CEA Finance I

Cours III - 20/04/2017

Vincent GAUGÉ

Taux actuariel
Rappel

- Zero coupon:
  A la date 0, le prix de 1 en T est noté $ZC(0, T)$
- Le taux actuariel $r_a(T)$ est donné par la relation

$$\left(\frac{1}{1 + r_a(T)}\right)^T = ZC(0, T)$$

  Dans cette relation, T en exposant correspond à la maturité exprimée en années.

Emprunt

- On suppose que l'on emprunte un capital N de 100 pour une durée de n années; $n = 7$ par la suite.
- A la date de mise en place de l'emprunt, l'échéancier de remboursements que doit faire l'emprunteur est défini par
  - les dates des remboursements
  - les montants des remboursements ou leurs modes de calculs

Emprunt
3 exemples

- Exemple 1: emprunt taux fixe in fine
  3% du notionnel tous les ans et remboursement du capital dans 7 ans
- Exemple 2: emprunt Zero coupon
  remboursement du capital dans 7 ans et versement des intérêts dans 7 ans
- Exemple 3: emprunt remboursable par séries égales
  7 versements annuels de montants égaux

Taux de rendement interne
Les flux sont déterminés et connus à l'avance

Le taux de rendement interne est donné en égalisant le capital emprunté et la valeur actuelle probable des flux

$$N = \sum_{i=1}^{7} \frac{F_i}{(1+r)^i}$$

- Ex 1: x est le taux fixe de l'emprunt

$$N = \sum_{i=1}^{7} \frac{xN}{(1+r)^i} + \frac{N}{(1+r)^7} \Rightarrow r = x$$

Taux de rendement interne
Les flux sont déterminés et connus à l'avance

- Ex 2: R est la valeur de remboursement in fine

$$N = \frac{R}{(1+r)^7} \Rightarrow r = \left(\frac{R}{N}\right)^{\frac{1}{7}} - 1$$

- Ex 3: F est le flux annuel constant

$$N = \sum_{i=1}^{7} \frac{F}{(1+r)^i} \Rightarrow \text{r est à déterminer au solveur}$$

Amortissement

Dans chaque flux F_t sont décomposés:

- la part d'intérêts I_t
- la part de remboursement du capital A_t

Le capital restant dû CRD_t est égal

- en 0, au capital de départ N
- à l'instant t, après paiement du flux F_t, à $CRD_t = CRD_{t-1} - A_t$

C'est sur le capital restant dû CRD_t qu'est calculée la charge d'intérêt en t+1 I_{t+1}

Exercice XVII
Tableaux d'amortissement

Construire les tableaux d'amortissement des exemples précédents

- ex1: emprunt taux fixe - remboursement du capital in fine
- ex2: emprunt ZC - remboursement du capital in fine

en notant N le capital emprunté et r le taux d'intérêt

	Taux fixe in fine				Emprunt ZC			
	F_t	I_t	A_t	CRD_t	F_t	I_t	A_t	CRD_t
0				N				N
1								
2								
...								
6								
7								

Solution Exercice XVII
Tableaux d'amortissement

	Taux fixe in fine				Emprunt ZC			
	F_t	I_t	A_t	CRD_t	F_t	I_t	A_t	CRD_t
0				N	0			N
1	rN	rN	0	N	0	rN	-rN	(1+r)N
2	rN	rN	0	N	0	$r(1+r)N$	-r(1+r)N	$(1+r)^2N$
...								
6	rN	rN	0	N	0	$r(1+r)^5N$	$-r(1+r)^5N$	$(1+r)^6N$
7	(1+r)N	rN	N	0	$(1+r)^7N$	$r(1+r)^6N$	$(1+r)^6N$	0

Exercice XVIII
Tableaux d'amortissement

Construire comme dans l'exercice précédent le tableau d'amortissement d'un emprunt 7 ans à annuités constantes F en notant

- N le capital emprunté
- r le taux d'intérêt

Etapes

- déterminer l'expression de l'annuité constante F en fonction de r et N
- déterminer I_1 puis A_1
- déterminer CRD_1
- déterminer I_2 puis A_2
- déterminer CRD_2
- ...

