Contenu

I. Marges CDS par maturités

a) En passant par les probabilités de survie : la probabilité de survie en $T+1$ doit être au plus égale à la probabilité de survie en T

$$\Pr(\tau \geq T+1) \leq \Pr(\tau \geq T)$$

En utilisant la formule du cours

$$S_{CDS}^{T} = (1-R) \times (e^{\lambda} - 1)$$

$$\Pr(\tau \geq T) = e^{-\lambda T} = \left(\frac{1}{1+\frac{S_{CDS}^{T}}{1-R}}\right)^{T}$$

De même

$$\Pr(\tau \geq T+1) = \left(\frac{1}{1+\frac{S_{CDS}^{T+1}}{1-R}}\right)^{T+1}$$

$$\Pr(\tau \geq T+1) \leq \Pr(\tau \geq T) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+\frac{S_{CDS}^{T+1}}{1-R}}\right)^{T+1} \leq \left(\frac{1}{1+\frac{S_{CDS}^{T}}{1-R}}\right)^{T}$$

b) En développant au premier ordre

$$(T+1) \times S_{CDS}^{T+1} \geq T \times S_{CDS}^{T}$$

II. Famille d'obligations

Questions a)

a1)

On a pour l'obligation A

$$P_A = \sum_{i=1}^{8} \frac{C}{(1+TRI_A)^i} + \frac{100}{(1+TRI_A)^8}$$

et pour l'obligation à coupon $C(2,4,6,8)$

$$P_A = \sum_{k=1}^{4} \frac{C(2,4,6,8)}{(1+TRI_A)^{2k}} + \frac{100}{(1+TRI_A)^8}$$

Par identification

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{C(2,4,6,8)}{(1+TRI_A)^{2k}} = \sum_{i=1}^{8} \frac{C}{(1+TRI_A)^i}$$

Et en rassemblant les termes par 2

$$C(2,4,6,8) \times \frac{1}{(1+TRI_A)^2} = C \times \left(\frac{1}{1+TRI_A} + \frac{1}{(1+TRI_A)^2}\right)$$

$$C(2,4,6,8) = C \times (2 + TRI_A)$$

a2)

Pour l'obligation à coupon $C(1,3,5,7)$

$$P_A = \sum_{k=1}^{4} \frac{C(1,3,5,7)}{(1+TRI_A)^{2k-1}} + \frac{100}{(1+TRI_A)^8}$$

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{C(1,3,5,7)}{(1+TRI_A)^{2k-1}} = \sum_{k=1}^{4} \frac{C(1,3,5,7) \times (1+TRI_A)}{(1+TRI_A)^{2k}} = \sum_{i=1}^{8} \frac{C}{(1+TRI_A)^i}$$

Et en rassemblant les termes par 2

$$C(1,3,5,7) \times \frac{1+TRI_A}{(1+TRI_A)^2} = C \times \left(\frac{1}{1+TRI_A} + \frac{1}{(1+TRI_A)^2}\right)$$

$$C(1,3,5,7) = C \times \left(1 + \frac{1}{1+TRI_A}\right)$$

a3) application numérique

$P_A = 100$ et $C = 5$ impliquent $TRI_A = 5\%$

$C(2{,}4{,}6{,}8) = 5 \times (2 + 5\%) = 10{,}25$

$$C(1{,}3{,}5{,}7) = 5 \times \left(1 + \frac{1}{1 + 5\%}\right) = 9{,}76$$

<u>Questions b)</u>

b1) on a de façon générale

$$C(t_1, t_2, t_3, t_4) \times \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{(1 + TRI_A)^{t_k}} = C \times \sum_{i=1}^{8} \frac{1}{(1 + TRI_A)^{i}}$$

Pour que le coupon soit maximal, il faut que $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{(1+TRI_A)^{t_k}}$ soit minimal ie $(t_1, t_2, t_3, t_4) = (5{,}6{,}7{,}8)$

$$\sum_{i=5}^{8} \frac{1}{(1 + TRI_A)^{i}} = A(8) - A(4)$$

b2)

$$C_{max} = C(5{,}6{,}7{,}8) = \frac{C \times A(8)}{A(8) - A(4)}$$

b3)

