

$$n_k < 0 \text{ ou } x_k < 0$$

  – on dit que l'on a vendu le titre à découvert et que l'on détient une « position courte » de ce titre

Vente à découvert (théorie)

- En théorie, une vente à découvert est
  - Une vente à terme : un prix pour le titre est fixé aujourd'hui (t = 0) et le titre doit être livré à échéance (t = 1)
  - Le paiement est supposé se faire aujourd'hui (v_k) tandis que la livraison du titre suppose que le vendeur l'achète à échéance au prix du marché, après versement du dividende, soit (y_k)
- Une vente à découvert est analogue à un emprunt (dans un titre particulier)

Vente à découvert (pratique)

- En pratique, une vente à découvert est
  - Une vente à terme : un prix pour le titre est fixé aujourd'hui et le titre doit être livré à échéance
  - Le paiement est supposé se faire à échéance. Comme la livraison du titre suppose que le vendeur l'achète à échéance au prix du marché, après versement du dividende, le revenu, pour le vendeur, à échéance, prend la forme d'une différence

    (prix fixé en $t = 0$) - (prix courant en $t = 1$)
  - Une garantie est demandée au vendeur pour s'assurer qu'il pourra acheter et livrer à échéance

3 - Les préférences des gérants de portefeuille

- Dépendent de l'espérance de rendement de leur portefeuille sur l'horizon choisi
- Dépendent de la variance de rendement du portefeuille
- De la richesse initiale
- De paramètres d'aversion à la variance (on dira aussi d'« aversion au risque »)

Fonctions d'utilité générale

$$U_i(W_{0,} \widetilde{R}_p) = F_i[E(\widetilde{R}_p), Var(\widetilde{R}_p), W_0]$$

i = 1, …, *N* est un gérant particulier

...fonctions d'utilité simple

$$U_i\left(W_{0,}\widetilde{R}_p\right)=E\left(\widetilde{R}_p\right)-\frac{1}{2\tau_i\left(W_0\right)}Var\left(\widetilde{R}_p\right)$$

- $\tau_i(W_0)$ est la tolérance au risque du gérant «*i*»
- $\tau_i(W_0)$ est croissante avec la richesse W_0
- La fonction est linéaire par rapport à l'espérance et à la variance

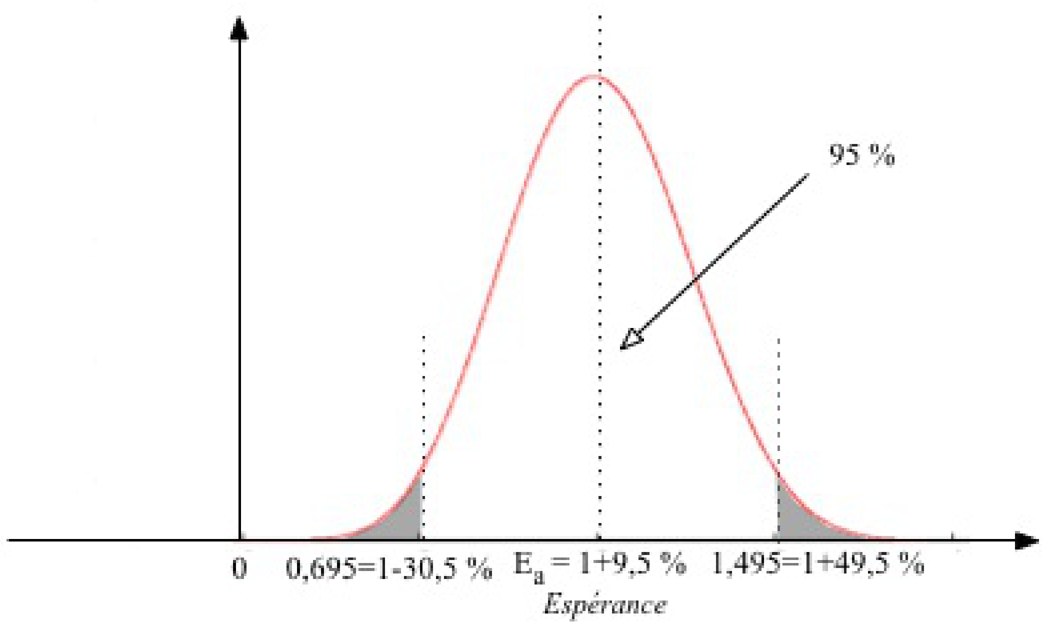
4 - Trois justification des fonctions d'utilité espérance-variance