Solution Exercice XVIII
Tableaux d'amortissement

- Etape 1: lier F, N et r

$$N = \sum_{i=1}^{7} \frac{F}{(1+r)^i} \Leftrightarrow F = \frac{(1+r)^7 rN}{(1+r)^7 - 1}$$

- Etape 2: dérouler les calculs

$$\begin{cases} CRD_0 & = N \\ I_1 & = rN \\ A_1 & = F - I_1 = \frac{(1+r)^7 rN}{(1+r)^7-1} - rN = \frac{rN}{(1+r)^7-1} \\ & \\ CRD_1 & = CRD_0 - A_1 \\ & = N - \frac{rN}{(1+r)^7-1} = \frac{N((1+r)^7-(1+r))}{(1+r)^7-1} \end{cases}$$

Solution Exercice XVIII
Tableaux d'amortissement

En notant

- $Q = (1+r)^7 - 1$
- et $F = \frac{(1+r)^7 rN}{(1+r)^7 - 1}$

	Annuités constantes			
	F_t	I_t	A_t	CRD_t
0				N
1	F	rN	$\frac{1}{Q}$ rN	$\frac{1}{Q}\ ((1+r)^7 - (1+r))N$
2	F	$\frac{1}{Q}((1+r)^7 - (1+r))rN$	$\frac{1}{Q}r(1+r)N$	$\frac{1}{Q}((1+r)^7 - (1+r)^2)N$
...				
7	F	$\frac{1}{Q}((1+r)^7 - (1+r)^6)rN$	$\frac{1}{Q}r(1+r)^6 N$	0

Caractéristiques

Une obligation est un titre émis par un emprunteur Etat, organisme supranational ou entreprise.
Elle se caractérise :

- par un ensemble de dates :
  - date d'émission
  - dates de tombées des coupons, flux
  - date d'échéance
- par un profil de remboursement du nominal (amortissement)

Caractéristiques
Suite

L'obligation se caractérise :

- par un ensemble de valeurs :
  - valeur d'émission
  - valeur nominale
  - valeur (s) de remboursement
- par le descriptif des taux pour le calcul des coupons :
  - taux facial, fixe ou référence variable
  - indexations particulières (non traitées aujourd'hui)
    - inflation
    - actions
    - titrisation
- par les clauses optionnelles éventuelles (convertibilité, options de rappel) (non traitées aujourd'hui)

Instruments obligataires
Relevant du mode de calcul obligataire

- Moyen terme: durée généralement de 2 à 5 ans
  - Marché Français: BTAN (Bons du Tresor à intérêts annuels), BMTN (Bons Moyen terme négociables)
  - leurs équivalents sur autres marchés internationaux (ex: Schatz Allemagne)
- Long terme: à partir de 7 ans en général
  - Emprunts d'Etat: OAT, Bund, Bobl (Allemagne), TNotes, TBonds (US)
  - Emissions des entreprises

Modes d'émission

Deux grands modes de mise en place des obligations:

- la syndication: une ou plusieurs banques chefs de file sont en charge du placement de l'émission
- l'adjudication: principalement pour les émetteurs importants et récurrents (ex: Tresor) - l'émetteur met aux enchères le montant qu'il veut placer

Pair

L'émission est dite:

- au pair quand la valeur d'émission est égale à la valeur de remboursement
- en-dessous du pair quand la valeur d'émission est en-dessous de la valeur de remboursement
- au-dessus sinon

De même, en cours de vie de l'obligation, on dira que l'obligation est au pair, en-dessous du pair ou au-dessus du pair en fonction de la position du cours de cette obligation par rapport à sa valeur de remboursement.

Obligation à taux fixe
Eléments descriptifs

Cette obligation est décrite

- par sa date d'émission
- par sa maturité
- par la périodicité du coupon
- par la base de calcul des intérêts
- par le taux facial annuel

Exemple Obligation taux fixe 3%

Obligation 7 ans taux fixe 3%

- date d'émission: 01/04/2012
- maturité: 01/04/2019
- coupon annuel
- base exact/exact
- taux facial 3%

Exemple Oblig taux fixe 3%
Echéancier

Par simplification, les 01/04 de chaque année sont supposés jours ouvrés.