De même,

$C_{min} = C(1{,}2{,}3{,}4)$

b4)

$$C_{min} = \frac{C \times A(8)}{A(4)}$$

<u>Questions c)</u>

c1)

$$D_A = \frac{1}{P_A} \times \left(\sum_{i=1}^{8} \frac{i \times C}{(1 + TRI_A)^{i}} + \frac{8 \times 100}{(1 + TRI_A)^{8}}\right)$$

$$D_E = \frac{1}{P_A} \times \left(\sum_{i=5}^{8} \frac{i \times C_{max}}{(1 + TRI_A)^{i}} + \frac{8 \times 100}{(1 + TRI_A)^{8}}\right)$$

$$D_E - D_A = \frac{1}{P_A} \times \left(\sum_{i=5}^{8} \frac{i \times C \times A(8)/(A(8) - A(4))}{(1 + TRI_A)^i} - \sum_{i=1}^{8} \frac{i \times C}{(1 + TRI_A)^i} \right)$$

En remarquant que

$$\sum_{i=1}^{8} \frac{i \times C}{(1 + TRI_A)^i} = \sum_{i=5}^{8} \frac{i \times C + (i-4) \times C \times (1 + TRI_A)^4}{(1 + TRI_A)^i}$$

$$D_E - D_A = \frac{1}{P_A} \times \left(\sum_{i=5}^{8} \frac{i \times C \times \frac{A(8)}{A(8) - A(4)} - i \times C - (i-4) \times C \times (1 + TRI_A)^4}{(1 + TRI_A)^i} \right)$$

$$D_E - D_A = \frac{1}{P_A} \times \left(\sum_{i=5}^{8} \frac{i \times C \times \frac{A(4)}{A(8) - A(4)} - (i-4) \times C \times (1 + TRI_A)^4}{(1 + TRI_A)^i} \right)$$

$$\frac{A(4)}{A(8) - A(4)} = \frac{\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{(1 + TRI_A)^i}}{\sum_{i=5}^{8} \frac{1}{(1 + TRI_A)^i}} = (1 + TRI_A)^4$$

$$D_E - D_A = \frac{1}{P_A} \times \left(\sum_{i=5}^{8} \frac{4 \times C \times (1 + TRI_A)^4}{(1 + TRI_A)^i} \right) = \frac{1}{P_A} \times 4 \times A(4) \times C$$

C2)

$$D_A = \frac{1}{P_A} \times \left(\sum_{i=1}^{8} \frac{i \times C}{(1 + TRI_A)^i} + \frac{8 \times 100}{(1 + TRI_A)^8} \right)$$

$$D_F = \frac{1}{P_A} \times \left(\sum_{i=1}^{4} \frac{i \times C \times \frac{A(8)}{A(4)}}{(1 + TRI_A)^i} + \frac{8 \times 100}{(1 + TRI_A)^8} \right)$$

En remarquant que

$$\sum_{i=1}^{8} \frac{i \times C}{(1 + TRI_A)^i} = \sum_{i=1}^{4} \frac{i \times C + (i+4) \times \frac{C}{(1 + TRI_A)^4}}{(1 + TRI_A)^i}$$

$$D_F - D_A = \frac{1}{P_A} \times \left(\sum_{i=1}^{4} \frac{i \times C \times \frac{A(8)}{A(4)} - i \times C - (i+4) \times \frac{C}{(1 + TRI_A)^4}}{(1 + TRI_A)^i} \right)$$

$$\frac{A(8)}{A(4)} - 1 = \frac{A(8) - A(4)}{A(4)} = \frac{1}{(1 + TRI_A)^4}$$

$$D_F - D_A = \frac{1}{P_A} \times \left(\sum_{i=1}^{4} \frac{(-4) \times \frac{C}{(1+TRI_A)^4}}{(1+TRI_A)^i} \right) = \frac{1}{P_A} \times (-4) \times C \times (A(8) - A(4))$$

C3)

$$D_E - D_A = \frac{1}{P_A} \times 4 \times A(4) \times C$$

$$D_F - D_A = \frac{1}{P_A} \times (-4) \times C \times (A(8) - A(4))$$

$$D_E - D_F = \frac{1}{P_A} \times 4 \times A(4) \times C + \frac{1}{P_A} \times 4 \times \big(A(8) - A(4)\big) \times C = \frac{1}{P_A} \times 4 \times A(8) \times C$$