(a) Les rendements des actifs sont des variables aléatoires normales => dont aussi le rendement du portefeuille

(b) Les fonctions d'utilité élementaires sont quadratiques

(c) La rationalité des agents est limitée

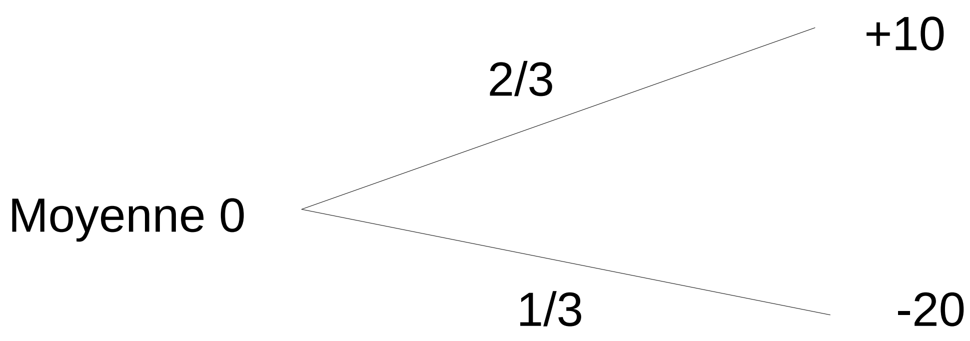
(a) Variables aléatoires normales



- L'écart-type est de 20 %.
- La probabilité que le rendement s'écarte de moins 2 fois l'écart-type de la moyenne est environ de 95 %

...mais deux anomalies sur les rendements

- Distribution asymétrique à gauche (moment d'ordre 3)



- Distribution leptokurtique (moment d'ordre 4) : la probabilité de réalisation de rendements extrêmes (en plus ou en moins) est plus élevée que dans une loi normale

(b) Les fonctions d'utilité élémentaires sont quadratiques

- Les fonctions d'utilité espérance-variance sont des cas particuliers de fonction d'espérance d'utilité

$$E\left[u\left(\widetilde{R}_p\right)\right]$$

… utilité quadratique

$$u(R) = R - \frac{k}{2} R^2$$

sous l'hypothèse d'utilité croissante,

$u'(R) > 0$, soit $0 < R < 1/k$

on en déduit que l'espérance d'utilité est

$$Eu(\tilde{R}) = E(\tilde{R}) - \frac{k}{2} E(\tilde{R}^2)$$

$$\boxed{Eu(\tilde{R}) = E(\tilde{R}) - \frac{k}{2} [E(\tilde{R})^2 + Var(\tilde{R})]}$$

CQFD

(c) Rationalité limitée des agents

- Cette hypothèse est (sans doute) vraie pour les particuliers, moins informés, mais elle ne l'est plus pour les gérants

5 – Base de données du gérant

- Rendements pour l'actif *j*

  R_{j1} entre $t = 0$ et $t = 1$

  R_{j2} entre $t = 1$ et $t = 2$

  …………………

  R_{jn} entre $t = 0$ et $t = n$

- Avec

$$R_{jt} = \frac{v_{jt} + d_{jt}}{v_{jt-1}}$$

Rendements moyens historiques

- Rendements moyens :

$$\overline{R_j} = \sqrt[n]{R_{j1} R_{j2} \ldots R_{jn}}$$

- Rendements moyens approximatifs

$$\overline{R_j} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} R_{jt}$$

(NB : passage d'une équation à l'autre par les logarithmes, puis application de l'approximation log (1+*r*) = *r*, quand *r* est petit)

Variances, covariances moyennes historiques

- Variances moyennes :

$$\overline{\sigma_k}^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(R_{kt} - \bar{R}_k\right)^2$$

- Covariances moyennes :

$$\overline{\sigma_{kj}} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(R_{kt} - \bar{R}_k\right)\left(R_{jt} - \bar{R}_j\right)$$