Date	Flux
01/04/2013	30 000
01/04/2014	30 000
01/04/2015	30 000
01/04/2016	30 000
01/04/2017	30 000
01/04/2018	30 000
01/04/2019	1 030 000

Obligation à taux fixe
Périodicité du coupon non anuelle

Quand la périodicité du coupon est inférieure à l'année, le taux se déduit du taux facial annuel de l'obligation par règle proportionnelle

- taux fixe 3% facial annuel
  - périodicité trimestrielle$\Rightarrow$ coupon de $0,75\%$
  - périodicité semestrielle $\Rightarrow$ coupon de $1,5\%$

Cotation en prix

L'obligation est cotée en pourcentage du nominal avec deux décimales.

- Notionnel 1 ME
- Cotation de 99-25 $\Rightarrow$ prix de 992 500 Euros
- Cotation de 103-50 $\Rightarrow$ prix de 1 035 000 Euros

2 types de cotation:

- Cotation plein coupon (brut, en anglais dirty price)
- Cotation pied de coupon (net, en anglais clean price)

Le passage de la cotation pied de coupon à la cotation plein coupon se fait en utilisant le coupon couru

Coupon couru
Prix pied de coupon

- Le coupon couru correspond à la fraction de coupon acquise depuis le dernier détachement de coupon; comme le prix, ce coupon couru est exprimé sur une base 100.

$$\text{Coupon couru} = \text{coupon} \times \frac{\text{nbj depuis dernier coupon}}{\text{nbj période coupon}}$$

  - nbj depuis dernier coupon = nombre de jours depuis le détachement du dernier coupon.
  - nbj période coupon = nombre de jours de la période de coupon.

- Le prix pied de coupon est le prix plein coupon net du coupon couru

$$\text{Prix pied coupon} = \text{Prix plein coupon} - \text{coupon couru}$$

Exercice XIX
Coupon couru

- On reprend l'obligation (notée A par la suite): taux fixe 3% à coupons annuels, date d'émission 01/04/2012 de maturité 7 ans.
  Au 01/06/2012, on suppose que le prix (plein coupon) de cette obligation est 99-25.
  Calculer le prix pied de coupon de cette obligation.
- Même question avec une obligation ayant les mêmes caractéristiques que A mais à coupons semestriels.
  Au 01/06/2012, on suppose aussi que le prix (plein coupon) de cette obligation est 99-25.

Solution Exercice XIX
Coupon couru

- Obligation A
  nbj depuis dernier coupon = 01/06/2012 - 01/04/2012 = 61
  nbj période coupon = 01/04/2013 - 01/04/2012 = 365
  taux facial = 3% et coupon annuel ⇒ coupon = 3

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Coupon couru} = CC & = 3 \times \frac{61}{365} = 0.50137 \\ \text{Prix pied coupon} & = 99.25 - 0.50137 = 98.7486 \end{cases}$$

- Obligation B
  nbj depuis dernier coupon = 01/06/2012 - 01/04/2012 = 61
  nbj période coupon = 01/10/2012 - 01/04/2012 = 183
  taux facial = 3% et coupon semestriel⇒ coupon = 1.5

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Coupon couru} = CC & = 1.5 \times \frac{61}{183} = 0.50 \\ \text{Prix pied coupon} & = 99.25 - 0.50 = 98.75 \end{cases}$$

Taux de rendement interne

- Le taux de rendement interne est le taux actuariel pour lequel la valeur actuelle des flux est égale au prix **plein coupon** P.

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i}{(1 + TRI)^i}$$

- C'est une alternative à l'expression en prix pour les obligations à taux fixe.

