CEA Finance I

Corrigé Evaluation des compétences 2016 : Enoncé A

ENONCE A :

Il vous est demandé d'indiquer en début de chaque copie double en haut à droite « ENONCE A » ainsi qu'en début de réponse à chaque exercice « Exercice xx Enoncé A »

Le nombre de questions, qui peuvent être de difficulté différente, est donné pour information et ne constitue pas un barème.

S'il vous semble déceler une erreur dans l'énoncé, veuillez le mentionner sur la copie en expliquant les choix que cette analyse vous conduit à faire. Il ne sera répondu à aucune question durant l'épreuve.

Contenu

I. Exercice I Enoncé A - (15 questions)

I.a. Question a)

a1) $S = 28{,}20$

Prix	100
TRI	5,00%

Année	Flux	Flux actualisé
1	5	4,76
2	5	4,54
3	5	4,32
4	105	86,38

Somme	100,00

Prix	100
TRI	5,00%
Annuité constante	28,20

Flux	Flux actualisé
28,20	26,86
28,20	25,58
28,20	24,36
28,20	23,20

Somme	100,00

a2) la duration est la vie moyenne des flux pondéré par les valeurs actuelles – les poids pour l'obligation B sont plus importants que ceux de l'obligation A pour les maturités courtes, la duration de l'obligation B est donc inférieure à celle de l'obligation A

I.b. Questions b)

b1) $TRI_A = 9{,}70\%$

Prix	85
TRI	9,70%

Année	Flux	Flux actuali:
1	5	4,56
2	5	4,15
3	5	3,79
4	105	72,50

Somme	85,00

b2)

$$P_A = \sum_{i=1}^{4} \frac{(1-p)^i \times 5}{(1+r)^i} + \frac{(1-p)^4 \times 100}{(1+r)^4}$$

b3) on a aussi

$$P_A = \sum_{i=1}^{4} \frac{5}{(1+TRI_A)^i} + \frac{100}{(1+TRI_A)^4}$$

En rapprochant les deux formules

$$\frac{1-p}{1+r} = \frac{1}{1+TRI_A} \Leftrightarrow p = \frac{TRI_A - r}{1+TRI_A}$$

b4)

$$p = (9{,}70\% - 3\%)/(1 + 9{,}70\%) = 6{,}11\%$$

b5) la valeur actuelle des flux de l'obligation B avec la probabilité de défaut p est de 85.

$$P_B = \sum_{i=1}^{4} \frac{(1-p)^i}{(1+r)^i} \times S = \sum_{i=1}^{4} \frac{S}{(1+TRI_A)^i} = 89{,}97$$

b6) Au pair, les deux obligations ont le même TRI 5%

Le prix A passe de 100 à 85 avec un TRI qui passe de 5% à 9,70%

B a une duration inférieure à la duration de A, il est donc normal que le prix de B baisse moins que celui de A (effet convexité du second ordre)

<u>I.c. Questions c)</u>

c1)

$$P_A = \sum_{i=1}^{4} \frac{(1-p^*)^i \times 5 + R \times 100 \times p^* \times (1-p^*)^{i-1}}{(1+r)^i} + \frac{(1-p^*)^4 \times 100}{(1+r)^4}$$

c2) on construit le tableau des flux probables avec les probabilités associées aux événements, dépendant de p^*

p* 10,30%

Année	Flux survie	Flux défaut	Proba survie	Proba défaut	Flux probable	Actu à r	Flux actuel probable
1	5	40	89,70%	10,30%	8,61	97,09%	8,36
2	5	40	80,46%	9,24%	7,72	94,26%	7,28
3	5	40	72,17%	8,29%	6,92	91,51%	6,34
4	105	40	64,73%	7,43%	70,94	88,85%	63,03

85,00

Pour que la valeur des flux probables soit égale à 85, il faut que p^* soit égal à 10,30%

c3)

$$P_B = \sum_{i=1}^{4} \frac{(1-p^*)^i \times S + R \times CRD_{i-1} \times p^* \times (1-p^*)^{i-1}}{(1+r)^i}$$

c4) annuité et amortissement calculés avec un notionnel initial de 100 et un taux de rendement interne de 5%

$$CRD_t = \frac{(1+5\%)^4 - (1+5\%)^t}{(1+5\%)^4 - 1} \times 100$$

tableau des CRDs

	Tableau d'amortissement				
	Flux	**Intérêt**	**Amortissement**	**CRD fin de période**	**CRD début de période**
1	28,20	5,00	23,20	76,80	100,00
2	28,20	3,84	24,36	52,44	76,80
3	28,20	2,62	25,58	26,86	52,44
4	28,20	1,34	26,86	0,00	26,86

c5) $CRD_0 = 100$

c6) $CRD_3 = 26{,}86$

c7)

p* 10,30%

Année	Flux survie	Flux défaut	Proba survie	Proba défaut	Flux probable	Actu à r	Flux actuel probable
1	28,20	40,0	89,70%	10,30%	29,42	97,09%	28,56
2	28,20	30,7	80,46%	9,24%	25,53	94,26%	24,06
3	28,20	21,0	72,17%	8,29%	22,09	91,51%	20,22
4	28,20	10,7	64,73%	7,43%	19,05	88,85%	16,93