L'information du gérant est ajoutée aux données historiques

Base de données historiques

Information du gérant

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_K \end{pmatrix}$$

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \dots \sigma_{1K} \\ \dots \dots \dots \\ \sigma_{K1} \dots \sigma_{KK} \end{pmatrix}$$

Hypothèse importante

- Tous les agents ont la même information, c'est-à-dire, la même base de données

$$\vec{E} \; et \; \hat{V}$$

… « sont connaissance commune »

6 - Calculs de l'espérance et de la variance du portefeuille

$$E(\widetilde{R}_p) = E(x_1 \widetilde{R}_1 + x_2 \widetilde{R}_2 + \ldots + x_K \widetilde{R}_K)$$

$$E(\widetilde{R}_p) = x_1 E(\widetilde{R}_1) + x_2 E(\widetilde{R}_2) + \ldots + x_K E(\widetilde{R}_K)$$

En écriture simplifiée de l'espérance :

$$E_p = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \ldots + x_K E_K$$

...suite des calculs

$$Var(A+B)=Var(A)+Var(B)+Cov(A,B)+Cov(B,A)$$

$$Var(\tilde{R}_p)=Var(x_1\tilde{R}_1+x_2\tilde{R}_2+...+x_K\tilde{R}_K)$$

$$\boxed{\sigma_p^2=\sum_{j=1}^{K}\sum_{k=1}^{K}x_j x_k \sigma_{jk}}$$

7 - Optimisation du portefeuille (étape 1)

- Les 6 sections précédentes sont maintenant condensées dans deux étapes – ou deux programmes – d'optimisation du portefeuille
- Le premier programme résulte de l'hypothèse selon laquelle tous les agents préfèrent plus d'espérance et moins de variance du rendement de leur portefeuille (fonction d'utilité espérance variance)
- Un portefeuille optimal sera donc nécessairement efficient : un portefeuille qui maximise l'espérance de rendement à variance donnée et qui minimise la variance de rendement à espérance donnée

...formellement...

$$\begin{cases} \min\limits_{x_1, x_2, \ldots x_K} \sigma_p^2 = \sum\limits_{j=1}^{K} \sum\limits_{k=1}^{K} x_j x_k \sigma_{jk} \\ E_p = x_1 E_1 + x_2 E_2 + \ldots + x_K E_K \\ 1 = x_1 + x_2 + \ldots + E_K \end{cases}$$

- Les variables exogènes sont les espérances et les variances-covariances, ainsi que E_p
- Les variables endogènes sont les proportions de titres dans le portefeuille efficient et la variance du portefeuille efficient pour toute valeur de E_p

...résolution...

- Il s'agit d'un programme quadratique, dont la résolution est bien connue (voir le manuel Etner, Granger, Economica, par exemple)
- Lorsqu'on ajoute à la solution de ce programme la condition selon laquelle les portefeuilles efficients doivent maximiser l'espérance pour tout niveau de variance, on obtient la frontière des portefeuilles efficients d'équation :

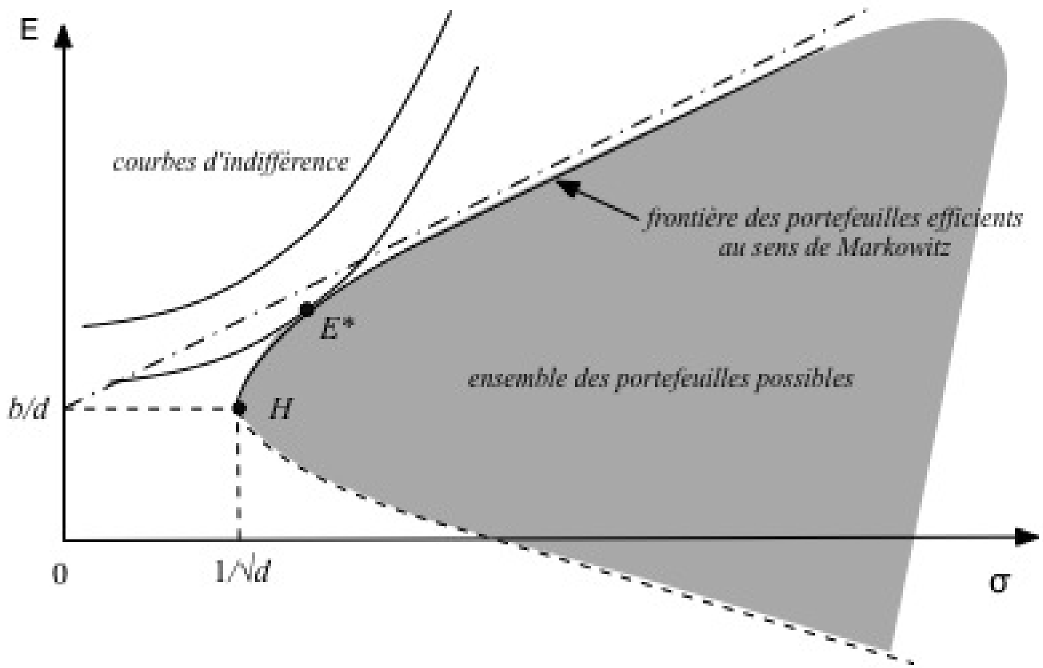
$$E_p = \frac{b}{d} + \frac{1}{d}\sqrt{\Delta\left(\sigma_p^2 d - 1\right)}$$