Taux de rendement interne
Exemple relation prix TRI

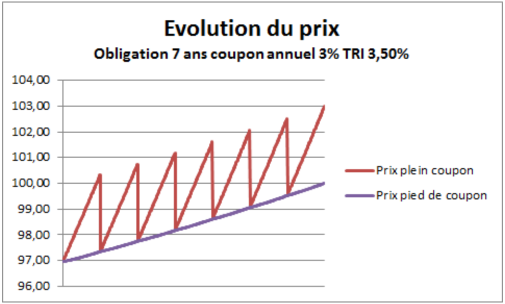
Pour l'obligation A ramenée à un notionnel de 100

- flux de 3 sur 7 ans
- remboursement du capital in fine

Taux actuariel	2,00%	2,50%	3,00%	3,50%	4,00%
Valeur actuelle des flux	106,47	103,17	100,00	96,94	94,00

TRI et prix brut
Evolution des prix plein coupon et pied de coupon

- C'est le prix brut et le TRI qui sont liés: le prix plein coupon est la valeur actuelle des flux actualisés au TRI.
- En supposant que le TRI reste constant durant la vie de l'obligation, le prix brut varie à chaque détachement de coupon alors que le prix pied de coupon est lissé.



Bases d'expression du TRI

Coupons non annuels

- quand le coupon fixe est non annuel, il existe des méthodes de calcul dans lequel le TRI est fractionné
- par exemple, pour une obligation de maturité n années avec un coupon fixe semestriel - $2n$ flux
  - calcul sur base annuelle de TRI

$$P = \sum_{i=1}^{2n} \frac{F_i}{(1 + TRI)^{i/2}}$$

  - calcul de TRI_2 le TRI déduit de la prise en compte de 2 périodes par an

$$P = \sum_{i=1}^{2n} \frac{F_i}{\left(\left(1 + \frac{TRI_2}{2}\right)^2\right)^{i/2}} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{F_i}{\left(1 + \frac{TRI_2}{2}\right)^i}$$

Bases d'expression du TRI
Coupons non annuels

Pour une obligation de maturité n années avec p coupons par an

- calcul sur base annuelle de TRI

$$P = \sum_{i=1}^{np} \frac{F_i}{(1+TRI)^{i/p}}$$

- calcul de TRI_p - TRI sur base p périodes par an

$$P = \sum_{i=1}^{np} \frac{F_i}{\left(1+\frac{TRI_p}{p}\right)^i}$$

- relation entre TRI et TRI_p

$$\left(1+\frac{TRI_p}{p}\right)^p = 1 + TRI$$

Calcul du TRI
Nombre jours au prochain coupon et périodes suivantes

Le calcul du TRI, par convention, ne prend pas en général les dates de tombée de coupon au jour près

- à partir de la date de tombée du prochain coupon, les dates de flux qui suivent sont supposées espacées d'un temps égal à une fraction de période
  - t=1 pour une période annuelle
  - t=1/4 pour une période trimestrielle...
- le temps jusqu'à la date de tombée du prochain coupon est mesuré en rapportant le nombre de jours jusqu'au prochain coupon au nombre de jours de la période du coupon en cours

Calcul du TRI
Exemple de prise en compte du temps

En notant

- d le nombre de jours jusqu'au prochain coupon
- nbc le nombre de jours de la période du coupon en cours
- p le nombre de périodes dans une année
- N_p le nombre de périodes pleines entre le prochain coupon et la maturité
  - F_0 est le prochain coupon
  - F_{N_p} correspond au dernier coupon

on a

$$P = \frac{1}{\left(1 + \frac{TRI_p}{p}\right)^{\frac{d}{nbc}}} \times \sum_{i=0}^{N_p} \frac{F_i}{\left(1 + \frac{TRI_p}{p}\right)^{i}}$$

Relation TRI coupon fixe
Obligation annuelle - au pair à la date de tombée de coupon

En notant

- C le coupon fixe sur base 100 de l'obligation ($C\% = C/100$ coupon en taux)
- r le TRI sur base annuelle

A la date de tombée de coupon (prochain coupon dans 1 an, dernier coupon dans n ans)

$$100 = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^i} + \frac{100}{(1+r)^n}$$

En utilisant

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^i} \times \left(1 - \frac{1}{1+r}\right) = \frac{1}{1+r} - \frac{1}{(1+r)^{n+1}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^i} = \frac{1}{r} \times \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right)$$