89,77

II. Exercice II Enoncé A - (10 questions)

II.a. Questions a)

On calcule la valeur des ZCs à partir de la courbe des taux swaps

	Maturité	Taux swap	ZC
1	1 an	2,00%	98,04%
2	2 ans	2,00%	96,12%
3	3 ans	2,25%	93,53%
4	4 ans	2,25%	91,47%
5	5 ans	2,60%	87,86%
6	6 ans	2,90%	84,02%

a1)

$$1 + L(4{,}5) = \frac{ZC(4)}{ZC(5)} \Longrightarrow L(4{,}5) = 4{,}11\%$$

a2) taux forward 2 ans dans 4 ans

$$S(4{,}6) = \frac{ZC(4) - ZC(6)}{ZC(5) + ZC(6)}$$

a3)

$$S(4{,}6) = 4{,}33\%$$

II.b. Questions b)

b1) A et B sont assorties d'option de remboursement anticipé avec les mêmes profils de coupons. L'option de remboursement anticipé ne diffère que par le montant remboursé – en cas de rappel de A, on rembourse 100, en cas de rappel de B, on doit rembourser 101 – l'option incluse dans A a donc plus de valeur que l'option incluse dans B (elle sera plus souvent exercée et le gain en cas d'exercice de l'option sera plus important).

L'option a l'avantage de l'émetteur fait baisser le prix par rapport à l'obligation sans option, donc l'obligation B est la plus chère –par ex si on demandait 110 en cas de remboursement anticipé, on aurait une option de valeur proche de 0 et le prix qui se rapprocherait de l'obligation sans option)

b2) option incluse dans A = option de rembourser au pair = option de passer de taux fixe à taux variable = option d'entrer dans un swap receveur du taux fixe de strike 3%

le taux de swap forward vaut 4.33% donc en cas de réalisation des taux forward, le taux du marché sera supérieur au taux de l'obligation – perte en cas de mise en place du swap – l'option est hors de la monnaie

b3) dans obligation A, option de remboursement anticipé au pair =option de rentrer dans un swap payeur de 3 même raisonnement pour option incluse dans B, on décompose le paiement de 101 en t=4 en un paiement de 100 (que l'on transforme en paiement du taux variable en t=5 et t=6 et paiement de 100 en t=6) et un paiement de 1 en t=4

Obligation A	t=4	t=5	t=6
Remboursement anticipé	-100		
Equivalent remboursement anticipé		-Eur12M	-Eur12M-100
Pas de remboursement anticipé		-3	-103

Obligation B	t=4	t=5	t=6
Remboursement anticipé	-101		
Equivalent remboursement anticipé	-1	-Eur12M	-Eur12M-100
Pas de remboursement anticipé		-3	-103

II.c. Questions c)

c1) pour que l'option soit à la monnaie, il faut que la valeur du swap en cas d'exercice devienne nul

Date	t=4	t=5	t=6
Flux fixes	-1	+ 3	+ 3
Flux variables		$-$Eur12M x 100 (Eur12M fixé en t=4)	$-$Eur12M x 100 (Eur12M fixé en t=5)

Avec les niveaux de taux initiaux, la jambe variable EUR12M x100 est équivalente à un coupon fixe de 4.33 (taux forward)

La valeur du swap est négative – pour qu'elle vaille 0, il faut que les taux baissent- δ négatif

c2) on cherche au solveur δ pour que la jambe fixe du swap soit égale à la jambe variable

$$-1 \times ZC(4) + 3 \times ZC(5) + 3 \times \ ZC(6) = ZC(4) - ZC(6)$$

On trouve $\delta = -178\ bps$

Maturité	Taux initial	δ	Taux swap	ZC
1 an	2,00%	-178	0,22%	99,78%
2 ans	2,00%	-178	0,22%	99,56%
3 ans	2,25%	-178	0,47%	98,59%
4 ans	2,25%	-178	0,47%	98,13%
5 ans	2,60%	-178	0,82%	95,95%
6 ans	2,90%	-178	1,12%	93,43%