...l'équation de la frontière des portefeuilles efficients...

$$E_p = \frac{b}{d} + \frac{1}{d}\sqrt{\Delta\left(\sigma_p^2 d - 1\right)}$$

- *b, d,* Δ sont positifs
- graphiquement, il s'agit de la branche supérieure d'une hyperbole dans le plan Écart-type/Espérance

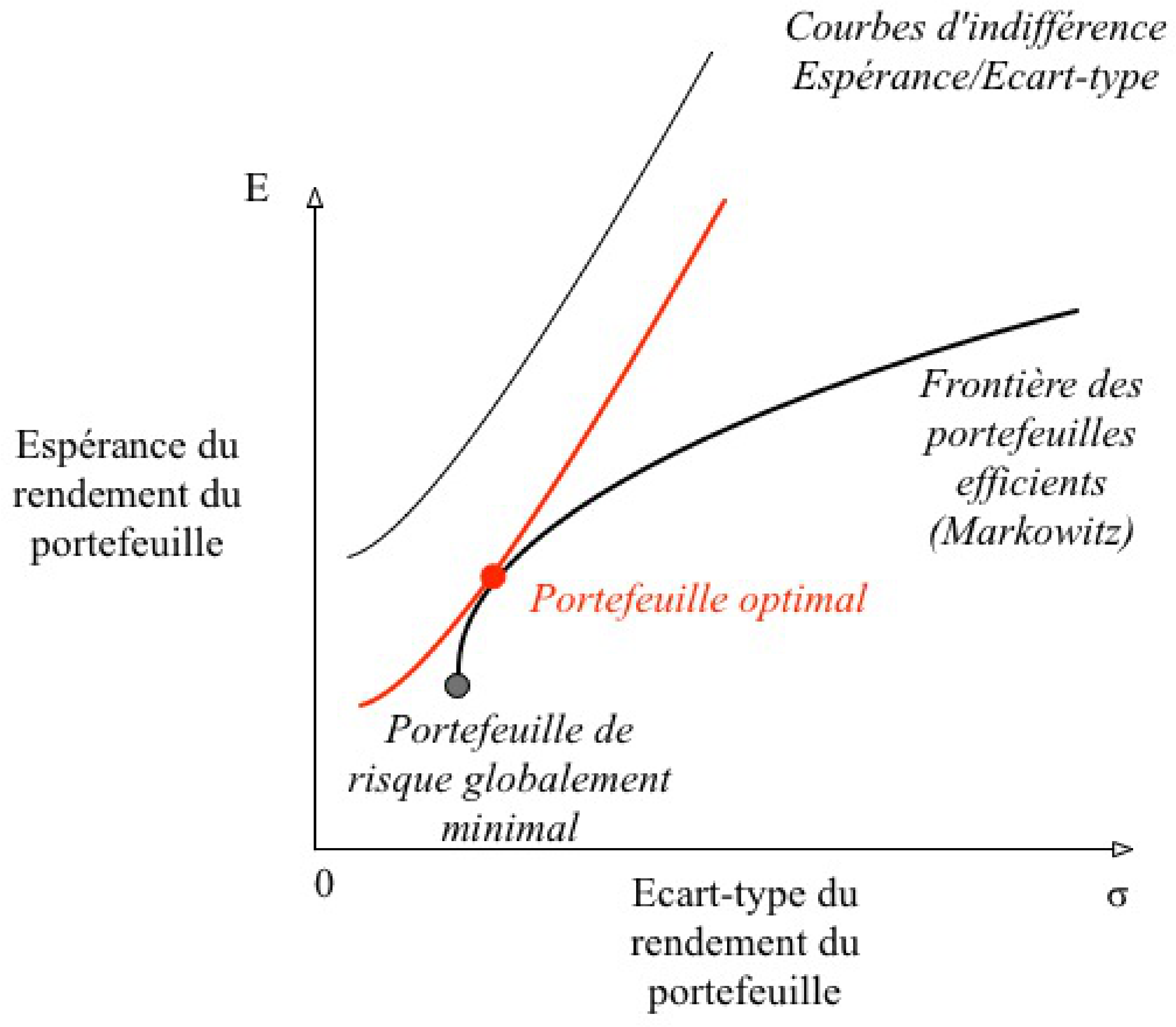
...le graphique de la frontière des portefeuilles efficients