Relation TRI coupon fixe

Obligation annuelle - au pair à la date de tombée de coupon

On a

$$100 = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^i} + \frac{100}{(1+r)^n} = \frac{C\%}{r} \times 100 \times \left(1 - \frac{1}{(1+r)^n}\right) + \frac{100}{(1+r)^n}$$

ce qui implique

$$\mathrm{r} = \mathrm{C}\%$$

Au pair, à la date de tombée de coupon, le TRI de l'obligation est égal au coupon fixe (exprimé en taux)

Relation TRI coupon fixe
Obligation coupon non annuel - au pair à la date de tombée de coupon

En notant

- C le coupon fixe équivalent annuel sur base 100 de l'obligation
- C/p le coupon fixe périodique sur base 100 de l'obligation
- r_p le TRI sur base périodique

A la date de tombée de coupon (prochain coupon dans 1/p an, dernier coupon dans $\frac{N_p}{p}$ ans)

$$100 = \sum_{i=1}^{N_p} \frac{C/p}{(1+r_p/p)^i} + \frac{100}{(1+r_p/p)^{N_p}}$$

$$\Updownarrow$$

$$100 = \frac{C\%/p}{r_p/p} \times 100 \times \left(1 - \frac{1}{(1+r_p/p)^{N_p}}\right) + \frac{100}{(1+r_p/p)^{N_p}}$$

Relation TRI coupon fixe

Obligation coupon non annuel - au pair à la date de tombée de coupon

La relation précédente implique

$$\mathrm{r}_p = C\%$$

Au pair, à la date de tombée de coupon, pour une obligation à coupon fractionné C/p,
c'est le TRI sur base périodique qui est égal au coupon fixe équivalent annuel (exprimé en taux)

Relation TRI coupon fixe

Prix pied de coupon au pair à une date quelconque

En notant

- d le nombre de jours jusqu'au prochain coupon
- nbc le nombre de jours de la période du coupon en cours
- p le nombre de périodes dans une année
- C/p le coupon périodique
- N_p le nombre de périodes pleines entre le prochain coupon et la maturité

on a

$$100 = \underbrace{\frac{1}{(1+r_p/p)^{\frac{d}{nbc}}} \times \left(\sum_{i=0}^{N_p} \frac{C/p}{(1+r_p/p)^i} + \frac{100}{(1+r_p/p)^{N_p}} \right)}_{Prix\ plein\ coupon} - \underbrace{\frac{nbc-d}{nbc} \times C/p}_{Coupon\ couru}$$

Relation TRI coupon fixe

Prix pied de coupon au pair à une date quelconque

- en recombinant et en passant en notionnel 1 (division par 100)

$$(1+r_p/p)^{\frac{d}{nbc}} \times \left(1+\frac{nbc-d}{nbc}\times\frac{C\%}{p}\right) - \frac{C\%}{p} = \sum_{i=1}^{N_p}\frac{C\%/p}{(1+r_p/p)^i} + \frac{1}{(1+r_p/p)^{N_p}}$$

- en développant au premier ordre pour r_p petit, et en ne gardant que les termes de premier ordre

$$1+(r_p/p - C\%/p)\times\frac{d}{nbc} = \frac{C\%/p}{r_p/p}\left(1-\frac{1}{(1+r_p/p)^{N_p}}\right) + \frac{1}{(1+r_p/p)^{N_p}}$$

- l'égalité précédente est valable pour $r_p = C\%$ - le bruit d'approximation est faible

$$\Downarrow$$

l'obligation côte au pair prix pied de coupon, le TRI (sur base périodique) est proche du coupon équivalent annuel

Relation TRI coupon fixe
Prix pied de coupon au pair à une date quelconque

- Approximation à l'ordre 2

$$(1+r_p/p)^{\frac{d}{nbc}} \approx 1+\frac{r_p}{p}\times\frac{d}{nbc}+\frac{1}{2}\left(\frac{r_p}{p}\right)^2\times\frac{d}{nbc}\times\left(\frac{d}{nbc}-1\right)+o\left(\left(\frac{r_p}{p}\right)^2\right)$$

- dans l'expression $(1+r_p/p)^{\frac{d}{nbc}}\times\left(1+\frac{nbc-d}{nbc}\times C\%/p\right)$, le terme d'ordre 2 est donné par