C4)

$$A(8) = \sum_{i=1}^{8} \frac{1}{(1+TRI_A)^i}$$

Et $TRI_A = C/100$ comme $P_A = 100$

On résout au solveur l'équation

$$1 = \frac{1}{100} \times 4 \times A(8) \times C$$

Ce qui donne $C = 3{,}66$

C4) $D_E - D_F = 0 \implies C = 0$

C5)

$$100 = \sum_{i=1}^{8} \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{100}\right)^i} + \frac{100}{\left(1 + \frac{x}{100}\right)^8}$$

Donc

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{8} \frac{x}{\left(1 + \frac{x}{100}\right)^i} = 100$$

C6)

$$\lim_{C \to \infty} A(8) \times C = \lim_{C \to \infty} \sum_{i=1}^{8} \frac{C}{\left(1 + \frac{C}{100}\right)^i} = 100$$

$$\lim_{C \to \infty} (D_E - D_F) = \lim_{C \to \infty} \left(\frac{1}{P_A} \times 4 \times A(8) \times C\right) = 4$$

III. Forwards de change- Points de swap

a1) Le taux forward est égal au taux implicite déduit du prix du future

Taux forward (en pourcentage) = 100 – prix du future

3M ds 3M	0,42%
3M ds 6M	0,45%
3M ds 9M	0,50%

a2)

$$ZC_{EUR\_3M} = \frac{1}{1 + 0{,}194\% \times \frac{92}{360}}$$

$$ZC_{EUR\_6M} = \frac{1}{1 + 0{,}32\% \times \frac{182}{360}}$$

$$ZC_{EUR\_9M} = \frac{1}{1 + 0{,}40\% \times \frac{273 - 182}{360}} \times ZC_{EUR\_6M}$$

$$ZC_{EUR\_12M} = \frac{1}{1 + 0{,}40\% \times \frac{365 - 273}{360}} \times ZC_{EUR\_9M}$$

$$ZC_{USD\_3M} = \frac{1}{1 + 0{,}35\% \times \frac{92}{360}}$$

$$ZC_{USD\_6M} = \frac{1}{1 + 0{,}42\% \times \frac{182 - 92}{360}} \times ZC_{USD\_3M}$$

$$ZC_{USD\_9M} = \frac{1}{1 + 0{,}45\% \times \frac{273 - 182}{360}} \times ZC_{USD\_6M}$$

$$ZC_{USD\_12M} = \frac{1}{1 + 0{,}50\% \times \frac{365 - 273}{360}} \times ZC_{USD\_9M}$$

EUR			
Instrument	Taux/prix	Nb jours	ZC
3M	0,194%	92	99,950%
6M	0,320%	182	99,838%
FRA 6v9	0,400%	273	99,738%
FRA 9v12	0,400%	365	99,636%

USD			
Instrument	Taux/prix	Nb jours	ZC
3M	0,350%	92	99,911%
Fut1	0,420%	182	99,806%
Fut2	0,450%	273	99,692%
Fut3	0,500%	365	99,565%

B)

b1) Calculer le taux de change à terme EURUSD dans 3M, 6M, 9M et 12M, en supposant qu'il peut être déduit de la relation établie avec la parité de taux d'intérêt

b2) Donner le niveau des points de swap 3M, 6M, 9M et 12M

b1) et b2) On utilise la relation

$$Fwd_{EURUSD\_xM} = Spot_{EURUSD} \times \frac{ZC_{EUR\_xM}}{ZC_{USD\_xM}}$$

Spot	1,2974	
	Fwds	**Points de swap**
3M	1,2979	0,0005
6M	1,2978	0,0004
9M	1,2980	0,0006
12M	1,2983	0,0009

C) On ne demande pas de calcul mais raisonnement qualitatif et justification

c1) Si les taux de FRA EUR baissaient (instantanément) de 5 bps, pour quelles maturités les points de swap changeraient-ils ?