8 - Optimisation du portefeuille (étape 2)

- Il existe une infinité de portefeuille efficients, mais il existe un seul portefeuille optimal
- Le portefeuille optimal est un portefeuille efficient dont le rapport entre l'espérance et la variance maximise l'espérance d'utilité d'un agent particulier
- Graphiquement, il s'agit du portefeuille au point de tangence entre la F.P.E. et la courbe d'indifférence la plus haute à couper la frontière
- Le portefeuille optimal est, en général différent, d'un agent à l'autre

...portefeuille optimal



9 - Propriétés des portefeuilles efficients

- Un portefeuille efficient est composé de titres en position longue ($x_k > 0$) et de titres en positions courtes ($x_k < 0$)
- Un portefeuille efficient est diversifié (voir exemple 1) et sa variance est approximativement une somme de covariance
- Il n'existe pas de limite au rendement d'un portefeuille, mais comme tous les titres ont un rendement fini, on ne peut atteindre un rendement infini qu'en vendant des titres de rendements inférieurs et en achetant des titres de rendements supérieurs (voir exemple 2)

Exemple 1 : un portefeuille efficient est diversifié

$$\left\{\begin{array}{c} E_1 = E_2 \\ \sigma_1 = \sigma_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{array}\right|$$

- Diversifier signifie ici : $x_1 > 0$, $x_2 > 0$
- Faut-il diversifier son portefeuille (pour augmenter l'espérance et/ou la variance) ?

… réponse à l'exemple 1...

- L'espérance de rendement du portefeuille n'est pas modifiée par la composition du portefeuille

$$\forall x_{1,} x_2 \rightarrow E_p = x_1 E_1 + x_2 E_2 = E_1$$

- La variance du rendement du portefeuille est

$$\sigma_p^2 = (x_1)^2 \sigma_1^2 + (x_2)^2 \sigma_2^2 + 2 x_1 x_2 \rho \sigma_1 \sigma_2$$

- On peut mettre en facteur σ_1^2

… réponse à l'exemple 1...

$$\sigma_p^2 = \sigma_1^2 [(x_1)^2 + (x_2)^2 + 2 x_1 x_2 \rho] < (x_1 + x_2)^2 = 1$$