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{r_p}{p}\right)^2-\frac{r_p\times C\%}{p^2}\right)\times\frac{d}{nbc}\times\left(\frac{d}{nbc}-1\right)$$

- L'écart d'ordre 2 est maximal pour

$$\frac{d}{nbc}=\frac{1}{2}$$

Relation TRI coupon fixe
Prix pied de coupon au pair à une date quelconque

- Exemple pour une obligation
  - émise le 3 juillet 2012
  - pour une maturité 5 ans
  - taux facial annuel de 5%
  - coupon annuel
- La date du prochain coupon est le 03/07/2013; on calcule le TRI au 10-ème de bp en supposant l'obligation au pair pied de coupon à 10 mois, 8 mois, 6 mois, 4 mois et 2 mois du prochain coupon

p	C	nbc	N_p	Date prix au pair	d	TRI
1	5	365	4	03/09/2012	303	4,996%
				03/11/2012	242	4,993%
				03/01/2013	181	4,992%
				03/03/2013	122	4,993%
				03/05/2013	61	4,996%

Sensibilité

- La sensibilité correspond au signe près à la dérivée du logarithme de la valeur actuelle des flux de l'obligation par rapport au taux actuariel.

$$S = -\frac{1}{VA}\frac{d(VA)}{dr} = -\frac{1}{P}\frac{dP}{dr}$$

- Pour une obligation à flux fixes (TRI r en base annuelle)

$$S = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n}\frac{F_{T_i}}{(1+r)^{T_i+1}}T_i$$

- Variation de prix relative expliquée par la sensibilité

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_s = -S \times \Delta r$$

Exercice XX

Exemple de calcul de sensibilité

- On reprend comme exemple l'obligation flux annuels 3% de maturité 7 ans
- En supposant que le prix de l'obligation est de 96.94
  - calculer la sensibilité de l'obligation
  - calculer la variation de prix pour une baisse du TRI de 50 bp
  - calculer la variation de prix expliquée par la sensibilité

Solution exercice XX
Exemple de calcul de sensibilité

Taux actuariel		3,50%	
Maturités	Flux base 100	Flux actualisés	Sensibilité
1	3	2,90	2,80
2	3	2,80	5,41
3	3	2,71	7,84
4	3	2,61	10,10
5	3	2,53	12,20
6	3	2,44	14,15
7	103	80,96	547,54
Prix		96,94	
Somme			600,04
Sensibilité			6,19

- Variation relative de prix réelle: $\frac{P(TRI{=}3{,}0\%)-P(TRI{=}3{,}50\%)}{P(TRI{=}3{,}50\%)} = 3,15\%$
- Variation relative de prix expliquée par la sensibilité:
  $-6,19 \times (-0,5\%) = 3,09\%$

Prise en compte de la convexité

- La convexité est la dérivée par rapport à l'ordre 2 de la valeur actuelle, rapportée à la valeur actuelle.

$$C = \frac{1}{VA} \frac{d^2(VA)}{dr^2}$$

- Pour une obligation à flux fixes

$$C = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{T_i}}{(1+r)^{T_i+2}} T_i(T_i+1)$$

- Variation de prix expliquée par la sensibilité et la convexité

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{s,c} = -S \times \Delta r + \frac{1}{2} \times C \times (\Delta r)^2$$

Exercice XXI
Exemple de calcul de convexité

- On reprend comme exemple l'obligation flux annuels 3% de maturité 7 ans avec prix 96.94
  - calculer la convexité de l'obligation
  - calculer la variation de prix expliquée par la sensibilité et la convexité

Solution exercice XXI
Exemple de calcul de convexité

Taux actuariel		3,50%		
Maturités	Flux base 100	Flux actualisés	Sensibilité	Convexité
1	3	2,90	2,80	5,41
2	3	2,80	5,41	15,89
3	3	2,71	7,84	30,31
4	3	2,61	10,10	48,81
5	3	2,53	12,20	70,74
6	3	2,44	14,15	95,69
7	103	80,96	547,54	4232,16
Prix		96,94		
Somme			600,04	4498,80
Sensibilité			6,19	
Convexité				46,41

Variation relative de prix expliquée par sensibilité et convexité:
$-6,19 \times (-0,5\%) + \frac{46,41}{2} \times (-0,5\%)^2 = 3,15\%$

Sensibilité et convexité
Explication de variation de prix

En incluant la convexité, les variations de prix expliquées sont proches des variations de prix réelles pour des variations de TRI allant jusquà 100 bp.