c1) Si la caractéristique des FRAs 6v9 et 9v12 varie, ce sont les coefficients d'actualisation ZC à 9M et 12M qui sont impactés par le changement ; donc les points de swap sont impactés pour les maturités 9M et 12M

c2) Y aurait-il augmentation ou diminution des points de swap calculés pour ces maturités ? Justifier la réponse.

c2) Si les taux des FRAs baissent :

- les ZC_{EUR} calculés pour les maturités 9M et 12M sont plus élevés
- les taux de change à terme EURUSD 9M et 12M sont plus élevés
- les points de swap sont plus élevés (maturités 9M et 12M)

IV. Swap forward sur obligation

a) le détenteur de l'obligation anticipe une hausse des taux au-delà de 4 ans

b) le détenteur de l'obligation paie 5% sur le swap (obligation : coupon de 2.5 sur notionnel 50, 5 sur notionnel 100=5%)

c) taux de swap forward 4 ans dans 4 ans

$$\frac{ZC(4) - ZC(8)}{\sum_{i=5}^{8} ZC(i)}$$

	Swap	ZC
1	1,20%	98,81%
2	1,45%	97,16%
3	1,80%	94,77%
4	2,00%	92,34%
5	2,25%	89,37%
6	2,40%	86,58%
7	2,55%	83,61%
8	2,65%	80,83%
Taux de swap forward 4 ans dans 4 ans		3,38%

Taux versé sur le swap (coupon de l'obligation sur notionnel 50) : 5%

Taux équivalent à jambe Eur12M : 3,38%

$$Marge\ \delta = 5\% - 3{,}38\% = 162\ bps$$

d) la valeur de marché du swap au pair est 0

e) Valeur de marché de la jambe δ

$$\sum_{i=5}^{8} ZC(i) \times 1{,}62\% \times 5\ ME = 3{,}4 \times 1{,}62\% \times 5\ ME = 0{,}28\ ME$$

f) Valeur de la jambe EUR12M sans spread

$$\big(ZC(8) - ZC(4)\big) \times 5\ ME = 11{,}51\% \times 5\ ME = 0{,}58\ ME$$

V. Obligations optionnelles

Questions a)

a1) option incluse dans F : option de payer 4% sur 3 ans entre 2 ans et 5 ans à la place de Eur12M ie option de payer 4% et de recevoir Eur12M – swaption payeuse sur swap 3 ans dans 2 ans – strike de l'option 4%

a2) le taux de swap forward est de 2% - donc en cas de réalisation des taux forwards, l'option ne ssera pas exercée – la swaption payeuse 4% n'est pas dans la monnaiea3) de même, en cas de réalisation des taux forwards à 2%,

- Pour les obligations C et D, les floors, option d'échanger taux variable contre0,50% si les taux est inférieur à0,50%, ne sont pas dans la monnaie
- Pour l'obligation E, le cap, option d'échanger le taux variable contre 3.5% si le taux est supérieur à 3.50% :n'est pas dans la monnaie

a4) les obligations A et B sont au pair (taux de swap=2%)

dans les obligations C et D, les coupons sont floorés à la baisse – en cas de baisse des taux, ils garantissent un taux plancher à l'investisseur

Valeur des coupons =valeur des coupons EUR12M+valeur des floors.

$$Coupon = Eur12M + \max(0{,}50\% - Eur12M, 0)$$

dans les obligations E et F, les coupons sont cappés à la hausse – en cas de hausse des taux, ils permettent à l'émetteur de verser un taux plafond - ces options sont au bénéfice de l'émetteur et diminuent le prix payé.

Obligation E

$$Coupon = Eur12M - \max(Eur12M - 3.50\%, 0)$$

Obligation F si exercice en t=2, en fonction de la valeur du swap 3 ans
$receveur\ Eur12M\ payeur 4\%$ en cas d'exercice de la swaption

$$Coupon - entre\ 3\ et\ 5\ ans = Eur12M - Eur12M + 4\%$$

L'obligation C contient un floorlet de plus que l'obligation D – l'obligation C est donc la plus chère.

a5) comparaison des obligations E et F
- dans l'obligation F, l'émetteur paie 4% en t=3, t=4, t=5 si la décision de passer à coupon fixe est prise en t=2, ou Eur12M t=3, t=4, t=5 dans le cas contraire
- dans l'obligation E, l'émetteur paie 3.5% en t=3, t=4 ou t=5 si Eur12M est supérieur à 3.5% à la date

de versement considérée (décision date par date), ou Eur12M dans le cas contraire.
En considérant l'ensemble des scenarios possibles, l'émetteur paie moins avec l'obligation E qu'avec l'obligation F

Questions b)

b1) obligation A à taux fixe : les taux de swap sont plus importants en b) qu'en a) – le prix de l'obligation A est moins important dans le second cas.