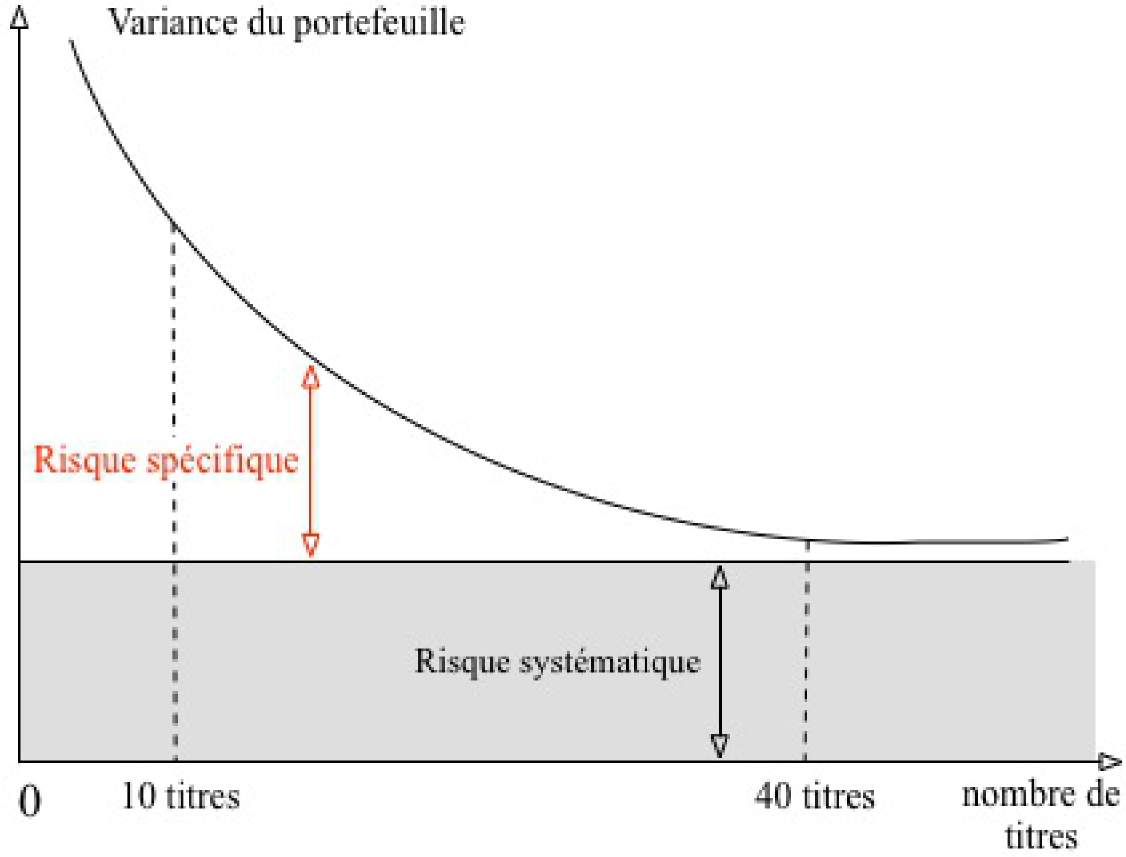
si ρ < 1 et (x_1 > 0, x_2 > 0)

CQFD

...généralisation avec *n* titres...

- On calcule la variance de portefeuilles équipondérés de taille 1, 2, …, *n*, … titres
- La courbe de la variance est décroissante, mais avec une limite
- Cette limite est appelée « risque systématique » et correspond grosso modo au point de risque globalement minimum (H) de la frontière des portefeuilles efficients

...graphique : variance d'un portefeuille de *n* titres...



...la variance d'un portefeuille est (approximativement) la somme des covariances de ses titres...

$$Var[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{R}_j]=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma_j^2}{n}+\frac{n(n-1)}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k\neq j}\frac{\sigma_{jk}}{n(n-1)}$$

$$Var[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{R}_j]=\frac{1}{n}\overline{Var}+\frac{n-1}{n}\overline{Cov}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} Var[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\tilde{R}_j]=\overline{Cov}}$$

Exemple 2 : espérance de rendement infini et effet de levier

- Soit un portefeuille de 2 titres avec $E_1 < E_2$
- Par exemple $E_1 = 2\ \%$ et $E_2 = 5\ \%$

$$E_p = x_1 E_1 + x_2 E_2 = (1-x_2) E_1 + x_2 E_2$$

$$E_p = x_2 (E_2 - E_1) + E_1$$

- Lorsque x_2 tend vers l'infini (et donc x_1 tend vers moins l'infini puisque $x_1=1-x_2$), l'espérance du portefeuille tend vers l'infini
- La variance du portefeuille tend également vers l'infini (voir la frontière)

...levier et effet de levier

- En comptabilité financière, on appelle levier le ratio dette/fonds propres. C'est une traduction de la contrainte budgétaire du portefeuille en $t = 0$

$$1 = x_1 + x_2$$

avec $x_1 < 0$ (vente à découvert ou emprunt) et 1 les fonds propres

Actif	Passif
x_2 : investissements	$-x_1$: dettes
	1 : fonds propres

Merci de votre attention !