Taux actuariel	2,50%	3,00%	3,40%	3,50%	3,60%	4,00%	4,50%
VA des flux	103,17	100,00	97,55	96,94	96,34	94,00	91,16
Variation relative	6,43%	3,15%	0,62%		-0,62%	-3,04%	-5,96%
Variation expliquée par la sensibilité	6,19%	3,09%	0,62%		-0,62%	-3,09%	-6,19%
Variation expliquée par sensibilité + convexité	6,42%	3,15%	0,62%		-0,62%	-3,04%	-5,96%

Duration

La duration pour une obligation à taux fixe est égale à la vie moyenne des flux, les maturités des flux sont pondérées par les valeurs actuelles des flux.

$$D = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{T_i}}{(1+r)^{T_i}} T_i$$

La duration est liée à la sensibilité par la relation

$$D = S(1+r)$$

Dans l'exemple de l'obligation A, la duration est $6,19 \times (1 + 3,50\%) = 6,41$

Obligation Zero Coupon

- Une obligation zero coupon n'a qu'un flux de remboursement à maturité; il n'y a pas de flux intermédiaires.
- Comme le flux est unique, la duration de l'obligation zero coupon est égale à sa maturité.

Duration et risque de taux

- Plus la duration est importante, plus le risque de variation de valeur liée à un mouvement parallèle des taux est important.

Contrat notionnel

- Contrat sur une obligation fictive de maturité et coupon prédéfini
- Existence d'un gisement d'obligations sous-jacentes au contrat
- Calcul de facteurs de concordance pour chaque obligation sous-jacente
- A échéance du contrat, livraison par le vendeur du contrat de l'obligation la moins chère à livrer

Contrat Bund
Principe

- Contrat sur une obligation théorique 10 ans à coupon annuel fictif 6%
- Emetteur: Etat allemand
- 4 contrats principaux: le 10 des mois de Mars, Juin, Septembre, Décembre
- Notionnel d'un contrat: 100,000 Euros

Contrat Bund
Appels de marge

- Exemple de cours sur 3 jours consécutifs
- Appels de marge pour acheteur d'un contrat Bund

	Prix de clôture		
Achat en N	N	N+1	N+2
105	105	104,9	104,98
	Appels de marge		
	0	$\frac{104,9-105}{100} \times 100,000$ $= -100$	$\frac{104,98-104,9}{100} \times 100,000$ $= 80$

Contrat Bund
Gisement

- Un ensemble d'obligations d'Etat dont la maturité résiduelle est comprise entre 8,5 ans et 10,5 ans à la date d'échéance du contrat.
- Exemple: obligations pour le contrat Juin 2012

Code ISIN	Valeur du coupon	Maturité	Facteur de concordance
DE0001135424	2.50	04/01/2021	0.770614
DE0001135440	3.25	04/07/2021	0.811884
DE0001135457	2.25	04/09/2021	0.739839
DE0001135465	2.00	04/01/2022	0.714926
DE0001135473	1.75	04/07/2022	0.685549

Contrat Bund
Livraison

- A l'échéance du contrat, le vendeur choisit de livrer une des 5 obligations (en pratique, la moins chère à livrer)
- En contrepartie, l'acheteur du contrat doit payer:
  - le facteur de concordance multiplié par le prix du future
  - le coupon couru de l'obligation livrée

Obligation livrée	Montant à payer par l'acheteur (base 100)
$DE0001135424$	$0.770614 \times F_T + CC_{DE0001135424}$
$DE0001135440$	$0.811884 \times F_T + CC_{DE0001135440}$
$DE0001135457$	$0.739839 \times F_T + CC_{DE0001135457}$
$DE0001135465$	$0.714926 \times F_T + CC_{DE0001135465}$
$DE0001135473$	$0.685549 \times F_T + CC_{DE0001135473}$