III. Exercice III Enoncé A - (13 questions)

III.a. Questions a)

Delta	TRI	
	0,2	5,020%
Flux	Flux act	
	5,4	5,14
	5,2	4,71
	5	4,32
	4,8	3,95
	104,6	81,88
		100,00

Delta	TRI	
	-0,2	4,981%
Flux	Flux act	
	4,6	4,38
	4,8	4,36
	5	4,32
	5,2	4,28
	105,4	82,66
		100,00

Delta	TRI	
	0,5	5,049%
Flux	Flux act	
	6	5,71
	5,5	4,98
	5	4,31
	4,5	3,70
	104	81,30
		100,00

III.b. Questions b)

b1) l'obligation est au pair – son TRI est entre le coupon min et le coupon max

$$\frac{C-2\delta}{100} \leq TRI_\delta \leq \frac{C+2\delta}{100}$$

b2)

$$100 = P(Ob_\delta(n)) \quad = \quad \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{C+(N+1-i)\delta}{(1+TRI_\delta)^i} + \frac{100}{(1+TRI_\delta)^{2N+1}}$$

b3)

$$100 \quad = \quad \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{C+(N+1-i)\delta}{(1+TRI_\delta)^i} + \frac{100}{(1+TRI_\delta)^{2N+1}}$$

$$= \quad et$$

$$100 \quad = \quad \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{C+(N+1-i)(-\delta)}{(1+TRI_{-\delta})^i} + \frac{100}{(1+TRI_{-\delta})^{2N+1}}$$

En formant la différence

$$0 \quad = \quad \sum_{i=1}^{2n+1} C \times \left(\frac{1}{(1+TRI_\delta)^i} - \frac{1}{(1+TRI_{-\delta})^i}\right) + 100 \times \left(\frac{1}{(1+TRI_\delta)^{2N+1}} - \frac{1}{(1+TRI_{-\delta})^{2N+1}}\right)$$

$$+ \quad \sum_{i=1}^{2n+1} ((N+1-i)(\delta)) \times \left(\frac{1}{(1+TRI_\delta)^i} + \frac{1}{(1+TRI_{-\delta})^i}\right)$$

Dans le second terme, les N premiers (i entre 1 et N) termes $(N+1-i)(\delta)$ sont positifs symétriques des N derniers (i entre N+1et 2N+1) termes $(N+1-i)(\delta)$ (négatifs)
L'actualisation est moins forte sur les premiers coupons donc le second terme est positif

Donc le premier terme est négatif et

$$\left(\frac{1}{(1+TRI_\delta)^i}-\frac{1}{(1+TRI_{-\delta})^i}\right)<0 \Leftrightarrow TRI_\delta > TRI_{-\delta}$$

b4)

$$\begin{aligned} 100 &= \sum_{i=1}^{2n+1}\frac{C+(N+1-i)\delta_1}{\left(1+TRI_{\delta_1}\right)^i}+\frac{100}{\left(1+TRI_{\delta_1}\right)^{2N+1}} \\ = \ & et \\ 100 &= \sum_{i=1}^{2n+1}\frac{C+(N+1-i)\delta_2}{\left(1+TRI_{\delta_2}\right)^i}+\frac{100}{\left(1+TRI_{\delta_2}\right)^{2N+1}} \end{aligned}$$

En formant la différence

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{2n+1} C\times\left(\frac{1}{\left(1+TRI_{\delta_1}\right)^i}-\frac{1}{\left(1+TRI_{\delta_2}\right)^i}\right)+100\times\left(\frac{1}{\left(1+TRI_{\delta_1}\right)^{2N+1}}-\frac{1}{\left(1+TRI_{\delta_2}\right)^{2N+1}}\right) \\ &+ \\ & \sum_{i=1}^{2n+1}((N+1-i))\times\left(\frac{\delta_1}{\left(1+TRI_{\delta_1}\right)^i}-\frac{\delta_2}{\left(1+TRI_{\delta_2}\right)^i}\right) \end{aligned}$$