L'obligation B à taux variable est au pair dans les deux cas (pas de variation de prix)

b2) les taux sont plus importants dans le second cas – la valeur des floorlets est moins importante – le prix des obligations C et D est inférieur dans le second cas

b3) les taux sont plus importants dans le second cas, ce qui augmente la valeur des caplets ou de la swaption - ces options sont à déduire – le prix des obligations E et F est inférieur dans le second cas

b4) les forwards des options sont les suivants

Année i	Taux de swap	ZC	Somme des ZCs
1	2,00%	98,04%	98,04%
2	2,20%	95,74%	193,78%
3	2,40%	93,11%	286,89%
4	2,55%	90,38%	377,27%
5	2,80%	87,00%	464,27%

Fwd 1 an dans 2 ans	2,82%
Fwd 1 an dans 3 ans	3,03%
Fwd 1 an dans 4 ans	3,88%
Tauw swap 3 ans dans 2 ans	3,23%

Seule la position du dernier caplet par rapport à la monnaie change (forward 1 an dans 4ans à 3,88% vs strike caplet 3,50%)

VI. Obligation inflation

<u>Questions a)</u>

a1)

Obligation inflation

Prix	TRI
102	0,35%

1	0,75	0,75
2	0,75	0,74
3	0,75	0,74
4	0,75	0,74
5	100,75	99,03

Somme 102,00

Obligation nominale

Prix	TRI
98	2,43%

1	2	1,95
2	2	1,91
3	2	1,86
4	2	1,82
5	102	90,46

Somme 98,00

On calcule

$$TRI_R = 0{,}35\%$$

$$TRI_N = 2{,}43\%$$

a2)

$$i = TRI_N - TRI_R = 2{,}08\%$$

a3)

Prix	i	TRI
102	2,08%	2,44%

1	0,77	0,75
2	0,78	0,74
3	0,80	0,74
4	0,81	0,74
5	111,69	99,03

102,00

On calcule $TRI_C = 2{,}43\%$ proche de TRI_N

a4) les prix des deux obligations A et C étant égaux

$$\sum_{k=1}^{5}\frac{0,75}{(1+TRI_R)^k}+\frac{100}{(1+TRI_R)^5}=\sum_{k=1}^{5}\frac{0,75\times(1+i)^k}{(1+TRI_C)^k}+\frac{100\times(1+i)^5}{(1+TRI_C)^5}$$

Par identification

$$\frac{1}{1+TRI_R}=\frac{1+i}{1+TRI_C}$$

$$1+i=\frac{1+TRI_C}{1+TRI_R}\approx(1+TRI_C)\times(1-TRI_R)\approx 1+TRI_C-TRI_R$$

Comme $i=TRI_N-TRI_R$ on a $TRI_N\approx TRI_C$

Questions b)

b1) on a

$$\frac{\Delta P}{P_E}=\frac{P_D-P_E}{P_E}=-S_E\times(TRI_D-TRI_E)+\frac{1}{2}\times C_E\times(TRI_D-TRI_E)^2$$

Avec $i=TRI_E-TRI_D$

$$+\frac{1}{2}\times C_E\times(i)^2+S_E\times i+\frac{P_E-P_D}{P_E}=0$$

$$\Delta=S_E^2-2\times C_E\times\frac{P_E-P_D}{P_E}$$

Avec $P_D>P_E$ et i cherché positif, on prend la racine positive

$$i=\frac{-S_E+\sqrt{S_E^2-2\times C_E\times\frac{P_E-P_D}{P_E}}}{C_E}$$

b2) $i=1,25\%$