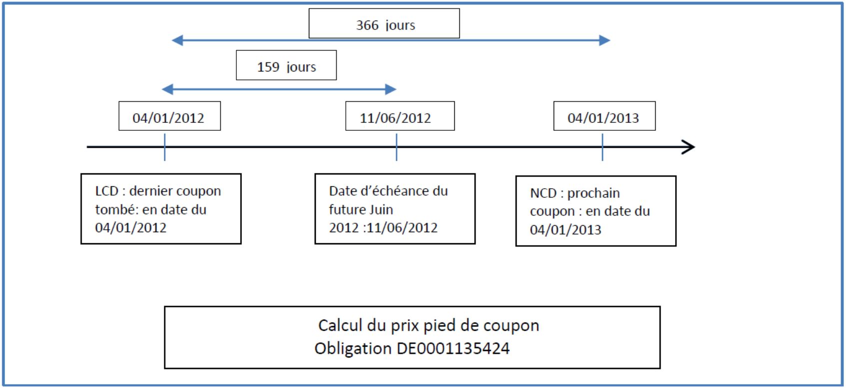
Contrat Bund
Facteur de concordance

- Il est calculé à la mise en place du contrat pour chaque obligation
- L'obligation est supposée de nominal 1
- Le facteur de concordance est le prix pied de coupon de l'obligation à la date d'échéance du contrat actualisé à 6% (taux de l'obligation fictive)
  - pied de coupon: c'est la valeur actuelle des flux à l'échéance du contrat des différentes obligation qu'on veut mesurer (indépendamment de la composante coupon couru)
  - actualisation à 6%: les différences de coupons sont prises en compte dans le facteur de concordance (plus le coupon est faible, plus le facteur de concordance est faible)

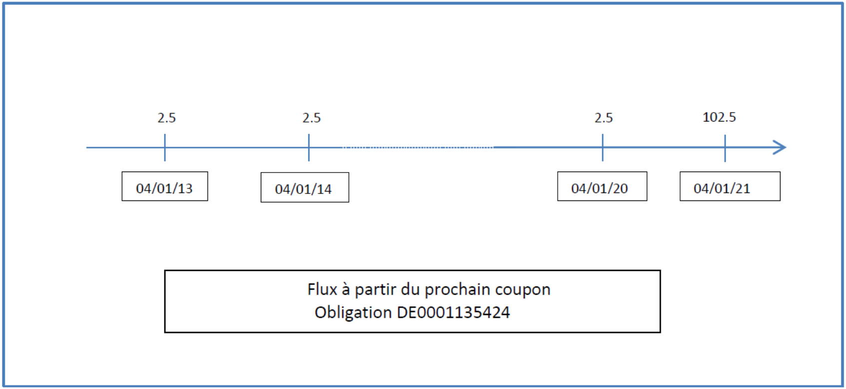
On note

- D la date d'échéance du contrat future (pour juin 2012, le lundi 11 juin 2012)
- NC la date de prochain coupon de l'obligation (04/01/2013)
- LC la date du dernier coupon tombé (04/01/2012)
- c le coupon de l'obligation pour un notionnel de 100 (2.5)
- n le nombre d'années entre le prochain coupon et la maturité (8 ans)

Obligation DE0001135424
Facteur de concordance



Obligation DE0001135424
Facteur de concordance



Obligation DE0001135424
Calcul du facteur de concordance

- Prix pied de coupon sur base 100

$$\underbrace{\frac{1}{(1+6\%)^{\frac{366-159}{366}}} \times \left(\sum_{i=0}^{8} \frac{2,5}{(1+6\%)^i} + \frac{100}{(1+6\%)^8} \right)}_{\textit{Prix plein coupon}} - \underbrace{2,5 \times \frac{159}{366}}_{\textit{Coupon couru}}$$

$$\textit{Prix pied de coupon} = 78,7414 - 1,0861 = 77,0614$$

- Le facteur de concordance est exprimé sur une base 1, et est égal à 0,770614

Références

Roland Portait - Patrice Poncet
Finance de marché - 3ème édition
Instruments de base, produits dérivés, portefeuilles et risques
Ed Dalloz