Supposons $TRI_{\delta_1} \leq TRI_{\delta_2}$ alors le premier terme est positif ou nul

$$\frac{\delta_1}{\left(1+TRI_{\delta_1}\right)^i}-\frac{\delta_2}{\left(1+TRI_{\delta_2}\right)^i}\geq 0$$

dans ce second terme, les N premiers (i entre 1 et N) termes $(N+1-i)$ sont positifs symétriques des N derniers (i entre N+1et 2N+1) termes $(N+1-i)$ (négatifs)
l'actualisation est moins forte sur les premiers coupons donc le second terme est positif

les deux termes sont positifs, ce qui est contradictoire avec une somme nulle

donc $TRI_{\delta_1} > TRI_{\delta_2}$

b5) pour $\delta > 0, TRI_\delta > TRI_0 = C/100$

pour $\delta < 0, TRI_\delta < TRI_0 = C/100$

III.c. Questions c)

c1) pourl'obligation $Ob_\delta(n)$,le coupon i vaut $C+(n+1-i)\times\delta$

on peut écrire $C + (n+1-i) \times \delta = C \times (1 + (n+1-i) \times \gamma) \approx C \times (1+\gamma)^{n+1-i}$

c2) la valeur actuelle des flux de $ObGeo_\delta(n)$ vaut 100 et est donnée par

$$100 \quad = \quad \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{C(1+\gamma)^{n+1-i}}{(1+TRIGeo_\delta)^i} + \frac{100}{(1+TRIGeo_\delta)^{2n+1}}$$

c3) pour identifier directement une relation entre $TRIGeo_\delta$ et C, γ, n, il faudrait se ramener à une obligation au pair

$$100 \quad = \quad \sum_{i=1}^{2n+1} \frac{C(1+\gamma)^{n+1}}{(1+TRIGeo_\delta)^i (1+\gamma)^i} + \frac{100 \times (1+\gamma)^n}{(1+TRIGeo_\delta)^{2n+1}(1+\gamma)^n}$$

Il faudrait donc que le prix de l'obligation soit égal à $100 \times (1+\gamma)^n$

Ici pas de relation d'identification claire – pas possible de trouver facilement une valeur approchée

IV. Exercice IV Enoncé A - (10 questions)

IV.a. Questions a)

On suppose que le prix de l'obligation V à l'émission (coupon couru =0) est 105 ME

a1)

		TRI_R
		1,51%
1 an	2	1,97
2 ans	2	1,94
3 ans	2	1,91
4 ans	2	1,88
5 ans	2	1,86
6 ans	102	93,24
		102,80

a2)

Maturité	Taux swap	ZC	ObN	
1 an	2,00%	98,04%	3	2,94
2 ans	2,00%	96,12%	3	2,88
3 ans	2,25%	93,53%	3	2,81
4 ans	2,25%	91,47%	3	2,74
5 ans	2,60%	87,86%	3	2,64
6 ans	2,90%	84,02%	103	86,54
	Somme ZC	551,03%		100,55
			Px sans risque	

$$\delta = \frac{Px_{sans\ risque} - Px_{risqué}}{100 \times \sum_{i=1}^{6} ZC(i)} = 0{,}45\%$$

$$Px_{risqué} = Px_{sans\ risque} - 0{,}45 \times 5.51 = \ 98.07$$

TRI_N
3,36%
2,90
2,81
2,72
2,63
2,54
84,47
Somme
98,07

a3) $i = TRI_N - TRI_R = 1.85\%$

IV.b. Questions b)

b1) le prix de l'obligation peut être calculé comme la valeur actuelle des flux inflatés actualisée au taux nominal (cf TD novembre)

$$P\big(OB_I(2)\big) = \sum_{k=1}^{2} \frac{2}{(1+TRI_N)^k} + \sum_{k=3}^{6} \frac{2 \times (1+i)^{k-2}}{(1+TRI_N)^k} + \frac{100 \times (1+i)^4}{(1+TRI_N)^6}$$

b2)

Inflation anticipée		TRI_N
1,85%		3,36%
1 an	2,00	1,93
2 ans	2,00	1,87
3 ans	2,04	1,84
4 ans	2,07	1,82
5 ans	2,11	1,79
6 ans	109,77	90,02
		99,28

IV.c. Questions c)

c1) l'émetteur paie des coupons et un notionnel indexé sur l'inflation – il va exercer l'option s'il anticipe une inflation négative sur les 3 ans à venir, i.e. une déflation

c2) Emission B :indexée inflation, avec floor sur les coupons –protège investisseur – fait augmenter le prix par rapport - plus chère que $OB_I(2)$

Emission A : indexation inflation possible à partir de 2 ans – équivalent à posséder $OB_I(2)$ assortie d'une option d'annuler cette indexation inflation - moins chère que $OB_I(2)$

Emission C : indexation inflation possible à partir de 2 ans avec floor sur les coupons– possibilité donnée à l'émetteur- moins chère que $OB_I(2)$ – mais en cas d'exercice, C moins favorable que A dans la mesure où le gain potentiel est limité

Donc en terme de prix $P_B > P_{Ob_I}(2) > P_C > P_A$